Analyse fréquentielle

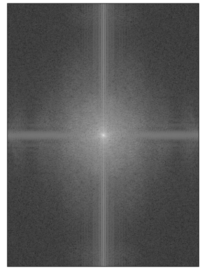
UPEM - Master 1

Vincent Nozick

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Analyse fréquentielle

La transformée de Fourier fait peur :



- on commence par plus simple : DCT
- ensuite la transformée de Fourier
- puis les ondelettes

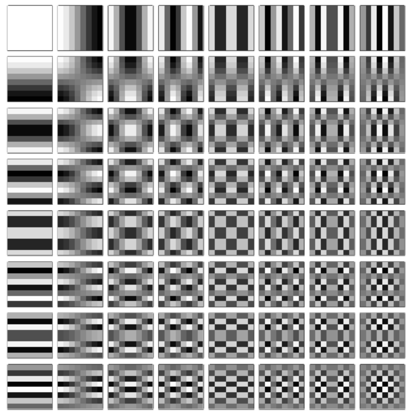
Transformée en cosinus discrète

DCT :

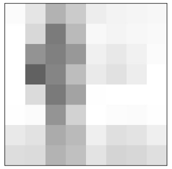
- en anglais : *Discrete Cosine Transform*
- exprime un signal d'entrée dans une base de fonctions
- base de fonctions : cosinus
- représentation fréquentielle
- transformation inversible

DCT : avec les mains

Une base de fonctions :



DCT : avec les mains



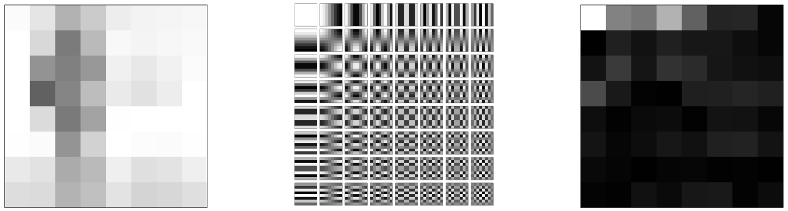
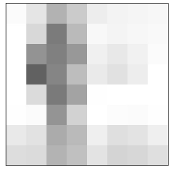


image $=$ base de fonctions $\otimes$ coefficients

DCT : avec les mains



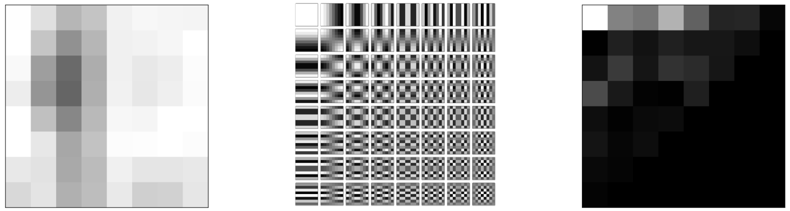
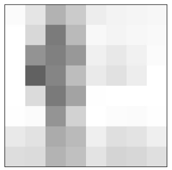


image $=$ base de fonctions $\otimes$ coefficients

DCT : avec les mains



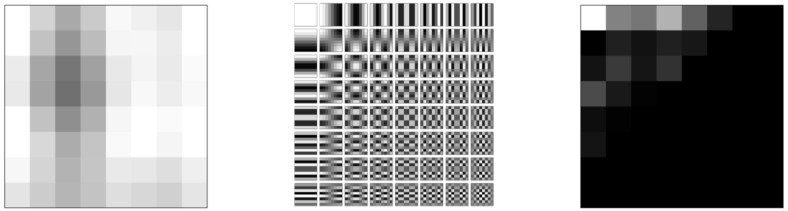
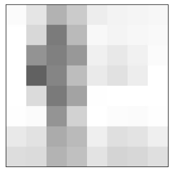


image $=$ base de fonctions $\otimes$ coefficients

DCT : avec les mains



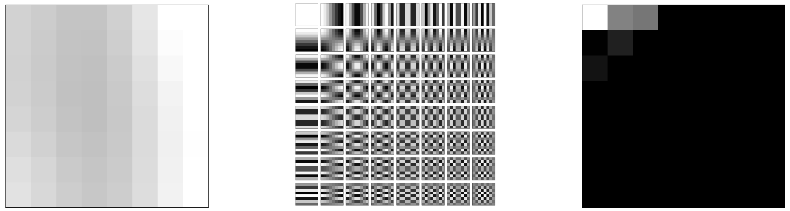
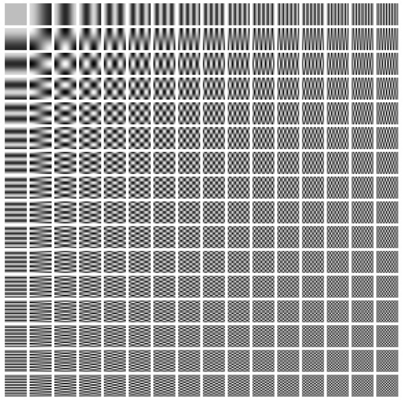


image $=$ base de fonctions $\otimes$ coefficients

DCT : avec les mains



On peut prendre une base de fonctions plus grande.

Fonctions orthogonales

Vecteurs orthogonaux :

$$x_1.y_1 + x_2.y_2 + ... + x_n.y_n = \sum_i x_i.y_i = 0$$

Fonctions orthogonales sur un domaine de définition $\mathcal{D}$:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x) \cdot g(x) dx = 0$$

Fonctions discrètes orthogonales :

$$\sum_i f[i] \cdot g[i] = 0$$

DCT 1D

Base de fonctions sinusoïdales :

- base de fonctions :
  - $f_n(x) = \cos(nx)$ sur $[-\pi, \pi]$ avec $n \in \mathbb{Z}$
  - inclue $f_0(x) = 1$
- orthogonales sur $[-\pi, \pi]$, avec $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx &= \frac{\pi \sin(m-n)}{2(m-n)} - \frac{\pi \sin(m+n)}{2(m+n)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

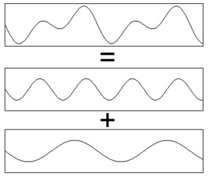
- fonctions orthogonales $\Rightarrow$ unicité de la décomposition d'une fonction f dans cette base.

DCT

Applications :

- jpeg
- mpeg
- mp3
- ...

Transformée de Fourier



Analyse de Fourier :

- exprime une fonction comme une somme pondérée de sinusoïdes :
  - à décalage de phase
  - avec une amplitude
  - et à fréquence variable
- les poids et les phases associées aux fréquences caractérisent le signal dans le domaine des fréquences.

Transformée de Fourier 1D

Principe :

- transforme une fonction f (intégrable sur $\mathbb{R}$) en une fonction F décrivant le spectre fréquentiel de f.
- plusieurs formulations dont :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{e}^{-i2\pi tx} dx$$

- équivalent dans un espace discret :

$$F[t] = \sum_{x=0}^{N-1} f[x]\ \mathrm{e}^{-i2\pi \frac{tx}{N}}$$

DFT et DCT

DCT	DFT
$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right]$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\ \mathrm{e}^{-i2\pi\frac{kn}{N}}$

avec $\mathrm{e}^{-i2\pi\frac{kn}{N}} = \cos(2\pi\frac{kn}{N}) - i\sin(2\pi\frac{kn}{N})$

- DCT : $\cos$ $\rightarrow$ 1 paramètre (réel)
- DFT : $\cos + i\sin$ $\rightarrow$ 2 paramètres (complexe)

Transformée de Fourier et DCT

DCT : $\cos$ $\rightarrow$ 1 paramètre (réel)
DFT : $\cos + i\sin$ $\rightarrow$ 2 paramètres (complexe)

Plus précisément :

- DCT : le noyau de projection est un cosinus et crée des coefficients réels.
- DFT : le noyau est une exponentielle complexe et qui crée des coefficients complexes.

Transformée de Fourier

Propriété :

- linéarité :

$$\mathcal{F}\big(a_1 f_1 + a_2 f_2\big) = a_1 F_1 + a_2 F_2$$

  où $\mathcal{F}$ est la fonction de transformée de Fourier
- symétrie :

$$F(-u,-v) = F^*(u,v)$$

  où $(x+iy)^* = x - iy$ (complexe conjugué)

Transformée de Fourier

Signal 1D :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{e}^{-i2\pi t x} dx$$

Image 2D :

$$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ \mathrm{e}^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

avec :

- x et y : coordonnées dans l'image.
- u et v : coordonnées dans l'espace des fréquences.

Transformée de Fourier Discrète

Espace 2D continue :

$$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ \mathrm{e}^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Espace 2D discret :

$$F[u,v] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I[x,y]\ \mathrm{e}^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

pour une image $M \times N$, il faut une base de MN fonctions.

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Discrète : DFT

$$F[u,v] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I[x,y]\ \mathrm{e}^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

Transformée inverse : IDFT

$$I[x,y] = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F[x,y]\ \mathrm{e}^{i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

Transformée de Fourier Discrète

$$F[u,v] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I[x,y]\ \mathrm{e}^{-i2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

Là encore :
la fonction $F[u,v]$ a 2 composantes :

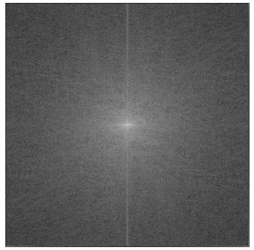
- une composante réelle
- une composante imaginaire

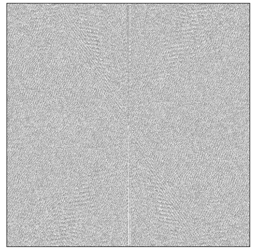
Pour l'affichage, on préfère les coordonnées polaires :

- la magnitude $Mag = \sqrt{Re^2 + Im^2}$
- la phase : $\phi = \arctan(Im/Re)$

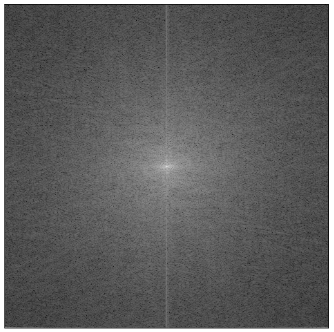
Transformée de Fourier Discrète


image


magnitude

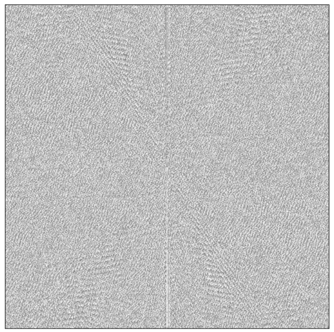

phase

Transformée de Fourier Discrète



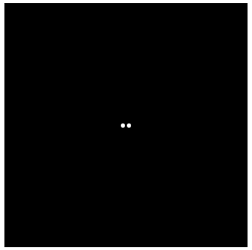
Magnitude : symétrie centrale ($\cos^2 + \sin^2$ est une fonction paire)

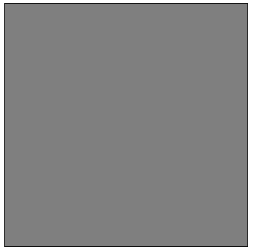
Transformée de Fourier Discrète

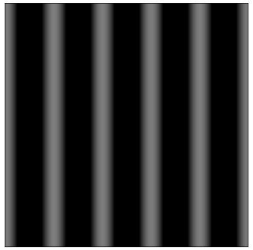


Phase : anti-symétrie centrale

Magnitude


magnitude

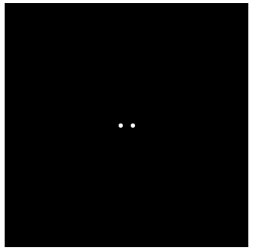

phase

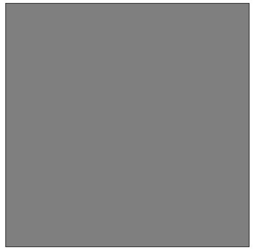


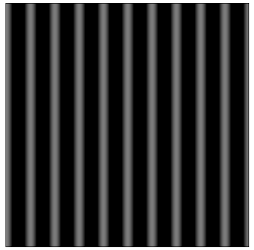
image

en $x = \pm 5 \rightarrow$ génère une sinusoïde sur l'image.

Magnitude


magnitude

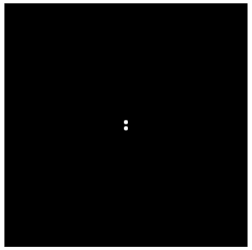

phase

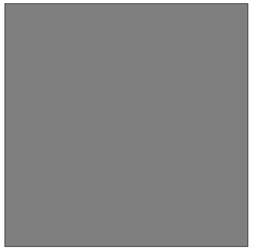


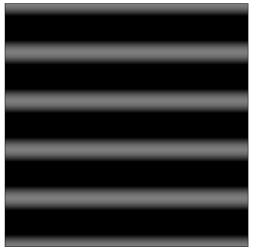
image

en $x = \pm 10 \rightarrow$ génère une sinusoïde sur l'image.

Magnitude


magnitude

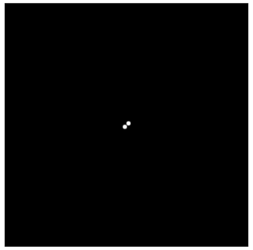

phase

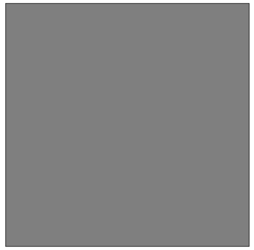


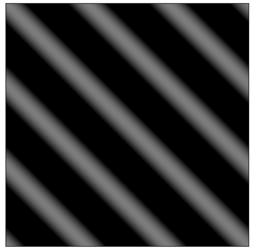
image

en $y = \pm 5 \rightarrow$ génère une sinusoïde sur l'image.

Magnitude


magnitude

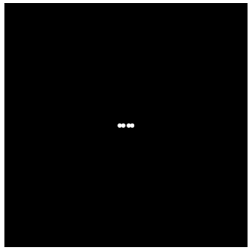

phase

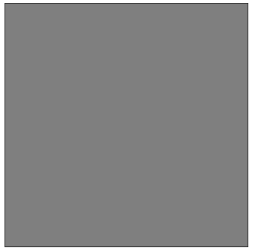


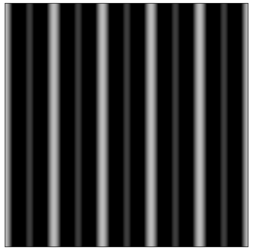
image

en $\pm(-3, 3) \rightarrow$ génère une sinusoïde sur l'image.

Magnitude


magnitude

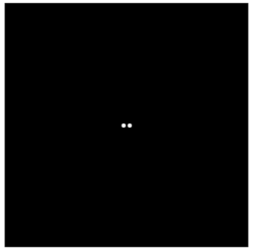

phase

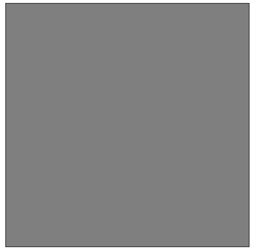


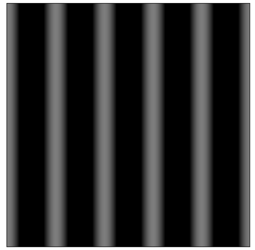
image

2 points

Phase


magnitude

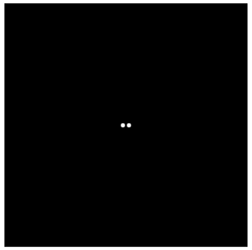

phase

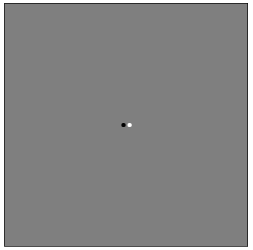


image

sans phase

Phase


magnitude


phase


image

avec phase

Quizz

Que se passe-t-il sur la transformée de Fourier :

- d'une image qu'on rotate ?
- d'une image qu'on translate ?
- d'une image qu'on scale de moitié ?

Quizz

Que se passe-t-il sur la transformée de Fourier :

- d'une image qu'on rotate ?
  idéalement, rotation de la magnitude et de la phase
  $\rightarrow$ en pratique, effets de bords.
- d'une image qu'on translate ?
- d'une image qu'on scale de moitié ?

Quizz

Que se passe-t-il sur la transformée de Fourier :

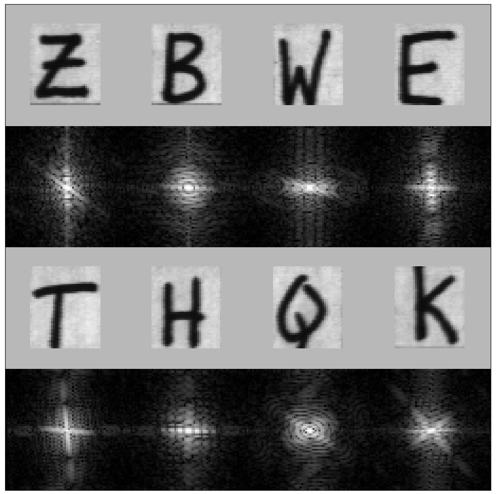
- d'une image qu'on rotate ?
  idéalement, rotation de la magnitude et de la phase
  $\rightarrow$ en pratique, effets de bords.
- d'une image qu'on translate ?
  idéalement, seul la phase change.
- d'une image qu'on scale de moitié ?

Quizz

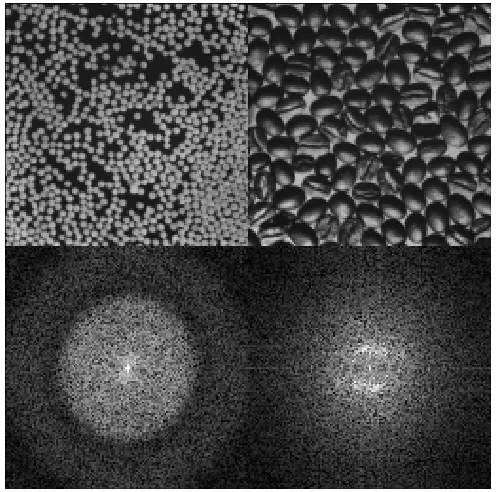
Que se passe-t-il sur la transformée de Fourier :

- d'une image qu'on rotate ?
  idéalement, rotation de la magnitude et de la phase
  $\rightarrow$ en pratique, effets de bords.
- d'une image qu'on translate ?
  idéalement, seul la phase change.
- d'une image qu'on scale de moitié ?
  magnitude cropée.

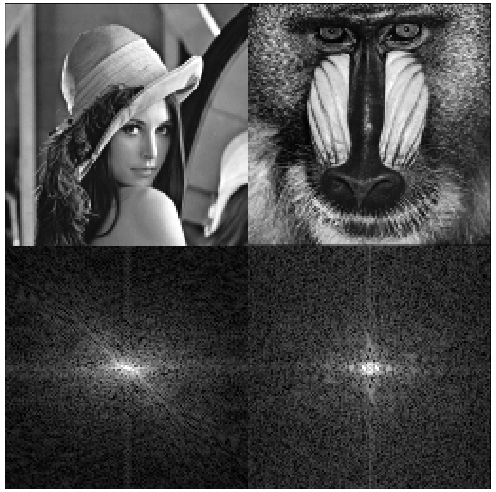
Exemples



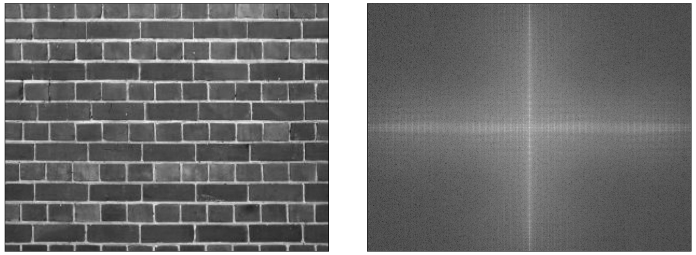
Exemples



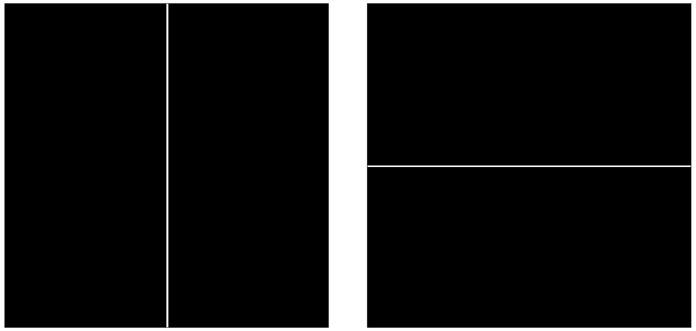
Exemples



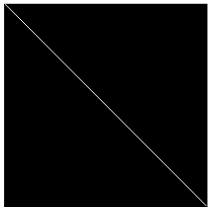
Exemples



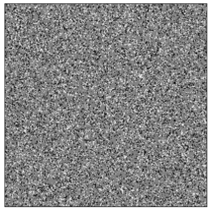
Exemples

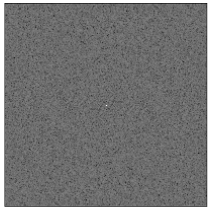


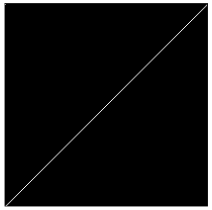
Quizz 2

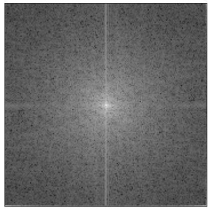

(a)


(b)


(c)


(1)

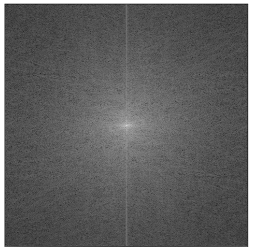

(2)

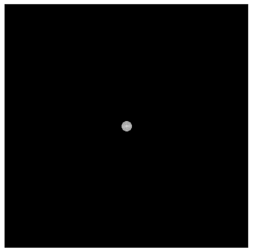

(3)

Filtrage

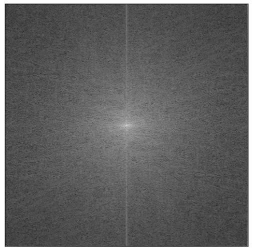
Filtre fréquentiels :
La transformée de Fourier permet essentiellement de faire du filtrage fréquentiel.
$\hookrightarrow$ on annule l'amplitude de certaines fréquences.

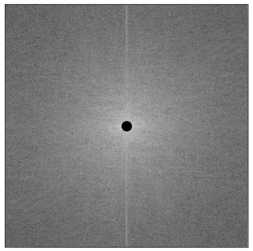
Filtre passe bas



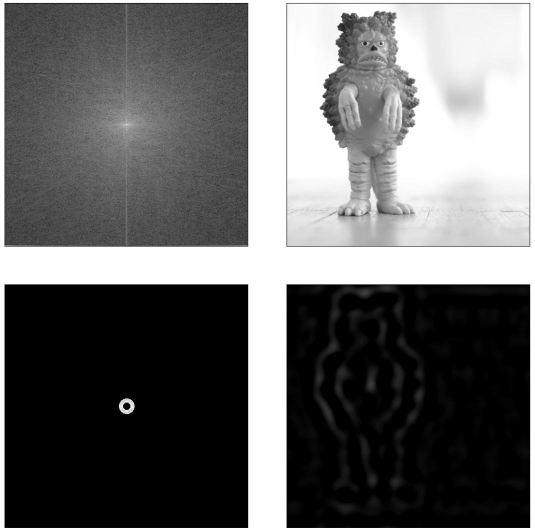


Filtre passe haut

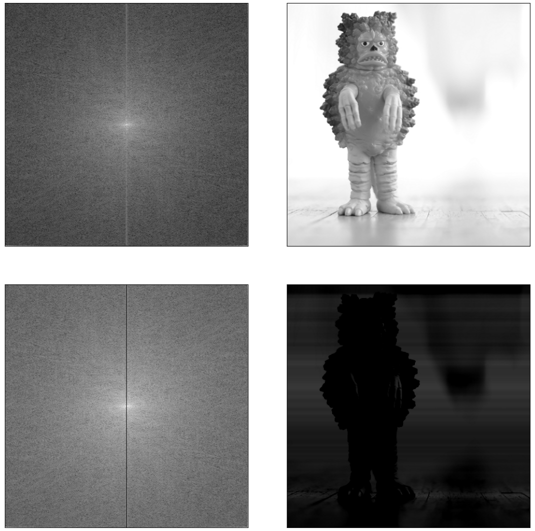




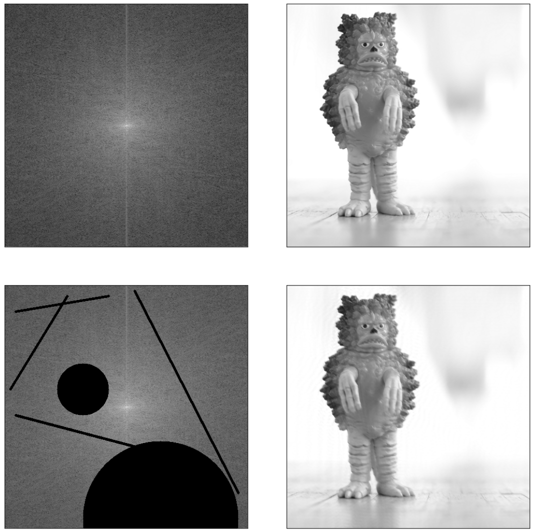
Filtre passe bande



Filtre vertical



Filtre chelou



Convolutions

Théorème de convolution :
la convolution de 2 fonctions dans le domaine spatiale est équivalente à la multiplication terme à terme dans le domaine fréquentiel.

Plus précisément :
soient $f(x,y)$ une image et $h(x,y)$ un filtre de convolution, alors :

$$\mathbf{F}\big(f(x,y) * h(x,y)\big) = \mathbf{F}\big(f(x,y)\big)\mathbf{F}\big(h(x,y)\big) = F(u,v)H(u,v)$$

Note : ce théorème ne fonctionne pas pour la DCT.

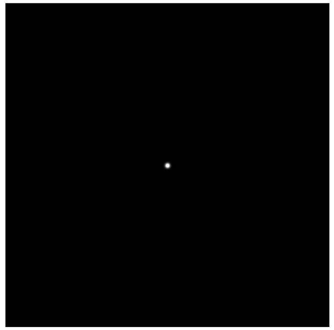
Convolutions

En pratique :
soient $f(x, y)$ une image et $h(x, y)$ un filtre de convolution, alors :

1. $F = \mathbf{DFT}(f)$
2. redimentionner h à la résolution de f
3. $H = \mathbf{DFT}(h)$
4. $F' = F \otimes H$ $\quad\quad \otimes$: multiplication magnitude terme à terme
5. $f' = \mathbf{IDFT}(F')$

Filtre gaussien


image originale


kernel gaussien

Filtre gaussien

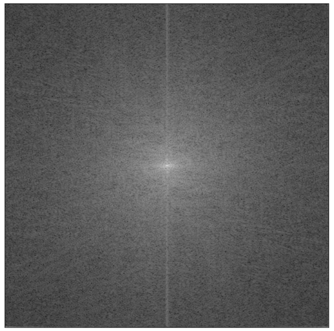
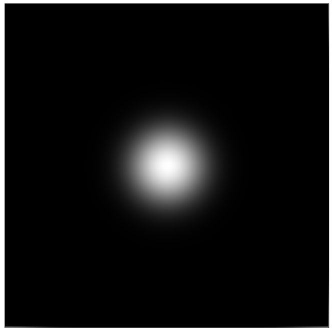


image Fourier


kernel Fourier

Filtre gaussien

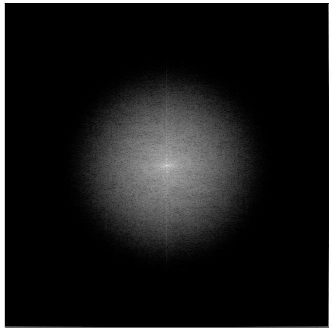
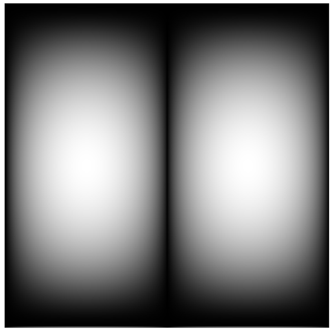

magnitude $\otimes$ kernel


image filtrée

Filtre Sobel x

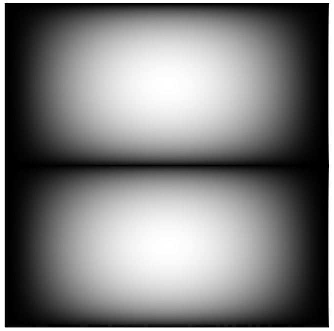


$\mathcal{F}$(kernel)

image filtrée

$$\mathcal{S}_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Sobel y

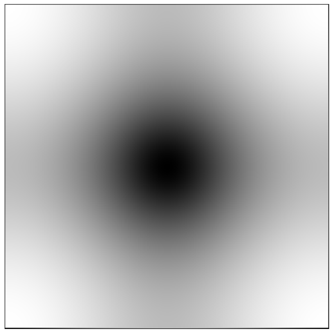


$\mathcal{F}$(kernel)

image filtrée

$$\mathcal{S}_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Laplacien



$\mathcal{F}$(kernel)

image filtrée

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Implémentation

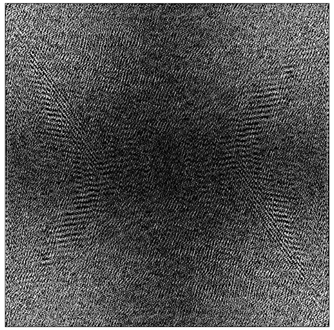
Fast Fourier Transform (FFT) :

- transformation séparable : (plus rapide)
  transformation 2D $(m \times n) \leftrightarrow m$ transformation 1D (n)
- pour les images dont la taille est une puissance de 2 :
  approche récursive
- complexité classique : $\mathcal{O}(n^2) \quad \leftrightarrow \quad$ FFT : $\mathcal{O}(n \log n)$
  pour une grand nombre de pixels n : grosse différence
- implémentation gpu

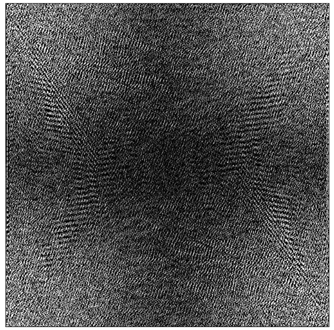
En pratique

image de départ

DFT

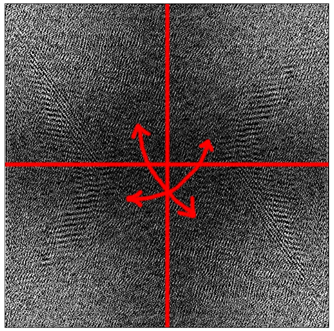


partie réelle

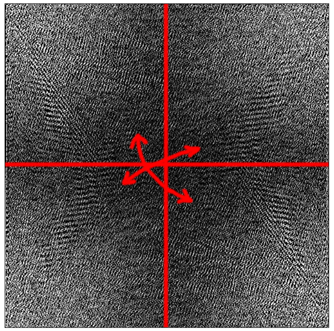


partie imaginaire

Recentrage

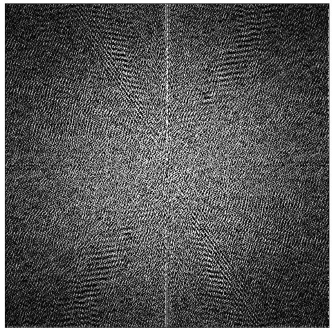


partie réelle

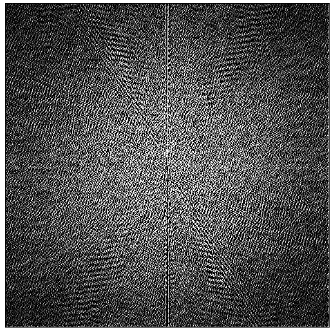


partie imaginaire

Recentrage

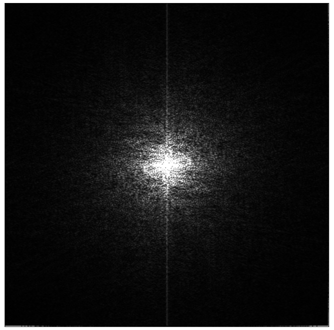
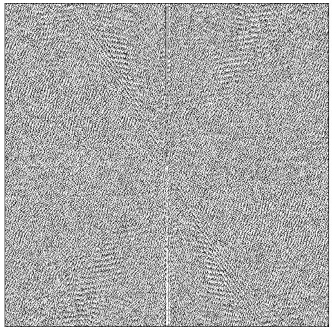


partie réelle



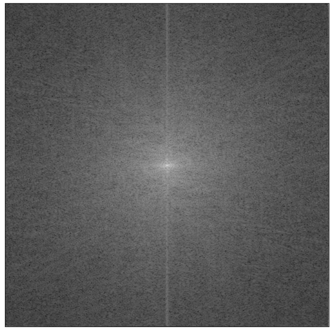
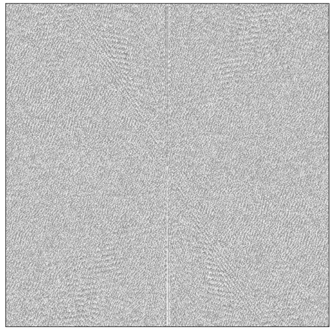
partie imaginaire

Cartésien $\rightarrow$ polaire

amplitude $\sqrt{Re^2 + Im^2}$ phase : $\phi = \mathrm{atan}(Im/Re)$

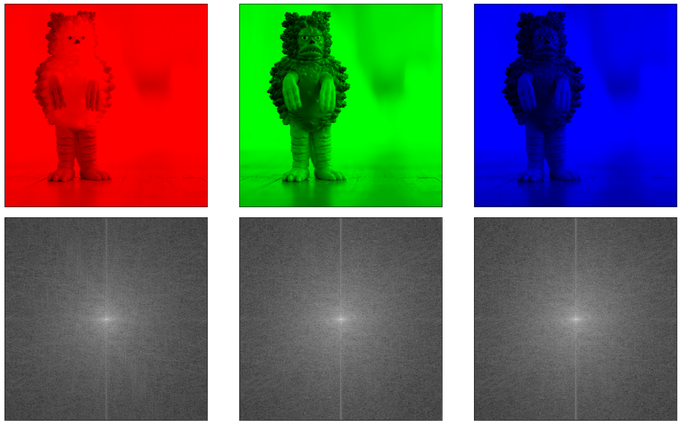
Affichage

$255\log(x+1)/max$ $255x/(2max+1)+127$

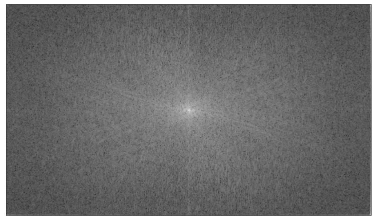
Et la couleur

Couleur RGB :



Analyse fréquentielle

On n'a plus peur de la transformée de Fourier

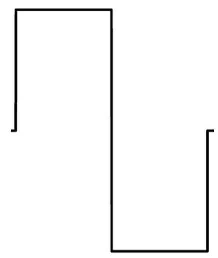
Ondelettes

Principe

- concept plutôt récent (∼1980)
- représentation spatiale et fréquentielle
- bases de fonction, plusieurs possibilités :
  - Haar
  - Morlet
  - Meyer
  - autres ...
- approche multirésolution

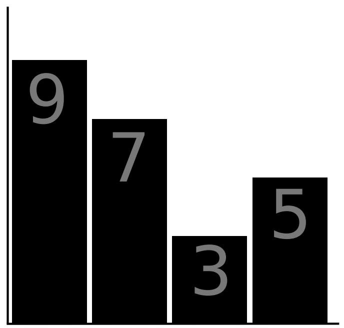
Ondelettes

Haar :



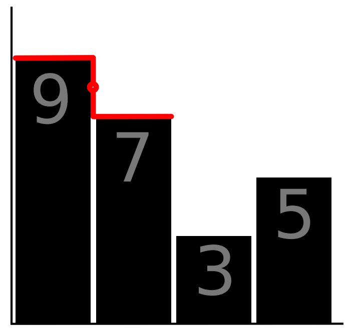
$$+1 \mid -1$$

Graphiquement



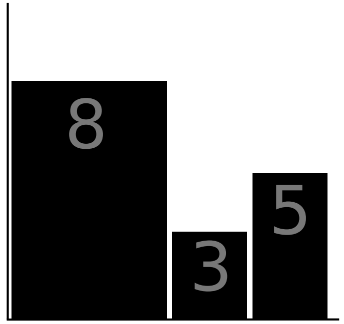
Code :

Graphiquement



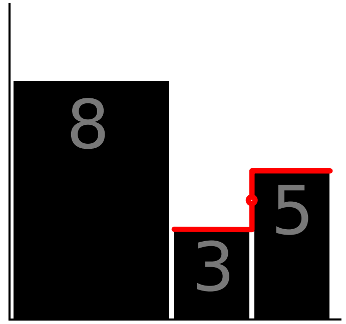
Code :

Graphiquement



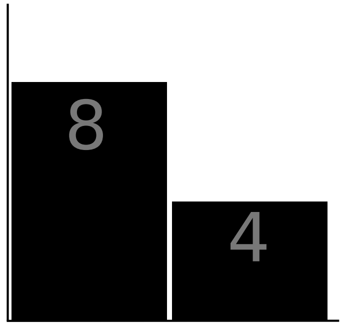
Code : 1

Graphiquement



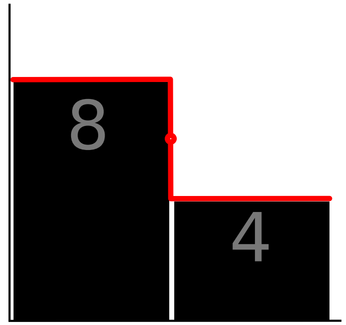
Code : 1

Graphiquement



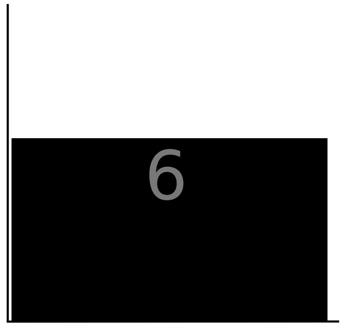
Code : $1 \ -1$

Graphiquement



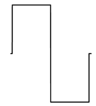
Code : $1 \ -1$

Graphiquement



Code : $1 \; -1 \quad 2 \quad 6$

Avec les mains



$+1 \mid -1$

Signal original

$9 \; 7 \; 3 \; 5$

résolution	moyennes	coefficients
1	9 7 3 5	-
2	8 4	1 -1
3	6	2

Avec les mains

résolution	moyennes	coefficients
1	9 7 3 5	-
2	8 4	1 -1
3	6	2

Résultat avec Haar :

signal original	signal transformé
9 7 3 5	6 2 1 -1

Avec les mains

Reconstruction du signal :

6
2
1 -1

Avec les mains

Reconstruction du signal :

6 6 6 6 6
2
1 -1

Avec les mains

Reconstruction du signal :

6 6 6 6 6
2
1 -1

Avec les mains

Reconstruction du signal :

6 6 6 6 6
2 8 8 4 4
1 -1

Avec les mains

Reconstruction du signal :

6 6 6 6 6
2 8 8 4 4
1 -1

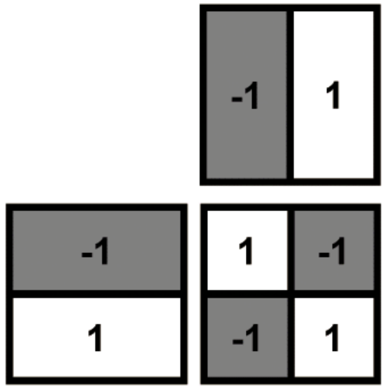
Avec les mains

Reconstruction du signal :

6	6 6 6 6
2	8 8 4 4
1 -1	9 7 3 5

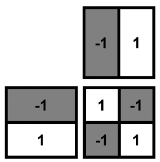
En 2d ?

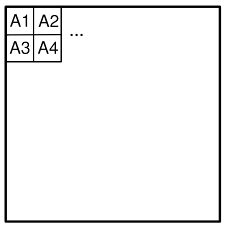
Haar :



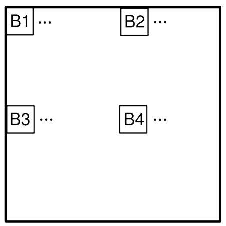
Pour les images

Haar :





Image



Haar

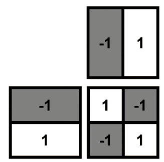
Transformation :

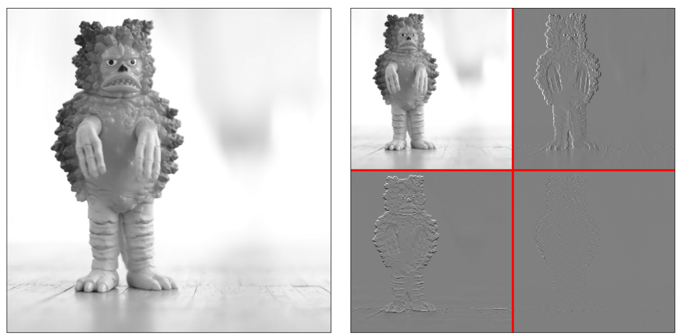
- $B1 = \frac{1}{4}(A1 + A2 + A3 + A4)$
- $B2 = \frac{1}{4}(A1 - A2 + A3 - A4)$
- $B3 = \frac{1}{4}(A1 + A2 - A3 - A4)$
- $B4 = \frac{1}{4}(A1 - A2 - A3 + A4)$

Transformation inverse :

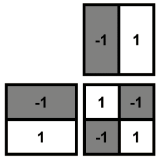
- $A1 = B1 + B2 + B3 + B4$
- $A2 = B1 - B2 + B3 - B4$
- $A3 = B1 + B2 - B3 - B4$
- $A4 = B1 - B2 - B3 + B4$

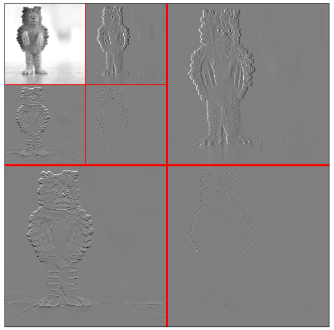
Pour les images



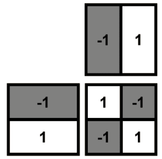


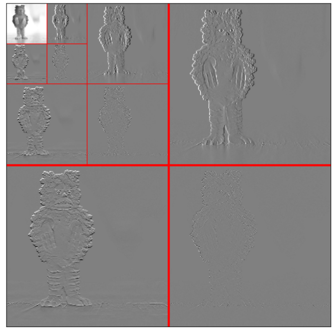
Pour les images





Pour les images

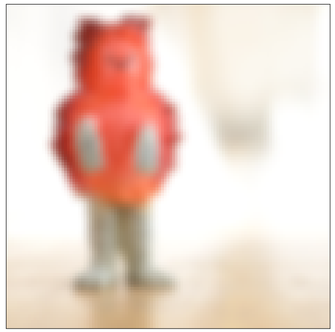


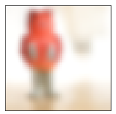


Pour les images

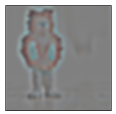
résidu

Pour les images





résidu



level 5

Pour les images

résidu level 5 level 4

Pour les images

résidu level 5 level 4 level 3

Pour les images

résidu level 5 level 4 level 3 level 2

Pour les images

résidu level 5 level 4 level 3 level 2 level 1

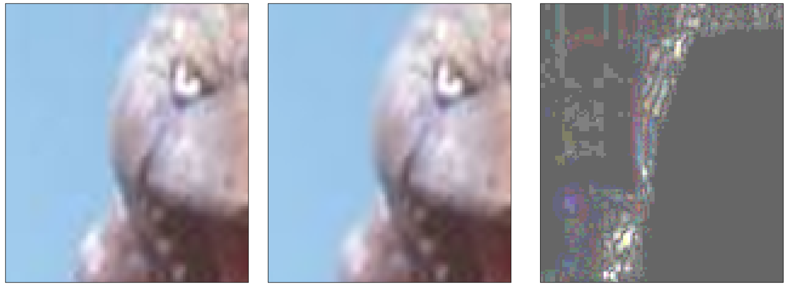
Pour les images

Débruitage : sur les niveaux 1 et 2

$\rightarrow$ suppression de quelques artefacts jpeg.

Pour les images

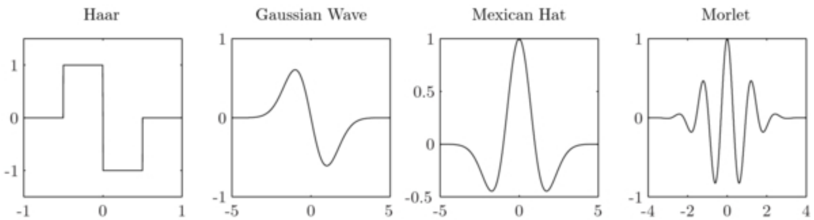
Débruitage : sur les niveaux 1 et 2



$\rightarrow$ suppression de quelques artefacts jpeg.

Ondelettes

Autres fonctions :



Ondelettes vs. Fourier

Fourier 1D :

- 1 somme sur la base de fonctions

Ondelettes 1D :

- 1 somme sur les niveaux de résolution
- 1 somme sur l'espace

Ondelettes

Applications :

- compression d'images
- filtre de bruit
- détection (de visages, etc.)
- comparaison d'images
- ...