

Algèbre de Grassmann-Cayley

mathématiques appliquées

Vincent Nozick



Introduction

Espace vectoriel de \mathbb{R}^n :

Ensemble de vecteurs muni d'opérations sur les vecteurs.

Propriétés : ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$)

- addition de vecteurs : $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$
- multiplication par un scalaire : $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$
- distributive sur l'addition : $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}$

Introduction

Algèbre de Grassmann-Cayley :

- cas particulier des algèbres géométriques (*geometric algebra*)
- englobe les outils de géométrie classique (de \mathbb{R}^n)
- de nouveaux opérateurs
- application dans le jeu vidéo et la vision par ordinateur

Introduction

algèbre = $\underbrace{\text{espace vectoriel}}_{\substack{\text{addition} \\ \text{multiplication scalaire}}}$ et multiplication

Propriétés :

- le produit doit être associatif $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- pas d'obligation concernant la commutativité $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \stackrel{?}{=} \mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- distributivité : α et β scalaires :

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}$$

Introduction

Exemples :

- les nombres réels \mathbb{R} .
- les nombres complexes \mathbb{C} .
- les polynômes.
- les matrices.
- les quaternions.
- ...

Algèbre de Grassmann-Cayley



Hermann Grassmann
 progressive et regressive product (1844).



Arthur Cayley (1821-1895)
 applications des coordonnées homogènes.



David Hestenes (1933 ~)
 remet l'algèbre géométrique au goût du jour.

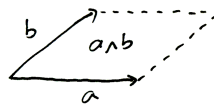
Wedge Product

Introduction :

- outer / wedge product (*en*) \leftrightarrow produit extérieur (*fr*)
- noté $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ (lire \mathbf{a} "wedge" \mathbf{b} , ou bien \mathbf{a} "extérieur" \mathbf{b})

Propriété principale :

- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ exprime la surface (orientée) du parallélogramme formé par \mathbf{a} et \mathbf{b} .



- caractère orienté : $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$

Scalaire

Multiplication scalaire :

soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (scalaires) et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ (un vecteur)

$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha = \beta\alpha$$

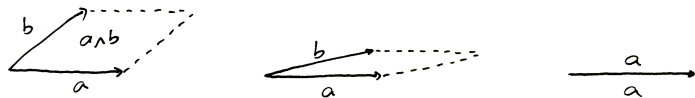
$$\alpha \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \alpha = \alpha\mathbf{a}$$

\rightarrow multiplication standard

Anticommutativité

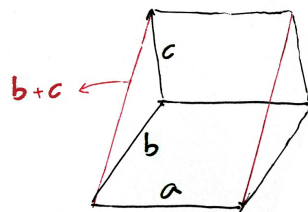
Antisymétrie : $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ (propriété la plus importante)

Propriété : $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$



Distributivité

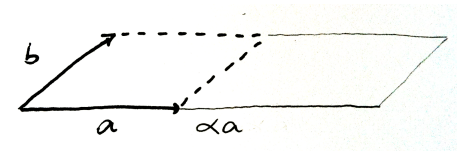
Propriété :



$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$$

Mise à l'échelle

Propriété :



$$(\alpha \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\alpha \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$

Multiplication scalaire : $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha = \beta \alpha$
 $\beta \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \beta = \beta \mathbf{a}$

Antisymétrie : $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ (anticommutativité)
 $\Rightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$

Mise à l'échelle : $\mathbf{a} \wedge (\beta \mathbf{b}) = \beta (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$

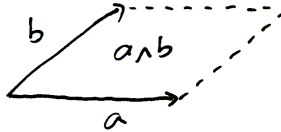
Distributivité : $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$
 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$

Associativité : $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ (algèbre)

Bivecteur

Définition :

Le wedge de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} de \mathbb{R}^n donne un **bivecteur** $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, que l'on peut représenter par une surface orientée :



Bivecteur

Bivecteur en 3D:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_{12} + (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{e}_{13} + (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_{23}$$

Remarques :

- le bivecteur de \mathbb{R}^3 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ possède 3 composantes.
- dans \mathbb{R}^3 , le wedge product correspond au produit vectoriel.
 - ↪ bivecteur souvent confondu avec le vecteur.
 - ↪ le produit vectoriel n'est pas associatif $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
 - ↪ le wedge est associatif et défini dans toutes les dimensions.

Bivecteur en 2D

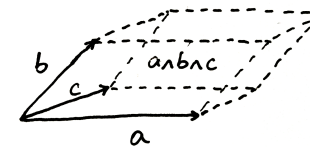
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = b_x \mathbf{e}_1 + b_y \mathbf{e}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2) \wedge (b_x \mathbf{e}_1 + b_y \mathbf{e}_2) \\ &= (a_x b_x)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + (a_x b_y)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &\quad + (a_y b_x)(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) + (a_y b_y)(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= (a_x b_y - a_y b_x)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_{12} \end{aligned}$$

Trivecteur

Définition :

Le wedge de trois vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} de \mathbb{R}^n donne un **trivecteur** $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, que l'on peut représenter par un volume orienté :



Trivecteur

Trivecteur en 2D :

soient trois vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} de \mathbb{R}^2 , décomposés selon les vecteurs de bases ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2) \wedge (b_x \mathbf{e}_1 + b_y \mathbf{e}_2) \wedge (c_x \mathbf{e}_1 + c_y \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (a_x b_y - a_y b_x) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \wedge (c_x \mathbf{e}_1 + c_y \mathbf{e}_2) \\ &= c_x (a_x b_y - a_y b_x) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) \\ &\quad + c_y (a_x b_y - a_y b_x) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

⇒ pas de trivecteurs dans \mathbb{R}^2 .

Trivecteur

Produit mixte : (en 3D seulement)

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \Leftrightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

où \times est le produit vectoriel (de \mathbb{R}^3) et \cdot est le produit scalaire.

Trivecteur

Trivecteur en 3D:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (c_z(a_x b_y - a_y b_x) + c_y(a_x b_z - a_z b_x) + c_x(a_y b_z - a_z b_y)) \mathbf{e}_{123}$$

Remarque :

le trivecteur de \mathbb{R}^3 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ n'a qu'une composante.

k-blade

***k*-blade:** généralisation des scalaires, vecteurs, bivecteurs, trivecteurs, ...

Grade d'une blade: nombre de vecteurs qu'il faut wedger pour obtenir l'entité voulue.

- scalar → 0-blade
- \mathbf{a} → 1-blade
- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ → 2-blade
- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ → 3-blade
- ⋮
- ⋮

Bases

En 4D (utilisé dans \mathbb{P}^3) :

1 scalaire	(1)	(grade 0)
4 vecteurs	(e_1, e_2, e_3, e_4)	(grade 1)
6 bivecteurs	($e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}$)	(grade 2)
4 trivecteurs	($e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}$)	(grade 3)
1 quadvecteur	(e_{1234})	(grade 4)

Les bases duales

Propriété : $e_{\{i\}} \wedge \bar{e}_{\{i\}} = e_{1\dots n}$

En 4D :

$e_1 = -\bar{e}_{234}$	$e_{12} = \bar{e}_{34}$	$e_{123} = -\bar{e}_4$
$e_2 = \bar{e}_{134}$	$e_{13} = -\bar{e}_{24}$	$e_{124} = \bar{e}_3$
$e_3 = -\bar{e}_{124}$	$e_{14} = \bar{e}_{23}$	$e_{134} = -\bar{e}_2$
$e_4 = \bar{e}_{123}$	$e_{23} = \bar{e}_{14}$	$e_{234} = \bar{e}_1$
	$e_{24} = -\bar{e}_{13}$	
	$e_{34} = \bar{e}_{12}$	

Propriétés des bases

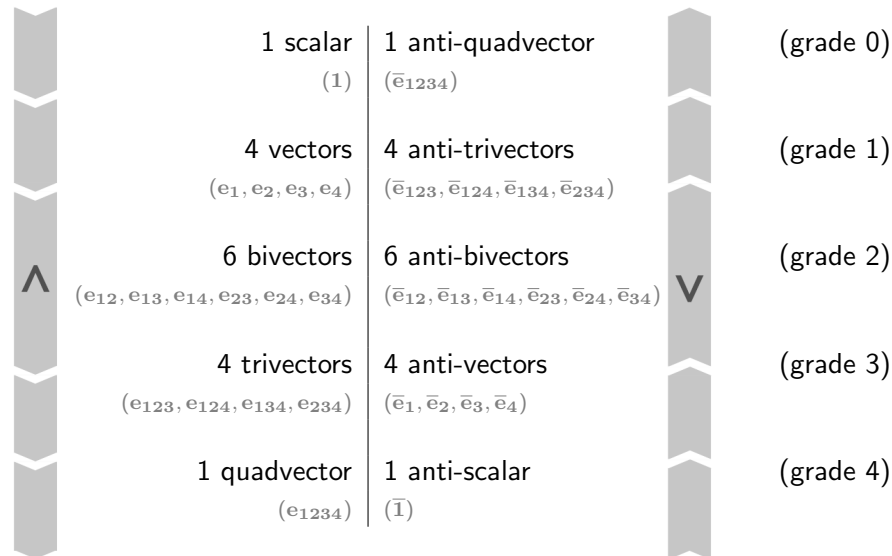
En nD , le nombre de bases d'un k -vecteur est le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On a donc au total 2^n bases.

dimension	nombre de vecteurs indépendants de la base du k -blade
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

Bases et bases duales de \mathbb{P}^3 (4D)



Wedge Product sur les bases duales

Vecteurs et anti-vecteurs :

$$(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \wedge (b_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + b_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + b_3 \bar{\mathbf{e}}_3) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \mathbf{e}_{123}$$

↔ évoque clairement le produit scalaire.

Grade

Wedge product : k -blade \wedge j -blade = $(k + j)$ -blade

Anti-wedge product : k -blade \vee j -blade = $(k + j - n)$ -blade

Anti-wedge Product

Introduction :

- regressive / anti-wedge product (*en*)
- noté $\bar{\mathbf{u}} \vee \bar{\mathbf{v}}$ (lire $\bar{\mathbf{u}}$ "anti-wedge" $\bar{\mathbf{v}}$)
- propriété : $\bar{\mathbf{u}} \vee \bar{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}$

Anti-wedge Product :

Possède les mêmes propriétés que le wedge product mais sur les bases duales.

Notations des bases :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 \vee \bar{\mathbf{e}}_2 \vee \bar{\mathbf{e}}_3 &\rightarrow \bar{\mathbf{e}}_{123} \\ \bar{\mathbf{e}}_1 \vee \bar{\mathbf{e}}_2 \vee \bar{\mathbf{e}}_4 &\rightarrow \bar{\mathbf{e}}_{124} \\ \bar{\mathbf{e}}_1 \vee \bar{\mathbf{e}}_3 \vee \bar{\mathbf{e}}_4 &\rightarrow \bar{\mathbf{e}}_{134} \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \vee \bar{\mathbf{e}}_3 \vee \bar{\mathbf{e}}_4 &\rightarrow \bar{\mathbf{e}}_{234} \end{aligned}$$

Grade

wedge product : k -blade \wedge j -blade = $(k + j)$ -blade

anti-wedge product : k -blade \vee j -blade = $(k + j - n)$ -blade

Exemples dans \mathbb{P}^3 (4D) :

$$\begin{array}{lll} 1\text{-blade} & \wedge & 2\text{-blade} & = & 3\text{-blade} \\ \text{vecteur} & & \text{bivecteur} & & \text{trivecteur} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1\text{-blade} & \vee & 3\text{-blade} & = & 0\text{-blade} \\ \text{anti-trivecteur} & & \text{anti-vecteur} & & \text{anti-quadvecteur} \\ \text{vecteur} & & \text{trivecteur} & & \text{scalaire} \end{array}$$

Anti-wedge

Exemples 4D :

- $\bar{\mathbf{e}}_1 \vee \bar{\mathbf{e}}_2 = \overline{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2} = \bar{\mathbf{e}}_{12} = \mathbf{e}_{34}$
- $\bar{\mathbf{e}}_{23} \vee \bar{\mathbf{e}}_1 = \overline{\mathbf{e}_{23} \wedge \mathbf{e}_1} = \bar{\mathbf{e}}_{123} = \mathbf{e}_4$
- $\bar{\mathbf{e}}_{23} \vee \bar{\mathbf{e}}_{13} = \overline{\mathbf{e}_{23} \wedge \mathbf{e}_{13}} = 0$
- $\bar{\mathbf{e}}_1 \vee \bar{\mathbf{e}}_{234} = \overline{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_{234}} = \bar{\mathbf{e}}_{1234} = \mathbf{1}$

Droites

Droite dans \mathbb{P}^2 :

$$\mathbf{l} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = l_1 \mathbf{e}_{12} + l_2 \mathbf{e}_{13} + l_3 \mathbf{e}_{23}$$

$$\mathbf{x} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3$$

Le produit $\mathbf{l} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ représente la droite passant par \mathbf{a} et \mathbf{b} : en effet, pour un point $\mathbf{x} \in \mathbf{l}$, on a $\mathbf{l} \wedge \mathbf{x} = 0$, soit :

$$(wl_1 - yl_2 + xl_3) \mathbf{e}_{123} = 0$$

qui est bien l'équation d'une droite en 2D (forme Hessienne).

Modèle Homogène en 2D

Représentation homogène:

coordonnées
cartésiennes
 $\hookrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

coordonnées
homogènes
 $\hookrightarrow \mathbb{P}^2$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$$

avec :

- $w \neq 0$ pour un point fini.
- $w = 0$ pour un point à l'infini.

Droites

$$\mathbf{l} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Vérifications :

- $\mathbf{l} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathbf{l}$
- $\mathbf{l} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} \in \mathbf{l}$
- soit $\mathbf{x} \in \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})^{(*)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \wedge \mathbf{x} &= \mathbf{l} \wedge (\mathbf{a} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \\ &= \mathbf{l} \wedge \mathbf{a} + \alpha \mathbf{l} \wedge \mathbf{b} - \alpha \mathbf{l} \wedge \mathbf{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(*) pour \mathbf{a} et \mathbf{b} ayant la même coord. homogène.

Droites

Dégénérescences :

$$l = a \wedge b$$

- si les points a et/ou b sont à l'infini : ça fonctionne encore.
- si les points a et b sont confondus : $l = a \wedge a = (0, 0, 0)^T$
 \leftrightarrow droite dégénérée de \mathbb{P}^2

Intersections

Dégénérescences :

$$x = l_a \vee l_b$$

- si les droites l_a et l_b sont parallèles : x est un point à l'infini
 $\leftrightarrow x = (x, y, 0)^T$
- si les droites l_a et l_b sont confondus : $x = l_a \vee l_a = (0, 0, 0)^T$
 \leftrightarrow point dégénéré de \mathbb{P}^2

Intersections

$$x = l_a \vee l_b = x_1 \bar{e}_{12} + x_2 \bar{e}_{13} + x_3 \bar{e}_{23} = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + x'_3 e_3$$

Intersection dans \mathbb{P}^2 :

Le produit $x = l_a \vee l_b$ représente l'intersection des droites l_a et l_b :

- en effet, pour une droite l passant par x , on a $l \vee x = 0$, soit

$$(u_x l_1 - u_y l_2 + u_w l_3) \bar{e}_{123} = 0$$

qui est bien l'équation d'une droite en 2D (forme Hessienne).

- Par ailleurs, on a bien :
 - $x \vee l_a = l_a \vee l_b \vee l_a = 0 \Rightarrow x \in l_a$
 - $x \vee l_b = l_a \vee l_b \vee l_b = 0 \Rightarrow x \in l_b$

Bilan \mathbb{P}^2

Objets :

- point \wedge point = droite
- droite \vee droite = point intersection

Propriétés :

- point \wedge droite = 0 \rightarrow point \in droite
- droite \wedge point = 0 \rightarrow point \in droite
- point \vee droite = 0 \rightarrow point \in droite
- droite \vee point = 0 \rightarrow point \in droite

Remarque :

$x \in l$ peut s'écrire des 2 façons : $x \wedge l = 0 e_{123}$ et $x \vee l = 0 \bar{e}_{123}$

Distance point/droite

$$\mathbf{l} = l_1 \mathbf{e}_{12} + l_2 \mathbf{e}_{13} + l_3 \mathbf{e}_{23} \quad \mathbf{x} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{l} \wedge \mathbf{x} = w l_1 - y l_2 + x l_3 = 0$$

Distance point / droite : $d_{\perp} = \mathbf{l} \wedge \mathbf{x}$

Sous 2 conditions :

- forme Hessienne normalisée : $\|(l_2, l_3)^{\top}\|_2 = 1$
- coordonnée homogène à 1 : $w = 1$

Modèle Homogène en 2D

Formules explicites :

$$\text{Points} : \mathbf{x} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}' = x' \mathbf{e}_1 + y' \mathbf{e}_2 + w' \mathbf{e}_3$$

$$\text{Line} : \mathbf{l} = l_1 \mathbf{e}_{12} + l_2 \mathbf{e}_{13} + l_3 \mathbf{e}_{23}$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}' = (xy' - x'y) \mathbf{e}_{12} + (xz' - x'z) \mathbf{e}_{13} + (yw' - w'y) \mathbf{e}_{23}$$

$$\mathbf{l} \wedge \mathbf{x} = (w l_1 - y l_2 + x l_3) \mathbf{e}_{123}$$

Modèle Homogène en 3D

Représentation homogène :

coordonnées
cartésiennes
 $\hookrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

coordonnées
homogènes
 $\hookrightarrow \mathbb{P}^3$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

avec :

- $w \neq 0$ pour un point fini.
- $w = 0$ pour un point à l'infini.

Droites

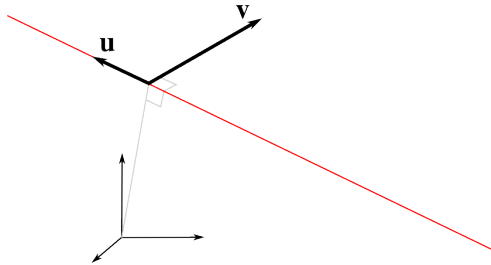
Droites de \mathbb{P}^3 :

$$\mathbf{l} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = l_1 \mathbf{e}_{12} + l_2 \mathbf{e}_{13} + l_3 \mathbf{e}_{14} + l_4 \mathbf{e}_{23} + l_5 \mathbf{e}_{24} + l_6 \mathbf{e}_{34}$$

Droites de Plücker :

$$L = \{\mathbf{u} : \mathbf{v}\} = \{(l_3, l_5, l_6)^{\top} : (-l_4, l_2, -l_1)^{\top}\}$$

Droites de Plücker



Définition :

- $\mathbf{L} = \{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$ avec \mathbf{u} et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
- \mathbf{u} : vecteur support de la droite.
- \mathbf{v} : moment de la droite.
- $\{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$ et $\alpha\{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$ ($\alpha > 0$) représentent la même droite.

Droites de Plücker

Construction :

- $\mathbf{L} = \{\mathbf{p} - \mathbf{q} : \mathbf{p} \times \mathbf{q}\}$: droite passant par les points \mathbf{p} et $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$.
- $\mathbf{L} = \{q_w \mathbf{p} - p_w \mathbf{q} : \mathbf{p}_{\mathbb{R}^3} \times \mathbf{q}_{\mathbb{R}^3}\}$: droite passant par \mathbf{p} et $\mathbf{q} \in \mathbb{P}^3$.
- $\mathbf{L} = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \times \mathbf{p}\}$: droite de vecteur support \mathbf{u} passant par \mathbf{p} .

Propriétés :

- $\mathbf{x} = (\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^\top$: point de la droite le plus proche de l'origine.
- $d = \frac{\|(\mathbf{x} \times \mathbf{u} - \mathbf{v})^\top\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}$: distance entre \mathbf{L} et le point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Transformations des droites de Plücker

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$$

Transformations :

- translation \mathbf{t} : $\mathbf{L}' = \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{v} + \mathbf{t} \times \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \right\}$
- rotation \mathbf{R} autour de l'origine : $\mathbf{L}' = \{\mathbf{R}\mathbf{u} : \mathbf{R}\mathbf{v}\}$
- scale de facteur s : $\mathbf{L}' = \{\mathbf{u} : s\mathbf{v}\}$

Droites et points

On combine :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{l} &= (xl_4 - yl_2 + zl_1)\mathbf{e}_{123} \\ &+ (xl_5 - yl_3 + wl_1)\mathbf{e}_{124} \\ &+ (xl_6 - zl_3 + wl_2)\mathbf{e}_{134} \\ &+ (yl_6 - zl_5 + wl_4)\mathbf{e}_{234} \end{aligned} \quad \text{et} \quad d = \frac{\|(\mathbf{x} \times \mathbf{u} - \mathbf{v})^\top\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}$$

Propriété :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathbf{l} &\Leftrightarrow d = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{l} \wedge \mathbf{x} = \underbrace{0 \mathbf{e}_{123}}_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0} + \underbrace{0 \mathbf{e}_{124} + 0 \mathbf{e}_{134} + 0 \mathbf{e}_{234}}_{\mathbf{x} \times \mathbf{u} - \mathbf{v} = 0} = 0 \end{aligned}$$

Droites et points

Plus précisément :

$$\mathbf{l} \wedge \mathbf{x} = \underbrace{0 \mathbf{e}_{123}}_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0} + \underbrace{0 \mathbf{e}_{124} + 0 \mathbf{e}_{134} + 0 \mathbf{e}_{234}}_{\mathbf{x} \times \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow d = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{x} \text{ est inscrit dans le plan défini par la droite } \mathbf{l} \\ &\text{et l'origine, et ce plan a pour normale } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Droites

Dégénérescences :

$$\mathbf{l} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

- si les points \mathbf{a} et/ou \mathbf{b} sont à l'infini : ça fonctionne encore.
- si les points \mathbf{a} et \mathbf{b} sont confondus : $\mathbf{l} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = (0, 0, 0, 0)^\top$
 \Leftrightarrow droite dégénérée de \mathbb{P}^3

Plans

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= p_1 \mathbf{e}_{123} + p_2 \mathbf{e}_{124} + p_3 \mathbf{e}_{134} + p_4 \mathbf{e}_{234} \\ \mathbf{x} &= x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 + w \mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

Plan dans \mathbb{P}^3 :

Le produit $\mathbf{P} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ représente le plan passant par \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} :

- en effet, pour un point $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$, on a $\mathbf{P} \wedge \mathbf{x} = 0$, soit

$$(xp_4 - yp_3 + zp_2 + -wp_1) \mathbf{e}_{1234} = 0$$

qui est bien la forme Hessienne d'un plan de \mathbb{P}^3 .

- par ailleurs, on a bien :
 - $\mathbf{P} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathbf{P}$
 - $\mathbf{P} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} \in \mathbf{P}$
 - $\mathbf{P} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} \in \mathbf{P}$

Bilan \mathbb{P}^3

Objets :

point \wedge point	\rightarrow	droite
point \wedge point \wedge point	\rightarrow	plan
point \wedge droite	\rightarrow	plan
plan \vee droite	\rightarrow	point (intersection)
plan \vee plan \vee plan	\rightarrow	point (intersection)
plan \vee plan	\rightarrow	droite (intersection)

Propriétés :

point \wedge plan	\rightarrow	antiscaire (distance signée point-plan)
point \wedge plan = 0	\rightarrow	point \in plan
droite \wedge droite	\rightarrow	antiscaire (crossing value)
droite \wedge point = 0	\rightarrow	point \in droite
droite \vee droite	\rightarrow	scalaire (crossing value)
point \vee plan	\rightarrow	scalaire (distance signée point-plan)

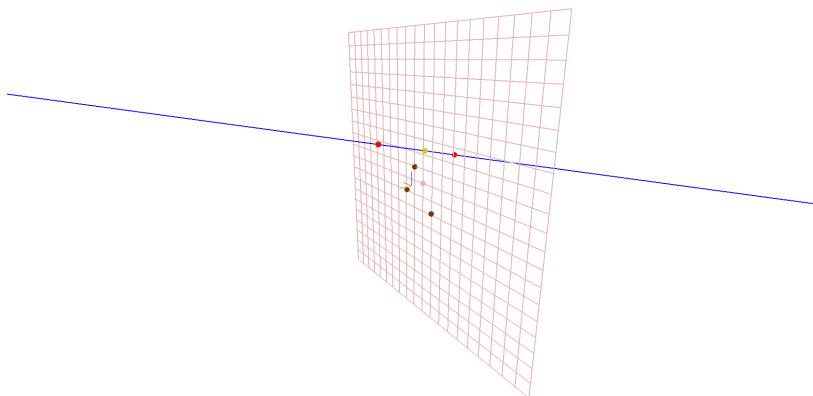
Bilan \mathbb{P}^3

Points à l'infini :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_x, u_y, u_z, 0)^\top & \mathbf{a} &= (a_x, a_y, a_z, 1)^\top \\ \mathbf{v} &= (v_x, v_y, v_z, 0)^\top & \mathbf{b} &= (b_x, b_y, b_z, 1)^\top \\ \mathbf{n} &= (n_x, n_y, n_z, 0)^\top \end{aligned}$$

- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{u}$ → droite de direction \mathbf{u} passant par \mathbf{a}
- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ → plan défini par \mathbf{u} et \mathbf{v} passant par \mathbf{a}
- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{n}$ → plan de normale \mathbf{n} passant par \mathbf{a} et \mathbf{b}

Exemple



$$\mathbf{x} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$

Formules explicites \mathbb{P}^3

$$\begin{aligned} \text{Points} : \quad \mathbf{x} &= x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + w\mathbf{e}_4 \\ \mathbf{x}' &= x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3 + w'\mathbf{e}_4 \\ \text{Line} : \quad \mathbf{l} &= l_1\mathbf{e}_{12} + l_2\mathbf{e}_{13} + l_3\mathbf{e}_{14} + l_4\mathbf{e}_{23} + l_5\mathbf{e}_{24} + l_6\mathbf{e}_{34} \\ \text{Planes} : \quad \pi &= \pi_1\mathbf{e}_{123} + \pi_2\mathbf{e}_{124} + \pi_3\mathbf{e}_{134} + \pi_4\mathbf{e}_{234} \\ \pi' &= \pi'_1\mathbf{e}_{123} + \pi'_2\mathbf{e}_{124} + \pi'_3\mathbf{e}_{134} + \pi'_4\mathbf{e}_{234} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{x}' &= (xy' - yx')\mathbf{e}_{12} + (xz' - zx')\mathbf{e}_{13} + (xw' - wx')\mathbf{e}_{14} \\ &\quad + (yz' - zy')\mathbf{e}_{23} + (yw' - wy')\mathbf{e}_{24} + (zw' - wz')\mathbf{e}_{34} \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{l} &= (xl_4 - yl_2 + zl_1)\mathbf{e}_{123} + (xl_5 - yl_3 + wl_1)\mathbf{e}_{124} \\ &\quad + (xl_6 - zl_3 + wl_2)\mathbf{e}_{134} + (yl_6 - zl_5 + wl_4)\mathbf{e}_{234} \\ \mathbf{l} \vee \pi &= (-l_1\pi_3 + l_2\pi_2 - l_3\pi_1)\mathbf{e}_1 + (l_4\pi_2 - l_1\pi_4 - l_5\pi_1)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + (-l_2\pi_4 + l_4\pi_3 - l_6\pi_1)\mathbf{e}_3 + (-l_3\pi_4 + l_5\pi_3 - l_6\pi_2)\mathbf{e}_4 \\ \pi \wedge \mathbf{x} &= (\pi_1w - \pi_2z + \pi_3y - \pi_4x)\mathbf{e}_{1234} \\ \pi \vee \pi' &= (\pi_1\pi'_2 - \pi_2\pi'_1)\mathbf{e}_{12} + (\pi_1\pi'_3 - \pi_3\pi'_1)\mathbf{e}_{13} + (\pi_2\pi'_3 - \pi_3\pi'_2)\mathbf{e}_{14} \\ &\quad + (\pi_1\pi'_4 - \pi_4\pi'_1)\mathbf{e}_{23} + (\pi_2\pi'_4 - \pi_4\pi'_2)\mathbf{e}_{24} + (\pi_3\pi'_4 - \pi_4\pi'_3)\mathbf{e}_{34} \end{aligned}$$

Intersection plan / droite

Old school:

$$\begin{aligned} \text{droite} : \quad \begin{cases} x = u_x + \alpha t \\ y = u_y + \beta t \\ z = u_z + \gamma t \end{cases} & \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \text{plan} : \quad ax + by + cz + d = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{résoudre} : \begin{cases} a(a_x + \alpha t) + b(u_y + \beta t) + c(u_z + \gamma t) + d = 0 \\ x = a_x + \alpha t \\ y = u_y + \beta t \\ z = u_z + \gamma t \end{cases}$$

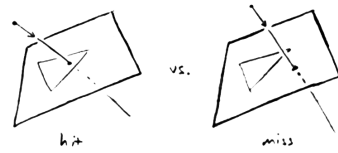
$$\text{New school:} \quad \mathbf{x} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$

Intersection droite / triangle

triangle : défini par \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c}

droite : défini par \mathbf{u} et \mathbf{v}

méthode :



① la droite en question : $\mathbf{l} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

② est-ce que la droite passe par le triangle ?

oui si : $\text{sign}(\mathbf{l} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \text{sign}(\mathbf{l} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \text{sign}(\mathbf{l} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$

③ si la droite passe par le triangle, intersection : $\mathbf{x} = \mathbf{l} \vee \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$