

RANG DES MATRICES (COURS 8)

JCN

1

1. INTRODUCTION

2 Ce document doit idéalement avoir été lu avant la séance pour pouvoir se concentrer
3 sur les questions des uns et des autres pendant le temps imparti.

4 Comme en cours usuel, une question précise est une question qui a une chance de
5 recevoir une réponse utile, donc mentionnez l'endroit précis qui pose problème, c'est
6 pour cela que les pages et les lignes du document ont été numérotées.

7

2. LIEN MATRICES - APPLICATIONS LINÉAIRES

8 2.1. **Généralités.** Toute fonction d'un espace E dans un espace F est définie par
9 l'image de tous les éléments de l'espace de départ E . Quand la fonction est une
10 *application linéaire*, la donnée de l'image de *tous* les éléments de E est inutilement
11 redondante : on a vu au dernier cours qu'il suffit de donner l'image d'une base B de
12 E pour pouvoir reconstituer l'application linéaire en entier.

13 Il faut en fait être un peu plus précis que cela : il faut non seulement se donner
14 une base B de E pour en calculer une image par f mais aussi une base C de l'espace
15 d'arrivée F pour écrire les images de B par f dans la base C .

16 Autrement dit, si $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ et $C = \{c_1, c_2\}$, la *matrice* de f de la base B
17 vers la base C , notée $mat_{B,C}(f)$, se calcule en décomposant en combinaison linéaire
18 de c_1 et c_2 les trois images $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$.

19 En pratique, comme l'espace de départ est de dimension 3 et l'espace d'arrivée
20 de dimension 2, la matrice d'une telle application linéaire sera donc une matrice à
21 3 colonnes et 2 lignes. Si $f(b_1) = \alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2$, la première colonne de la matrice
22 contiendra α_{11} en première case et α_{21} en deuxième. Et ainsi de suite pour $f(b_2)$ qui
23 donnera la deuxième colonne et $f(b_3)$ qui donnera la troisième colonne.

24 Prenons un exemple pour fixer les idées. Je me donne l'application linéaire suiv-
25 ante :

$$(1) \quad f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x + 3y - z \\ 2x - y + z \end{cases}$$

26 ainsi que les bases

$$(2) \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad C = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{array} \right)$$

27 Pour calculer la matrice de f de la base B dans la base C , on doit calculer f de
 28 chacun des trois vecteurs de B et les écrire comme combinaisons linéaires uniques (C
 29 est une base de \mathbb{R}^2) des éléments de C .

30 Dans le cas présent, on calcule que $f(b_1) = (3, 2)$ puis (par résolution de système)
 31 que $f(b_1) = -9c_1 + 4c_2$. De même, on a $f(b_2) = (3, 4) = -3c_1 + 2c_2$ et $f(b_3) =$
 32 $(1, 8) = 19c_1 - 6c_2$. Ainsi,

$$(3) \quad \text{mat}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 19 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

33 On observera que toute application linéaire a plusieurs matrices possibles puisqu'on
 34 peut choisir librement les bases B et C . Il est donc incorrect de parler de *la* matrice
 35 de f et mieux vaut parler d'*une* matrice de f ou, mieux encore, de *la matrice de f*
 36 *dans les bases B et C .*

37 **2.2. Exemples de changement de base.** Prenons un nouvel exemple pour refaire
 38 des calculs de matrices. Je me donne l'application linéaire suivante :

$$(4) \quad f : \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \mapsto \begin{cases} x + 2y + 3z \\ -y + z \\ -x - 3y + 8z \end{cases}$$

39 Je me donne maintenant quelques bases de \mathbb{R}^3 :

$$(5) \quad B = C = (e_1, e_2, e_3), \text{ la base canonique}$$

$$(6) \quad B' = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad C' = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

41 Alors la matrice de f de B dans C est facile à calculer : c'est l'expression des
 42 images des vecteurs de B dans la base C . Ici, on calcule facilement $f(e_1) = (1, 0, -1)$,
 43 $f(e_2) = (2, -1, -3)$, $f(e_3) = (3, 1, 8)$ qui sont égaux à leurs développements dans la
 44 base d'arrivée C puisque C est la base canonique.

45 On a donc

$$(7) \quad \text{mat}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

46 On calcule presque aussi facilement

$$(8) \quad \text{mat}_{B',C}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

47 en évaluant f sur les éléments de B' puis en les développant dans la base d'arrivée
 48 C (pour laquelle il n'y a rien à faire puisque c'est la base canonique).

49 2.2.1. *Exemples encore faisables à la main.* On peut encore calculer d'autres matri-
 50 ces, cette fois en devant travailler un peu plus, par exemple $mat_{B,C'}(f)$. Dans ce
 51 cas, comme on l'a dit plus haut, il faut développer les images des vecteurs de B
 52 en combinaisons linéaires des vecteurs de C' . À moins d'avoir un raccourci (base
 53 triangulaire par exemple), cela revient à résoudre un système. Dans le cas présent,
 54 on peut le faire facilement de tête mais j'encourage chacun à écrire à côté le petit
 55 système (triangulaire) permettant de retrouver les réponses.

56 On a

$$(9) \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right|$$

57 et de même

$$(10) \quad \left| \begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ -3 \end{array} \right| = +3 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| + 2 \left| \begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right|$$

58 et

$$(11) \quad \left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 8 \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| - 7 \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right| + 8 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right|$$

59 En recopiant ces coefficients à leur place dans la matrice, on trouve ainsi

$$(12) \quad mat_{B,C'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

60 Ce cas-là se faisait encore assez facilement mais si la base d'arrivée avait été C'' :

$$(13) \quad C'' = \left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 9 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 16 \end{array} \right| \right),$$

61 l'exercice aurait été nettement plus ardu car il aurait fallu développer les images des
 62 vecteurs de B dans la base C'' .

63 2.3. **Méthode par calcul matriciel.** Il existe en réalité un moyen un peu plus
 64 efficace que la méthode pédestre pour calculer $mat_{B,C'}(f)$. Pour aller de B à C' par
 65 f , on peut décomposer le trajet en deux étapes : aller d'abord de B à C par f puis de
 66 C à C' par id . Notre trajet complet est la *composée* de ces deux morceaux. Quand
 67 on calcule $f \circ g$, on évalue d'abord g , donc ici, cette composition se traduit comme
 68 suit :

$$(14) \quad mat_{B,C'}(f) = mat_{C,C'}(id) mat_{B,C}(f).$$

69 En général, calculer la matrice de l'identité d'une base dans une autre est compliqué
 70 aussi, sauf qu'on a un raccourci :

$$(15) \quad mat_{C,C'}(id) mat_{C',C}(id) = Id, \iff mat_{C,C'}(id) = mat_{C',C}(id)^{-1},$$

71 autrement dit que $mat_{C,C'}(id)$ est l'inverse de $mat_{C',C}(id)$ et qu'on a un algorithme
 72 pour inverser une matrice, cela s'appelle le *pivot de Gauss*, vu en TD.

73 Avec ces techniques, on calcule sans problème :

$$(16) \quad mat_{C',C}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{puis, par pivot,} \quad mat_{C,C'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

74 Et on en déduit

$$(17) \quad \begin{aligned} mat_{B,C'}(f) &= mat_{C,C'}(id) mat_{B,C}(f) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

75 qui est bien la matrice qu'on avait trouvée par un autre processus en équation (12).

76 **2.4. *LA* formule du changement de base.** Plus généralement, on a la formule
 77 suivante :

$$(18) \quad mat_{B',C'}(f) = mat_{C,C'}(id) mat_{B,C}(f) mat_{B',B}(id),$$

78 qui s'applique en toute situation.

79 Typiquement, pour calculer $mat_{B',C'}(f)$ avec les données numériques ci-dessus, on
 80 trouve

$$(19) \quad \begin{aligned} mat_{B',C'}(f) &= mat_{C,C'}(id) mat_{B,C}(f) mat_{B',B}(id) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 14 \\ -4 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 14 \\ -4 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

81 où on retrouve au passage toutes les matrices calculées précédemment.

82

3. LES MATRICES INVERSIBLES

83 J'aimerais insister sur un point qu'on a rapidement évoqué tout à l'heure : les
 84 matrices inversibles.

85 On a dit plus haut que toute application linéaire était représentée par beaucoup de
 86 matrices différentes. Mais inversement, des applications linéaires peuvent avoir même
 87 matrice. Par exemple, l'application linéaire g dont la matrice de B dans C est donnée
 88 dans l'équation (12) n'est pas la même que f et pourtant $mat_{B,C}(g) = mat_{B,C'}(f)$.
 89 Autrement dit, une matrice ne décrit pas *fidèlement* son application linéaire car elle
 90 en code beaucoup.

91 Venons-en aux matrices inversibles. On a dit que les matrices d'une base dans une
 92 autre étaient inversibles puisqu'elles vérifiaient la relation (15). Inversement, une
 93 matrice quelconque M inversible (sur laquelle le pivot va jusqu'au bout) peut être
 94 vue comme la matrice d'un changement de base $mat_{B'',B}(id)$ où on peut supposer
 95 que B est la base canonique. Dans ce cas, les colonnes de M sont exactement les
 96 vecteurs de B'' .

97 Autrement dit, il y a bijection entre les bases B'' d'un espace vectoriel et les
 98 matrices inversibles : on envoie B'' sur $mat_{B'',B}(id)$ ou on lit les colonnes de la matrice
 99 pour retrouver la base. Dit encore autrement, on a désormais un outil efficace pour
 100 tester si une famille est une base : on écrit ses vecteurs en colonne dans une matrice
 101 et on teste si cette matrice est inversible (pour l'instant par pivot mais d'ici peu par
 102 le déterminant).

103 4. MATRICES ÉQUIVALENTES

104 Sans vouloir trop développer ce thème qui aurait été un cours à part entière si
 105 les conditions avaient été différentes (c-à-d normales), faisons un petit détour par les
 106 matrices équivalentes.

107 Deux matrices M et M' sont dites *équivalentes* s'il existe une application linéaire
 108 dont toutes deux sont des matrices. Vu ce qu'on a dit sur les applications linéaires
 109 et leurs matrices associées, cela revient exactement à dire qu'il existe deux matrices
 110 inversibles P et Q qui vérifient

$$(20) \quad M' = PMQ.$$

111 Pour illustrer la définition, étant donnée une application linéaire et une de ses
 112 matrices M , les autres de ses matrices sont exactement les matrices équivalentes à
 113 M . D'où la question : quelle est la matrice la plus simple qui code une application
 114 linéaire donnée ?

115 La réponse requiert un peu plus de raisonnement que de calcul et elle est au final
 116 très simple. Comme ce point-là est plus un point culturel qui aide à comprendre
 117 l'articulation des notions à venir plus qu'un point directement utile et opérationnel,
 118 j'encourage les lecteurs à passer en première lecture ce passage pour y revenir plus
 119 tard. C'est l'avantage d'un document écrit par rapport à un cours : on peut zapper
 120 et y revenir ensuite !

121 4.1. **Cas des matrices 3×3 .** Pour fixer les idées, on se donne une application linéaire
 122 f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . On choisit comme première base de départ la base canonique B et
 123 on calcule l'image de B par f .

124 Les trois vecteurs obtenus (c_1, c_2, c_3) peuvent ou non former une base. S'ils forment
 125 une base, on choisit ces vecteurs comme base de l'espace d'arrivée. La matrice de f
 126 sera alors la matrice identité puisque $f(e_1) = c_1$, $f(e_2) = c_2$, $f(e_3) = c_3$.

127 S'ils ne forment pas une base mais que leur famille engendre un espace vectoriel
 128 de dimension deux, on en sélectionne deux, libres entre eux, par exemple c_1 et c_3 .
 129 Alors si on écrit $mat_{(e_1, e_3, e_2), (c_1, c_3, x_2)}(f)$ où x_2 est n'importe quel vecteur qui complète
 130 la famille (c_1, c_3) en une base (attention à l'ordre des vecteurs), cette matrice a une

131 expression simple :

$$(21) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

132 où a et b sont des valeurs. Ce n'est pas encore la matrice la plus simple de f car
 133 on peut se débrouiller pour mettre à 0 ces deux valeurs : on remplace e_2 comme
 134 troisième vecteur de la base de départ par $e'_2 := e_2 - ae_1 - be_3$. On vérifie d'abord
 135 que (e_1, e_3, e'_2) est une base de \mathbb{R}^3 (facile) puis que $f(e'_2) = (0, 0, 0)$ (facile aussi) et
 136 on en déduit :

$$(22) \quad \text{mat}_{(e_1, e_3, e'_2), (c_1, c_3, x_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

137 On pourrait refaire le même raisonnement dans le cas où $\dim(\text{Vect}(c_1, c_2, c_3)) = 1$,
 138 auquel cas il faudrait travailler un peu plus pour montrer qu'il existe une base de
 139 l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée dans lesquelles la matrice est :

$$(23) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

140 Le dernier cas où $\dim(\text{Vect}(c_1, c_2, c_3)) = 0$ est sans intérêt car la matrice d'arrivée
 141 est la matrice n'ayant que des zéros.

142 Conclusion : quelle que soit une application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , l'une des
 143 quatre matrices suivantes est une matrice de f :

$$(24) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

144 **4.2. Le cas général.** Dans ce cas comme dans le cas général, la matrice la plus
 145 simple équivalente à une matrice donnée est une matrice dont le début de la diagonale
 146 contient des 1 et tout le reste des zéros.

147 Le nombre de 1 s'appelle le *rang* de la matrice et le pivot de Gauss est (à nouveau)
 148 le bon algorithme quand on cherche à déterminer le rang d'une matrice.

149 Moyennant quoi, l'information du rang d'une application linéaire est une infor-
 150 mation utile mais qui ne décrit pas vraiment tout ce qu'on voudrait savoir. C'est
 151 pourquoi on va se restreindre à un ensemble plus petit de matrices décrivant une
 152 application linéaire donnée : les matrices semblables.

153

5. LES MATRICES SEMBLABLES

154 On a bien compris que regarder toutes les matrices $\text{mat}_{B,C}(f)$ pour toutes bases B
 155 et C était un peu limitant car des tas d'applications linéaires ont en fait les mêmes
 156 matrices (matrices équivalentes). L'idée est donc d'essayer de garder au maximum
 157 ce qui caractérise l'application linéaire, par exemple si c'est une symétrie, une pro-
 158 jection, une homothétie suivant certaines directions (miroirs déformants), *etc.* Pour

159 des raisons qu'il sera difficile de rendre par écrit, le bon sous-ensemble de matrices
 160 équivalentes qu'il faut regarder s'appelle l'ensemble des matrices semblables.

161 Dans le cas des matrices non carrées, on peut faire des choses mais c'est le cas des
 162 matrices carrées qui va particulièrement nous intéresser.

163 **Definition 5.1.** Une application linéaire d'un espace E dans lui-même est appelée
 164 endomorphisme de E .

165 Dans ce cas, ses matrices sont carrées (même nombre de lignes que de colonnes).

166 Soit f un endomorphisme et M sa matrice de la base canonique dans elle-même.
 167 Les autres matrices de f qu'on va regarder sont les matrices de f d'une autre base
 168 dans celle-ci. Si on se rapporte à la formule du changement de base (18), cela revient
 169 à la définition suivante :

170 **Definition 5.2.** Soit M une matrice carrée. Les matrices semblables à M sont les
 171 matrices de la forme

$$(25) \quad M' = P^{-1}MP$$

172 où P est une matrice inversible quelconque.

173 Le calcul de la matrice la plus simple semblable à une application linéaire ou
 174 à une matrice est nettement plus complexe que pour les matrices équivalentes et va
 175 prendre un peu de temps. Quand on sera chanceux, on trouvera une matrice *diagonale*
 176 (matrice avec des zéros hors de la diagonale). Pour aujourd'hui, je vais traiter un
 177 exemple de *diagonalisation*, c'est-à-dire user d'une méthode artisanale pour trouver
 178 une matrice diagonale semblable à la matrice choisie. D'ici peu, nous aurons toutes
 179 les techniques pour rendre algorithmique cette méthode. Et, pour ceux qui tiennent
 180 vraiment à sortir du cadre du programme du cours, de décider si une matrice est
 181 diagonalisable ou non.

182 **5.1. Un exemple de diagonalisation.** On prétend que la matrice suivante

$$(26) \quad M = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 12 & 5 & 0 \\ 18 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

183 est la matrice d'une symétrie. Comment retrouver ses axes ?

184 L'idée directrice est la suivante : on considère M comme la matrice de B dans B
 185 d'une application linéaire f . Comment caractériser à l'aide de f l'axe de symétrie
 186 (les points qui restent inchangés, dits points fixes), et l'axe suivant lequel on fait la
 187 symétrie (points envoyés sur leurs opposés) ?

188 Eh bien, c'est assez simple : les points fixes sont exactement ceux qui vérifient
 189 $f(x) = x$ et ceux suivant lesquels la symétrie s'opère vérifient $f(x) = -x$. Sur les
 190 matrices, cela s'écrit comme

$$(27) \quad M.X = X \quad \text{ou} \quad M.X = -X$$

191 où X est un vecteur d'inconnues $X = (x, y, z)$.

192 Trouver les axes revient donc à résoudre deux équations qu'on peut aussi réécrire
193 sous la forme

$$(28) \quad (M - I).X = 0 \quad \text{et} \quad (M + I).X = 0,$$

194 où I est la matrice identité (1 sur la diagonale, 0 ailleurs).

195 Il s'agit donc une nouvelle fois de systèmes à résoudre dans le cadre du cours
196 d'algèbre...

197 5.1.1. *Cas* $(M - I)X = 0$. L'équation $MX = X$ ou $(M - I)X = 0$ s'écrit

$$(29) \quad \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 12 & 4 & 0 \\ 18 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

198 Le système est donc

$$(30) \quad \begin{cases} -6x - 2y = 0 \\ 12x + 4y = 0 \\ 18x + 6y = 0. \end{cases}$$

199 Ces trois équations sont proportionnelles, donc le système est équivalent à l'une
200 d'entre elles, par exemple $3x + y = 0$ (une fois divisé la deuxième par 4). L'ensemble
201 des solutions est un sous-espace vectoriel de R^3 et on a déjà plusieurs fois trouvé une
202 base d'un tel espace :

$$(31) \quad \{(x, y, z) | 3x + y = 0\} = \{(x, -3x, z)\} = \{x \cdot (1, -3, 0) + z \cdot (0, 0, 1)\} \\ = Vect(\{(1, -3, 0), (0, 0, 1)\}).$$

203 C'est un espace vectoriel de dimension 2, donc un plan P de \mathbb{R}^2 . C'est le plan de
204 symétrie de M .

205 5.1.2. *Cas* $(M + I)X = 0$. Maintenant, pour trouver l'axe parallèlement auquel
206 s'opère la symétrie, on résout l'autre équation : $MX = -X$ ou $(M + I)X = 0$
207 s'écrit

$$(32) \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 12 & 6 & 0 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

208 Le système est donc

$$(33) \quad \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ 12x + 6y = 0 \\ 18x + 6y + 2z = 0. \end{cases}$$

209 Les deux premières équations sont clairement proportionnelles. On a donc le
210 système équivalent :

$$(34) \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 9x + 3y + z = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -9x - 3y = -3x. \end{cases}$$

211 L'ensemble des solutions du système est donc

$$(35) \quad \{(x, y, z) | y = -2x, z = -3x\} = \{(x, -2x, -3x)\} = Vect((1, -2, -3)).$$

212 C'est un espace vectoriel de dimension 1, donc une droite D de \mathbb{R}^3 .

213 5.1.3. *Bilan du calcul.* D'après les calculs précédents, on peut désormais affirmer que
214 M est la symétrie par rapport au plan P suivant la direction de la droite D .

215 En termes de calcul matriciel, on vient de trouver trois vecteurs ($c_1 = (1, -3, 0)$, $c_2 =$
216 $(0, 0, 1)$, $c_3 = (1, -2, -3)$) qui vérifient respectivement $f(c_1) = c_1$, $f(c_2) = c_2$ et
217 $f(c_3) = -c_3$ (c'était les équations les définissant). Pour des raisons d'espaces vecto-
218 riels en somme directe, ces trois vecteurs forment une base (on peut aussi le vérifier
219 directement). On a donc une base de \mathbb{R}^3 donc on connaît les images par f .

220 Alors que vaut $M' = \text{mat}_{C,C}(f)$? Par définition, elle est très simple :

$$(36) \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

221 On a donc résolu la question de trouver la matrice semblable la plus simple associée
222 à M .

223 Pour relier M à M' , il faut réutiliser la formule générale du changement de base,
224 la formule (18). Dans ce cas, on trouve

$$(37) \quad \text{mat}_{C,C}(f) = \text{mat}_{B,C}(id) \text{mat}_{B,B}(f) \text{mat}_{C,B}(id),$$

225 ou encore

$$(38) \quad \text{mat}_{B,B}(f) = \text{mat}_{C,B}(id) \text{mat}_{C,C}(f) \text{mat}_{B,C}(id).$$

226 On connaît $\text{mat}_{C,B}(id)$ puisque B est la base canonique. On peut calculer son inverse
227 $\text{mat}_{B,C}(id)$ par pivot (exercice laissé au lecteur) et chacun est invité à vérifier la
228 cohérence des résultats :

$$(39) \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 12 & 5 & 0 \\ 18 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

229 5.1.4. *Un peu de vocabulaire pour finir.* Les vecteurs qui vérifient $f(x) = \lambda.x$ sont
230 dits *vecteurs propres* de f associés à la *valeur propre* λ . L'espace des vecteurs x tels
231 que $f(x) = \lambda.x$ est *l'espace propre* associé à λ .

232 Une matrice est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, autrement
233 dit s'il existe une base composée uniquement de vecteurs propres.

234 Il est à noter, et on commencera notre prochain cours par cela, que λ est valeur
235 propre d'une matrice M si et seulement si $(M - \lambda I)X = 0$ a des solutions autres que
236 le vecteur nul, c'est-à-dire si la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible.