

LA DIAGONALISATION (COURS 10)

JCN

1. INTRODUCTION

Ce document devra avoir été lu avant la séance. Le texte ne fait que 3 pages sans les compléments mais s'appuie sur tous les cours précédents.

Comme en cours usuel, une question précise est une question qui a une chance de recevoir une réponse utile, donc mentionnez l'endroit précis qui pose problème, c'est pour cela que les pages et les lignes du document ont été numérotées.

Pour le reste, ceci est notre 10^e séance soit l'avant-dernière. La dernière sera comme de coutume une séance de révision/questions sur tout le programme.

2. BILAN DES COURS PRÉCÉDENTS

Au cours précédent, on a discuté du déterminant et de ses applications, notamment à la diagonalisation de matrices qu'on avait esquissé au cours $n - 2$.

On a fait quelques exemples concrets et comme la méthode est toujours la même, je vais commencer par la rappeler complètement avant de passer aux divers résultats théoriques, raccourcis et méthodes annexes.

3. DIAGONALISATION DES MATRICES

L'algorithme pour diagonaliser une matrice M (algorithme qui peut rater puisque toute matrice n'est pas diagonalisable) est le suivant :

- Calculer le polynôme caractéristique de M (c'est le déterminant de $M - \lambda Id$),
- Factoriser le polynôme caractéristique P ,
- Pour chaque racine de P , calculer son espace propre, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs X qui vérifient $(M - \lambda Id).X = 0$.
- Si la somme des dimensions des espaces propres vaut la taille de la matrice, en extraire une base pour chaque espace propre. Puis remettre ensemble toutes les informations : écrire d'une part la matrice diagonale des valeurs propres et d'autre part la matrice des vecteurs propres correspondants. Ce sont les *éléments propres* de M .

Nous avons déjà vu plusieurs exemples de diagonalisation en cours, je vous encourage donc à vous y reporter pour y (re)voir les différentes étapes de l'algorithme (paragraphe 5 du cours des déterminants par exemple).

30

4. TESTER SI M EST DIAGONALISABLE OU NON

31 Regardons maintenant chaque étape de l'algorithme et voyons où il peut échouer.

32 Le calcul du polynôme caractéristique P se fait sans problème, c'est un déterminant,
33 on ne fait que des multiplications et des additions, tout va bien.

34 **4.1. Factoriser le polynôme caractéristique.** Pour factoriser P , là, on a un
35 problème parce qu'il n'existe aucune formule (et mieux, il a été démontré au XIX^e
36 siècle qu'il ne pouvait pas y avoir de formule) donnant les racines d'un polynôme à
37 partir de ses coefficients. Puisque c'est mathématiquement impossible, il faut admet-
38 tre qu'on n'a pas le choix et que si on nous demande de diagonaliser une matrice,
39 c'est qu'on doit pouvoir se débrouiller avec les méthodes classiques, donc chercher
40 une racine évidente (entière entre -2 et 2) ou faire un discriminant comme au lycée.
41 Dans le monde réel, il existe des méthodes numériques, autrement dit approchées
42 pour diagonaliser les matrices. Elles sont inapplicables à la main.

43 **4.2. Calculer les espaces propres.** Si on a franchi l'étape de détermination des
44 racines de P , ce qui est censé arriver en TD/examen, on peut calculer sans problème
45 les espaces propres car il s'agit de résoudre un système et de trouver l'ensemble (infini)
46 des solutions.

47 En revanche, ce qui n'est pas garanti, c'est que l'espace propre d'une valeur propre
48 λ donnée soit de dimension égale à la multiplicité de λ comme racine de P (le nombre
49 de fois que $x - \lambda$ est un facteur de P).

50 Une seule chose est certaine : on a défini les valeurs propres pour que le
51 déterminant de $M - \lambda Id$ soit nul, ce qui veut dire que le système $(M - \lambda Id)X = 0$
52 a une infinité de solutions. Donc l'espace propre est au moins de dimension 1 pour
53 toute valeur propre.

54 **4.3. Tout remettre ensemble : la question de la dimension totale.** Vient
55 maintenant la dernière étape : tout regrouper pour écrire d'un côté la matrice diago-
56 nale (les valeurs propres avec leurs multiplicités) et de l'autre la matrice des vecteurs
57 propres associés.

58 Pour que M soit diagonalisable, il faut que la matrice des vecteurs propres soit
59 inversible, autrement dit que les vecteurs propres choisis forment une base. Et c'est
60 là que se trouve le problème de la diagonalisation : parfois on manque de vecteurs
61 propres pour en faire une base et dans ce cas, on ne peut pas diagonaliser M . C'est
62 ce qui s'est passé pour la matrice 2×2 étudiée à la fin du dernier cours.

63 Récapitulons la situation : une valeur propre de multiplicité m nous fournit un
64 espace propre de dimension k , autrement dit contribue pour k éléments dans la
65 matrice des vecteurs propres quand on en extrait une base. On peut démontrer que
66 k ne peut pas excéder m , autrement dit que l'espace propre n'est jamais plus grand
67 en dimension que la multiplicité de sa valeur propre. Dans ce cas, si on part de
68 valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de multiplicités respectives $(m_1, \dots, m_p)$ et qu'on veut
69 une base de vecteurs propres, *chaque valeur propre* doit fournir un espace
70 propre de dimension égale à sa multiplicité. C'est ce que j'avais signalé dans mes
71 remarques conclusives au dernier cours : [...] vérifier que la dimension de chaque

espace propre est égal à la multiplicité de la valeur propre correspondante dans le polynôme caractéristique suffit [...]

D'où un critère simple pour montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable : trouver une de ses valeurs propres dont la dimension de l'espace propre est strictement inférieure à sa multiplicité. On a dit aussi plus haut que l'espace propre de toute valeur propre ne pouvait pas être réduit au vecteur nul, donc ce critère de non-diagonalisabilité ne peut être obtenu que si la valeur propre a une multiplicité au moins 2 dans le polynôme caractéristique. Si tout ce paragraphe n'est pas clair pour vous, faites ce que j'aurais fait au tableau : dessinez une matrice diagonale, placez des λ_i sur la diagonale et voyez quoi mettre dans la seconde matrice, celle des vecteurs propres.

Par exemple, la matrice suivante

$$(1) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable. Elle a beau être de taille 5, comme elle est triangulaire, on calcule son polynôme caractéristique de tête (ou on écrit soi-même la matrice $M - \lambda Id$ et on développe le déterminant par colonnes, dans l'ordre et on réalise après coup qu'on aurait pu le faire de tête). On trouve ainsi

$$(2) \quad P(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres 1, 2 et 3 étant racines simples de P , elles ne nous permettront pas de déterminer si M est diagonalisable ou non. Il faut donc s'intéresser à la valeur propre 0. Je vous laisse le soin d'écrire le système pour $(M - 0.Id)X = 0$ et de constater par vous-même qu'on trouve un espace de dimension 1, donc strictement inférieur à 2. Donc M n'est pas diagonalisable.

4.4. Conclusion. Ceci termine ce que je considère comme devant être abordé et travaillé dans le cadre du cours de mathématiques du second semestre pour cette année. Ce qui suit détaille deux compléments : quoi faire quand M n'est pas diagonalisable pour la simplifier quand même ; ce que fait une machine pour tester si une matrice est diagonalisable ou non. Ces notions sont plus ardues techniquement et abstraitement parlant que ce qui précède et même si elles ont une grande utilité pratique, il me semble déraisonnable de vouloir présenter ces points-là sans donner la possibilité à chacun d'interrompre chaque phrase pour éclaircir ceci ou cela. Je répondrai volontiers à des questions précises sur ces compléments mais seulement s'il n'y a pas de questions sur tout ce qui précède dans le programme.

5. COMPLÉMENT : LA TRIGONALISATION

À partir de maintenant, je sors objectivement du cadre du programme de ce cours en non-présentiel. J'aurais eu plaisir à raconter au moins une partie de ce qui va suivre en classe mais il s'agit ici de manipuler des notions plus abstraites et le faire

107 en différé me semble très complexe. Je n'encourage donc la lecture de ce paragraphe
 108 et du suivant qu'à ceux qui se sentent à l'aise sur ce qui a été écrit plus haut et
 109 auparavant.

110 On se place maintenant dans le cas d'une matrice M non diagonalisable. Le but
 111 est de *simplifier* M , c'est-à-dire de lui trouver une matrice la plus simple possible à
 112 laquelle elle serait semblable. Quoi de presque aussi simple qu'une matrice diagonale ?
 113 Une matrice triangulaire ? Oui, mais pas n'importe laquelle : une matrice triangulaire
 114 avec très peu de valeurs non nulles (en fait des 1) et tous juste au-dessus de la
 115 diagonale et encore pas partout.

116 Donc on se donne M qu'on sait comme n'étant pas diagonalisable, que ce soit parce
 117 qu'on a fait un calcul à la main ou parce qu'on a demandé à une machine de calculer
 118 son polynôme minimal (voir le second complément) ou parce que c'est impossible
 119 comme dans le cas suivant.

120 Considérons

$$(3) \quad M = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

121 Cette matrice est 2×2 donc on calcule facilement son polynôme caractéristique et
 122 on trouve $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Autrement dit, 1 est racine double de P . Mais M ne peut
 123 pas être diagonalisable car dans ce cas, elle serait semblable à la matrice identité :

$$(4) \quad M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

124 ce qui est impossible puisque le membre droit de l'équation vaut toujours l'identité
 125 quelle que soit P . Donc M n'est pas diagonalisable.

126 Malgré tout, on va calculer l'espace propre associé à 1 comme première étape.
 127 L'équation $(M - I)X = 0$ rend un système à deux équations qui sont les mêmes (on
 128 le sait *a priori* puisque le système a une infinité de solutions), à savoir

$$(5) \quad -6x + 9y = 0.$$

129 ou encore $3y = 2x$. L'espace propre est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ dont une base
 130 est $\{(3, 2)\}$. Comment maintenant choisir un vecteur pour compléter l'ensemble des
 131 vecteurs propres (ici, un) en une base de $\mathbb{R}^2$? On l'a dit au début : on veut une
 132 matrice la plus simple possible et dans ce cas, on voudrait écrire

$$(6) \quad M = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

133 Si on se remémore l'interprétation d'une matrice comme l'expression d'une applica-
 134 tion linéaire d'une base dans une autre, et qu'on considère M comme la matrice de f
 135 de la base canonique dans elle-même, la matrice triangulaire avec ses 1 est la matrice
 136 de f de la base qu'on cherche (p_1, p_2) dans elle-même. Dans ce cas, on a $f(p_1) = p_1$
 137 et on a une réponse toute trouvée pour p_1 : c'est un élément non nul de l'espace
 138 propre, par exemple le vecteur $(3, 2)$ qu'on a calculé précédemment. Concernant le
 139 second vecteur p_2 , il vérifie

$$(7) \quad f(p_2) = p_1 + p_2.$$

Autrement dit, cette fois, au lieu de résoudre $(M - Id)X = 0$, on va résoudre $(M - Id)X = P_1$. Ce qui donne le système :

$$(8) \quad \begin{cases} -6x + 9y = 3 \\ -4x + 6y = 2. \end{cases}$$

Ce système a encore une infinité de solutions (c'est toujours le cas) et comme il en suffit d'une, on doit juste résoudre $3y = 1 + 2x$, qui a la solution évidente $x = y = 1$. Autrement dit, on a une base de $\mathbb{R}^2$ à savoir $B = \{(3, 2), (1, 1)\}$ dans laquelle, par définition de l'expression d'une application linéaire d'une base dans une autre, la matrice de B dans B est

$$(9) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs tout vérifier après coup: dans l'équation $M = P\Delta P^{-1}$, on connaît M , P (qui est la matrice de B dans la base canonique), Δ (qui est la matrice quasi-diagonale) et on peut calculer P^{-1} par exemple par pivot. On vérifie alors

$$(10) \quad \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'une matrice M non diagonalisable avec plusieurs valeurs propres, le théorème de Jordan aussi appelé réduction de Jordan dont vous pourrez trouver des détails sur Wikipedia affirme que la forme générale de la matrice semblable à M qu'on cherche est la suivante : on a les valeurs propres dans l'ordre, d'abord k_1 fois λ_1 , puis k_2 fois λ_2 , et ainsi de suite et un 1 juste au-dessus entre deux cases diagonales si et seulement si ces deux cases ont la même valeur. Par exemple, si on a trois fois 1 et deux fois 2 comme valeurs propres, la forme de Jordan est

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

157 6. COMPLÉMENT : TESTER LA DIAGONALISABILITÉ

On l'a dit plus haut : pour savoir si M est diagonalisable ou non, on vérifie que les dimensions de tous ses espaces propres sont respectivement égales à la multiplicité de leurs valeurs propres dans le polynôme caractéristique de M . Mais il y a une grosse difficulté avant cela : avant de calculer les dimensions des espaces propres, il faut déjà pouvoir calculer les valeurs propres, ce qui est impossible en général dès que M est de taille 5. Et pourtant, un humain motivé (ou une machine) peuvent tester si une matrice est diagonalisable. Donc sans jamais calculer les valeurs propres.

6.1. Les polynômes annulateurs. Revenons-en aux définitions : si M est diagonalisable, cela veut dire que M peut s'écrire sous la forme $P\Delta P^{-1}$ où Δ est diagonale. Dans ce cas, il est facile de vérifier que le polynôme caractéristique appliqué à Δ donne la matrice nulle et d'ailleurs que ce même polynôme appliqué à M donne aussi

la matrice nulle (car $Q(M) = PQ(\Delta)P^{-1}$). Oui oui, vous avez bien lu, on évalue un polynôme non pas sur une inconnue ou sur un réel mais sur une matrice. On peut ensuite montrer avec un argument dit de densité (sur lequel je ne m'étendrai pas) qu'en fait le polynôme caractéristique annule toujours sa matrice, c'est le théorème de Cayley-Hamilton. Pour plus de détails, on pourra consulter la page wikipedia... et faire le test sur une matrice 2×2 , par exemple l'une de celles du cours précédent.

6.2. Le polynôme minimal et les matrices diagonalisables. Maintenant qu'on sait qu'il existe un polynôme qui annule M , on peut montrer qu'il en existe un appelé *polynôme minimal* de M qui est de degré minimal (et de coefficient 1 pour la plus grande puissance de X mais c'est un détail).

Donc toutes les matrices ont un polynôme minimal. Et ce polynôme minimal divise tous les polynômes qui annulent M : en effet, si P et Q annulent M tous les deux alors $P - Q.R$ aussi pour tout polynôme R et on peut alors copier l'idée de la division euclidienne des entiers (qui calcule leur PGCD en itérant la division euclidienne) sur les polynômes et ainsi, en choisissant bien R obtenir un polynôme non nul de degré inférieur à la fois à P et Q . Si Q est le polynôme minimal, on ne peut pas obtenir un tel polynôme, ce qui n'arrive que dans le cas où Q divise P . En résumé, le polynôme minimal divise en particulier le polynôme caractéristique.

Maintenant, si M est diagonalisable de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, un petit exercice montre que le polynôme $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$, le produit de toutes les $x - \lambda$ sur les valeurs propres *sans leurs multiplicités* annule Δ et donc aussi M . Autrement dit, si M est diagonalisable, M annule un polynôme à racines simples (son polynôme minimal). Cette propriété est aussi vraie dans l'autre sens : M est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme à racines simples.

Je laisse à nouveau les lecteurs intéressés faire le calcul des polynômes minimaux des deux matrices 2×2 du cours précédent et remarquer qu'en effet, le polynôme minimal de l'une est à racines simples alors que l'autre ne l'est pas.

6.3. Calcul pratique. Si on veut utiliser cette propriété pour tester si M est diagonalisable ou non, on va avoir besoin d'un moyen de calculer si M annule un polynôme à racines simples.

Or, il y a un polynôme à racines simples qui nous attend : c'est celui dont les racines sont les valeurs propres (une fois chacune). Et il se calcule en pratique : c'est la division P par $\text{PGCD}(P, P')$, le PGCD de P et de sa dérivée P' de par le théorème de Rolle. Je n'entrerai pas dans les détails, mais le PGCD des polynômes se calcule comme le PGCD des entiers, en itérant la division euclidienne jusqu'à trouver un reste nul.

Maintenant, tout est algorithmique : on programme le PGCD des polynômes, on programme la dérivée des polynômes et on en déduit un polynôme qui est le plus grand polynôme à racines simples qui divise le polynôme caractéristique. D'après tout ce qui a été dit plus haut, M est diagonalisable si et seulement elle annule ce polynôme, parfaitement calculable par une machine, sans même connaître les valeurs propres puisqu'on n'a fait que des transformations élémentaires, dérivée et division, sans jamais rien factoriser.