RANG DES MATRICES (COURS 8)

JCN

1. Introduction

Ce document doit idéalement avoir été lu avant la séance pour pouvoir se concentrer sur les questions des uns et des autres pendant le temps imparti.

Comme en cours usuel, une question précise est une question qui a une chance de recevoir une réponse utile, donc mentionnez l'endroit précis qui pose problème, c'est pour cela que les pages et les lignes du document ont été numérotées.

2. Lien matrices - applications linéaires

2.1. **Généralités.** Toute fonction d'un espace E dans un espace F est définie par l'image de tous les éléments de l'espace de départ E. Quand la fonction est une *application linéaire*, la donnée de l'image de *tous* les éléments de E est inutilement redondante : on a vu au dernier cours qu'il suffit de donner l'image d'une base B de E pour pouvoir reconstituer l'application linéaire en entier.

Il faut en fait être un peu plus précis que cela : il faut non seulement se donner une base B de E pour en calculer une image par f mais aussi une base C de l'espace d'arrivée F pour écrire les images de B par f dans la base C.

Autrement dit, si $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ et $C = \{c_1, c_2\}$, la *matrice* de f de la base B vers la base C, notée $mat_{B,C}(f)$, se calcule en décomposant en combinaison linéaire de c_1 et c_2 les trois images $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$.

En pratique, comme l'espace de départ est de dimension 3 et l'espace d'arrivée de dimension 2, la matrice d'une telle application linéaire sera donc une matrice à 3 colonnes et 2 lignes. Si $f(b_1) = \alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2$, la première colonne de la matrice contiendra α_{11} en première case et $\alpha 21$ en deuxième. Et ainsi de suite pour $f(b_2)$ qui donnera la deuxième colonne et $f(b_3)$ qui donnera la troisième colonne.

Prenons un exemple pour fixer les idées. Je me donne l'application linéaire suivante :

$$f : \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right. \mapsto \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 3y & - & z \\ 2x & - & y & + & z \end{array} \right. \tag{1}$$

ainsi que les bases

$$B = \left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right. , \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \right. , \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 9 \end{array} \right. \right) \quad \text{et} \quad C = \left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right. , \left| \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} \right. \right) \tag{2}$$

Pour calculer la matrice de f de la base B dans la base C, on doit calculer f de chacun des trois vecteurs de B et les écrire comme combinaisons linéaires uniques (C est une base de $\mathbb{R}^2$) des éléments de C.

Dans le cas présent, on calcule que $f(b_1) = (3, 2)$ puis (par résolution de système) que $f(b_1) = -9c_1 + 4c_2$. De même, on a $f(b_2) = (3, 4) = -3c_1 + 2c_2$ et $f(b_3) = (1, 8) = 19c_1 - 6c_2$. Ainsi,

$$mat_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 19 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

On observera que toute application linéaire a plusieurs matrices possibles puisqu'on peut choisir librement les bases B et C. Il est donc incorrect de parler de *la* matrice de f et mieux vaut parler *d'une* matrice de f ou, mieux encore, de *la matrice de f dans les bases B et C*.

2.2. **Exemples de changement de base.** Prenons un nouvel exemple pour refaire des calculs de matrices. Je me donne l'application linéaire suivante :

$$f : \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \mapsto \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & + & 3z \\ & - & y & + & z \\ -x & - & 3y & + & 8z \end{array} \right. \tag{4}$$

Je me donne maintenant quelques bases de $\mathbb{R}^3$:

$$B = C = (e_1, e_2, e_3), \text{la base canonique} \tag{5}$$

$$B' = \left(\left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right., \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right., \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right. \right) \quad \text{et} \quad C' = \left(\left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right., \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right., \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right. \right). \tag{6}$$

Alors la matrice de f de B dans C est facile à calculer : c'est l'expression des images des vecteurs de B dans la base C. Ici, on calcule facilement $f(e_1) = (1, 0, -1)$, $f(e_2) = (2, -1, -3)$, $f(e_3) = (3, 1, 8)$ qui sont égaux à leurs développements dans la base d'arrivée C puisque C est la base canonique.

On a donc

$$mat_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \tag{7}$$

On calcule presque aussi facilement

$$mat_{B',C}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \tag{8}$$

en évaluant f sur les éléments de B' puis en les développant dans la base d'arrivée C (pour laquelle il n'y a rien à faire puisque c'est la base canonique).

2.2.1. *Exemples encore faisables à la main.* On peut encore calculer d'autres matrices, cette fois en devant travailler un peu plus, par exemple $mat_{B,C'}(f)$. Dans ce cas, comme on l'a dit plus haut, il faut développer les images des vecteurs de B en combinaisons linéaires des vecteurs de C'. À moins d'avoir un raccourci (base triangulaire par exemple), cela revient à résoudre un système. Dans le cas présent, on peut le faire facilement de tête mais j'encourage chacun à écrire à côté le petit système (triangulaire) permettant de retrouver les réponses.

On a

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right. - 1 \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right. \tag{9}$$

et de même

$$\left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{matrix}\right. = +3 \left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. + 2 \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right. - 3 \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right. \tag{10}$$

et

$$\left|\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{matrix}\right. = 2 \left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. - 7 \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right. + 8 \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right. \tag{11}$$

En recopiant ces coefficients à leur place dans la matrice, on trouve ainsi

$$mat_{B,C'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Ce cas-là se faisaitt encore assez facilement mais si la base d'arrivée avait été C'' :

$$C'' = \left(\left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{matrix}\right. \right), \tag{13}$$

l'exercice aurait été nettement plus ardu car il aurait fallu développer les images des vecteurs de B dans la base C''.

2.3. **Méthode par calcul matriciel.** Il existe en réalité un moyen un peu plus efficace que la méthode pédestre pour calculer $mat_{B,C'}(f)$. Pour aller de B à C' par f, on peut décomposer le trajet en deux étapes : aller d'abord de B à C par f puis de C à C' par id. Notre trajet complet est la *composée* de ces deux morceaux. Quand on calcule $f \circ g$, on évalue d'abord g, donc ici, cette composition se traduit comme suit :

$$mat_{B,C'}(f) = mat_{C,C'}(id)\ mat_{B,C}(f). \tag{14}$$

En général, calculer la matrice de l'identité d'une base dans une autre est compliqué aussi, sauf qu'on a un raccourci :

$$mat_{C,C'}(id)\ mat_{C',C}(id) = Id, \Longleftrightarrow mat_{C,C'}(id) = mat_{C',C}(id)^{-1}, \tag{15}$$

autrement dit que $mat_{C,C'}(id)$ est l'inverse de $mat_{C',C}(id)$ et qu'on a un algorithme pour inverser une matrice, cela s'appelle le *pivot de Gauss*, vu en TD.

Avec ces techniques, on calcule sans problème :

$$mat_{C',C}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{puis, par pivot,} \quad mat_{C,C'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Et on en déduit

$$\begin{aligned} mat_{B,C'}(f) &= mat_{C,C'}(id)\ mat_{B,C}(f) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

qui est bien la matrice qu'on avait trouvée par un autre processus en équation (12).

2.4. ***LA* formule du changement de base.** Plus généralement, on a la formule suivante :

$$mat_{B',C'}(f) = mat_{C,C'}(id)\ mat_{B,C}(f)\ mat_{B',B}(id), \tag{18}$$

qui s'applique en toute situation.

Typiquement, pour calculer $mat_{B',C'}(f)$ avec les données numériques ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} mat_{B',C'}(f) &= mat_{C,C'}(id)\ mat_{B,C}(f)\ mat_{B',B}(id) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 14 \\ -4 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 14 \\ -4 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

où on retrouve au passage toutes les matrices calculées précédemment.

3. Les matrices inversibles

J'aimerais insister sur un point qu'on a rapidement évoqué tout à l'heure : les matrices inversibles.

On a dit plus haut que toute application linéaire était représentée par beaucoup de matrices différentes. Mais inversement, des applications linéaires peuvent avoir même matrice. Par exemple, l'application linéaire g dont la matrice de B dans C est donnée dans l'équation (12) n'est pas la même que f et pourtant $mat_{B,C}(g) = mat_{B,C'}(f)$. Autrement dit, une matrice ne décrit pas *fidèlement* son application linéaire car elle en code beaucoup.

Venons-en aux matrices inversibles. On a dit que les matrices d'une base dans une autre étaient inversibles puisqu'elles vérifiaient la relation (15). Inversement, une matrice quelconque M inversible (sur laquelle le pivot va jusqu'au bout) peut être *vue* comme la matrice d'un changement de base $mat_{B'',B}(id)$ où on peut supposer que B est la base canonique. Dans ce cas, les colonnes de M sont exactement les vecteurs de B''.

Autrement dit, il y a bijection entre les bases B'' d'un espace vectoriel et les matrices inversibles : on envoie B'' sur $mat_{B'',B}(id)$ ou on lit les colonnes de la matrice pour retrouver la base. Dit encore autrement, on a désormais un outil efficace pour tester si une famille est une base : on écrit ses vecteurs en colonne dans une matrice et on teste si cette matrice est inversible (pour l'instant par pivot mais d'ici peu par le déterminant).

4. Matrices équivalentes

Sans vouloir trop développer ce thème qui aurait été un cours à part entière si les conditions avaient été différentes (c-à-d normales), faisons un petit détour par les matrices équivalentes.

Deux matrices M et M' sont dites *équivalentes* s'il existe une application linéaire dont toutes deux sont des matrices. Vu ce qu'on a dit sur les applications linéaires et leurs matrices associées, cela revient exactement à dire qu'il existe deux matrices inversibles P et Q qui vérifient

$$M' = PMQ. \tag{20}$$

Pour illustrer la définition, étant donnée une application linéaire et une de ses matrices M, les autres de ses matrices sont exactement les matrices équivalentes à M. D'où la question : quelle est la matrice la plus simple qui code une application linéaire donnée ?

La réponse requiert un peu plus de raisonnement que de calcul et elle est au final très simple. Comme ce point-là est plus un point culturel qui aide à comprendre l'articulation des notions à venir plus qu'un point directement utile et opérationnel, j'encourage les lecteurs à passer en première lecture ce passage pour y revenir plus tard. C'est l'avantage d'un document écrit par rapport à un cours : on peut zapper et y revenir ensuite !

4.1. **Cas des matrices** $3*3$. Pour fixer les idées, on se donne une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. On choisit comme première base de départ la base canonique B et on calcule l'image de B par f.

Les trois vecteurs obtenus (c_1, c_2, c_3) peuvent ou non former une base. S'ils forment une base, on choisit ces vecteurs comme base de l'espace d'arrivée. La matrice de f sera alors la matrice identité puisque $f(e_1) = c_1$, $f(e_2) = c_2$, $f(e_3) = c_3$.

S'ils ne forment pas une base mais que leur famille engendre un espace vectoriel de dimension deux, on en sélectionne deux, libres entre eux, par exemple c_1 et c_3. Alors si on écrit $mat_{(e_1,e_3,e_2),(c_1,c_3,x_2)}(f)$ où x_2 est n'importe quel vecteur qui complète la famille (c_1, c_3) en une base (attention à l'ordre des vecteurs), cette matrice a une expression simple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

où a et b sont des valeurs. Ce n'est pas encore la matrice la plus simple de f car on peut se débrouiller pour mettre à 0 ces deux valeurs : on remplace e_2 comme troisième vecteur de la base de départ par $e_2' := e_2 - ae_1 - be_3$. On vérifie d'abord que (e_1, e_3, e_2') est une base de $\mathbb{R}^3$ (facile) puis que $f(e_2') = (0,0,0)$ (facile aussi) et on en déduit :

$$mat_{(e_1,e_3,e_2'),(c_1,c_3,x_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

On pourrait refaire le même raisonnement dans le cas où $dim(Vect(c_1, c_2, c_3)) = 1$, auquel cas il faudrait travailler un peu plus pour montrer qu'il existe une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée dans lesquelles la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Le dernier cas où $dim(Vect(c_1, c_2, c_3)) = 0$ est sans intérêt car la matrice d'arrivée est la matrice n'ayant que des zéros.

Conclusion : quelle que soit une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, l'une des quatre matrices suivantes est une matrice de f :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

4.2. **Le cas général.** Dans ce cas comme dans le cas général, la matrice la plus simple équivalente à une matrice donnée est une matrice dont le début de la diagonale contient des 1 et tout le reste des zéros.

Le nombre de 1 s'appelle le *rang* de la matrice et le pivot de Gauss est (à nouveau) le bon algorithme quand on cherche à déterminer le rang d'une matrice.

Moyennant quoi, l'information du rang d'une application linéaire est une information utile mais qui ne décrit pas vraiment tout ce qu'on voudrait savoir. C'est pourquoi on va se restreindre à un ensemble plus petit de matrices décrivant une application linéaire donnée : les matrices semblables.

5. Les matrices semblables

On a bien compris que regarder toutes les matrices $mat_{B,C}(f)$ pour toutes bases B et C était un peu limitant car des tas d'applications linéaires ont en fait les mêmes matrices (matrices équivalentes). L'idée est donc d'essayer de garder au maximum ce qui caractérise l'application linéaire, par exemple si c'est une symétrie, une projection, une homothétie suivant certaines directions (miroirs déformants), *etc.* Pour des raisons qu'il sera difficile de rendre par écrit, le bon sous-ensemble de matrices équivalentes qu'il faut regarder s'appelle l'ensemble des matrices semblables.

Dans le cas des matrices non carrées, on peut faire des choses mais c'est le cas des matrices carrées qui va particulièrement nous intéresser.

Definition 5.1. *Une application linéaire d'un espace E dans lui-même est appelée* endomorphisme *de E.*

Dans ce cas, ses matrices sont carrées (même nombre de lignes que de colonnes).

Soit f un endomorphisme et M sa matrice de la base canonique dans elle-même. Les autres matrices de f qu'on va regarder sont les matrices de f d'une autre base dans celle-ci. Si on se rapporte à la formule du changement de base (18), cela revient à la définition suivante :

Definition 5.2. *Soit M une matrice carrée. Les matrices* semblables *à M sont les matrices de la forme*

$$M' = P^{-1}MP \tag{25}$$

où P est une matrice inversible quelconque.

Le calcul de la matrice la plus simple semblable à une application linéaire ou à une matrice est nettement plus complexe que pour les matrices équivalentes et va prendre un peu de temps. Quand on sera chanceux, on trouvera une matrice *diagonale* (matrice avec des zéros hors de la diagonale). Pour aujourd'hui, je vais traiter un exemple de *diagonalisation*, c'est-à-dire user d'une méthode artisanale pour trouver une matrice diagonale semblable à la matrice choisie. D'ici peu, nous aurons toutes les techniques pour rendre algorithmique cette méthode. Et, pour ceux qui tiennent vraiment à sortir du cadre du programme du cours, de décider si une matrice est diagonalisable ou non.

5.1. **Un exemple de diagonalisation.** On prétend que la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 12 & 5 & 0 \\ 18 & 6 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

est la matrice d'une symétrie. Comment retrouver ses axes ?

L'idée directrice est la suivante : on considère M comme la matrice de B dans B d'une application linéaire f. Comment caractériser à l'aide de f l'axe de symétrie (les points qui restent inchangés, dits points fixes), et l'axe suivant lequel on fait la symétrie (points envoyés sur leurs opposés) ?

Eh bien, c'est assez simple : les points fixes sont exactement ceux qui vérifient $f(x) = x$ et ceux suivant lesquels la symétrie s'opère vérifient $f(x) = -x$. Sur les matrices, cela s'écrit comme

$$M.X = X \quad \text{ou} \quad M.X = -X \tag{27}$$

où X est un vecteur d'inconnues $X = (x, y, z)$.

Trouver les axes revient donc à résoudre deux équations qu'on peut aussi réécrire sous la forme

$$(M-I).X = 0 \quad \text{et} \quad (M+I).X = 0, \tag{28}$$

où I est la matrice identité (1 sur la diagonale, 0 ailleurs).

Il s'agit donc une nouvelle fois de systèmes à résoudre dans le cadre du cours d'algèbre...

5.1.1. *Cas* $(M-I)X = 0$. L'équation $MX = X$ ou $(M-I)X = 0$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 12 & 4 & 0 \\ 18 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Le système est donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} -6x - 2y & = 0 \\ 12x + 4y & = 0 \\ 18x + 6y & = 0. \end{array} \right. \tag{30}$$

Ces trois équations sont proportionnelles, donc le système est équivalent à l'une d'entre elles, par exemple $3x + y = 0$ (une fois divisé la deuxième par 4). L'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de R^3 et on a déjà plusieurs fois trouvé une base d'un tel espace :

$$\begin{aligned} \{(x,y,z) | 3x + y = 0\} &= \{(x, -3x, z)\} = \{x.(1,-3,0) + z.(0,0,1)\} \\ &= Vect(\{(1,-3,0),(0,0,1)\}). \end{aligned} \tag{31}$$

C'est un espace vectoriel de dimension 2, donc un plan P de $\mathbb{R}^2$. C'est le plan de symétrie de M.

5.1.2. *Cas* $(M+I)X = 0$. Maintenant, pour trouver l'axe parallèlement auquel s'opère la symétrie, on résout l'autre équation : $MX = -X$ ou $(M+I)X = 0$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 12 & 6 & 0 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Le système est donc

$$\left\{ \begin{array}{llll} -4x & -2y & & = 0 \\ 12x & +6y & & = 0 \\ 18x & +6y & +2z & = 0. \end{array} \right. \tag{33}$$

Les deux premières équations sont clairement proportionnelles. On a donc le système équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x & +y & & = 0 \\ 9x & +3y & +z & = 0. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y & = -2x \\ z & = -9x - 3y = -3x. \end{array} \right. \tag{34}$$

L'ensemble des solutions du système est donc

$$\{(x,y,z) | y = -2x, z = -3x\} = \{(x, -2x, -3x)\} = Vect((1,-2,-3)). \tag{35}$$

C'est un espace vectoriel de dimension 1, donc une droite D de $\mathbb{R}^3$.

5.1.3. *Bilan du calcul.* D'après les calculs précédents, on peut désormais affirmer que M est la symétrie par rapport au plan P suivant la direction de la droite D.

En termes de calcul matriciel, on vient de trouver trois vecteurs ($c_1 = (1, -3, 0), c_2 = (0, 0, 1), c_3 = (1, -2, -3)$) qui vérifient respectivement $f(c_1) = c_1$, $f(c_2) = c_2$ et $f(c_3) = -c_3$ (c'était les équations les définissant). Pour des raisons d'espaces vectoriels en somme directe, ces trois vecteurs forment une base (on peut aussi le vérifier directement). On a donc une base de $\mathbb{R}^3$ donc on connaît les images par f.

Alors que vaut $M' = mat_{C,C}(f)$? Par définition, elle est très simple :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

On a donc résolu la question de trouver la matrice semblable la plus simple associée à M.

Pour relier M à M', il faut réutiliser la formule générale du changement de base, la formule (18). Dans ce cas, on trouve

$$mat_{C,C}(f) = mat_{B,C}(id)\ mat_{B,B}(f)\ mat_{C,B}(id), \tag{37}$$

ou encore

$$mat_{B,B}(f) = mat_{C,B}(id)\ mat_{C,C}(f)\ mat_{B,C}(id). \tag{38}$$

On connaît $mat_{C,B}(id)$ puisque B est la base canonique. On peut calculer son inverse $mat_{B,C}(id)$ par pivot (exercice laissé au lecteur) et chacun est invité à vérifier la cohérence des résultats :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 12 & 5 & 0 \\ 18 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

5.1.4. *Un peu de vocabulaire pour finir.* Les vecteurs qui vérifient $f(x) = \lambda.x$ sont dits *vecteurs propres* de f associés à la *valeur propre* λ. L'espace des vecteurs x tels que $f(x) = \lambda.x$ est *l'espace propre* associé à λ.

Une matrice est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, autrement dit s'il existe une base composée uniquement de vecteurs propres.

Il est à noter, et on commencera notre prochain cours par cela, que λ est valeur propre d'une matrice M si et seulement si $(M - \lambda I)X = 0$ a des solutions autres que le vecteur nul, c'est-à-dire si la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible.