

Intégrales

Vincent Nozick



Intégrales

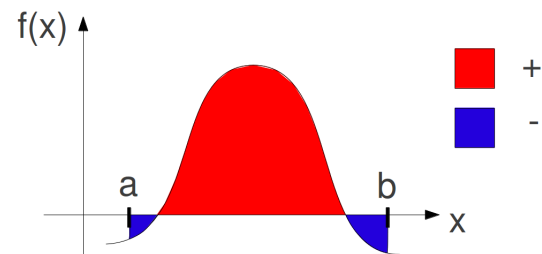
Rappels :

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(B) - F(A)$$

où $F(x)$ est la primitive de $f(x)$ (i.e. $F'(x) = f(x)$)

Intégrales

Rappels :



Intégrales

Propriétés :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

Intégrales

Changement de variable :

soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$

soit $g(x)$ une fonction C1 sur $[u, v]$, dont l'image est sur $[a, b]$

on a

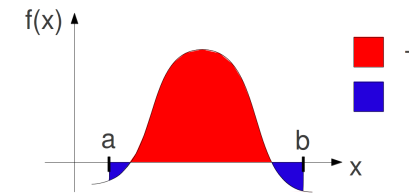
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u=g(a)}^{v=g(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

Intégrales

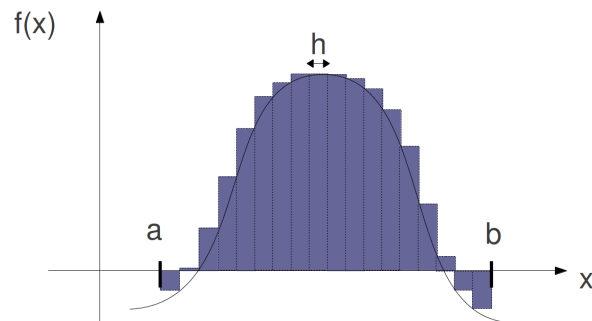
Problématique :

Comment calculer une intégrale numériquement ?

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

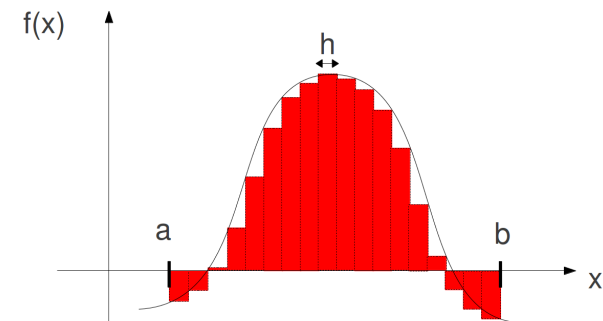


Méthode des rectangles



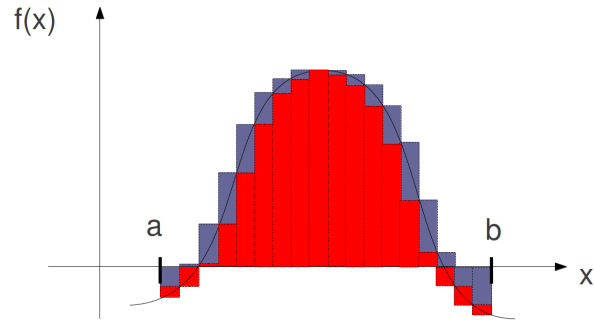
$$I_{max} = h \sum_i \max(f(a + ih), f(a + (i + 1)h))$$

Méthode des rectangles



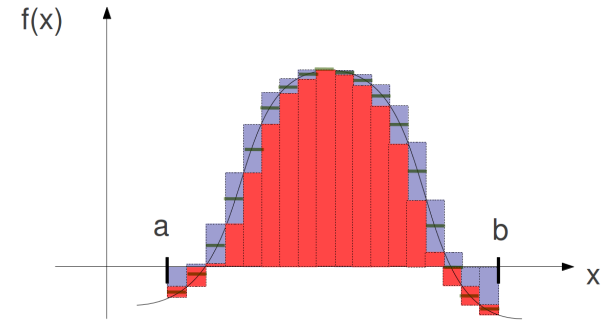
$$I_{min} = h \sum_i \min(f(a + ih), f(a + (i + 1)h))$$

Méthode des rectangles



$$I_{min} \leq \int_a^b f(x)dx \leq I_{max}$$

Méthode des rectangles



$$I \simeq \frac{I_{min} + I_{max}}{2}$$

Méthode des rectangles

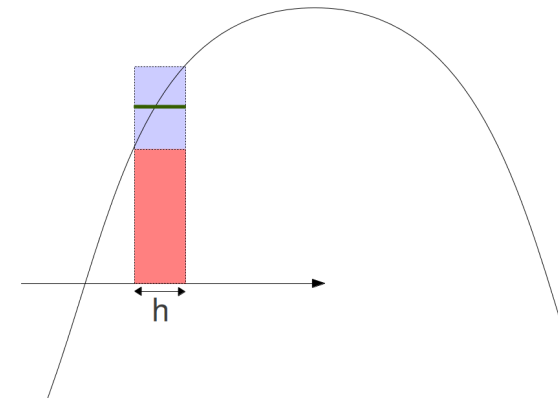
$$I_{max} = h \sum_i \max(f(a + ih), f(a + (i + 1)h))$$

$$I_{min} = h \sum_i \min(f(a + ih), f(a + (i + 1)h))$$

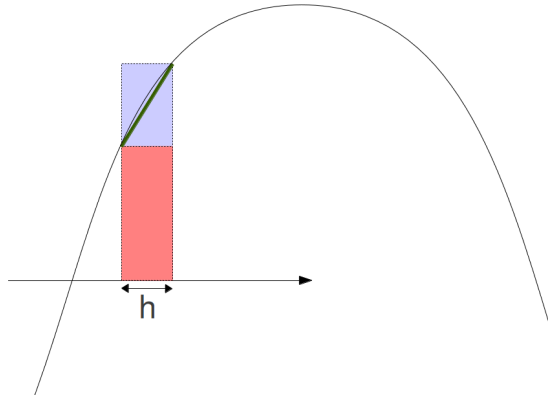
$$I \simeq \frac{I_{min} + I_{max}}{2}$$

- trop long à calculer
- beaucoup de redondances

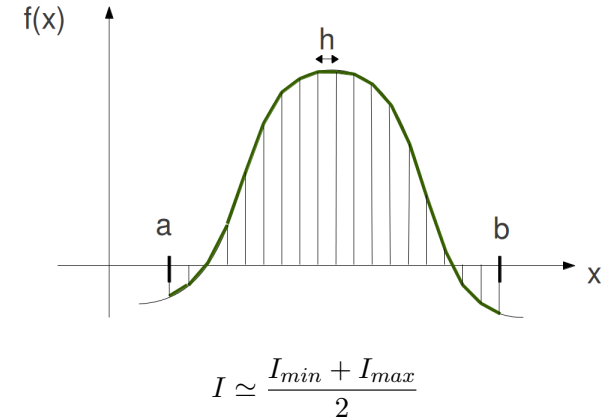
Méthode des Trapèzes



Méthode des Trapèzes



Méthode des Trapèzes



Méthode des Trapèzes

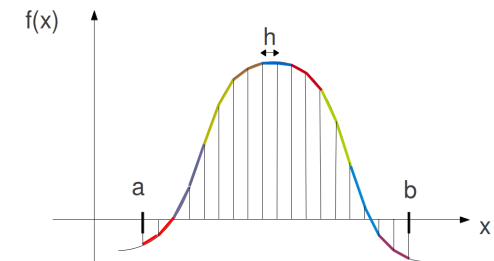
Principe :

$$I = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(a + ih) + f(a + (i + 1)h))$$

⋮

$$I = \frac{h}{2} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} f(a + ih))$$

Simpson



Principe :

- on groupe les intervalles par 2
- on trouve le polynôme de degré 2 sur chaque intervalle
- on calcule les intégrales de ces polynômes

Simpson

Polynôme :

On définit un polynôme de degré 2 passant par les points :
 $(0, f_0), (1, f_1), (2, f_2)$

$$p(x) = f_0 \frac{(x-1)(x-2)}{2} + f_1 x(2-x) + f_2 \frac{x(x-1)}{2}$$

Simpson

Intégration du polynôme :

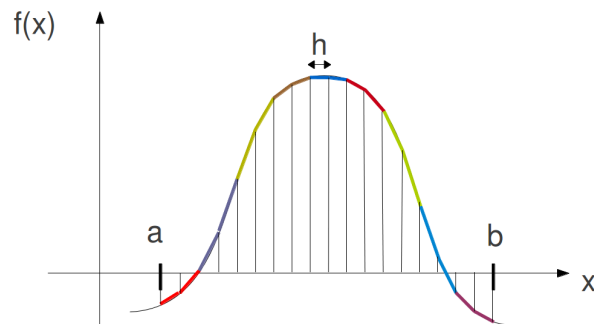
$$p(x) = f_0 \frac{(x-1)(x-2)}{2} + f_1 x(2-x) + f_2 \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\int_0^2 p(x) dx = \dots = \frac{1}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

plus généralement

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx = \frac{1}{3}(f_{x_{i-1}} + 4f_{x_i} + f_{x_{i+1}})$$

Simpson



- on groupe les points 3 par 3
- on intègre chaque morceau
- on somme les intégrales obtenues

Simpson

Finalement :

$$I = \int_{x_0}^{x_2} p_{0,2}(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} p_{2,4}(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} p_{n-2,n}(x) dx$$

$$I = \frac{h}{3} \left(f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + 4f_3 + f_4 + \dots + f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n \right)$$

$$I = \frac{h}{3} \left(f_0 + f_n + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impaire}}}^{n-1} f_i + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ paire}}}^{n-2} f_i \right)$$

Gauss-Legendre

Introduction :

$$f(x)_{[a,b]} \simeq p_n(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)}_{\substack{\text{polynômes de Lagrange} \\ \text{par exemple}}}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\simeq \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x)dx}_{\substack{=A_i \\ \text{ne dépend pas de } f}} \end{aligned}$$

Gauss-Legendre

Changement de variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)dx$$

(voir td ...)

Gauss-Legendre

Principe :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq f(x_0)A_0 + f(x_1)A_1 + \dots + f(x_n)A_n$$

- on veut trouver la solution exacte si f est un polynôme.
- contrainte : polynômes de Legendre définis sur $[-1, 1]$

Gauss-Legendre

Formule à 2 points :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(x_0)A_0 + f(x_1)A_1$$

→ On veut un résultat exact pour les monômes $1, x, x^2$ et x^3

Gauss-Legendre

Formule à 2 points :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(x_0)A_0 + f(x_1)A_1$$

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\rightarrow \int_{-1}^1 1dx = 2 = A_0 + A_1 \\ f(x) = x &\rightarrow \int_{-1}^1 xdx = 0 = x_0A_0 + x_1A_1 \\ f(x) = x^2 &\rightarrow \int_{-1}^1 x^2dx = \frac{2}{3} = x_0^2A_0 + x_1^2A_1 \\ f(x) = x^3 &\rightarrow \int_{-1}^1 x^3dx = 0 = x_0^3A_0 + x_1^3A_1 \end{aligned}$$

Gauss-Legendre

Formule à 2 points : $\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(x_0)A_0 + f(x_1)A_1$

$$\left. \begin{aligned} 2 &= A_0 + A_1 \\ 0 &= x_0A_0 + x_1A_1 \\ \frac{2}{3} &= x_0^2A_0 + x_1^2A_1 \\ 0 &= x_0^3A_0 + x_1^3A_1 \end{aligned} \right\} \text{ système non linéaire}$$

Solutions :

$$\begin{aligned} A_0 &= A_1 = 1 \\ x_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} = -x_1 \end{aligned}$$

→ racines des polynômes de Legendre.

Gauss-Legendre

Formule à 2 points :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(x_0)A_0 + f(x_1)A_1$$

$$A_0 = A_1 = 1 \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = -x_1$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)dx$$

Exemple :

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x - 2 \quad I = \int_3^7 f(x)dx$$

$$I = \frac{7-3}{2} \left(f\left(\frac{7-3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{7+3}{2}\right) + f\left(-\frac{7-3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{7+3}{2}\right) \right)$$

Gauss-Legendre

Formule à 3 points :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(x_0)A_0 + f(x_1)A_1 + f(x_2)A_2$$

→ donne un résultat exact pour les monômes 1, x, x², x³, x⁴ et x⁵

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{8}{9} & x_0 &= 0 \\ A_1 &= \frac{5}{9} & x_1 &= \sqrt{\frac{3}{5}} \\ A_2 &= \frac{5}{9} & x_2 &= -\sqrt{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

Gauss-Legendre

Formule à n points :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(x_0)A_0 + f(x_1)A_1 + \dots + f(x_{n-1})A_{n-1}$$

→ donne un résultat exact pour les monômes de degré $\leq 2n - 1$

Gauss-Legendre

Remarques :

- fonctionne parfaitement sur les polynômes
- fonctionne bien sur une fonction quelconque si elle s'approxime bien par un polynôme
- on peut utiliser d'autres polynômes que ceux de Legendre

Gauss-Legendre

Formule à n points :

nb de points	coefficient A	variable x
2	1	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
3	$\frac{8}{9} \mid \frac{5}{9}$	$0 \mid \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$
4	$\frac{18 \pm \sqrt{30}}{36}$	$\pm \sqrt{\frac{3 \pm 2\sqrt{6/5}}{7}}$
5	$\frac{128/255}{322 \pm 13\sqrt{70}}$ 900	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{0}{5 \pm 2\sqrt{10/7}}}$

Bornes infinies

Problématique :

$$\int_a^b f(x)dx \rightarrow \text{OK}$$

$$\int_a^\infty f(x)dx \rightarrow \text{PAS OK}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \rightarrow \text{PAS OK}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx \rightarrow \text{PAS OK}$$

Changements de variable :

- Gauss-Laguerre, De ou Tanh pour 1 borne infinie
- Gauss-Hermite, De ou Tanh pour les 2 bornes infinies

Intégrales multiples

Problématique :

$$\int f(x)dx \rightarrow \text{OK}$$

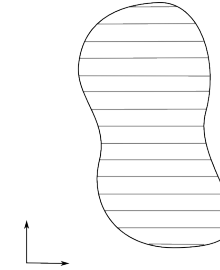
$$\iint f(x,y)dxdy \rightarrow \text{PAS OK}$$

→ problème difficile

Intégrales multiples

$$\iint f(x,y)dxdy$$

Dimension par dimension :



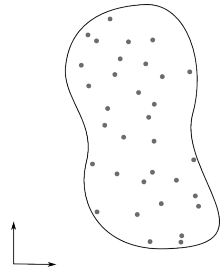
→ difficile de respecter les bornes d'intégration

→ complexité en $\mathcal{O}(n^d)$, où d est la dimension de l'intégrale

Intégrales multiples

$$\iint f(x,y)dxdy$$

Méthode de Monte-Carlo :



→ long, peu précis et sans estimation de l'erreur