

Méthodes et modélisation pour l'optimisation M1 informatique

Examen – lundi 08 janvier 2018 14h00-16h00

Une feuille recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrices, ordinateurs et téléphones portables interdits. Ce sujet comporte 5 questions. La notation prendra en compte le soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. La ville de Jötunheim produit 4500 tonnes de déchets par jour. Il y a deux modes d'élimination de ces déchets : par incinération ou par mise en décharge. La ville dispose de trois incinérateurs (A, B et C) avec les caractéristiques du tableau ci-dessous.

incinérateur	capacité tonnes / jour	émissions par tonne incinérée	
		unités de dioxyde de soufre	unités de particules
A	1 200	250	20
B	800	150	30
C	1 000	220	24

La mise en décharge est beaucoup plus chère que l'incinération, donc la ville aimerait minimiser la quantité (en tonnes / jour) de déchets mis en décharge. Malheureusement, l'état a imposé des restrictions pour réduire les polluants des trois incinérateurs. Les émissions totales de dioxyde de soufre sont limitées à 400 000 unités par jour et les émissions totales de particules sont limitées à 50 000 unités par jour.

- Formuler ce problème comme un programme linéaire.
- Les techniciens ont réussi à augmenter la capacité de l'incinérateur B de 5%. En revanche, les tonnes de déchets au-delà de la capacité normale imposent des émissions de dioxyde qui sont 10% plus importantes que la normale. Modifier votre programme pour prendre en compte cette nouvelle donnée.

Exercice 2. On considère le programme linéaire suivant :

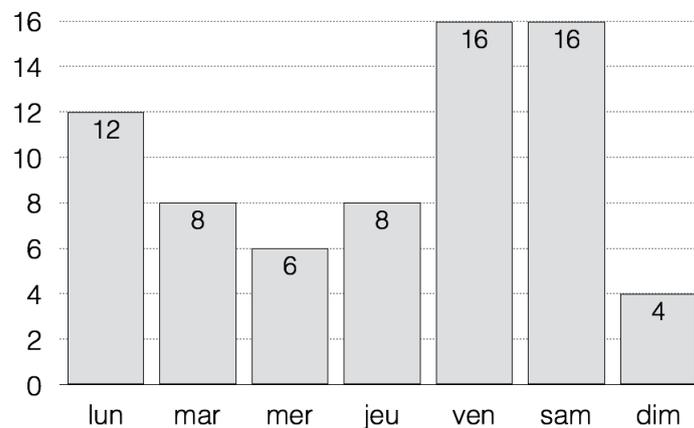
$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- Donner une forme équationnelle en introduisant des variables d'écart.
- Appliquer l'algorithme du simplexe. En cas de choix, la variable du plus petit indice entre dans la base. On prendra soin d'indiquer à chaque étape la base visitée par l'algorithme et la valeur de la fonction objectif.

Exercice 3. Résoudre par l'algorithme DPLL l'ensemble de clauses ci-dessous. Donner une affectation satisfaisante, s'il y en a une. On fera les choix de variable dans l'ordre lexicographique, x_1, x_2, \dots et on testera d'abord l'affectation à 1, puis à 0.

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 \vee \neg x_2), \quad (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_5), \quad (x_2 \vee x_5), \quad (\neg x_2 \vee \neg x_7), \quad (\neg x_2 \vee x_4 \vee x_6), \\ (x_3 \vee x_4), \quad (\neg x_4 \vee x_6), \quad (\neg x_5 \vee x_2), \quad (\neg x_5 \vee \neg x_6), \quad (\neg x_6 \vee \neg x_4) \end{array} \right\}$$

Exercice 4. Une compagnie de bus doit affecter un nombre de chauffeurs aux jours de la semaine. Le nombre de bus simultanément en circulation chaque jour est représenté dans le diagramme ci-dessous. Un chauffeur doit travailler quatre jours consécutifs par semaine. Par exemple, si un chauffeur commence sa semaine vendredi, alors il travaille vendredi, samedi, dimanche et lundi. Si une journée, il y a plus de chauffeurs que de bus en circulation, alors un ou plusieurs chauffeurs resteront stationnaires. On suppose que l'emploi du temps reste le même d'une semaine sur l'autre.



▷ Proposer une modélisation en SAT pour établir un emploi du temps qui couvre les bus en circulation chaque jour et utilise au plus 20 chauffeurs. Décrire soigneusement les variables de décision et les clauses introduites.

Vous avez droit d'utiliser les 'macros' AtLeastOne/AtLeast- k et AtMostOne/AtMost- k .

Exercice 5. Considérer un marché avec I fournisseurs, J acheteurs et K produits qui sont achetés et vendus. Le fournisseur i possède une quantité de S_{ik} du produit k et le vend pour un prix de A_{ik} euros par unité. L'acheteur j demande au plus D_{jk} unités du produit k et accepte d'acheter pour un prix de B_{jk} euros par unité.

Dans ce marché, vous êtes en charge de coupler les fournisseurs et les vendeurs : vous collectez toutes les informations de prix et d'offres et ensuite, vous affectez les fournisseurs aux acheteurs. Votre bénéfice est l'écart entre le prix d'achat et le prix de vente pour chaque unité du produit k que le fournisseur i vend à l'acheteur j .

- Formuler le problème de maximiser le bénéfice comme un programme linéaire.
- Supposer désormais que les fournisseurs et les vendeurs ne sont pas au même endroit. La capacité de transport entre le fournisseur i et le vendeur j est au plus U_{ij} unités. De plus, vous êtes obligé de payer le transport de tous les produits vendus par le fournisseur i au vendeur j , pour un coût de C_{ij} euros par unité. Modifier votre programme pour prendre en compte ces nouvelles conditions.

Fin du sujet