

# LA DIAGONALISATION (COURS 10)

JCN

## 1. INTRODUCTION

Ce document devra avoir été lu avant la séance. Le texte ne fait que 3 pages sans les compléments mais s'appuie sur tous les cours précédents.

Comme en cours usuel, une question précise est une question qui a une chance de recevoir une réponse utile, donc mentionnez l'endroit précis qui pose problème, c'est pour cela que les pages et les lignes du document ont été numérotées.

Pour le reste, ceci est notre 10<sup>e</sup> séance soit l'avant-dernière. La dernière sera comme de coutume une séance de révision/questions sur tout le programme.

## 2. BILAN DES COURS PRÉCÉDENTS

Au cours précédent, on a discuté du déterminant et de ses applications, notamment à la diagonalisation de matrices qu'on avait esquissé au cours  $n - 2$ .

On a fait quelques exemples concrets et comme la méthode est toujours la même, je vais commencer par la rappeler complètement avant de passer aux divers résultats théoriques, raccourcis et méthodes annexes.

## 3. DIAGONALISATION DES MATRICES

L'algorithme pour diagonaliser une matrice  $M$  (algorithme qui peut rater puisque toute matrice n'est pas diagonalisable) est le suivant :

- Calculer le polynôme caractéristique de  $M$  (c'est le déterminant de  $M - \lambda Id$ ),
- Factoriser le polynôme caractéristique  $P$ ,
- Pour chaque racine de  $P$ , calculer son espace propre, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs  $X$  qui vérifient  $(M - \lambda Id).X = 0$ .
- Si la somme des dimensions des espaces propres vaut la taille de la matrice, en extraire une base pour chaque espace propre. Puis remettre ensemble toutes les informations : écrire d'une part la matrice diagonale des valeurs propres et d'autre part la matrice des vecteurs propres correspondants. Ce sont les *éléments propres* de  $M$ .

Nous avons déjà vu plusieurs exemples de diagonalisation en cours, je vous encourage donc à vous y reporter pour y (re)voir les différentes étapes de l'algorithme (paragraphe 5 du cours des déterminants par exemple).

30

4. TESTER SI  $M$  EST DIAGONALISABLE OU NON

31 Regardons maintenant chaque étape de l'algorithme et voyons où il peut échouer.

32 Le calcul du polynôme caractéristique  $P$  se fait sans problème, c'est un déterminant,  
33 on ne fait que des multiplications et des additions, tout va bien.

34 **4.1. Factoriser le polynôme caractéristique.** Pour factoriser  $P$ , là, on a un  
35 problème parce qu'il n'existe aucune formule (et mieux, il a été démontré au XIX<sup>e</sup>  
36 siècle qu'il ne pouvait pas y avoir de formule) donnant les racines d'un polynôme à  
37 partir de ses coefficients. Puisque c'est mathématiquement impossible, il faut admet-  
38 tre qu'on n'a pas le choix et que si on nous demande de diagonaliser une matrice,  
39 c'est qu'on doit pouvoir se débrouiller avec les méthodes classiques, donc chercher  
40 une racine évidente (entière entre -2 et 2) ou faire un discriminant comme au lycée.  
41 Dans le monde réel, il existe des méthodes numériques, autrement dit approchées  
42 pour diagonaliser les matrices. Elles sont inapplicables à la main.

43 **4.2. Calculer les espaces propres.** Si on a franchi l'étape de détermination des  
44 racines de  $P$ , ce qui est censé arriver en TD/examen, on peut calculer sans problème  
45 les espaces propres car il s'agit de résoudre un système et de trouver l'ensemble (infini)  
46 des solutions.

47 En revanche, ce qui n'est pas garanti, c'est que l'espace propre d'une valeur propre  
48  $\lambda$  donnée soit de dimension égale à la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $P$  (le nombre  
49 de fois que  $x - \lambda$  est un facteur de  $P$ ).

50 Une seule chose est certaine : on a défini les valeurs propres pour que que le  
51 déterminant de  $M - \lambda Id$  soit nul, ce qui veut dire que le système  $(M - \lambda Id)X = 0$   
52 a une infinité de solutions. Donc l'espace propre est au moins de dimension 1 pour  
53 toute valeur propre.

54 **4.3. Tout remettre ensemble : la question de la dimension totale.** Vient  
55 maintenant la dernière étape : tout regrouper pour écrire d'un côté la matrice diago-  
56 nale (les valeurs propres avec leurs multiplicités) et de l'autre la matrice des vecteurs  
57 propres associés.

58 Pour que  $M$  soit diagonalisable, il faut que la matrice des vecteurs propres soit  
59 inversible, autrement dit que les vecteurs propres choisis forment une base. Et c'est  
60 là que se trouve le problème de la diagonalisation : parfois on manque de vecteurs  
61 propres pour en faire une base et dans ce cas, on ne peut pas diagonaliser  $M$ . C'est  
62 ce qui s'est passé pour la matrice  $2 \times 2$  étudiée à la fin du dernier cours.

63 Récapitulons la situation : une valeur propre de multiplicité  $m$  nous fournit un  
64 espace propre de dimension  $k$ , autrement dit contribue pour  $k$  éléments dans la  
65 matrice des vecteurs propres quand on en extrait une base. On peut démontrer que  
66  $k$  ne peut pas excéder  $m$ , autrement dit que l'espace propre n'est jamais plus grand  
67 en dimension que la multiplicité de sa valeur propre. Dans ce cas, si on part de  
68 valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  de multiplicités respectives  $(m_1, \dots, m_p)$  et qu'on veut  
69 une base de vecteurs propres propres, *chaque valeur propre* doit fournir un espace  
70 propre de dimension égale à sa multiplicité. C'est ce que j'avais signalé dans mes  
71 remarques conclusives au dernier cours : [...] vérifier que la dimension de chaque

72 espace propre est égal à la multiplicité de la valeur propre correspondante dans le  
73 polynôme caractéristique suffit [...]

74 D'où un critère simple pour montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable :  
75 trouver une de ses valeurs propres dont la dimension de l'espace propre est strictement  
76 inférieure à sa multiplicité. On a dit aussi plus haut que l'espace propre de toute  
77 valeur propre ne pouvait pas être réduit au vecteur nul, donc ce critère de non-  
78 diagonalisabilité ne peut être obtenu que si la valeur propre a une multiplicité au  
79 moins 2 dans le polynôme caractéristique. Si tout ce paragraphe n'est pas clair pour  
80 vous, faites ce que j'aurais fait au tableau : dessinez une matrice diagonale, placez des  
81  $\lambda_i$  sur la diagonale et voyez quoi mettre dans la seconde matrice, celle des vecteurs  
82 propres.

83 Par exemple, la matrice suivante

$$(1) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

84 n'est pas diagonalisable. Elle a beau être de taille 5, comme elle est triangulaire, on  
85 calcule son polynôme caractéristique de tête (ou on écrit soi-même la matrice  $M - \lambda Id$   
86 et on développe le déterminant par colonnes, dans l'ordre et on réalise après coup  
87 qu'on aurait pu le faire de tête). On trouve ainsi

$$(2) \quad P(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

88 Les valeurs propres 1, 2 et 3 étant racines simples de  $P$ , elles ne nous permettront  
89 pas de déterminer si  $M$  est diagonalisable ou non. Il faut donc s'intéresser à la valeur  
90 propre 0. Je vous laisse le soin d'écrire le système pour  $(M - 0.Id)X = 0$  et de  
91 constater par vous-même qu'on trouve un espace de dimension 1, donc strictement  
92 inférieur à 2. Donc  $M$  n'est pas diagonalisable.

93 **4.4. Conclusion.** Ceci termine ce que je considère comme devant être abordé et  
94 travaillé dans le cadre du cours de mathématiques du second semestre pour cette  
95 année. Ce qui suit détaille deux compléments : quoi faire quand  $M$  n'est pas diag-  
96 onalisable pour la simplifier quand même ; ce que fait une machine pour tester si  
97 une matrice est diagonalisable ou non. Ces notions sont plus ardues techniquement  
98 et abstraitement parlant que ce qui précède et même si elles ont une grande utilité  
99 pratique, il me semble déraisonnable de vouloir présenter ces points-là sans donner  
100 la possibilité à chacun d'interrompre chaque phrase pour éclaircir ceci ou cela. Je  
101 répondrai volontiers à des questions précises sur ces compléments mais seulement s'il  
102 n'y a pas de questions sur tout ce qui précède dans le programme.

103

## 5. COMPLÉMENT : LA TRIGONALISATION

104 À partir de maintenant, je sors objectivement du cadre du programme de ce cours  
105 en non-présentiel. J'aurais eu plaisir à raconter au moins une partie de ce qui va  
106 suivre en classe mais il s'agit ici de manipuler des notions plus abstraites et le faire

107 en différé me semble très complexe. Je n'encourage donc la lecture de ce paragraphe  
 108 et du suivant qu'à ceux qui se sentent à l'aise sur ce qui a été écrit plus haut et  
 109 auparavant.

110 On se place maintenant dans le cas d'une matrice  $M$  non diagonalisable. Le but  
 111 est de *simplifier*  $M$ , c'est-à-dire de lui trouver une matrice la plus simple possible à  
 112 laquelle elle serait semblable. Quoi de presque aussi simple qu'une matrice diagonale ?  
 113 Une matrice triangulaire ? Oui, mais pas n'importe laquelle : une matrice triangulaire  
 114 avec très peu de valeurs non nulles (en fait des 1) et tous juste au-dessus de la  
 115 diagonale et encore pas partout.

116 Donc on se donne  $M$  qu'on sait comme n'étant pas diagonalisable, que ce soit parce  
 117 qu'on a fait un calcul à la main ou parce qu'on a demandé à une machine de calculer  
 118 son polynôme minimal (voir le second complément) ou parce que c'est impossible  
 119 comme dans le cas suivant.

120 Considérons

$$(3) \quad M = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

121 Cette matrice est  $2 \times 2$  donc on calcule facilement son polynôme caractéristique et  
 122 on trouve  $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ . Autrement dit, 1 est racine double de  $P$ . Mais  $M$  ne peut  
 123 pas être diagonalisable car dans ce cas, elle serait semblable à la matrice identité :

$$(4) \quad M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

124 ce qui est impossible puisque le membre droit de l'équation vaut toujours l'identité  
 125 quelle que soit  $P$ . Donc  $M$  n'est pas diagonalisable.

126 Malgré tout, on va calculer l'espace propre associé à 1 comme première étape.  
 127 L'équation  $(M - I)X = 0$  rend un système à deux équations qui sont les mêmes (on  
 128 le sait *a priori* puisque le système a une infinité de solutions), à savoir

$$(5) \quad -6x + 9y = 0.$$

129 ou encore  $3y = 2x$ . L'espace propre est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  dont une base  
 130 est  $\{(3, 2)\}$ . Comment maintenant choisir un vecteur pour compléter l'ensemble des  
 131 vecteurs propres (ici, un) en une base de  $\mathbb{R}^2$  ? On l'a dit au début : on veut une  
 132 matrice la plus simple possible et dans ce cas, on voudrait écrire

$$(6) \quad M = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

133 Si on se remémore l'interprétation d'une matrice comme l'expression d'une applica-  
 134 tion linéaire d'une base dans une autre, et qu'on considère  $M$  comme la matrice de  $f$   
 135 de la base canonique dans elle-même, la matrice triangulaire avec ses 1 est la matrice  
 136 de  $f$  de la base qu'on cherche  $(p_1, p_2)$  dans elle-même. Dans ce cas, on a  $f(p_1) = p_1$   
 137 et on a une réponse toute trouvée pour  $p_1$  : c'est un élément non nul de l'espace  
 138 propre, par exemple le vecteur  $(3, 2)$  qu'on a calculé précédemment. Concernant le  
 139 second vecteur  $p_2$ , il vérifie

$$(7) \quad f(p_2) = p_1 + p_2.$$

140 Autrement dit, cette fois, au lieu de résoudre  $(M - Id)X = 0$ , on va résoudre  $(M -$   
 141  $Id)X = P_1$ . Ce qui donne le système :

$$(8) \quad \begin{cases} -6x + 9y = 3 \\ -4x + 6y = 2. \end{cases}$$

142 Ce système a encore une infinité de solutions (c'est toujours le cas) et comme il en  
 143 suffit d'une, on doit juste résoudre  $3y = 1 + 2x$ , qui a la solution évidente  $x = y = 1$ .  
 144 Autrement dit, on a une base de  $\mathbb{R}^2$  à savoir  $B = \{(3, 2), (1, 1)\}$  dans laquelle, par  
 145 définition de l'expression d'une application linéaire d'une base dans une autre, la  
 146 matrice de  $B$  dans  $B$  est

$$(9) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

147 On peut d'ailleurs tout vérifier après coup: dans l'équation  $M = P\Delta P^{-1}$ , on  
 148 connaît  $M$ ,  $P$  (qui est la matrice de  $B$  dans la base canonique),  $\Delta$  (qui est la matrice  
 149 quasi-diagonale) et on peut calculer  $P^{-1}$  par exemple par pivot. On vérifie alors

$$(10) \quad \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

150 Dans le cas d'une matrice  $M$  non diagonalisable avec plusieurs valeurs propres,  
 151 le théorème de Jordan aussi appelé réduction de Jordan dont vous pourrez trouver  
 152 des détails sur Wikipedia affirme que la forme générale de la matrice semblable à  $M$   
 153 qu'on cherche est la suivante : on a les valeurs propres dans l'ordre, d'abord  $k_1$  fois  
 154  $\lambda_1$ , puis  $k_2$  fois  $\lambda_2$ , et ainsi de suite et un 1 juste au-dessus entre deux cases diagonales  
 155 si et seulement si ces deux cases ont la même valeur. Par exemple, si on a trois fois  
 156 1 et deux fois 2 comme valeurs propres, la forme de Jordan est

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## 157 6. COMPLÉMENT : TESTER LA DIAGONALISABILITÉ

158 On l'a dit plus haut : pour savoir si  $M$  est diagonalisable ou non, on vérifie que les  
 159 dimensions de tous ses espaces propres sont respectivement égales à la multiplicité de  
 160 leurs valeurs propres dans le polynôme caractéristique de  $M$ . Mais il y a une grosse  
 161 difficulté avant cela : avant de calculer les dimensions des espaces propres, il faut  
 162 déjà pouvoir calculer les valeurs propres, ce qui est impossible en général dès que  $M$   
 163 est de taille 5. Et pourtant, un humain motivé (ou une machine) peuvent tester si  
 164 une matrice est diagonalisable. Donc sans jamais calculer les valeurs propres.

165 **6.1. Les polynômes annulateurs.** Revenons-en aux définitions : si  $M$  est diagonal-  
 166 isable, cela veut dire que  $M$  peut s'écrire sous la forme  $P\Delta P^{-1}$  où  $\Delta$  est diagonale.  
 167 Dans ce cas, il est facile de vérifier que le polynôme caractéristique appliqué à  $\Delta$   
 168 donne la matrice nulle et d'ailleurs que ce même polynôme appliqué à  $M$  donne aussi

169 la matrice nulle (car  $Q(M) = PQ(\Delta)P^{-1}$ ). Oui oui, vous avez bien lu, on évalue un  
 170 polynôme non pas sur une inconnue ou sur un réel mais sur une matrice. On peut  
 171 ensuite montrer avec un argument dit de densité (sur lequel je ne m'étendrai pas)  
 172 qu'en fait le polynôme caractéristique annule toujours sa matrice, c'est le théorème  
 173 de Cayley-Hamilton. Pour plus de détails, on pourra consulter la page wikipedia...  
 174 et faire le test sur une matrice  $2 \times 2$ , par exemple l'une de celles du cours précédent.

175 **6.2. Le polynôme minimal et les matrices diagonalisables.** Maintenant qu'on  
 176 sait qu'il existe un polynôme qui annule  $M$ , on peut montrer qu'il en existe un appelé  
 177 *polynôme minimal* de  $M$  qui est de degré minimal (et de coefficient 1 pour la plus  
 178 grande puissance de  $X$  mais c'est un détail).

179 Donc toutes les matrices ont un polynôme minimal. Et ce polynôme minimal divise  
 180 tous les polynômes qui annulent  $M$  : en effet, si  $P$  et  $Q$  annulent  $M$  tous les deux  
 181 alors  $P - Q.R$  aussi pour tout polynôme  $R$  et on peut alors copier l'idée de la division  
 182 euclidienne des entiers (qui calcule leur PGCD en itérant la division euclidienne) sur  
 183 les polynômes et ainsi, en choisissant bien  $R$  obtenir un polynôme non nul de degré  
 184 inférieur à la fois à  $P$  et  $Q$ . Si  $Q$  est le polynôme minimal, on ne peut pas obtenir un  
 185 tel polynôme, ce qui n'arrive que dans le cas où  $Q$  divise  $P$ . En résumé, le polynôme  
 186 minimal divise en particulier le polynôme caractéristique.

187 Maintenant, si  $M$  est diagonalisable de valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ , un petit ex-  
 188 ercice montre que le polynôme  $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ , le produit de toutes les  $x - \lambda$   
 189 sur les valeurs propres *sans leurs multiplicités* annule  $\Delta$  et donc aussi  $M$ . Autrement  
 190 dit, si  $M$  est diagonalisable,  $M$  annule un polynôme à racines simples (son polynôme  
 191 minimal). Cette propriété est aussi vraie dans l'autre sens :  $M$  est diagonalisable si  
 192 et seulement si elle annule un polynôme à racines simples.

193 Je laisse à nouveau les lecteurs intéressés faire le calcul des polynômes minimaux  
 194 des deux matrices  $2 \times 2$  du cours précédent et remarquer qu'en effet, le polynôme  
 195 minimal de l'une est à racines simples alors que l'autre ne l'est pas.

196 **6.3. Calcul pratique.** Si on veut utiliser cette propriété pour tester si  $M$  est diago-  
 197 nalisable ou non, on va avoir besoin d'un moyen de calculer si  $M$  annule un polynôme  
 198 à racines simples.

199 Or, il y a un polynôme à racines simples qui nous attend : c'est celui dont les racines  
 200 sont les valeurs propres (une fois chacune). Et il se calcule en pratique (toujours sans  
 201 jamais calculer les racines) : c'est la division  $P$  par PGCD( $P, P'$ ), le PGCD de  $P$  et  
 202 de sa dérivée  $P'$  de par le théorème de Rolle. Je n'entrerai pas dans les détails, mais  
 203 le PGCD des polynômes se calcule comme le PGCD des entiers, en itérant la division  
 204 euclidienne jusqu'à trouver un reste nul.

205 Maintenant, tout est algorithmique : on programme le PGCD des polynômes, on  
 206 programme la dérivée des polynômes et on en déduit un polynôme qui est le plus  
 207 grand polynôme à racines simples qui divise le polynôme caractéristique. D'après  
 208 tout ce qui a été dit plus haut,  $M$  est diagonalisable si et seulement elle annule ce  
 209 polynôme, parfaitement calculable par une machine, sans même connaître les valeurs  
 210 propres puisqu'on n'a fait que des transformations élémentaires, dérivée et division,  
 211 sans jamais rien factoriser.