LE DÉTERMINANT ET SES APPLICATIONS (COURS 9)

JCN

1. Introduction

Ce document doit idéalement avoir été lu avant la séance pour pouvoir se concentrer sur les questions des uns et des autres pendant le temps imparti.

2. Bilan du cours précédent

Au cours précédent, on a discuté de la diagonalisation de matrices. Mais une question est restée sans réponse : comment calculer *a priori* les valeurs propres ?

Dans l'exemple traité en cours, une symétrie, on savait *a priori* que les valeurs propres étaient 1 et -1. Mais face à une matrice générale, on ne va pas tester au petit bonheur les valeurs propres unes par unes : il y en a une infinité !

Alors voyons le cas des matrices 2×2 avant de passer aux plus grandes dimensions où il nous faudra un nouvel outil.

3. Diagonalisation des matrices 2×2

3.1. **Calcul des valeurs propres.** Considérons une matrice 2×2 dont il ne sera pas évident de deviner *a priori* les valeurs propres, par exemple

$$M = \begin{pmatrix} -12 & 15 \\ -10 & 13 \end{pmatrix} \tag{1}$$

On a dit la dernière fois qu'une valeur propre était une valeur λ pour laquelle $(M - \lambda I).X = 0$ avait une infinité de solutions (les axes définissant la symétrie dans le cas de la dernière fois). Or, si un système a une infinité de solutions, c'est qu'il n'est pas inversible, ce qu'on peut traduire en disant que la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible.

Pour les matrices 2×2, ne pas être inversible est facile à voir : cela revient à tester que les deux vecteurs colonnes ne forment pas une base de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire sont colinéaires.

Ici, la matrice est

$$\begin{pmatrix} -12 - \lambda & 15 \\ -10 & 13 - \lambda \end{pmatrix} \tag{2}$$

et tester la colinéarité revient comme toujours à tester si le produit en croix donne zéro. On calcule :

$$(-12 - \lambda)(13 - \lambda) - 15 \times (-10) = 0, \tag{3}$$

ce qui donne, en développant :

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0. \tag{4}$$

C'est une gentille équation du second degré qu'on résout sans problème et qui nous donne deux solutions : 3 et -2.

3.2. **Fin de la diagonalisation.** Maintenant, on a les valeurs propres et pour diagonaliser M, on fait comme la dernière fois, on calcule les espaces propres associés à 3 et -2, autrement dit, on résout les systèmes $(M - 3I).X = 0$ et $(M + 2I).X = 0$.

Il s'agit à chaque fois de systèmes 2×2 et comme ils ont une infinité de solutions, on sait *a priori* que les deux équations sont proportionnelles. La résolution est donc directe dans chacun des cas.

Pour $\lambda = 3$, on trouve

$$-x + y = 0, \tag{5}$$

ce qui donne l'espace propre $E_3 = Vect(\{(1, 1\})$.

Pour $\lambda = -2$, on trouve

$$2x - 3y = 0, \tag{6}$$

ce qui donne l'espace propre $E_{-2} = Vect(\{(3, 2\})$.

On en extrait deux vecteurs propres qui sont non colinéaires (c'est un théorème général que les espaces propres sont toujours en somme directe, j'y reviendrai au prochain cours), donc une base de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1, 1), (3, 2)\}$. Si on assimile M à la matrice d'une application linéaire f de la base canonique dans elle-même, alors la matrice de f de B dans elle-même est

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

puisque $f(b_1) = 3b_1$ (vecteur propre de valeur propre 3) et $f(b_2) = -2b_2$ (vecteur propre de valeur propre -2). On écrit souvent Δ (Delta majuscule) pour une matrice diagonale... parce que Diagonale commence par D.

Pour appliquer la formule du changement de base entre M et Δ, il nous faut les deux matrices de l'identité entre la base canonique et B, autrement dit la matrice $P = mat_{B,Can}(f)$, facile, et la matrice P^{-1} qu'on calcule par pivot ou directement :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

En écrivant alors le changement de base, on en déduit la relation entre M et sa version diagonalisée Δ :

$$\begin{aligned} M &= P\Delta P^{-1} \\ M &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

Un petit calcul permet de vérifier que "tout colle bien" !

3.3. **Conclusion.** On a réussi à diagonaliser M parce qu'on a trouvé ses valeurs propres, la suite étant plus ou moins automatique (l'algorithme complet sera discuté au prochain cours car il y a un petit piège).

Pour trouver les valeurs propres de M, on a utilisé le fait qu'en dimension 2, une matrice n'est pas inversible si et seulement si son produit en croix vaut zéro. L'analogue du produit en croix pour les matrices de plus grande taille s'appelle le déterminant.

4. Le déterminant

Étant donnée une matrice $n \times n$, son *déterminant* est défini par une formule un peu complexe à lire. Celles et ceux qui le souhaitent pourront faire un petit coup de "determinant matrice 3*3 wikipedia" dans leur moteur de recherche ou demander à leur IA favorite. On va plutôt donner directement les moyens de l'évaluer.

Le principe est le suivant :

- On colorie les cases de la matrice comme un damier, la case en haut à gauche étant blanche.
- On prend une ligne ou une colonne de son choix, appelée rangée ci-dessous.
- Pour chaque case de la rangée choisie, on évalue le produit du contenu de la case par le déterminant de la matrice qui reste quand on a enlevé sa ligne et sa colonne. On le multiplie par -1 si la case était noire.

Le déterminant est la somme de tous ces éléments (on l'appelle le développement du déterminant suivant la rangée en question).

4.1. **Déterminant 2×2.** Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{10}$$

Dans le coloriage, a et d sont blancs, b et c sont noirs. Alors le développement du déterminant de M (qu'on note soit $det(M)$ soit comme le tableau des coefficients de M mais entouré de barres plutôt que de parenthèses) suivant la deuxième ligne donne :

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1) \times c \times |b| + 1 \times d \times |a| = ad - bc, \tag{11}$$

puisque, si on enlève la ligne et la colonne de c, on obtient la matrice 1×1 contenant b (d'où le $|b|$) et si enlève la ligne et la colonne de d, on obtient la matrice 1×1 contenant a, d'où le $|a|$.

En développant par rapport à la première colonne, on aurait trouvé

$$|M| = 1 \times a \times |d| + (-1) \times b \times |c| = ad - bc, \tag{12}$$

donc bien sûr la même formule, qui est bien le produit en croix traditionnel. Les autres développements donnent aussi la même réponse, comme le lecteur pourra le vérifier aisément.

4.2. **Déterminant 3×3.** Idem, on se donne M une matrice générale 3×3.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \tag{13}$$

Dans ce cas, le coloriage donne a, e, i, g et c avec coefficient $+1$ et b, d, h et f avec coefficient -1. Le développement M par rapport à la deuxième ligne donne

$$\begin{aligned} |M| &= (-d) \times \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + (+e) \times \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + (-f) \times \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= (-d)(bi - ch) + e(ai - cg) - f(ah - bg). \\ &= cdh - bdi + aei - ceg + bfg - afh. \end{aligned} \tag{14}$$

Si on développe par rapport à la première ligne, on trouve

$$\begin{aligned} |M| &= a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-b) \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (c) \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg. \end{aligned} \tag{15}$$

C'est bien la même somme que celle calculée juste au-dessus. Les développements par rapport aux autres rangées donneront naturellement encore le même résultat.

De manière générale, la technique est la même pour une matrice de n'importe quelle taille : on calcule son déterminant par développement par rapport à une rangée et on itère sur des déterminants de matrices plus petites.

4.3. **Calcul pratique de déterminants.** Quand on cherche à calculer un déterminant, la méthode est simple : on cherche la rangée qui comporte un maximum de zéros pour avoir le moins de sous-déterminants à calculer et on itère de même.

Par exemple, pour évaluer

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} \tag{16}$$

on a tout intérêt à développer suivant la deuxième colonne, ce qui va donner

$$D = (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} \tag{17}$$

qu'on va alors développer suivant la troisième colonne pour obtenir

$$D = (-2)(+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \tag{18}$$

donc enfin $D = (-2)(+1)(4 - 3) = -2$.

On serait arrivé au même résultat en développant par rapport à la première ligne... mais avec beaucoup plus d'effort et beaucoup plus de risque d'erreur !

4.3.1. *Matrices triangulaires et diagonales.* Dans le cas particulier où M est triangulaire, le calcul du déterminant est immédiat : c'est le produit de ses termes diagonaux. En effet, on développe à chaque fois suivant la première colonne qui ne contient que des zéros à part peut-être en première position.

Une matrice diagonale étant en particulier triangulaire, la même propriété est vérifiée : son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux.

4.4. **La propriété majeure du déterminant.** Si on se donne deux matrices A et B, on a

$$det(A.B) = det(B.A). \tag{19}$$

Appliquons-le au cas d'une matrice M qu'on sait être diagonalisable. On a vu la formule

$$M = P\Delta P^{-1}. \tag{20}$$

Alors

$$det(M) = det(P\Delta P^{-1}) = det(P^{-1}P\Delta) = det(\Delta). \tag{21}$$

Donc le déterminant de M est égal au produit de ses valeurs propres. Mais on peut faire beaucoup mieux :

$$\begin{aligned} det(M - \lambda I) &= det(P\Delta P^{-1} - \lambda I) \\ &= det(P\Delta P^{-1} - \lambda PP^{-1}) \\ &= det((P\Delta - \lambda P)P^{-1}) = det(P^{-1}(P\Delta - \lambda P)) \\ &= det(\Delta - \lambda I). \end{aligned} \tag{22}$$

Autrement dit, le déterminant qu'on évaluait précédemment pour trouver les valeurs propres les calcule pour de vrai : puisque Δ est diagonale, $\Delta - \lambda I$ aussi et a dans chaque case un $d_i - \lambda$. Or, le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses éléments diagonaux : c'est donc le polynôme (sous forme factorisée) dont les racines sont les valeurs propres :

$$P_M(\lambda) = \prod_i (d_i - \lambda). \tag{23}$$

4.5. **Un mot de vocabulaire.** Si M est une matrice, le polynôme $det(M - \lambda I)$ est le *polynôme caractéristique* de M.

5. Application à la diagonalisation

On reverra plus en détail la diagonalisation et on découvrira la trigonalisation quand la diagonalisation rate, mais, pour aujourd'hui, essayons simplement deux exemples de diagonalisation, un qui réussit et un qui rate pour montrer où l'algorithme peut rater.

5.1. **Une matrice 3×3 diagonalisable.** Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 11 & -7 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

On calcule d'abord son polynôme caractéristique $det(M - \lambda I)$. On trouve, en développant par rapport à la première ligne :

(25)

$$\begin{aligned} det(M - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 0 \\ 11 & -7-\lambda & 2 \\ 4 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda) \begin{vmatrix} -7-\lambda & 2 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)\left((-7-\lambda)(3-\lambda) - (-3) \times 2\right) - (-3)(11(3-\lambda) - 4 \times 2) \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 15) + 3(-11\lambda + 25) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda. \end{aligned}$$

Ce polynôme se factorise facilement car 0 est racine évidente et on a alors une équation du second degré

$$D = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2). \tag{26}$$

Ainsi, M a trois valeurs propres qui sont 0, -1 et 2.

Le calcul des espaces propres pour chacune des valeurs propres est désormais assez routinier : on calcule pour chacune des trois l'ensemble des solutions à $(M - \lambda I).X = 0$. Pour chacune, on trouvera un espace de dimension 1 (une droite donc), on en choisira une base et on obtiendra ainsi une base de vecteurs propres, montrant que M est diagonalisable.

Tous calculs faits, on trouve

$$\begin{aligned} E_2 &= Vect(\{1, 1, -1\}) \\ E_{-1} &= Vect(\{2, 4, 1\}) \\ E_0 &= Vect(\{3, 5, 1\}) \end{aligned} \tag{27}$$

et tout cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} M &= P \Delta P^{-1} \\ M &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

et on pourra vérifier que le calcul tombe encore juste.

5.2. **Une matrice 2×2 non diagonalisable.** Considérons pour finir ce cours une matrice 2×2 toute simple :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Son polynôme caractéristique vaut

$$det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 = \lambda^2. \tag{30}$$

Donc M a une valeur propre double : 0.

L'espace propre associé à la valeur propre 0 est aussi facile à calculer : on doit résoudre $(M - \lambda I).X = 0$, ce qui se ramène dans ce cas à $M.X = 0$. En écrivant X comme le vecteur (x, y), la deuxième équation donne $0 = 0$ et on doit donc simplement résoudre $y = 0$ (première équation). C'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: $Vect(\{(1, 0\})$.

On a donc trouvé *un* vecteur propre pour M. Or, pour que M soit diagonalisable, il faudrait en avoir une base, donc ici deux vecteurs linéairement indépendants. Cela n'est pas possible car M n'a qu'une seule valeur propre (double) donc il est inutile de chercher un vecteur propre associé à une valeur propre autre que zéro puisqu'il n'y en a pas. De plus, pour la valeur propre 0, on a vu que son espace propre était une droite vectorielle, donc on ne peut pas en extraire deux vecteurs linéairement indépendants.

Donc M n'est pas diagonalisable.

5.3. **Remarques conclusives.** On verra au prochain cours une condition nécessaire et suffisante pour décider si une matrice M est diagonalisable. En pratique, quand on calcule à la main, le plus rapide est encore de calculer les espaces propres et de tester si on peut en extraire une base de l'espace (vérifier que la dimension de chaque espace propre est égal à la multiplicité de la valeur propre correspondante dans le polynôme caractéristique suffit et on reparlera aussi de cela). Mais il existe une méthode plus efficace, au moins pour un ordinateur.

Enfin, puisque parfois la diagonalisation n'est pas possible, il nous faudra un autre algorithme pour, partant d'une matrice, obtenir une matrice la plus simple possible qui lui soit semblable. Ce sera l'algorithme de trigonalisation que je considère déjà dans des conditions habituelles de fonctionnement du cours comme à la limite du programme. Je le présenterai malgré tout parce qu'il est utile en pratique mais cela restera un point culturel, dont je ne testerai pas la maîtrise à l'examen.