

## Systèmes linéaires

Vincent Nozick



## Introduction

**Système d'équations :**

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases}$$

**Système linéaire sous forme matricielle :**

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

soit

$$Ax = b$$

## Introduction

**Mise en situation :**

Martine achète 3 barrettes de RAM et 1 carte graphique pour  $u$  euros.

Jean achète 1 barrette de RAM et 2 cartes graphiques en SLI pour  $v$  euros.

→ Quel est le prix  $x$  de la barrette de RAM et le prix  $y$  de la carte graphique?

**Système d'équations :**

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases}$$

## Introduction

**Problème à résoudre :**

$$Ax = b$$

Qualités requises pour la résolution :

# Introduction

## Problème à résoudre :

$$Ax = b$$

Qualités requises pour la résolution :

- précision (solution exacte)
- rapidité
- robustesse
- simplicité
- occupation mémoire
- parallélisable

## Remarques :

parfois la rapidité prime sur la précision (ex : la radiosité)

# Introduction

## Problème à résoudre :

$$Ax = b$$

## Solutions :

inverse de A :

$$x = A^{-1}b$$

En fait, il est préférable d'éviter le calcul de  $A^{-1}$  trop coûteux.

# Pivot de Gauss

## Introduction :

Si A est triangulaire et que les  $a_{ii} \neq 0$ , on peut résoudre le système directement par éliminations successives.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

# Pivot de Gauss

## Méthode :

On cherche à transformer notre système tel que la matrice A soit triangulaire tout en préservant la solution du système.

## Pivot de Gauss

opérations acceptées :

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

permutation de 2 lignes

$$\begin{cases} x + 2y = v \\ 3x + y = u \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

## Pivot de Gauss

opérations acceptées :

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

permutation de 2 colonnes

$$\begin{cases} y + 3x = u \\ 2y + x = v \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

## Pivot de Gauss

opérations acceptées :

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

multiplication d'une ligne par une constante  $k \neq 0$ 

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ kx + 2ky = kv \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ k & 2k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ kv \end{pmatrix}$$

## Pivot de Gauss

opérations acceptées :

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ 4x + 3y = u + v \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u + v \end{pmatrix}$$

## Pivot de Gauss

opérations acceptées : en utilisant ces opérations, on veut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

## Pivot de Gauss

opérations acceptées :

Les opérations suivantes changent le système, mais pas les solutions :

- permutation de 2 lignes
- permutation de 2 colonnes
- multiplication d'une ligne par une constante  $k$  ( $k \neq 0$ )
- ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes

## Pivot de Gauss

méthode : étape 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

## Pivot de Gauss

méthode : étape 1

On veut annuler les éléments  $a_{21} \cdots a_{n1}$ .

$$\rightarrow \text{ligne}_i = \text{ligne}_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \times \text{ligne}_1 \quad (\text{pour } i = 2 \cdots n)$$

$$\rightarrow b_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \times b_1$$

# Pivot de Gauss

méthode : étape 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}$$

# Pivot de Gauss

méthode : étape 2

On veut annuler les éléments  $a_{32} \cdots a_{n2}$ .

$$\rightarrow \text{ligne}_i = \text{ligne}_i - \frac{a_{i2}}{a_{22}} \times \text{ligne}_2 \quad (\text{pour } i = 3 \cdots n)$$

$$\rightarrow b_i = b_i - \frac{a_{i2}}{a_{22}} \times b_2$$

# Pivot de Gauss

méthode : étape  $n$

$$\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

# Pivot de Gauss

méthode : étape  $k$  (en général)

On veut annuler les éléments  $a_{ik} \cdots a_{nk}$ .

$$\rightarrow \text{ligne}_i = \text{ligne}_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \times \text{ligne}_k \quad (\text{pour } i = k + 1 \cdots n)$$

$$\rightarrow b_i = b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \times b_k$$

# Pivot de Gauss

## Remarque :

- Si un pivot est nul, on fait une permutation de ligne.
- Si aucun autre pivot n'est non nul, la matrice est singulière (système indéterminé). On arrête.

# Pivot de Gauss

## Exemple :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

représenté par :

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & -4 & 3 & -8 \end{array}$$

# Pivot de Gauss

## Exemple :

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & -4 & 3 & -8 \end{array} \begin{array}{l} \\ -2 \\ -1 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -7 & -1 & -12 \\ 0 & -7 & 2 & -18 \end{array}$$

# Pivot de Gauss

## Exemple :

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -7 & -1 & -12 \\ 0 & -7 & 2 & -18 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -1 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -7 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}$$

# Pivot de Gauss

Exemple :

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -7 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}$$

↓

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

# Pivot partiel

Méthode :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}$$

On s'arrange pour avoir le pivot maximal en permutant à chaque itérations les lignes de la sousmatrice traitée.

# Pivot de Gauss

Choix du pivot :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}$$

Dans l'opération :  $\text{ligne}_i = \text{ligne}_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \times \text{ligne}_k$   
 la valeur du pivot  $a_{kk}$  a des conséquences sur la stabilité numérique.

En pratique, on veut  $\left| \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \right| \leq 1$

# Pivot Total

Méthode :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}$$

On permute les lignes et les colonnes à chaque itération pour obtenir le pivot maximal parmi tous les éléments de la sousmatrice traitée.

## Pivot Total

**Remarque :**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}$$

Lors d'une permutation de colonne, pensez à permuter aussi les variables correspondantes.

## Méthodes itératives

**Méthode :**

Plutôt que d'utiliser une méthode "exacte", on peut appliquer une méthode itérative.

→ plus on fait d'itérations, plus on converge vers la solution.

## Jacobi

**Exemple :**

Système à résoudre :

$$\begin{cases} 5x - 3y + z = 10 \\ -x + 6y - 4z = 5 \\ 3x - 3y + 9z = -7 \end{cases}$$

Réécriture du système :

$$\begin{cases} x = \frac{10 + 3y - z}{5} \\ y = \frac{5 + x + 4z}{6} \\ z = \frac{-7 - 3x + 3y}{9} \end{cases}$$

## Jacobi

**Exemple :**

On construit une suite :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{10 + 3y_n - z_n}{5} \\ y_{n+1} = \frac{5 + x_n + 4z_n}{6} \\ z_{n+1} = \frac{-7 - 3x_n + 3y_n}{9} \end{cases}$$

## Jacobi

## Remarque :

On peut partir d'une solution quelconque (vecteur nul par exemple).

## Jacobi et Gauss-Seidle

## Convergence :

Condition suffisante de convergence à partir de n'importe quelle condition initiale : la matrice A doit être **dominante diagonale stricte** :

$$|a_{kk}| > \sum_{i=1, i \neq k}^n |a_{ki}|$$

## Gauss-Seidel

## Méthode :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{10 + 3y_n - z_n}{5} \\ y_{n+1} = \frac{5 + x_n + 4z_n}{6} \\ z_{n+1} = \frac{-7 - 3x_n + 3y_n}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \frac{10 + 3y_n - z_n}{5} \\ y_{n+1} = \frac{5 + x_{n+1} + 4z_n}{6} \\ z_{n+1} = \frac{-7 - 3x_{n+1} + 3y_{n+1}}{9} \end{cases}$$

Converge plus rapidement que Jacobi.

## Jacobi et Gauss-Seidle

## Dominante diagonale stricte :

$$|a_{kk}| > \sum_{i=1, i \neq k}^n |a_{ki}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 4 > 2 \\ 8 > 5 \\ 5 > 3 \end{array}$$

## Jacobi et Gauss-Seidle

**Dominante diagonale stricte :**

$$|a_{kk}| > \sum_{i=1, i \neq k}^n |a_{ki}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 4 > 2 \\ 8 > 5 \\ 5 > 3 \end{array}$$

**OK**

## Jacobi et Gauss-Seidle

**Condition d'arrêt :**

On s'arrête quand la solution numérique est suffisamment proche de la solution exacte.

→ vecteur résidu :  $\mathbf{r}_n = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_n$

→ en pratique :

$$\frac{\|\mathbf{r}_n\|}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_n\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \epsilon$$

pour une précision  $\epsilon$  donnée.

## Conditionnement d'une matrice

**Condition d'une matrice :**

On dit qu'une matrice est mal conditionnée si une petite variation sur les données du système entraînent une grosse variation de la solution.

## Conditionnement d'une matrice

**Exemple :** (de R. S. Wilson)

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}$$

Pourtant, cette matrice a bonne allure et  $\text{Det} = 1$

## Conditionnement d'une matrice

**Exemple :** (de R. S. Wilson)

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

## Conditionnement d'une matrice

**Condition d'une matrice :**

Soit le système :  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  ( $\mathbf{A}$  inversible)

Une petite perturbation  $\delta\mathbf{b}$  du vecteur  $\mathbf{b}$  entraîne une perturbation  $\delta\mathbf{x}$  du vecteur  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

L'erreur relative  $\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$  de  $\mathbf{b}$  entraîne une erreur relative  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  sur  $\mathbf{x}$ .

## Conditionnement d'une matrice

**Conditionnement d'une matrice :**

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \Rightarrow \delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}$$

on a alors :

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$$

(une des propriétés des normes matricielle est  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ )

en utilisant par exemple la norme de Froebenius :

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

## Conditionnement d'une matrice

**Conditionnement d'une matrice :**

on a

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$$

soit

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\| \quad \text{et} \quad \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}$$

soit finalement

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

## Conditionnement d'une matrice

### Conditionnement d'une matrice :

avec

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

→ l'influence de la variation de  $\mathbf{b}$  influe sur  $\mathbf{x}$  selon le coefficient :

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

- si  $\text{Cond}(A) \simeq 1$ ,  $A$  est bien conditionnée.
- si  $\text{Cond}(A) \gg 1$ ,  $A$  est mal conditionnée.

## Conditionner une matrice

### Conditionner une matrice :

- soit le système :  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- on cherche une matrice inversible  $P$  pour avoir :  $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$  de telle sorte que  $PA$  soit mieux conditionnée que  $A$ .
- dans le cas le plus favorable, on a :  $P = A^{-1}$
- il n'y a pas de méthode standard pour trouver  $P$ , l'idéal étant de trouver une matrice facile à inverser assez proche de  $A^{-1}$ .

## Réduction d'erreur

### Principe :

Soit le système suivant :  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

pour lequel on trouve une solution  $\mathbf{x}_0$  telle que :

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0 \simeq \mathbf{b} \quad (\text{erreurs numériques})$$

On a

$$A(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow A\mathbf{x}_0 + A\delta \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

soit

$$A\delta \mathbf{x} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$$

On résout le système et on obtient :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}$

## Réduction d'erreur

### Systèmes à résoudre :

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad A\delta \mathbf{x} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$$

### Remarque :

Les méthodes de décomposition (LU, SVD, QR, Cholesky, etc.) sont particulièrement recommandées car la décomposition de  $A$  est utilisée pour résoudre les 2 systèmes.

### Résultats :

on peut s'attendre à une erreur 3 fois plus petite.