Modélisation SAT

Décrire soigneusement les suppositions faites ainsi que les significations des variables et les clauses introduites.

Vous avez droit d'utiliser les macros $\mathsf{AtLeastOne}(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathsf{AtMostOne}(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathsf{AtLeast}\text{-}k(x_1, \ldots, x_n)$, et $\mathsf{AtMost}\text{-}k(x_1, \ldots, x_n)$ introduits au cours, où $x_1, \ldots, x_n$ sont des littéraux.

► **Exercice 1** ◄ Un juge doit former un jury d'au moins 3 personnes. Personne dans le jury ne doit connaître un autre membre. Il y a 6 candidats et ils se connaissent comme indiqué ci-dessous.

candidat	connaissances
1	2 3
2	1 3 4
3	1 2 6
4	2 5
5	4 6
6	3 5

▷ Modéliser ce problème en SAT.

Correction :

- Variables : $x_1, \ldots, x_6$ – $x_i = 1$ si le candidat i fait partie du jury.
- Contraintes :

$$\text{AtLeast-3}(x_1, \ldots, x_6)$$

  Ca représente 15 clauses : $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$, $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5)$, …, $(x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6)$
- Tracer le graphe des connaissances. Chaque arête donne lieu a une contrainte :

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2), (\neg x_1 \vee \neg x_3), (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$
$$(\neg x_2 \vee \neg x_4), (\neg x_3 \vee \neg x_6)$$
$$(\neg x_4 \vee \neg x_5), (\neg x_5 \vee \neg x_6)$$

▶ **Exercice 2** ◀ Le père Noël a N jouets : $J_1, J_2, \ldots, J_N$ qu'il veut donner à M enfants : $E_1, E_2, \ldots, E_M$. De plus, il possède pour chacun des enfants sa liste de vœux. Vous êtes les lutins chargés d'emballer les cadeaux et de choisir les destinataires en vous assurant que tous les enfants seront contents. Un enfant sera content s'il reçoit au moins un cadeau de sa liste. Tous les cadeaux doivent être distribués.

▷ Modéliser ce problème en SAT.

Correction : One part of the problem is to understand that the lists are part of the input and have to be given some notation. The other part is to work with a "generic" problem rather than with concrete numbers and lists. For $j = 1, \ldots, M$, define

$$I_j = \{i \in \{1, \ldots, N\} \mid i \text{ is on child } j\text{'s list}\}$$

We suppose that a child may receive toys that are not on his list as long as he gets at least one that is. Then, we're modelling an assignment $f\colon \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots M\}$ that has to "hit" every child's wish list.

Let x_{ij}, $i = 1, \ldots, N$, $j = \{1, \ldots, M\}$ be the variables with the intended interpretation $x_{ij} = 1$ if $f(i) = j$.

- For every $i = 1, \ldots, N$, $\mathsf{AtLeastOne}(x_{i1}, \ldots, x_{iM})$ (every gift is given to at least one child)
- For every $i = 1, \ldots, N$, $\mathsf{AtMostOne}(x_{i1}, \ldots, x_{iM})$ (every gift is given to at most one child)
- For every $j = 1, \ldots, M$, $\mathsf{AtLeastOne}(\{x_{ij} | i \in I_j\})$

Personnages du film "The Nightmare Before Christmas", Santa Clause est le 3ème à gauche.

▶ **Exercice 3** ◀ L'IGM est en train de préparer son emploi du temps pour le deuxième semestre. Les cours sont déjà affectés aux professeurs ; il y a une liste avec, pour chaque cours i, $1 \leq i \leq N$, une paire (P_i, G_i), indiquant que professeur P_i va enseigner le cours i au groupe G_i.

Chaque cours doit se dérouler à une heure précise et dans une salle spécifique, la même heure et salle chaque semaine. Un cours dure 2 heures et doit avoir lieu un jour, du lundi au vendredi, à l'un des créneaux fixes : 8h30–10h30, 10h45–12h45, 13h45–15h45 ou 16h00–18h00.

L'IGM dispose de K salles et veut planifier tous les cours à un créneau et une salle de façon à ce qu'il n'y ait pas de conflits ni pour les professeurs ni pour les groupes.

▷ Modéliser ce problème en SAT.

Correction : Same remark as in for the previous exercise. It is important to understand that (P_i, G_i) is the input. Assumptions:

- All groups are disjoint.
- There are $M = 20$ time slots, Monday-Friday and four slots per day.

We're modelling an injection $f: \{1, \dots N\} \to \{1, \dots M\} \times \{1, \dots, K\}$ with additional constraints depending on the profs and groups.

1. $x_{ijk} = 1$ si le cours i est affecté au créneau j dans la salle k
2. Pour tout $1 \leq i \leq N$: chaque cours est affecté à exactement un créneau horaire/salle :
$$\mathsf{AtLeastOne}(x_{i11}, ..., x_{iMK}) \text{ et } \mathsf{AtMostOne}(x_{i11}, ..., x_{iMK})$$
3. Pour tout j, k : (2) – Not more than one course in each time slot/room-pair
$$\mathsf{AtMostOne}(x_{1jk}, \dots, x_{Njk})$$
4. Pour chaque prof p, soit I_p l'ensemble d'indices des cours qu'il enseigne. Alors, pour tout créneau horaire $1 \leq j \leq M$:
$$\mathsf{AtMostOne}(\{x_{ijk} \mid i \in I_p, k = 1, \dots, K\})$$
5. Pour chaque groupe q, soit K_q l'ensemble d'indices des cours du groupe. Alors, pour tout créneau horaire $1 \leq j \leq M$:
$$\mathsf{AtMostOne}(\{x_{ijk} \mid i = 1, \dots, N, k \in K_q\})$$

▶ **Exercice 4** ◀ (★) Au cours, on a implanté le "macro" $\mathsf{AtMostOne}(x_1, \dots, x_n)$ par les clauses $(\neg x_i \vee \neg x_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$, soit $\binom{n}{2}$ clauses. Dans cet exercice, on va l'implanter par $O(n)$ clauses et $O(n)$ variables auxiliaires.

(a) Supposer que $n = 4$. On utilise les variables auxiliaires $y_1, \dots, y_4$ avec l'interprétation que y_i représente la somme des variables $x_1, \dots, x_i$. Comme y_4 ne peut être que 0 ou 1, il s'ensuit que $\sum_{i=1}^{4} x_i = y_4 \leq 1$. Introduire les contraintes nécessaires pour imposer cette interprétation.

(b) Généraliser la solution à un n quelconque. De combien de clauses et variables auxiliaires avez vous besoin ?

(c) Pour quelles valeurs de n cette solution utilise-t-elle moins de clauses que $\binom{n}{2}$?

Correction :

(a) Clauses $y_i \rightarrow y_{i+1} \equiv \neg y_i \vee y_{i+1}$ forces the y_i to be monotone. There are $n-1$ of these. Clauses $x_i \rightarrow (y_{i-1} = 0 \wedge y_i = 1) \equiv (\neg x_i \vee \neg y_{i-1}), (\neg x_i \vee y_i)$ forces the counter to be consistent around a value $x_i = 1$. There are $2n - 1$ of these.

(b) Number of clauses: $3n - 2$ and number of auxiliary variables: n.

It is possible to simply remove y_n and the two clauses involving this variable, this gives $3n - 4$ clauses and $n - 1$ auxiliary variables. It is not necessary to mention this unless someone notices.

(c) Better for $n \geq 7$. For $n = 7$, we have $3n - 2 = 19$ and $\binom{7}{2} = 21$.

The slightly improved version is also better for $n = 6$.

► **Exercice 5** ◄ (★) Jean-Pierre est un drôle de menteur. Il ment six jours de la semaine, mais le septième, il dit toujours la vérité. Sur trois jours consécutifs, il affirme les choses suivantes :

- Jour 1 : "Je mens le lundi et le mardi."
- Jour 2 : "Aujourd'hui, on est jeudi, samedi ou dimanche."
- Jour 3 : "Je mens le mercredi et le vendredi."

▷ Quel jour Jean-Pierre dit-il la vérité ? Modéliser ce problème en SAT.

Correction : First day is Sunday, he speaks the truth on Tuesday.

Idea for modelling: $x_i = 1$ if day i is Jour 1. $y_i = 1$ if he speaks the truth on day i. $\mathsf{AtLeastOne}(\{x_i\})$, $\mathsf{AtMostOne}(\{x_i\})$, $\mathsf{AtLeastOne}(\{y_i\})$, $\mathsf{AtMostOne}(\{y_i\})$

- for $i = 1, \dots, 7$: $x_i \rightarrow (y_i \leftrightarrow (\neg y_1 \wedge \neg y_2))$
- for $i = 1, \dots, 7$: $x_i \rightarrow (y_{i+1} \leftrightarrow (x_3 \vee x_5 \vee x_6))$
- for $i = 1, \dots, 7$: $x_i \rightarrow (y_{i+2} \leftrightarrow (\neg y_3 \wedge \neg y_5))$
