

Méthodes et modélisation pour l'optimisation

M1 informatique, 2017–2018

02 — Modélisation programmation linéaire



UNIVERSITÉ PARIS-EST
MARNE-LA-VALLÉE



INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE
ET D'INFORMATIQUE
GASPARD-MONGE

Un programme linéaire

fonction objectif

variables de décision : x, y

$$\max 150 \cdot x + 100 \cdot y$$

contraintes

$$10 \cdot x + 10 \cdot y \leq 350$$

$$30 \cdot x + 10 \cdot y \leq 750$$

$$10 \cdot x + 20 \cdot y \leq 600$$

contraintes
de non-négativité

$$x, y \geq 0$$

x, y entiers

contraintes d'intégralité

attention : problème NP dur !

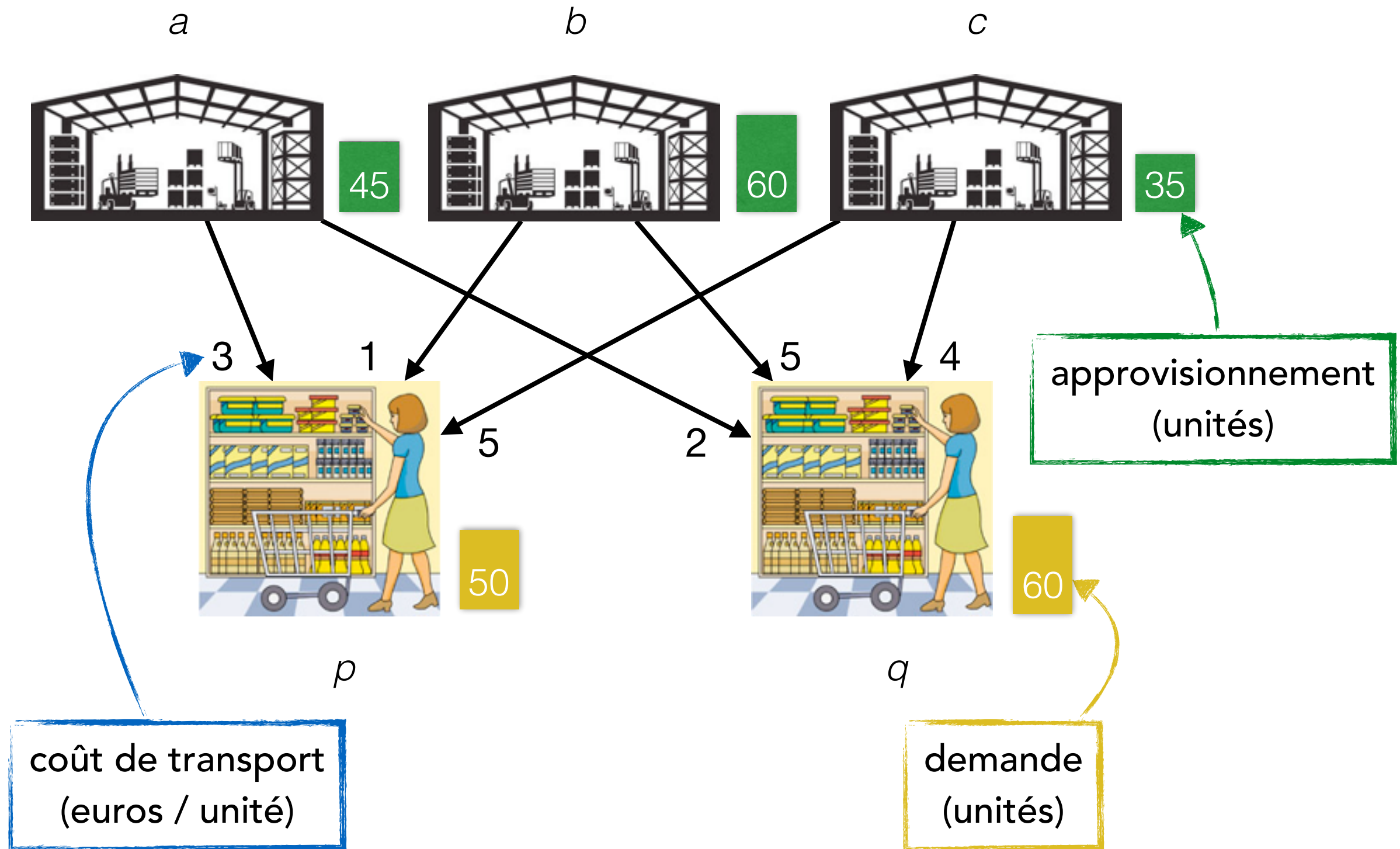
Régime optimisé

- ▶ *Le conseil supérieur d'hygiène publique français* souhaite améliorer le contenu en vitamine A, vitamine C et fibre des repas du CROUS. Le CROUS aimerait rectifier ce problème en proposant un hors d'oeuvre à base de **carottes**, de **choux** et de **cornichons**.
- ▶ Le tableau ci-dessous représente la quantité de vitamines et de fibres prescrite par portion, leur contenu dans les aliments et le prix au kg des aliments.
- ▶ Aider le CROUS à trouver le hors d'oeuvre le moins cher satisfaisant les contraintes.

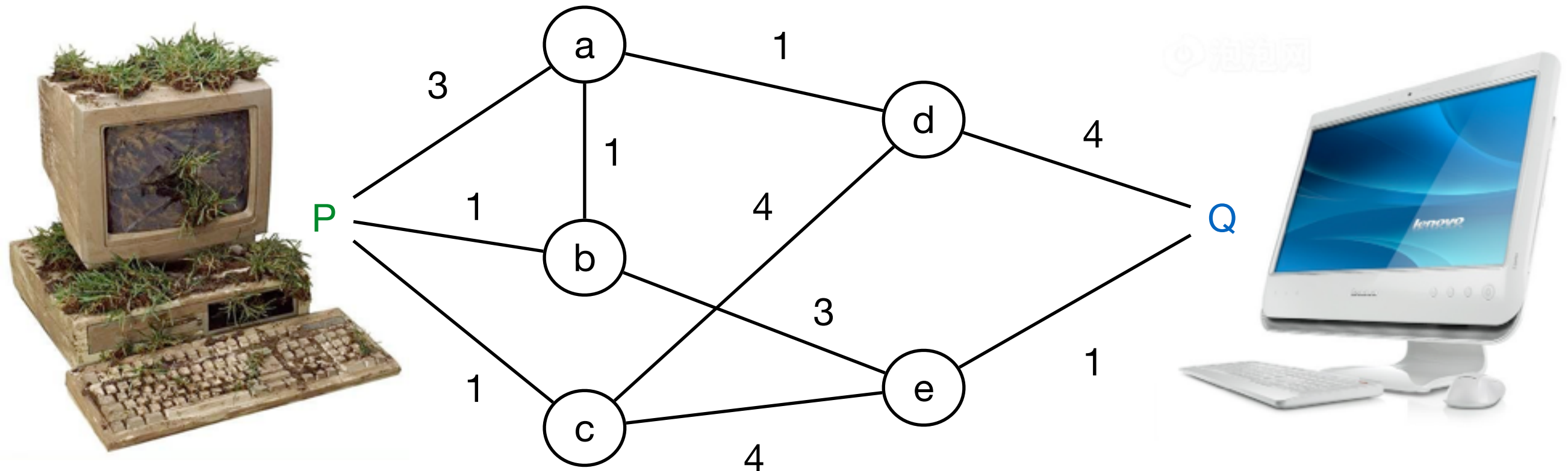
	carotte	choux	cornichon	demande par portion	AJR
Vitamine A (mg/kg)	35	0,5	0,5	0,5 mg	0,8 mg
Vitamine C (mg/kg)	60	300	10	15 mg	80 mg
Fibre (g/kg)	30	20	10	4 g	25 g
coût (€/kg)	0,75	0,50	0,15	-	-

¹Apports journaliers recommandés selon l'Arrêté du 3 décembre 1993 portant application du décret no 93-1130 du 27 septembre 1993 concernant l'étiquetage relatif aux qualités nutritionnelles des denrées alimentaires, annexe 1 modifiée au 24 février 2010.

Problème de transport

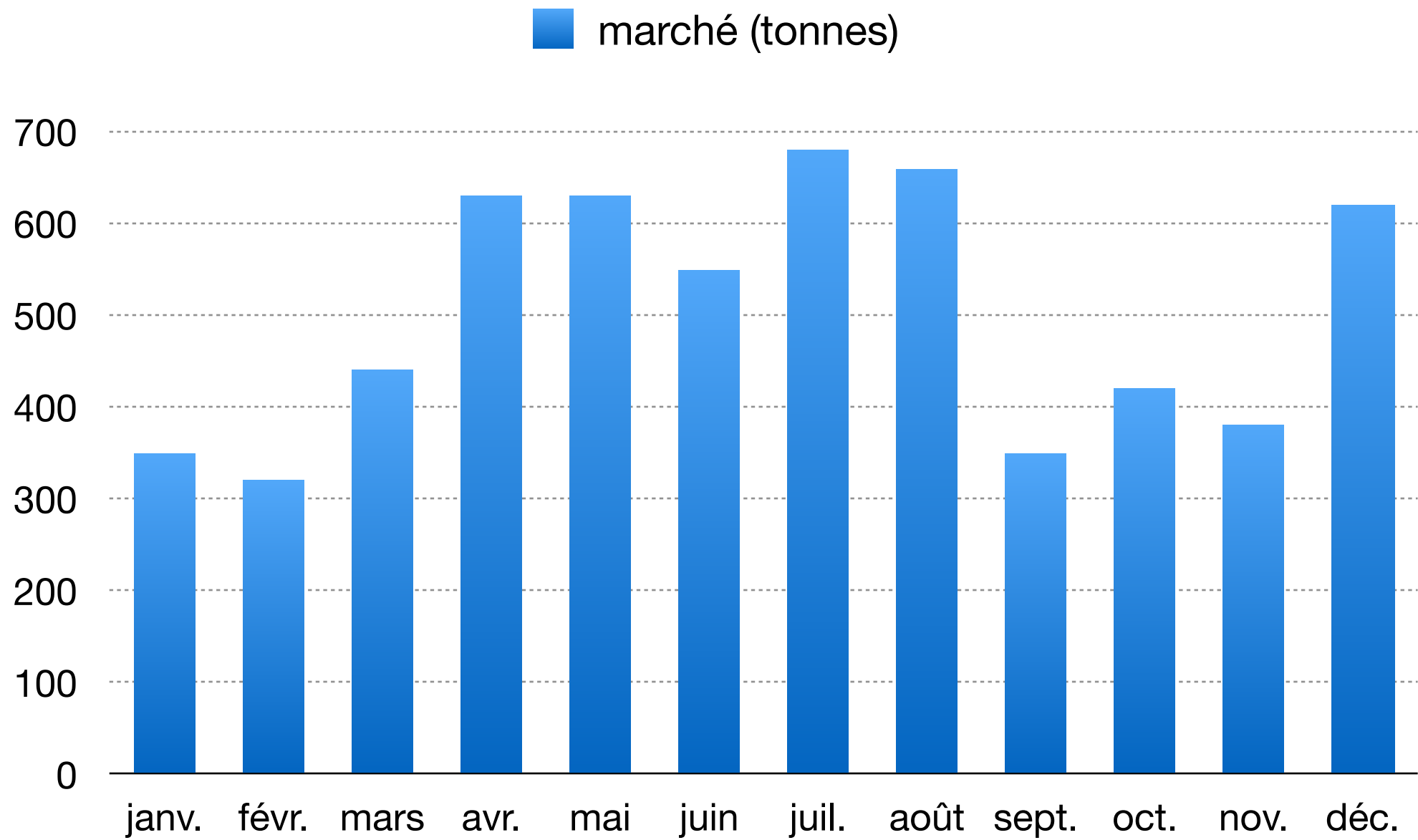


Flot dans un réseau

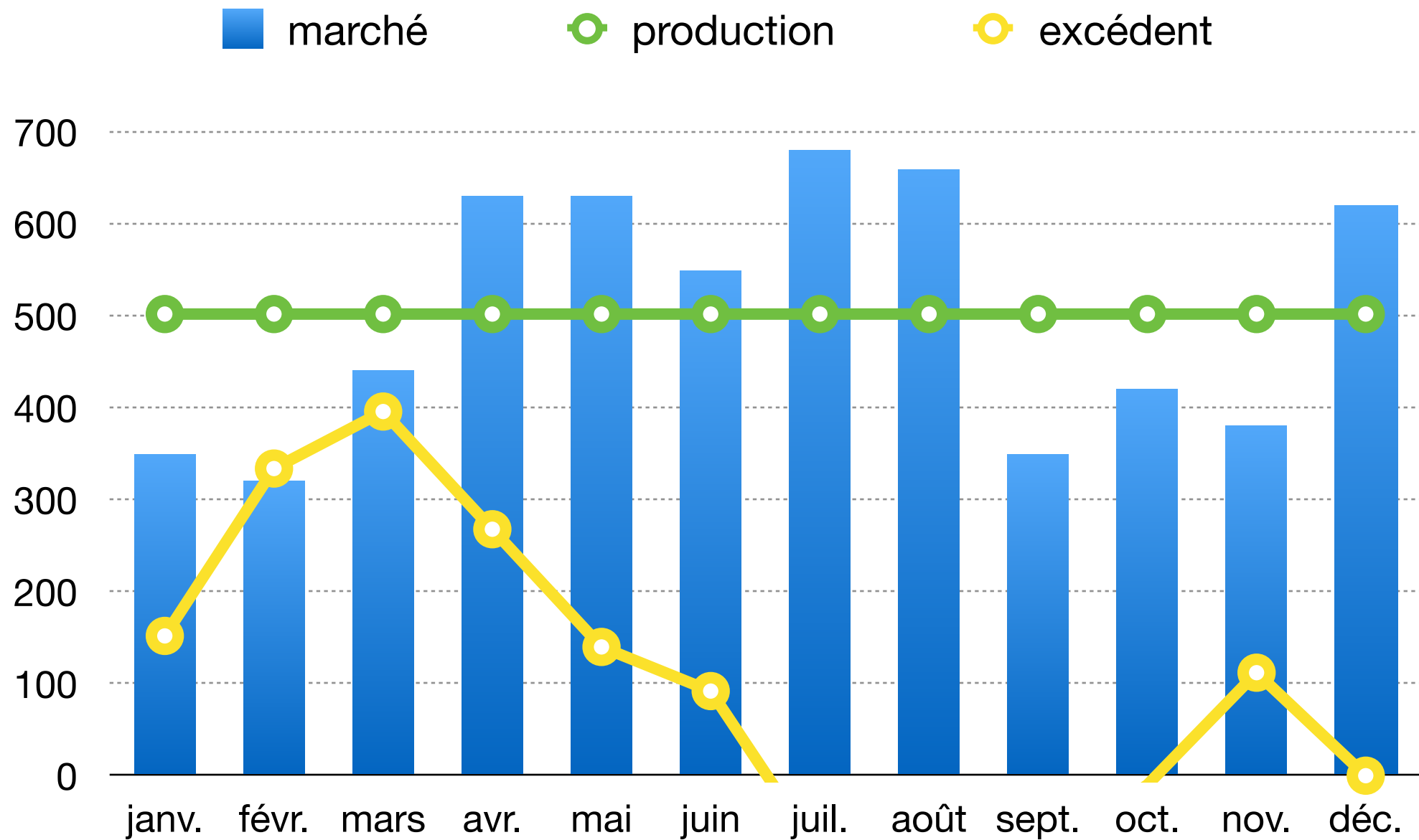


- ▶ On veut transférer les contenus d'un ordinateur vers un autre.
- ▶ Les nombres sur les liens indiquent leur débit maximum (Mo/s).
- ▶ Chaque lien est bidirectionnel mais ne peut être utilisé que dans un sens à la fois.
- ▶ Quel est le débit maximum de l'ordinateur P vers l'ordinateur Q ?

Le marchand de glace



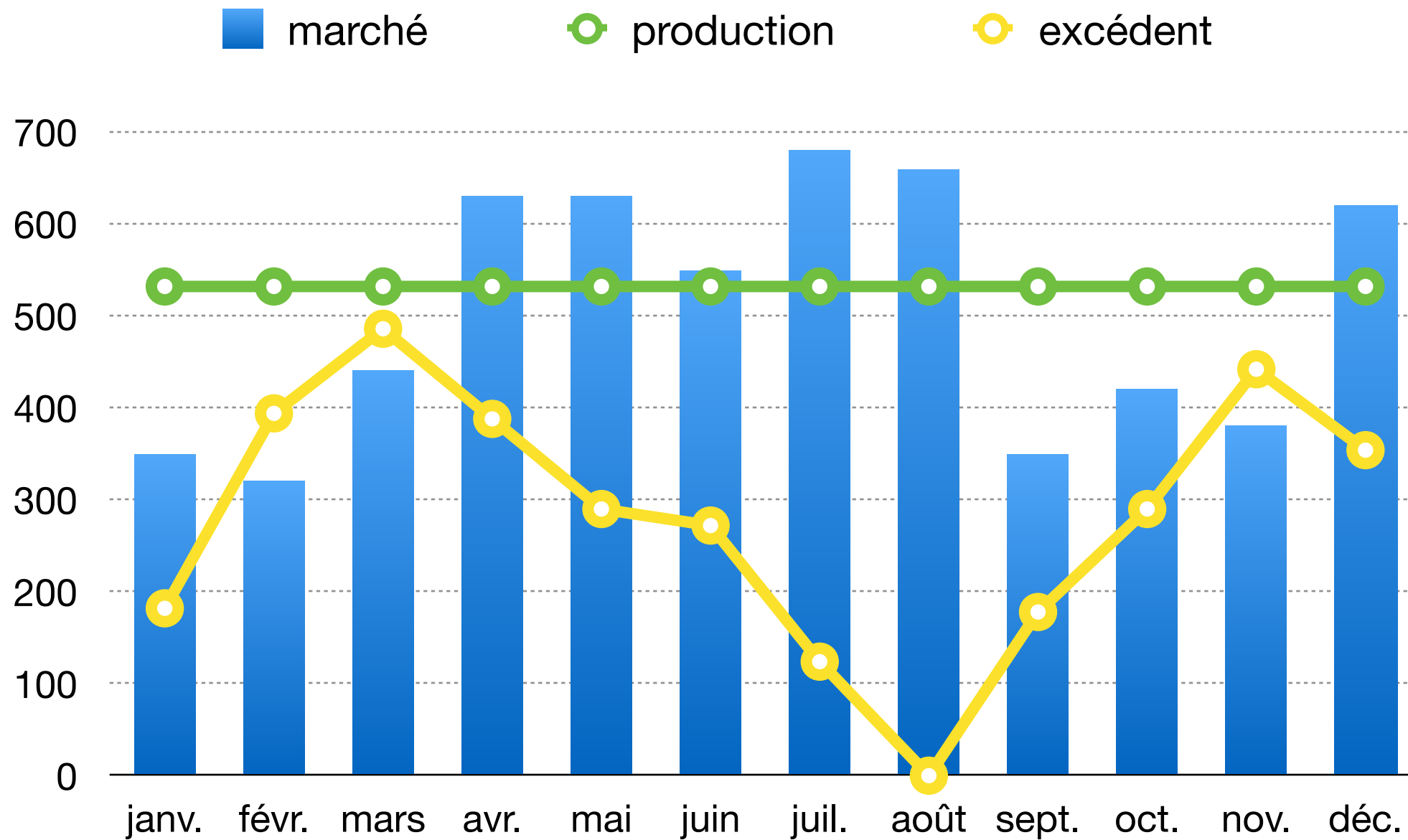
Le marchand de glace



Déficit de glace en juillet !



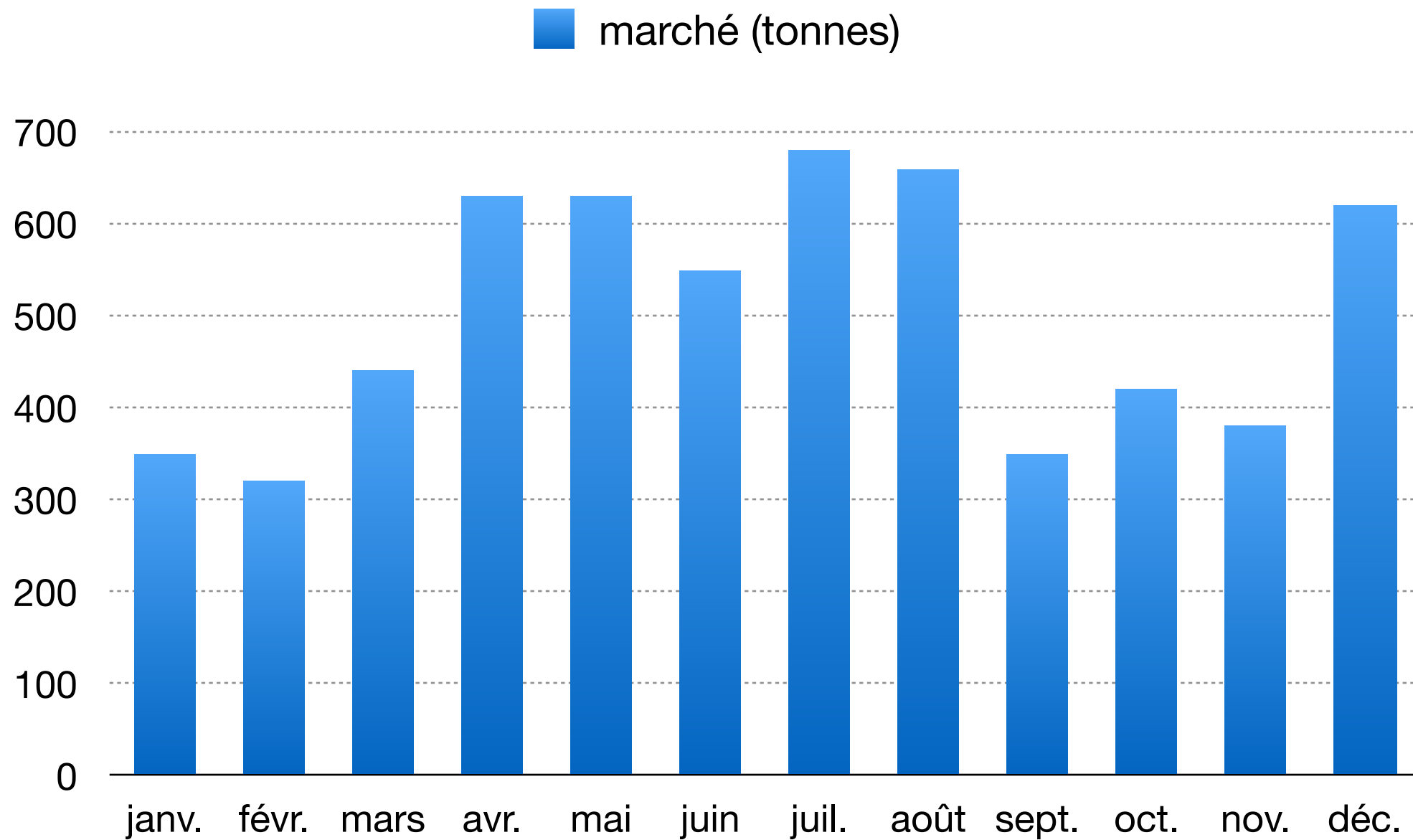
Le marchand de glace



Excédent à la fin de l'année !



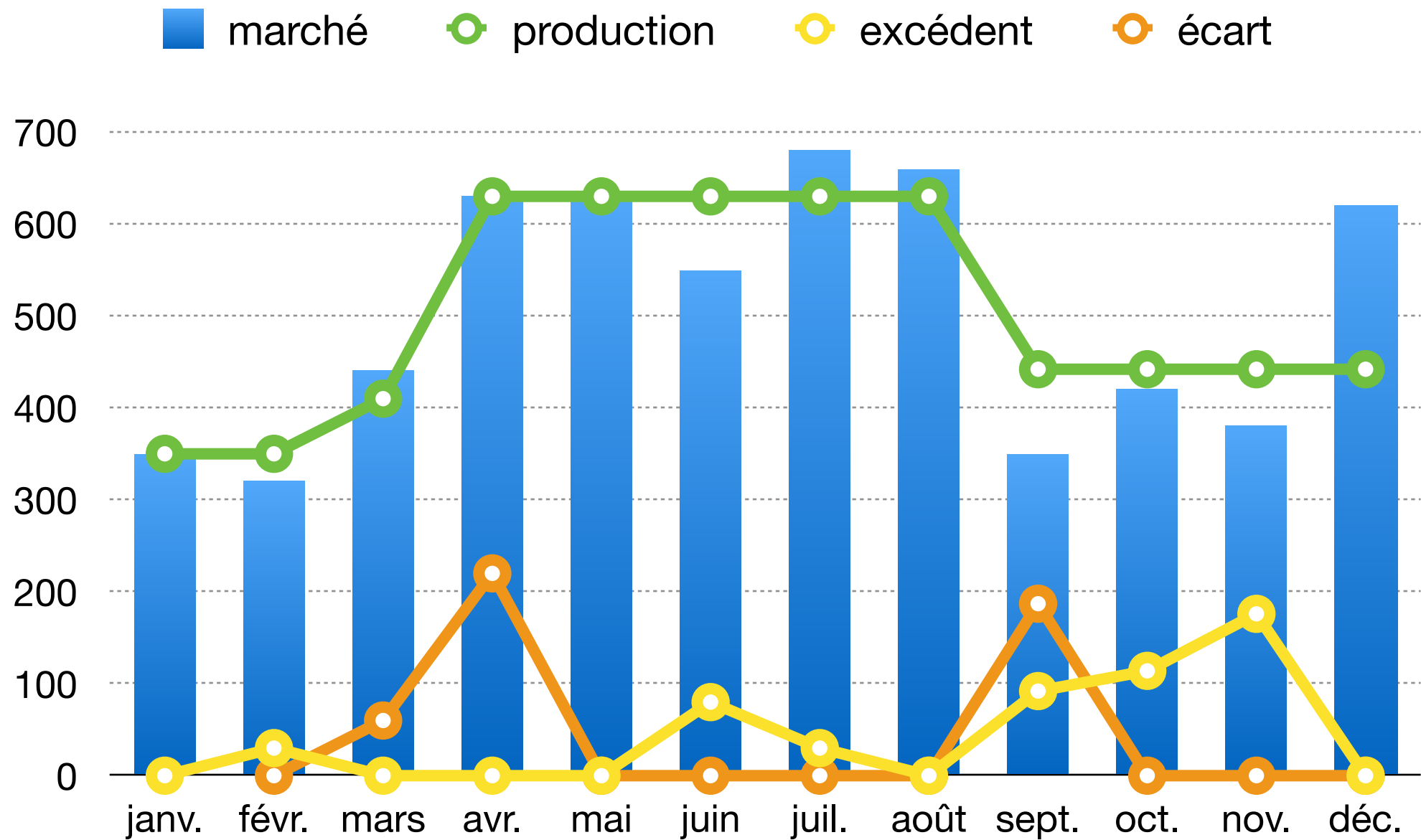
Le marchand de glace



- ▶ Un écart de production d'un mois sur l'autre coûte 50€ / tonne.
- ▶ Le stockage de l'excédent coûte 20€ / tonne et mois.
- ▶ Le marchand cherche à minimiser le coût total.



Le marchand de glace



Coût total : 33 875 euros



Problème générique

- ▶ Il y a **n** produits **P₁**, ..., **P_n** qui peuvent être fabriqués
 - ▶ le produit **P_i** se vend **c_i** euros, $i = 1, \dots, n$
- ▶ Il y a **m** ressources **Q₁**, ..., **Q_m** utilisées pour la fabrication
 - ▶ la disponibilité de la ressource **Q_j** est **b_j**, $j = 1, \dots, m$
- ▶ La production d'une unité du produit **P_i** utilise une quantité **a_{ij}** de la ressource **Q_j**
- ▶ Planifier la production pour **maximiser** le bénéfice
- ▶ *Suppositions*
 - ▶ *on peut vendre tout ce qu'on produit*
 - ▶ *on peut produire des fractions de chaque produit*

Problème générique

n produits
 m ressources

$$\max c^T x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

A matrice $R^{m \times n}$
b vecteur R^m
c vecteur R^n
A, b, c non négatifs

- ▶ une forme générale d'un problème de production
- ▶ permet l'automatisation de la résolution

