WAZOU

SVD

SVD

introduction

La Décomposition en Valeurs Singulières
(SVD = Singular Value Decomposition)

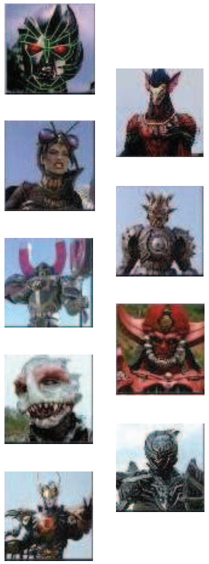
$A = UDV^T$

- U : matrice *m*x*n* ($m \geq n$) — orthogonale si m=n
- D : matrice *n*x*n* — diagonale
- V^T : matrice *n*x*n* — orthogonale

SVD

mise en situation

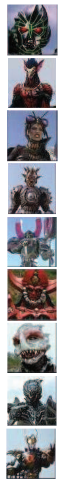
vs.
(en 1 contre 1)



SVD

mise en situation

durée du combat avant la victoire



4	4	4
5	5	5
3	3	3
4	4	4
4	4	4
4	4	4
4	4	4
3	3	3
5	5	5

SVD

mise en situation

<u>Problème</u> :
On voudrait pouvoir prédire ces scores à partir :

- de la puissance du ranger
- de la difficulté que présente un monstre

durée combat = difficulté monstre x puissance ranger

SVD


4	4	4
5	5	5
3	3	3
4	4	4
4	4	4
4	4	4
4	4	4
3	3	3
5	5	5

=

difficulté du monstre

4
5
3
4
4
4
4
3
5

x

puissance du ranger

1	1	1

SVD

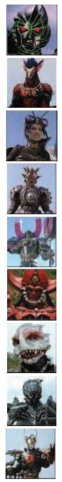
mise en situation

mathématiciens psychorigides

$\Rightarrow$

on norme tous les vecteurs

SVD

4	4	4
5	5	5
3	3	3
4	4	4
4	4	4
4	4	4
4	4	4
3	3	3
5	5	5

=

difficulté du monstre

4
5
3
4
4
4
4
3
5

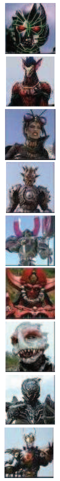
x

puissance du ranger

1	1	1

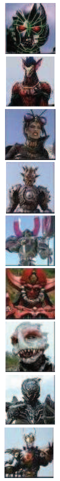
SVD

difficulté du monstre



4	4	4
5	5	5
3	3	3
4	4	4
4	4	4
4	4	4
4	4	4
3	3	3
5	5	5

=



0.33
0.41
0.25
0.33
0.33
0.33
0.33
0.25
0.41

X

facteur

21.07

X

puissance du ranger

0.58	0.58	0.58

SVD

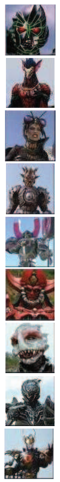
mise en situation

On obtient une SVD 1D

SVD

mise en situation

on complique les choses :
les rangers ne font
pas le même score



4	4	5
4	5	5
3	3	3
4	4	5
4	4	4
4	3	5
4	4	4
2	4	4
5	5	5

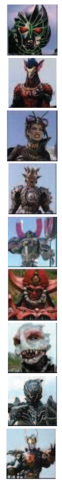
SVD

mise en situation

Cette matrice est plus compliquée:
Elle n'est plus de rang 1.

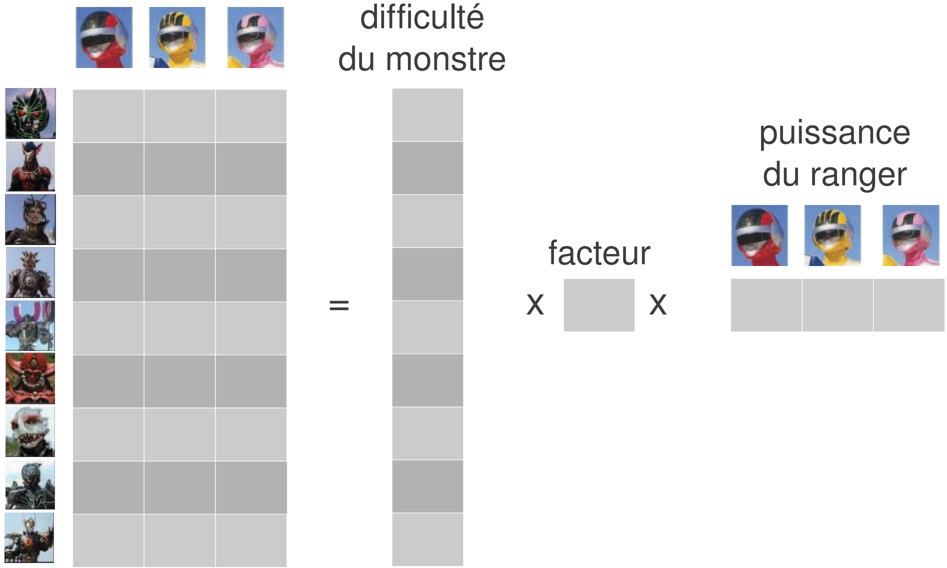
On ne peut plus la prédire
avec 1 niveau de coefficients.

Il faut rajouter un niveau de
coefficients pour affiner la
prédiction.

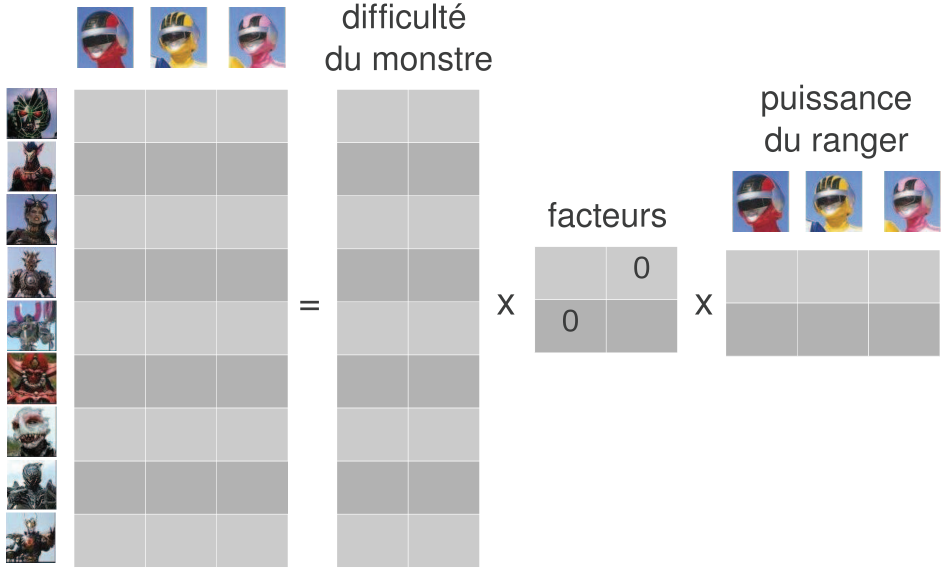


4	4	5
4	5	5
3	3	3
4	4	5
4	4	4
4	3	5
4	4	4
2	4	4
5	5	5

SVD



SVD



SVD

mise en situation

Pour plus de simplicité,
on ne met pas les facteurs d'échelle.

Appliquons une vrai SVD 1D au nouvelles données
puis comparons l'approximation
avec les vraies données

SVD

3.95	4.64	4.34
2.27	5.02	4.69
2.42	2.85	2.66
3.97	4.67	4.36
3.64	4.28	4.00
3.69	4.33	4.05
3.33	3.92	3.66
3.08	3.63	3.39
4.55	5.35	5.00

=

difficulté du monstre

4.34
4.69
2.66
4.36
4.00
4.05
3.66
3.39
5.00

x

puissance du ranger

0.91	1.07	1.0

SVD

vraies données - approximation

0.05	-0.64	0.66		-0.18	difficulté du monstre 2				
-0.28	-0.02	0.31		-0.38					
0.58	0.15	-0.66		0.80					
0.03	0.33	-0.36		0.15					
0.36	-0.28	0.00	=	0.35	x	0.82	-0.20	-0.53	puissance du ranger 2
-0.69	0.67	-0.05		-0.67					
0.67	0.08	-0.66		0.89					
-1.08	0.37	0.61		-1.29	coeff le + significatif (le + difficile à prédire au niveau 1)				
0.45	-0.35	0.00		0.44					

SVD

mise en situation

La SVD complète d'une matrice 9x3
Comprend 3 niveaux de coefficients

De façon générale, une matrice mxn ($m \geq n$)
a au plus n niveaux de coefficients

SVD

durée du combat				difficulté du monstre			facteurs			puissance du ranger		
4	4	5		0.35	0.09	-0.64						
4	5	5		0.38	0.19	-0.10						
3	3	3		0.22	-0.40	0.28						
4	4	5		0.36	-0.08	0.33	21.07	0	0	0.53	0.62	0.58
4	4	4	=	0.33	-0.18	-0.20	0	2.01	0	-0.82	0.20	0.53
4	3	5		0.33	0.33	0.48	0	0	1.42	-0.21	0.76	-0.62
4	4	4		0.30	-0.44	0.23						
2	4	4		0.28	0.64	0.10						
5	5	5		0.41	-0.22	-0.25						

SVD

1ère approximation

durée du combat				difficulté du monstre			facteurs			puissance du ranger		
4	4	5		0.35	0.09	-0.64						
4	5	5		0.38	0.19	-0.10						
3	3	3		0.22	-0.40	0.28						
4	4	5		0.36	-0.08	0.33	21.07	0	0	0.53	0.62	0.58
4	4	4	=	0.33	-0.18	-0.20	0	2.01	0	-0.82	0.20	0.53
4	3	5		0.33	0.33	0.48	0	0	1.42	-0.21	0.76	-0.62
4	4	4		0.30	-0.44	0.23						
2	4	4		0.28	0.64	0.10						
5	5	5		0.41	-0.22	-0.25						

SVD

2ème approximation

durée du combat

4	4	5
4	5	5
3	3	3
4	4	5
4	4	4
4	3	5
4	4	4
2	4	4
5	5	5

=

difficulté du monstre

0.35	0.09	-0.64
0.38	0.19	-0.10
0.22	-0.40	0.28
0.36	-0.08	0.33
0.33	-0.18	-0.20
0.33	0.33	0.48
0.30	-0.44	0.23
0.28	0.64	0.10
0.41	-0.22	-0.25

facteurs

21.07	0	0
0	2.01	0
0	0	1.42

puissance du ranger

0.53	0.62	0.58
-0.82	0.20	0.53
-0.21	0.76	-0.62

SVD

3ème approximation

durée du combat

4	4	5
4	5	5
3	3	3
4	4	5
4	4	4
4	3	5
4	4	4
2	4	4
5	5	5

=

difficulté du monstre

0.35	0.09	-0.64
0.38	0.19	-0.10
0.22	-0.40	0.28
0.36	-0.08	0.33
0.33	-0.18	-0.20
0.33	0.33	0.48
0.30	-0.44	0.23
0.28	0.64	0.10
0.41	-0.22	-0.25

facteurs

21.07	0	0
0	2.01	0
0	0	1.42

puissance du ranger

0.53	0.62	0.58
-0.82	0.20	0.53
-0.21	0.76	-0.62

SVD

propriétés

$A = UDV^T$

- A : matrice *m*x*n* ($m \geq n$)
- U : matrice *m*x*n*, orthogonale si m=n (column orthogonal)
- D : matrice *n*x*n*, diagonale (entrées positives ou nulles)
- V : matrice *n*x*n*, orthogonale

SVD

inverse

A : matrice carrée régulière

$$A = UDV^T$$

$$A^{-1} = (UDV^T)^{-1} = V^{-T}D^{-1}U^{-1} = VD^{-1}U^T$$

$V^{-T} = V$ car V est orthogonale

$U^{-1} = U^T$ car U est orthogonale

D est diagonale donc facile à inverser

SVD

inverse

A : matrice singulière

- si A n'est pas carrée (lignes > colonnes)
- ou si A est carrée singulière (pas de rang plein)

l'inverse de la SVD génère la pseudo inverse de A :

$VD^{-1}U^T = A^+$ (A^+ = pseudo inverse de A)

permet de résoudre des systèmes **surdéterminés** au sens des **moindres carrés**.

SVD

null space

$$A = UDV^T$$

La SVD permet aussi de résoudre des systèmes d'équations du genre $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

En effet, la SVD impose $||\mathbf{x}||_2 = 1$

Pivot de Gauss : $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

SVD : $\mathbf{x} \neq 0$ ($\mathbf{x}$ = dernière colonne de V)

SVD

rang

$$A = UDV^T$$

Les éléments de D sont les valeurs singulières de A

Rang de A : nombre de valeurs singulières ≠ 0

SVD

rang

$$A = UDV^T$$

En annulant certaines valeurs singulières, on obtient des matrices de rang inférieur à A les plus proches de A.

SVD

calcul

calculer une SVD revient à calculer les vecteurs propres et valeurs propres de AA^T.

→ QR décomposition
→ Householder réduction

SVD

calcul

Ce calcul est très stable numériquement.

Pour une matrice mxn : $O(4m^2n+8mn^2+9n^3)$ (flops)

En général : $m >> n$

SVD

applications

→ Physique
Mécanique, électronique, géophysique, météorologie
→ Vision par ordinateur
Calibration caméra, matrice fondamentale, homographie, ...
→ Reconnaissance de forme
→ Traitement du signal
→ Traitement des langues naturelles
→ Statistique

SVD

applications

→ Compression d'images

Detail from Durer's Melancolia, dated 1514., 359x371 image

EOF reconstruction with 1 modes

SVD

applications

→ Compression d'images

Detail from Durer's Melancolia, dated 1514., 359x371 image

EOF reconstruction with 50 modes

SVD

applications

→ Compression d'images

Detail from Durer's Melancolia, dated 1514., 359x371 image

EOF reconstruction with 200 modes