

## Dérivation numérique

Vincent Nozick



## Dérivation numérique

### Fonctions étudiées :

- fonctions analytiques  
(fonctions dont on connaît la formule)  
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continues et dérivables
- fonctions non analytiques, mais évaluable en n'importe quel point.
- un ensemble de points représentant une fonction supposée continue.

## Dérivation numérique

### Problématique :

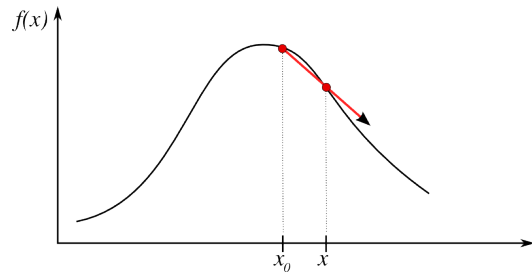
Étant donnée une fonction  $f$ , on veut estimer la dérivée  $f'$  de  $f$  en un point  $x$ .

## Dérivation numérique

### Applications :

- Résolution de systèmes physiques
- Traitement d'image ou du signal
- ...

# Dérivée



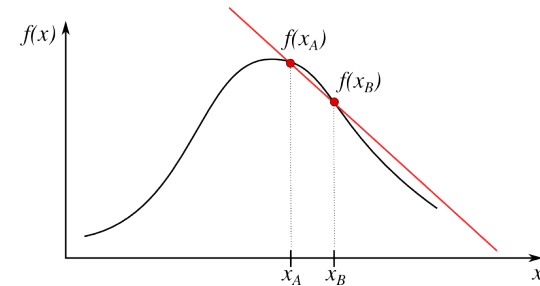
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

# Calcul de la dérivée

Si on a la formule analytique de la fonction, on peut la dériver en utilisant des méthodes de calcul formel (maple/mupad).

Et si on ne l'a pas ? → on peut en faire une estimation.

# Dérivée



$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{dérivée}} \text{ ressemble à } \underbrace{\frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}}_{\text{coefficient directeur d'une droite}}$$

# Dérivée

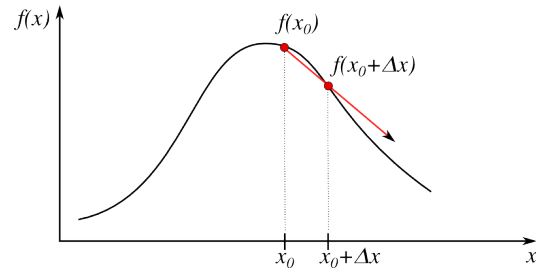
la formulation :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est équivalente à :

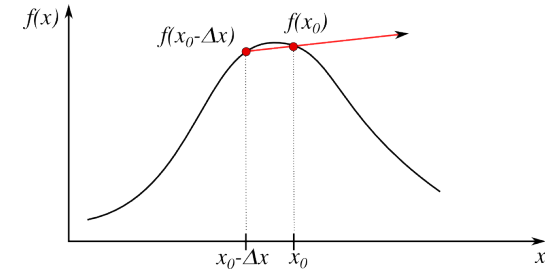
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

# Dérivée avant



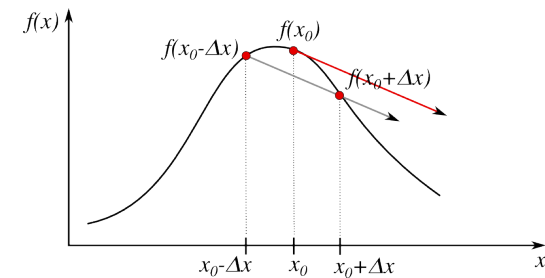
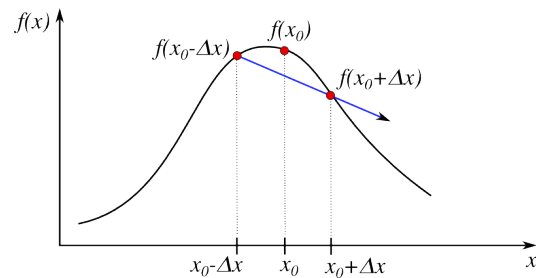
$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

# Dérivée arrière



$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

# Dérivée centrée



$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

# Dérivée centrée

## Calcul d'erreur

**Formule de Taylor :**

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

## Calcul d'erreur

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

**changement de variable :**  $x \leftarrow x \pm \Delta x$   $a \leftarrow x$

## Calcul d'erreur

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

## Calcul d'erreur

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

**changement de variable :**  $x \leftarrow x \pm \Delta x$   $a \leftarrow x$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

## Calcul d'erreur

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

changement de variable :  $x \leftarrow x \pm \Delta x$   $a \leftarrow x$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

## Calcul d'erreur

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$\bullet \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^1 + \dots$$

## Calcul d'erreur

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$\bullet \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^1 + \dots$$

- dérivée avant
- $\Delta x^1 \rightarrow$  ordre 1

## Calcul d'erreur

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$\bullet \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x) - \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^1 + \dots$$

## Calcul d'erreur

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$\bullet \quad \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x) - \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^1 + \dots$$

- dérivée arrière
- $\Delta x^1 \rightarrow$  ordre 1

## Calcul d'erreur

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$\bullet - \bullet \quad f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2f'(x)\Delta x + 2\frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

## Calcul d'erreur

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$\bullet - \bullet \quad f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2f'(x)\Delta x + 2\frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x) + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^2 + \dots$$

- dérivée centrée
- $\Delta x^2 \rightarrow$  ordre 2 (plus précis)

## Calcul d'erreur

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$\bullet - \bullet \quad f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2f'(x)\Delta x + 2\frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x) + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^2 + \dots$$

# Calcul d'erreur

**Bilan:**

dérivée avant :  $f'(x) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  ordre 1

dérivée arrière :  $f'(x) \simeq \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$  ordre 1

dérivée centrée :  $f'(x) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$  ordre 2

# Dérivées partielles

Soit une fonction  $f$  à plusieurs variables de  $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  :

$$f : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

**Définition:**

La dérivée partielle de  $f$  est la dérivée par rapport à l'une de ses variables, les autres étant gardées constantes.

# Dérivées partielles

$$f : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

**Exemple:**

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

est la **dérivée partielle** de  $f$  par rapport à la variable  $x_i$  du vecteur  $\mathbf{x}$ . Lors du calcul de cette dérivée, les autres variables  $x_{j \neq i}$  sont considérées comme constantes.

# Dérivées partielles

**En pratique :**

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \simeq \frac{f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x})}{\delta x_i} \quad \text{avec} \quad \Delta \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

il est conseillé de choisir :  $\delta x_i = \max(\min(x_i \cdot 10^{-4}, 10^{-6}), 10^{-15})$

→ favorise  $\delta x_i = x_i \cdot 10^{-4}$  tout en imposant que  $10^{-6} \geq \delta x_i \geq 10^{-15}$

# Matrice jacobienne

$$f : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

**Définition:**

La matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est la matrice des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction vectorielle  $f$ .

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$