Méthodes et modélisation pour l'optimisation
Master 1

Examen – lundi 11 janvier 2015

Les instruments électroniques sont interdits. Les notes de cours sont autorisées. Ce sujet compte 5 questions. La durée de l'examen est 2h. La notation prendra en compte le soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. Un boulanger désire préparer trois types de crèmes (chocolat, caramel ou vanille). Le kilo de crème au chocolat peut être vendu avec un bénéfice de 40 euros, le kilo de crème caramel avec un bénéfice de 35 euros et le kilo de crème à la vanille avec un bénéfice de 20 euros. Chaque kilo de crème au chocolat demande 20 minutes de cuisson et 4 oeufs, chaque kilo de crème caramel demande 25 minutes de cuisson et 3 oeufs et chaque kilo crème à la vanille demande 40 minutes de cuisson et 1 oeuf. Le boulanger dispose de 8 heures de cuisson pour son four et de 30 oeufs.

1. Formulez un problème de programmation linéaire qui maximise le revenu du boulanger.
2. Pour que son étalage soit complet, le boulanger souhaite que chaque type de crème représente au moins 10% de sa production. Comment changer le programme linéaire pour tenir compte de cette nouvelle contrainte ?

Exercice 2. On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrl}
\max & x_1 + 2x_2 & \\
\text{tq} & x_1 + x_2 & \leq 6 \\
& x_1 + 3x_2 & \leq 8 \\
& -x_1 + x_2 & \leq 5 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

1. Donnez une forme équationnelle en introduisant des variables d'écart.
2. Appliquez la méthode du simplexe, en utilisant la variable de plus petit indice comme pivot en cas de choix. On prendra soin d'indiquer à chaque étape la base visitée par l'algorithme du simplexe et la valeur de la fonction objectif.

Exercice 3. Résoudre par l'algorithme DPLL les clauses de $\mathcal{F}$ ci-dessous. Donner une solution si les clauses sont simultanément satisfaisables. On fera les choix de variable dans l'ordre x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, et on testera d'abord l'affectation à 1, puis à 0.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \{&(x_1 \vee x_2), (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4), (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3), (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4), \\
&(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5), (\neg x_3 \vee x_4), (\neg x_3 \vee x_5), (\neg x_4 \vee \neg x_5)\}
\end{aligned}$$

Dans les exercices 4 et 5, vous avez droit d'utiliser les 'macros' AtLeast*,* AtMost *et* Exactly *introduites en cours.*

Exercice 4. Dans une (très petite) licence d'informatique, il y a 6 étudiants en L1 qu'on appelle F1, ..., F6 et 6 étudiants en L2 qu'on appelle P1, ..., P6. Les connaissances (supposées symétriques) entre les étudiants de L1 et les étudiants de L2 sont décrites dans le tableau ci-dessous.

	F1	F2	F3	F4	F5	F6
P1	✓		✓			
P2		✓		✓		
P3	✓			✓	✓	
P4			✓			
P5			✓		✓	
P6			✓		✓	✓

On souhaite créer des paires 'parrain'–'filleuls' entre les étudiants de L2 et les étudiants de L1 tel que chaque étudiant de L1 a *exactement* un parrain de L2, chaque étudiant de L2 a *exactement* un filleul de L1 et chaque étudiant de L1 connaît son parrain.

Proposer une modélisation en SAT de ce problème. Décrire soigneusement les variables et les clauses introduites.

Exercice 5. L'administrateur du M1 en informatique doit créer l'emploi du temps pour les soutenances des stages. Pour une soutenance il faut un étudiant, un jury composé par son tuteur et deux intervenants et une salle disponible. L'ensemble de tuteurs et l'ensemble d'intervenants sont disjoints. L'administrateur dispose des informations suivantes :

- une liste de paires étudiant–tuteur. Chaque étudiant apparaît sur la liste exactement une fois, mais un tuteur *peut* avoir plusieurs étudiants ;
- une liste d'intervenants, et pour chaque intervenant, une liste d'étudiants qui ont fait une stage correspondant aux connaissances de l'intervenant ;
- une liste de créneaux horaires, et pour chaque créneau, un nombre de salles disponibles.

L'administrateur doit, à chaque étudiant, affecter deux intervenants et un créneau horaire tels que :

1. pour chaque créneau horaire, le nombre de soutenances affectées est au plus le nombre de salles disponibles ;
2. chaque tuteur a au plus une soutenance à chaque créneau horaire donné ;
3. chaque intervenant a au plus une soutenance à chaque créneau horaire donné ;
4. un intervenant est dans un jury seulement si ses connaissances correspondent au sujet du stage.

De plus, pour équilibrer le travail des intervenants, on exige aussi que chaque intervenant s'occupe d'entre 2 et 5 soutenances au total.

Proposer une modélisation en SAT du calcul d'un emploi du temps satisfaisant toutes ces contraintes.

Fin du sujet