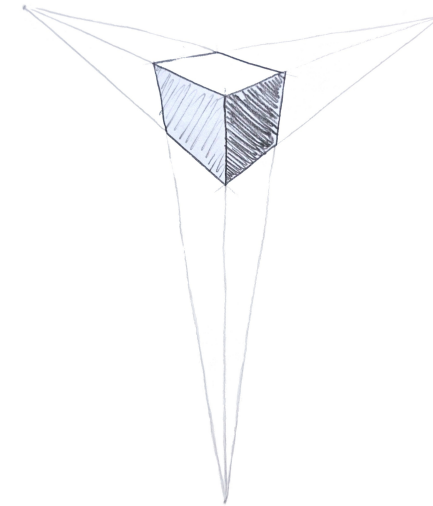


Points de fuite et lignes de fuite

Vincent Nozick



Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

1 / 61

Rappels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{P}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

catésien

homogène

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \stackrel{\text{si } w \neq 0}{\doteq} \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix}$$

homogène

homogène

catésien

Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

3 / 61

Rappels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{P}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \stackrel{\text{si } w \neq 0}{\doteq} \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix}$$

Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

4 / 61

Points et droites de ℙ²

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \qquad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

point droite

Un point $\mathbf{x} \in \mathbf{l}$:

$$\begin{array}{l} \text{dans } \mathbb{R}^2 : \quad ax + by + c = 0 \\ \text{dans } \mathbb{P}^2 : \quad ax + by + cw = 0 \end{array} \quad \text{soit} \quad \mathbf{x}^\top . \mathbf{l} = \mathbf{l}^\top . \mathbf{x} = 0$$

Rappels de ℝ² et ℙ²

Droite l passant par 2 points :

$$\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, w_1)^\top \qquad \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, w_2)^\top$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$$

où $\times$ est le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Démonstration :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_1 \stackrel{?}{\in} \mathbf{l} : \quad \mathbf{x}_1^\top \mathbf{l} = \mathbf{x}_1^\top (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) = 0 \\ \mathbf{x}_2 \stackrel{?}{\in} \mathbf{l} : \quad \mathbf{x}_2^\top \mathbf{l} = \mathbf{x}_2^\top (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) = 0 \end{array} \right\} \mathbf{x}_1 \text{ et } \mathbf{x}_2 \in \mathbf{l}$$

$\Rightarrow \mathbf{l}$ passe par $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$

Rappels de ℝ² et ℙ²

Intersection x de 2 droites :

$$\mathbf{l}_1 = (a_1, b_1, c_1)^\top \qquad \mathbf{l}_2 = (a_2, b_2, c_2)^\top$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$$

où $\times$ est le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Démonstration :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \stackrel{?}{\in} \mathbf{l}_1 : \quad \mathbf{l}_1^\top \mathbf{x} = \mathbf{l}_1^\top (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) = 0 \\ \mathbf{x} \stackrel{?}{\in} \mathbf{l}_2 : \quad \mathbf{l}_2^\top \mathbf{x} = \mathbf{l}_2^\top (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) = 0 \end{array} \right\} \mathbf{x} \in \mathbf{l}_1 \text{ et } \mathbf{l}_2$$

$\Rightarrow \mathbf{x}$ intersection de $\mathbf{l}_1$ et $\mathbf{l}_2$

Points à l'infini

Intersection de 2 droites parallèles :

$$\mathbf{l}_1 = (a, b, c_1)^\top \qquad \mathbf{l}_2 = (a, b, c_2)^\top$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Points à l'infini

Intersection de 2 droites parallèles :

$$\mathbf{l}_1 = (a, b, c_1)^\top \quad \mathbf{l}_2 = (a, b, c_2)^\top$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{point à l'infini}$$

Propriétés :

- 2 droites parallèles s'intersectent à l'infini.
- le vecteur $(b, -a)^\top$ indique la direction du point à l'infini.

Droite à l'infini

Droite passant par 2 points à l'infini :

$$\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, 0)^\top \quad \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, 0)^\top$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{l}_\infty$$

Droite à l'infini

$$\mathbf{l}_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Doite à l'infini :

L'ensemble des points à l'infini reposent sur la droite à l'infini.

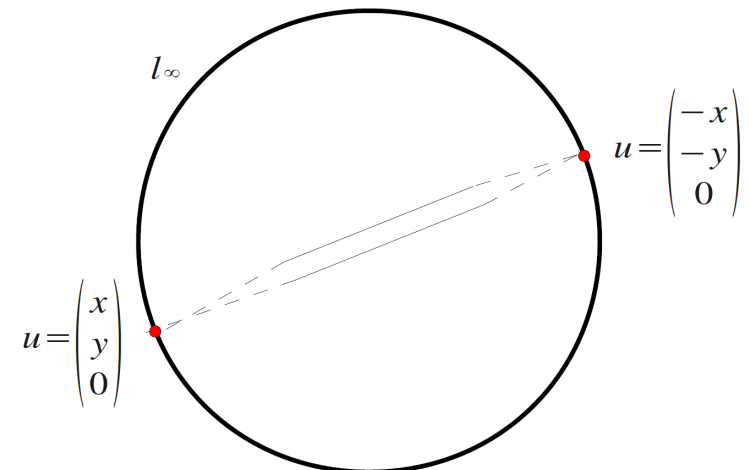
$$\mathbf{x} = (x, y, 0)^\top \quad \text{et} \quad \mathbf{l}_\infty = (0, 0, 1)^\top$$

$$\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{l}_\infty = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{l}_\infty$$

Intersection :

L'intersection d'une droite $\mathbf{l} = (a, b, c)^\top$ avec $\mathbf{l}_\infty$ donne le point à l'infini $\mathbf{x} = (b, a, 0)^\top$.

Points et droites à l'infini dans $\mathbb{P}^2$

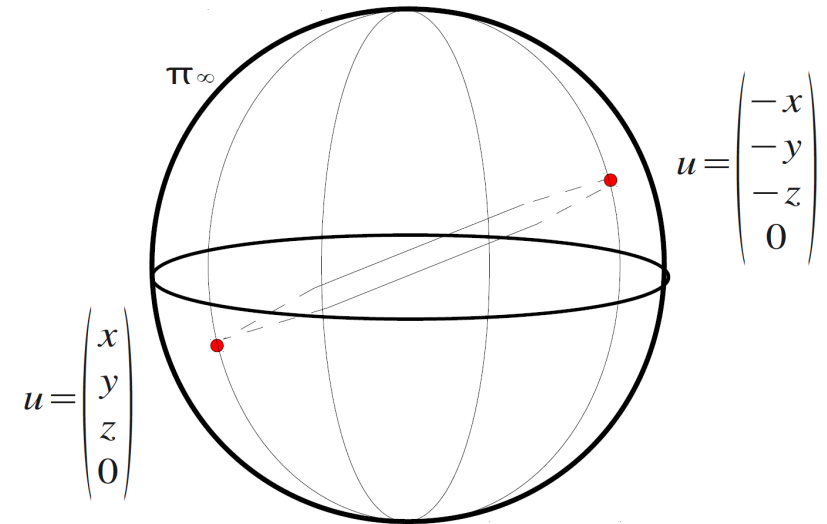


Points à l'infini dans $\mathbb{P}^3$

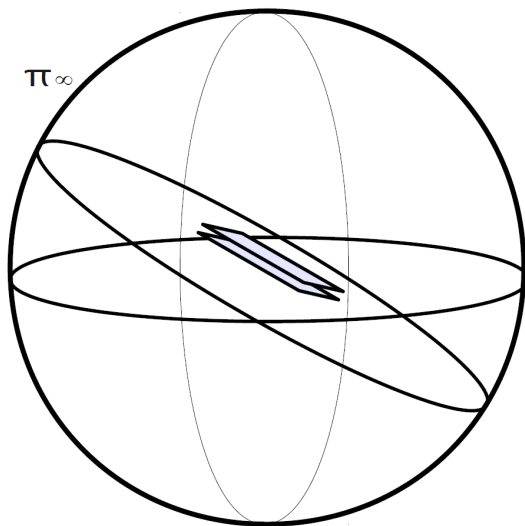
Dans $\mathbb{P}^3$:

- de même qu'il y a l_∞ dans $\mathbb{P}^2$, il y a le plan à l'infini π_∞ dans $\mathbb{P}^3$.
- 2 plans parallèles π_1 et π_2 intersectent π_∞ sur une même droite : une droite à l'infini.
- 2 droites parallèles l_1 et l_2 intersectent π_∞ sur un même point : un point à l'infini.

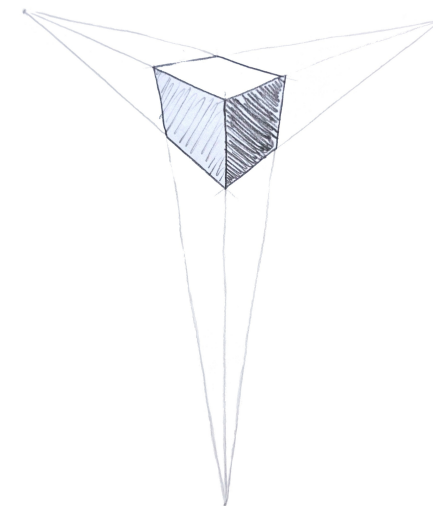
Points et droites à l'infini dans $\mathbb{P}^3$



Points et droites à l'infini dans $\mathbb{P}^3$



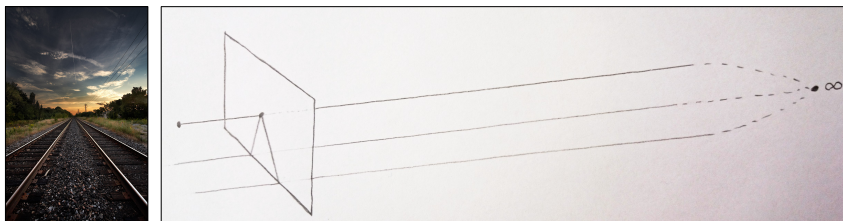
Point de fuite



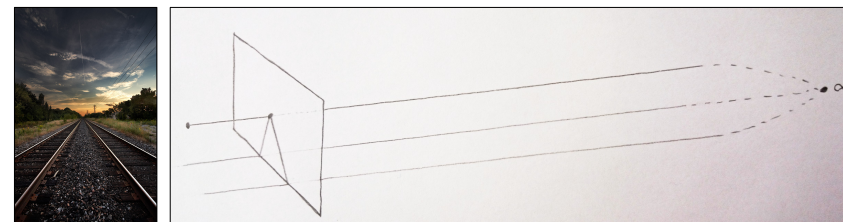
Point de fuite

Point de fuite :

Un point de fuite associé à une droite l (de l'espace 3d) correspond au projeté sur l'image du point à l'infini issu de l'intersection de l avec π_∞ .



Point de fuite



Du point de vue de la caméra :

Le point de fuite v d'une droite l (de l'espace 3d) est l'intersection du plan image de la caméra avec un rayon parallèle à l passant par le centre de projection de la caméra.

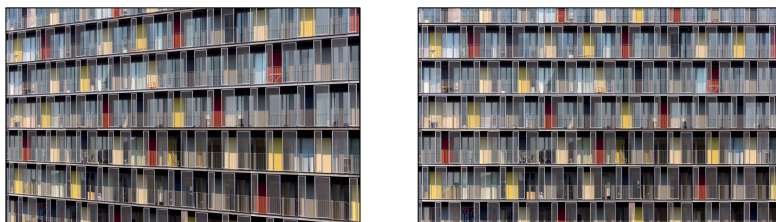
Remarque :

Un point de fuite dépend uniquement de l'orientation de la droite à laquelle il est associé, pas de sa position.

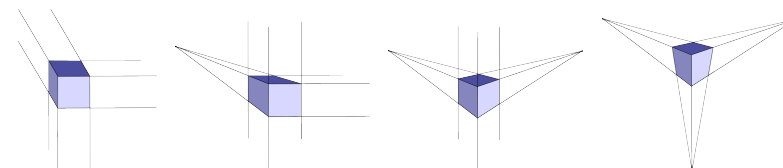
Point de fuite à l'infini

Point de fuite à l'infini :

Des droites parallèles au plan image apparaissent parallèles sur l'image. Leur intersection (leur point de fuite) est à l'infini sur le plan image.

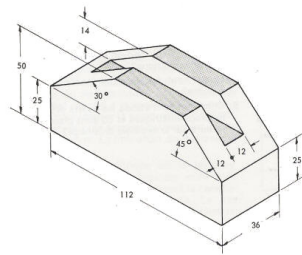
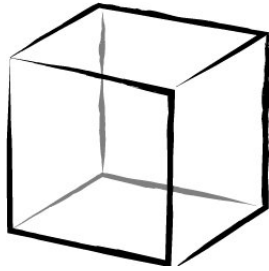


Les perspectives dans le dessin



- perspective orthographique
- perspective frontale (à 1 point)
- perspective horizontale (à 2 points)
- perspective tridimensionnelle (à 3 points)

Perspective orthographique



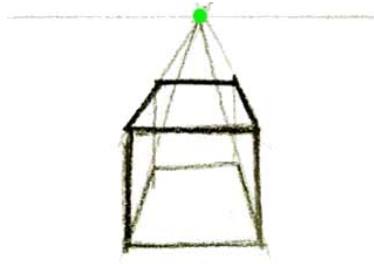
3 points de fuite à l'infini / 0 point de fuite fini.

Perspective orthographique



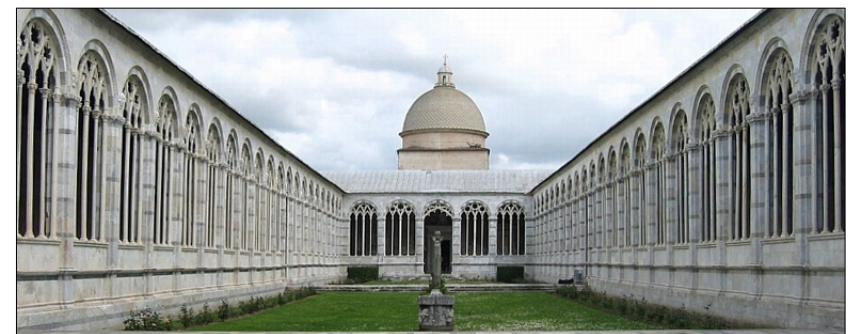
3 points de fuite à l'infini / 0 point de fuite fini.

Perspective frontale



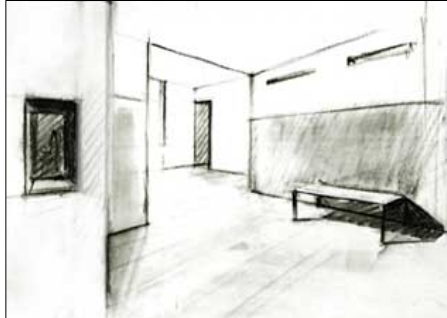
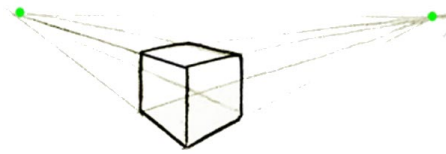
2 points de fuite à l'infini / 1 point de fuite fini.

Perspective frontale



2 points de fuite à l'infini / 1 point de fuite fini.

Perspective horizontale



1 points de fuite à l'infini / 2 point de fuite fini.

Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

24 / 61

Perspective horizontale



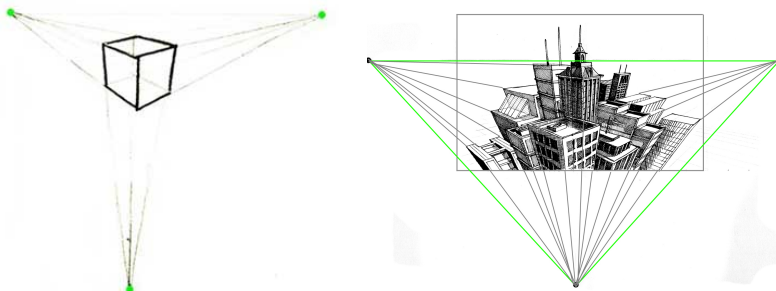
1 points de fuite à l'infini / 2 point de fuite fini.

Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

25 / 61

Perspective tridimensionnelle



0 points de fuite à l'infini / 3 point de fuite fini.

Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

26 / 61

Perspective tridimensionnelle



0 points de fuite à l'infini / 3 point de fuite fini.

Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

27 / 61

Et là, c'est quoi?

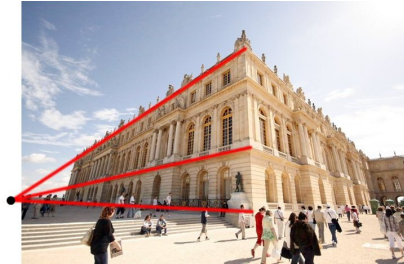


Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

28 / 61

Calcul d'un point de fuite



Intersection des droites parallèles dans la scène :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ w_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

29 / 61

Calcul d'un point de fuite



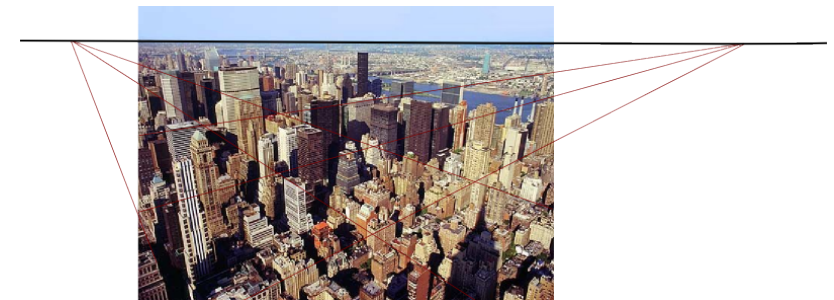
En pratique : on travaille plutôt sur les angles.

Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

30 / 61

Ligne de fuite



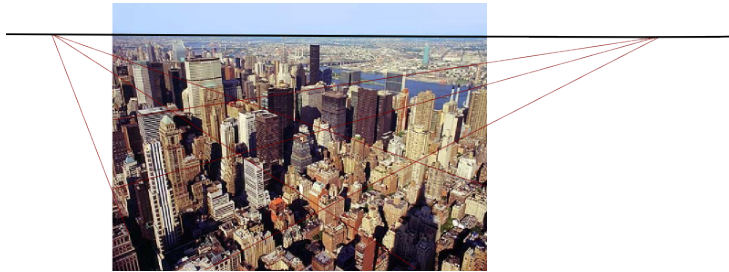
Ligne de fuite = droite qui passe par 2 points de fuites.

Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

31 / 61

Ligne de fuite



Ligne de fuite :

Une ligne de fuite associée à un plan π (de l'espace 3d) correspond au projeté sur l'image de la droite à l'infini issu de l'intersection de π avec π_∞ .

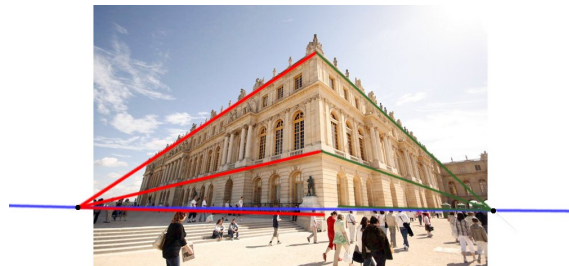
Ligne de fuite



Propriétés :

- des plans parallèles partagent la même ligne de fuite.
- une ligne de fuite correspond à l'ensemble des points fuite issus de l'ensemble des droites parallèles appartenant au plan.

Calcul d'une ligne de fuite



Construction :

- on cherche 2 ensembles de droites parallèles.
- on calcule leur points de fuite respectifs.
- la ligne de fuite est la droite passant par ces 2 points de fuite.

Détection automatique



J-linkage : Detecter automatiquement les points de fuites et lignes de fuites dans une scène présentant des droites parallèles.

J-Linkage



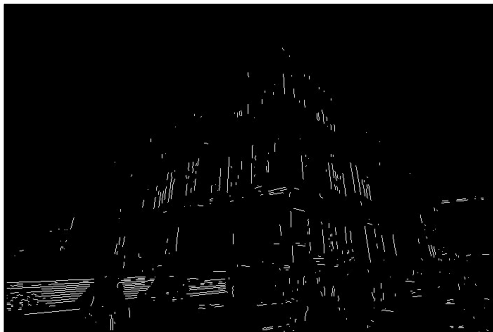
Filtre de Canny

J-Linkage



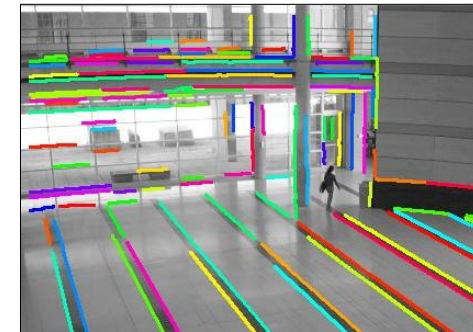
Suppression les coins pour n'avoir que des segments

J-Linkage



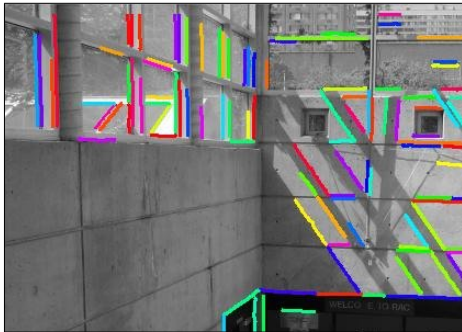
Érosion pour enlever le bruit

J-Linkage



Segments détectés

J-Linkage



Segments détectés

J-Linkage

Algorithm 1: J-Linkage

input: un ensemble $\{s_i\}$ de segments, iterations

```

forall the iterations do
  choisir 2 segments au hasard
  calculer leur point de fuite  $\mathbf{p}$ 
  foreach segments  $s_i$  do
    voir si  $\mathbf{p}$  est un point de fuite pour  $s_i$ 
    mettre le résultat dans un tableau
  end
end
contracter le tableau

```

J-Linkage

On obtient le tableau :



Que l'on contracte :



En fusionnant les colonnes les plus ressemblantes d'après le critère :

$$d(A, B) = \frac{|A \cup B| - |A \cap B|}{|A \cup B|}$$

J-Linkage

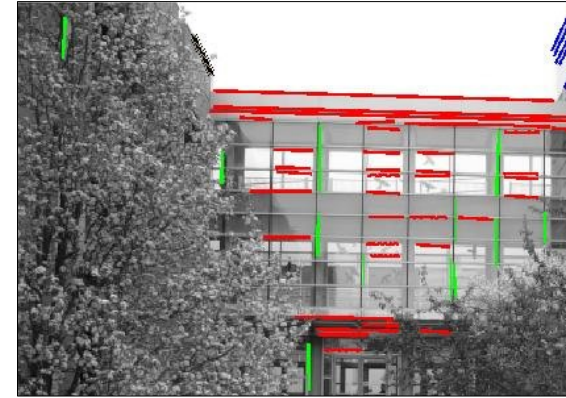


Les segments sont regroupés par points de fuite, il suffit alors de calculer les points de fuite des premières colonnes du tableau.

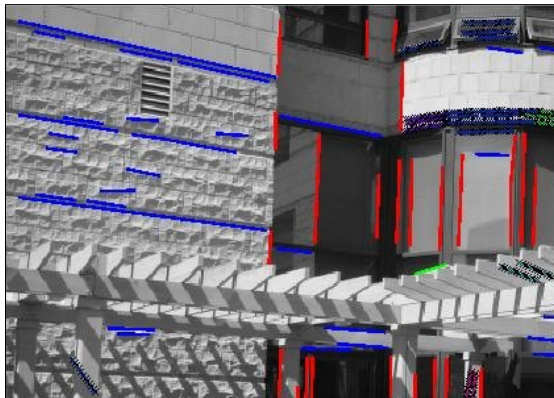
Résultat



Résultat



Résultat



Calibration de caméra

Matrice de projection :

$$P = \underbrace{\begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} r & r & r & t_x \\ r & r & r & t_y \\ r & r & r & t_z \end{bmatrix}}_{[R|t]}$$

paramètres intrinsèques paramètres extrinsèques

avec :

- f : focal (en unité de pixels).
- $(c_x, c_y)^T$: position du point principal sur l'image.

Image de la conique absolue

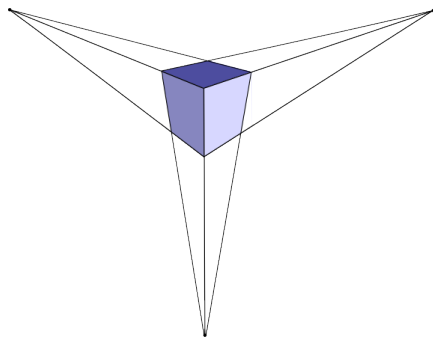
L'image de la conique absolue Ω_∞ :

- notée ω
- déterminée par l'association du plan à l'infini π_∞ et du plan image de la caméra.
- notion "imaginaire" et donc non représentable sur une image.
- très liée aux paramètres de la caméra.

Lien entre ω et la caméra :

$$\omega = (KK^T)^{-1} \quad (\Rightarrow \omega \text{ est symétrique})$$

Propriété



Les points de fuite $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de deux droites perpendiculaires satisfont :

$$\mathbf{u}^T \omega \mathbf{v} = 0$$

Forme matricielle

- la matrice ω peut se noter de la façon suivante :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix}$$

- à partir de la forme de K , on peut déduire que :

$$\omega_{12} = \omega_{21} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_{11} = \omega_{22}$$

- ω symétrique :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & \omega_{13} \\ 0 & \omega_{11} & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33} \end{bmatrix}$$

Image de la conique absolue

Calcul de ω :

- on pose $\mathbf{w} = (\omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{33})^T$
- à partir de trois points de fuites issus de droites orthogonales deux à deux (par exemple : verticale, largeur et profondeur)
- chaque contrainte $\mathbf{u}^T \omega \mathbf{v} = 0$ s'exprime matriciellement par

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_u x_v + y_u y_v & x_u w_v + w_u x_v & y_u w_v + w_u y_v & w_u w_v \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

- on résoud $\mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{0}$ et on en déduit ω .

Calibration de la caméra

Calcul de K :

- à partir de trois points de fuites issus de droites orthogonales deux à deux.
- on calcule ω puis ω^{-1} .
- on trouve K par une décomposition de Cholesky : $\omega^{-1} = KK^T$.



image initiale

Réalité augmentée



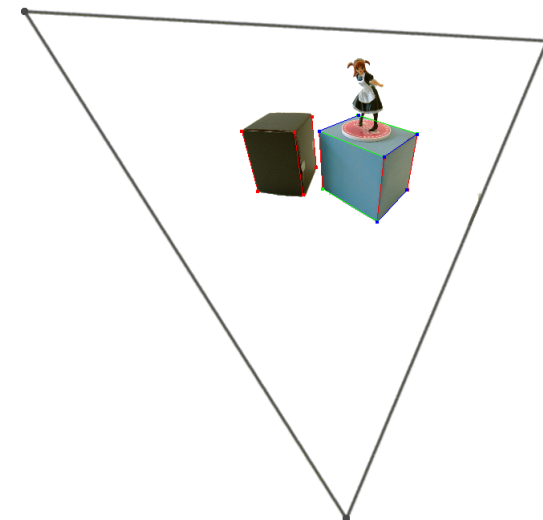
image initiale

Réalité augmentée



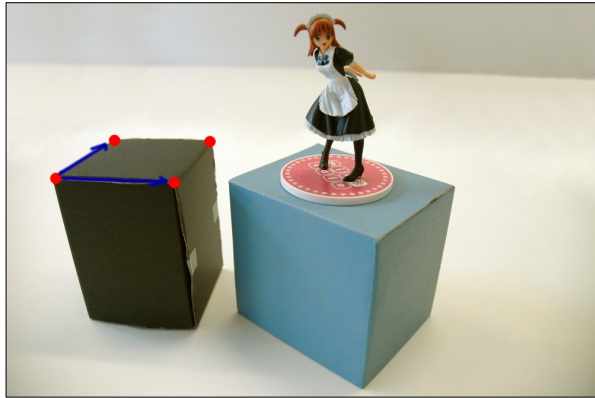
extraction des droites orthogonales

Réalité augmentée



calcul des points de fuite et de K

Réalité augmentée



définition d'un repère (4 points coplanaires)

Réalité augmentée



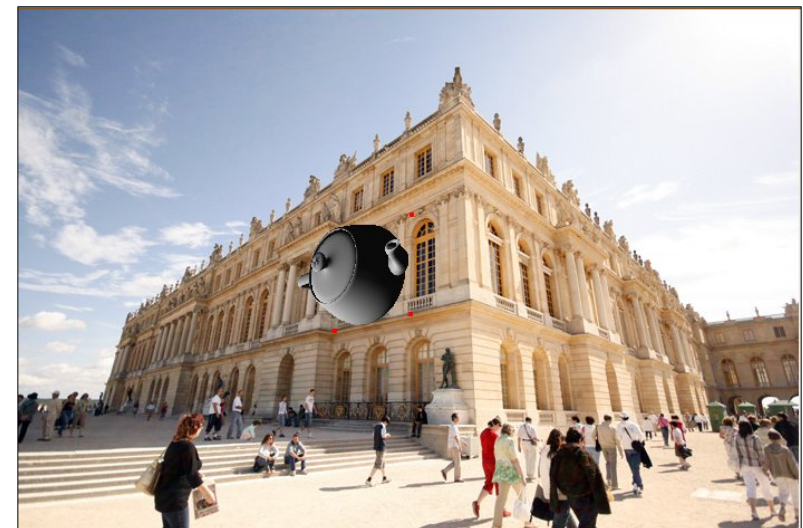
incrustations de synthèse

Réalité augmentée

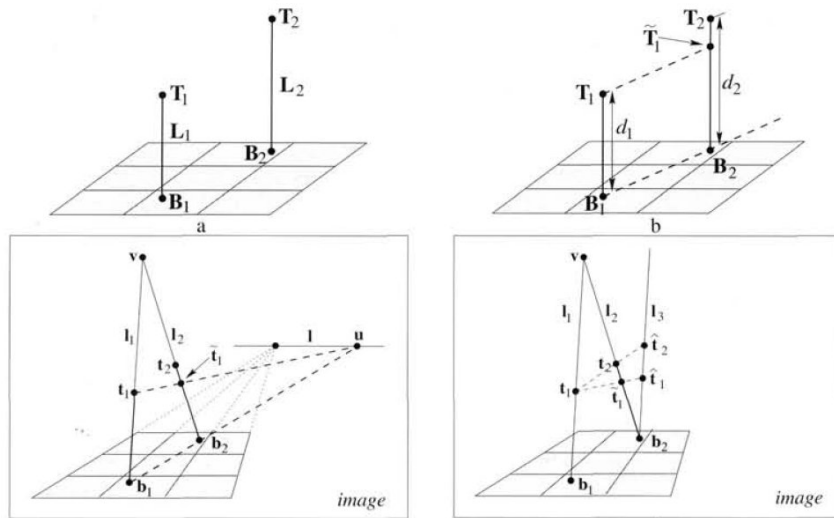


incrustations de synthèse

Réalité augmentée



Rapport des hauteurs



Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

60 / 61

Rapport des hauteurs



Vincent Nozick

Points de fuite et lignes de fuite

61 / 61