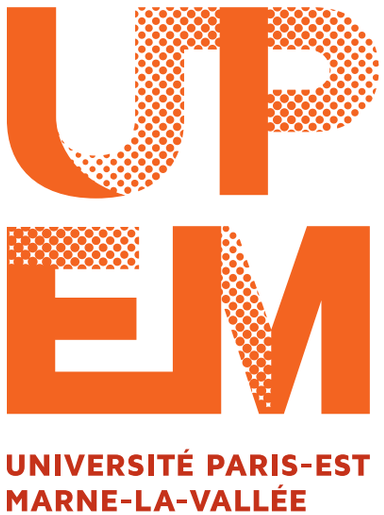
Méthodes et modélisation pour l'optimisation

M1 informatique, 2017–2018

06 — DPLL



INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE
ET D'INFORMATIQUE
GASPARD-MONGE

Algorithme DPLL

- Entrée : une formule en CNF
- Sortie : **SAT** si la formule est satisfaisable, **UNSAT** sinon
- Algorithme naïf : essayer toutes les 2^n affectations

$$f : \{x1, \ldots, xn\} \rightarrow \{0,1\}$$

- Problème NP-complet — en général, on ne peut pas faire (beaucoup) mieux.
- Amélioration : étape de raisonnement ajoutée pour éviter de considérer toutes les possibilités.

Propagation unitaire

$$(x_P),\ (\neg x_N),\ (\neg x_J \vee x_N),\ (x_P \vee x_J)$$

Si on veut satisfaire toutes les clauses, il faut satisfaire la clause (unitaire) (x_P)

$$\cancel{(x_P)},\ (\neg x_N),\ (\neg x_J \vee x_N),\ \cancel{(x_P \vee x_J)}$$

$$(\neg x_N),\ (\neg x_J \vee x_N)$$

Si on veut satisfaire toutes les clauses, il faut satisfaire la clause (unitaire) $(\neg x_N)$

$$\cancel{(\neg x_N)},\ (\neg x_J \vee \cancel{x_N})$$

$$(\neg x_J)$$

Si on veut satisfaire toutes les clauses, il faut satisfaire la clause (unitaire) $(\neg x_J)$

$$\cancel{(\neg x_J)}$$

C’est fini ! Toutes les clauses sont satisfaites

Affectation partielle : $x_P = 1 \quad x_N = 0 \quad x_J = 0$

Propagation unitaire

- Une **clause unitaire** est une clause (u) qui ne contient qu'un seul littéral ; u = x ou u = ¬x
- ( ) note **la clause vide**
- Une clause et satisfaite ssi au moins un littéral est vrai, donc ( ) est toujours **fausse**
- Une formule est satisfaite ssi toutes ses clauses sont satisfaites, donc la formule vide, { }, est toujours **vraie**

PU

- ***Entrée*** : un ensemble F de clauses
- ***Sortie*** : un ensemble F′ de clauses ;
  F′ étant satisfaisable ssi F est satisfaisable

F′ ⟵ F

While F′ contient une clause unitaire (u)

  supprimer toutes ***occurrences*** de ¬u de F′

  supprimer toutes ***clauses*** qui contiennent u de F′

Return F′

Exemple PU

Effectuer la propagation unitaire dans l'ensemble de clauses suivant

~~(x1)~~, ~~(x1 ∨ x2 ∨ ¬x3)~~, ~~(¬x1 ∨ x3 ∨ x4)~~, ~~(¬x1 ∨ ¬x2)~~,
~~(¬x1 ∨ ¬x2 ∨ x3)~~, (x3 ∨ ~~¬x4~~ ∨ x5), ~~(¬x1 ∨ x2 ∨ x4)~~

On supprime une occurrence de ¬u avec (~~¬u~~ …)

On supprime une clause qui contient u avec ~~(u)~~

Clause unitaire : (x1) (¬x2) (x4)

Affectation : x1 = 1 x2 = 0 x4 = 1

Clauses restantes : (x3 ∨ x5)

Exemple PU

Effectuer la propagation unitaire dans l'ensemble de clauses suivant

(x1), (¬x1 ∨ x2), (¬x1 ∨ x3 ∨ x4), (¬x1 ∨ ¬x2)

On supprime une occurrence de ¬u avec (✗ …)

On supprime une clause qui contient u avec (———)

Clause unitaire : (x1) (x2)

Affectation : x1 = 1 x2 = 1

Clause vide, donc l'ensemble n'est pas satisfaisable !

Clauses restantes : (x3 ∨ x4), ( )

A retenir

- Il peut y avoir un choix entre deux clauses unitaires différentes. Dans ce cas, l'ordre de choix n'a pas d'importance : le résultat sera le même.
- La PU n'affecte pas toujours toutes les variables.
- Si la PU rend une clause vide, alors l'ensemble de clauses restantes n'est pas satisfaisable, donc l'ensemble de clauses d'origine n'était pas satisfaisable non plus.
- Donc, la PU peut :
  - trouver une affectation satisfaisante
  - trouver une affectation partielle
  - assurer que l'ensemble de clauses n'est pas satisfaisable

DPLL

- ***Entrée*** : un ensemble F de clauses
- ***Sortie*** : "SAT" ou "UNSAT"

F ⟵ **PU**(F)

If F contient la clause vide, **then**

    Return "UNSAT"

If F est vide, **then**

    Return "SAT"

x ⟵ une variable non-affectée

If DPLL(F ∪ {(x)}) == "SAT", **then**

    Return "SAT"

Else

    Return DPLL(F ∪ {(¬x)})

Exemple DPLL

Résoudre la formule suivante par l'algorithme DPLL

$F = \{(x1 \vee \neg x2 \vee \neg x3), (\neg x1 \vee \neg x2 \vee \neg x3), (\neg x1 \vee x2 \vee \neg x3), (x1 \vee x3)\}$

- **Pile : vide**

  $F_1 \longleftarrow$ PU(F) ne modifie rien

  Choix de variable : x1

- **Pile : x1 = 1**

  $F_2 \longleftarrow PU(F_1 \cup \{(x1)\}) = \{$~~$(x1 \vee \neg x2 \vee \neg x3)$~~, $(\neg$~~$x1$~~$ \vee \neg x2 \vee \neg x3)$,
  $(\neg$~~$x1$~~$ \vee x2 \vee \neg x3)$, ~~$(x1 \vee x3)$~~, ~~$(x1)$~~$\}$

  Choix de variable : x2

- **Pile : x1 = 1, x2 = 1**

  $F_3 \longleftarrow PU(F_2 \cup \{(x2)\}) = \{$~~$(\neg x2 \vee \neg x3)$~~, ~~$(x2 \vee \neg x3)$~~, ~~$(x2)$~~$\}$

  PU affecte : x3 = 0

  $F_3 = \{\ \}$, donc la formule est satisfaite par : x1 = 1, x2 = 1, x3 = 0

Exemples

Résoudre les formules suivantes par l'algorithme DPLL

$$F = \{ (\neg x1 \vee x2), (\neg x1 \vee \neg x2 \vee \neg x3), (\neg x2 \vee x3) \}$$

$$F = \{ (x1 \vee x2), (\neg x1 \vee \neg x2), (\neg x2 \vee x3), (\neg x2 \vee \neg x3), (x3 \vee x4), (\neg x4 \vee x5), (\neg x3 \vee x4), (\neg x4 \vee \neg x5) \}$$

A retenir

- Différentes règles de choix de variable possibles
  - Nous utilisons l'ordre lexicographique : x1, …, xn et testons d'abord l'affectation à 1, puis à 0
- Sur la pile, on met les affectations faites par la PU entre crochets :
  - **Pile : x1 = 1, [x2 = 1], x3 = 1**
- En trouvant une clause vide dans F, on "backtrack" :
  - on dépile jusqu'à une affectation x = 1 (faite par un choix de variable, non par la PU) et on la remplace par x = 0 ;
  - si on vide la pile, on renvoie "UNSAT"

Améliorations à DPLL

- Les solveurs d'aujourd'hui ne ressemblent plus vraiment à l'algorithme DPLL
- Conflict-Driven Clause Learning (CDCL)
  ``apprentissage de clauses guidé par des conflits"
  - quand l'algorithme DPLL fait backtrack, trouver **une raison concise** (exprimée en clauses) et l'utiliser pour éviter d'entrer dans une situation similaire **dans le futur** !
- Redémarrage fréquent pour éviter de se retrouver coincé
  - garder les clauses apprises pour le démarrage

Examen le 8 janvier

- Sur les notions abordées aux cours, TD et TP
- 1 feuille recto-verso manuscrite autorisée
- Téléphone, calculatrice, machine interdits