LE DÉTERMINANT ET SES APPLICATIONS (COURS 9)

JCN

1. INTRODUCTION

Ce document doit idéalement avoir été lu avant la séance pour pouvoir se concentrer sur les questions des uns et des autres pendant le temps imparti.

2. BILAN DU COURS PRÉCÉDENT

Au cours précédent, on a discuté de la diagonalisation de matrices. Mais une question est restée sans réponse : comment calculer *a priori* les valeurs propres ?

Dans l'exemple traité en cours, une symétrie, on savait *a priori* que les valeurs propres étaient 1 et -1 . Mais face à une matrice générale, on ne va pas tester au petit bonheur les valeurs propres unes par unes : il y en a une infinité !

Alors voyons le cas des matrices 2×2 avant de passer aux plus grandes dimensions où il nous faudra un nouvel outil.

3. DIAGONALISATION DES MATRICES 2×2

3.1. Calcul des valeurs propres. Considérons une matrice 2×2 dont il ne sera pas évident de deviner *a priori* les valeurs propres, par exemple

$$(1) \quad M = \begin{pmatrix} -12 & 15 \\ -10 & 13 \end{pmatrix}$$

On a dit la dernière fois qu'une valeur propre était une valeur λ pour laquelle $(M - \lambda I).X = 0$ avait une infinité de solutions (les axes définissant la symétrie dans le cas de la dernière fois). Or, si un système a une infinité de solutions, c'est qu'il n'est pas inversible, ce qu'on peut traduire en disant que la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible.

Pour les matrices 2×2 , ne pas être inversible est facile à voir : cela revient à tester que les deux vecteurs colonnes ne forment pas une base de $\mathbb{R}^2$ (la fameuse bijection dont on a reparlé dans le chat), c'est-à-dire sont colinéaires.

Ici, la matrice est

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -12 - \lambda & 15 \\ -10 & 13 - \lambda \end{pmatrix}$$

et tester la colinéarité revient comme toujours à tester si le produit en croix donne zéro. On calcule :

$$(3) \quad (-12 - \lambda)(13 - \lambda) - 15 \times (-10) = 0,$$

26 ce qui donne, en développant :

$$(4) \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

27 C'est une gentille équation du second degré qu'on résout sans problème et qui nous
28 donne deux solutions : 3 et -2 .

29 **3.2. Fin de la diagonalisation.** Maintenant, on a les valeurs propres et pour diag-
30 onaliser M , on fait comme la dernière fois, on calcule les espaces propres associés à
31 3 et -2 , autrement dit, on résout les systèmes $(M - 3I).X = 0$ et $(M + 2I).X = 0$.

32 Il s'agit à chaque fois de systèmes 2×2 et comme ils ont une infinité de solutions,
33 on sait *a priori* que les deux équations sont proportionnelles. La résolution est donc
34 directe dans chacun des cas.

35 Pour $\lambda = 3$, on trouve

$$(5) \quad -x + y = 0,$$

36 ce qui donne l'espace propre $E_3 = Vect(\{(1, 1)\})$.

37 Pour $\lambda = -2$, on trouve

$$(6) \quad 2x - 3y = 0,$$

38 ce qui donne l'espace propre $E_{-2} = Vect(\{(3, 2)\})$.

39 On en extrait deux vecteurs propres qui sont non colinéaires (c'est un théorème
40 général que les espaces propres sont toujours en somme directe, j'y reviendrai au
41 prochain cours), donc une base de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1, 1), (3, 2)\}$. Si on assimile M à la
42 matrice d'une application linéaire f de la base canonique dans elle-même, alors la
43 matrice de f de B dans elle-même est

$$(7) \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

44 puisque $f(b_1) = 3b_1$ (vecteur propre de valeur propre 3) et $f(b_2) = -2b_2$ (vecteur
45 propre de valeur propre -2). On écrit souvent Δ (Delta majuscule) pour une matrice
46 diagonale... parce que Diagonale commence par D.

47 Pour appliquer la formule du changement de base entre M et Δ , il nous faut les
48 deux matrices de l'identité entre la base canonique et B , autrement dit la matrice
49 $P = mat_{B, Can}(f)$, facile, et la matrice P^{-1} qu'on calcule par pivot ou directement :

$$(8) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

50 En écrivant alors le changement de base, on en déduit la relation entre M et sa version
51 diagonalisée Δ :

$$(9) \quad M = P\Delta P^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

52 Un petit calcul permet de vérifier que "tout colle bien" !

53 **3.3. Conclusion.** On a réussi à diagonaliser M parce qu'on a trouvé ses valeurs
 54 propres, la suite étant plus ou moins automatique (l'algorithme complet sera discuté
 55 au prochain cours car il y a un petit piège).

56 Pour trouver les valeurs propres de M , on a utilisé le fait qu'en dimension 2,
 57 une matrice n'est pas inversible si et seulement si son produit en croix vaut zéro.
 58 L'analogie du produit en croix pour les matrices de plus grande taille s'appelle le
 59 déterminant.

60 4. LE DÉTERMINANT

61 Étant donnée une matrice $n \times n$, son *déterminant* est défini par une formule un
 62 peu complexe à lire. Celles et ceux qui le souhaitent pourront faire un petit coup de
 63 "determinant matrice 3*3 wikipedia" dans leur moteur de recherche. On va plutôt
 64 donner directement les moyens de l'évaluer.

65 Le principe est le suivant :

- 66 • On colorie les cases de la matrice comme un damier, la case en haut à gauche
 67 étant blanche.
- 68 • On prend une ligne ou une colonne de son choix, appelée rangée ci-dessous.
- 69 • Pour chaque case de la rangée choisie, on évalue le produit du contenu de la
 70 case par le déterminant de la matrice qui reste quand on a enlevé sa ligne et
 71 sa colonne. On le multiplie par -1 si la case était noire.

72 Le déterminant est la somme de tous ces éléments (on l'appelle le développement du
 73 déterminant suivant la rangée en question).

74 **4.1. Déterminant 2×2 .** Soit

$$(10) \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

75 Dans le coloriage, a et d sont blancs, b et c sont noirs. Alors le développement du
 76 déterminant de M (qu'on note soit $\det(M)$ soit comme le tableau des coefficients
 77 de M mais entouré de barres plutôt que de parenthèses) suivant la deuxième ligne
 78 donne :

$$(11) \quad |M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1) \times c \times |b| + 1 \times d \times |a| = ad - bc,$$

79 puisque, si on enlève la ligne et la colonne de c , on obtient la matrice 1×1 contenant
 80 b (d'où le $|b|$) et si on enlève la ligne et la colonne de d , on obtient la matrice 1×1
 81 contenant a , d'où le $|a|$.

82 En développant par rapport à la première colonne, on aurait trouvé

$$(12) \quad |M| = 1 \times a \times |d| + (-1) \times b \times |c| = ad - bc,$$

83 donc bien sûr la même formule, qui est bien le produit en croix traditionnel. Les
 84 autres développements donnent aussi la même réponse, comme le lecteur pourra le
 85 vérifier aisément.

86 4.2. **Déterminant 3×3 .** Idem, on se donne M une matrice générale 3×3 .

$$(13) \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

87 Dans ce cas, le coloriage donne a, e, i, g et c avec coefficient $+1$ et b, d, h et f avec
88 coefficient -1 . Le développement M par rapport à la deuxième ligne donne

$$(14) \quad \begin{aligned} |M| &= (-d) \times \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + (+e) \times \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + (-f) \times \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= (-d)(bi - ch) + e(ai - cg) - f(ah - bg). \\ &= cdh - bdi + aei - ceg + bfg - afh. \end{aligned}$$

89 Si on développe par rapport à la première ligne, on trouve

$$(15) \quad \begin{aligned} |M| &= a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-b) \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (c) \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg. \end{aligned}$$

90 C'est bien la même somme que celle calculée juste au-dessus. Les développements
91 par rapport aux autres rangées donneront naturellement encore le même résultat.

92 De manière générale, la technique est la même pour une matrice de n'importe quelle
93 taille : on calcule son déterminant par développement par rapport à une rangée et
94 on itère sur des déterminants de matrices plus petites.

95 4.3. **Calcul pratique de déterminants.** Quand on cherche à calculer un déter-
96 minant, la méthode est simple : on cherche la rangée qui comporte un maximum de
97 zéros pour avoir le moins de sous-déterminants à calculer et on itère de même.

98 Par exemple, pour évaluer

$$(16) \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

99 on a tout intérêt à développer suivant la deuxième colonne, ce qui va donner

$$(17) \quad D = (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

100 qu'on va alors développer suivant la troisième colonne pour obtenir

$$(18) \quad D = (-2)(+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

101 donc enfin $D = (-2)(+1)(4 - 3) = -2$.

102 On serait arrivé au même résultat en développant par rapport à la première ligne...
 103 mais avec beaucoup plus d'effort et beaucoup plus de risque d'erreur !

104 4.3.1. *Matrices triangulaires et diagonales.* Dans le cas particulier où M est triangu-
 105 laire, le calcul du déterminant est immédiat : c'est le produit de ses termes diagonaux.
 106 En effet, on développe à chaque fois suivant la première colonne qui ne contient que
 107 des zéros à part peut-être en première position.

108 Une matrice diagonale étant en particulier triangulaire, la même propriété est
 109 vérifiée : son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux.

110 4.4. **La propriété majeure du déterminant.** Si on se donne deux matrices A et
 111 B , on a

$$(19) \quad \det(A.B) = \det(B.A).$$

112 Appliquons-le au cas d'une matrice M qu'on sait être diagonalisable. On a vu la
 113 formule

$$(20) \quad M = P\Delta P^{-1}.$$

114 Alors

$$(21) \quad \det(M) = \det(P\Delta P^{-1}) = \det(P^{-1}P\Delta) = \det(\Delta).$$

115 Donc le déterminant de M est égal au produit de ses valeurs propres. Mais on peut
 116 faire beaucoup mieux :

$$(22) \quad \begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \det(P\Delta P^{-1} - \lambda I) \\ &= \det(P\Delta P^{-1} - \lambda P P^{-1}) \\ &= \det((P\Delta - \lambda P)P^{-1}) = \det(P^{-1}(P\Delta - \lambda P)) \\ &= \det(\Delta - \lambda I). \end{aligned}$$

117 Autrement dit, le déterminant qu'on évaluait précédemment pour trouver les valeurs
 118 propres les calcule pour de vrai : puisque Δ est diagonale, $\Delta - \lambda I$ aussi et a dans
 119 chaque case un $d_i - \lambda$. Or, le déterminant d'une matrice diagonale est le produit
 120 de ses éléments diagonaux : c'est donc le polynôme (sous forme factorisée) dont les
 121 racines sont les valeurs propres.

122 4.5. **Un mot de vocabulaire.** Si M est une matrice, le polynôme $\det(M - \lambda I)$ est
 123 le *polynôme caractéristique* de M .

124 5. APPLICATION À LA DIAGONALISATION

125 On reverra plus en détail la diagonalisation et on découvrira la trigonalisation
 126 quand la diagonalisation rate, mais, pour aujourd'hui, essayons simplement deux ex-
 127 emples de diagonalisation, un qui réussit et un qui rate pour montrer où l'algorithme
 128 peut rater.

129 5.1. **Une matrice 3×3 diagonalisable.** Considérons la matrice

$$(23) \quad M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 11 & -7 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

130 On calcule d'abord son polynôme caractéristique $\det(M - \lambda I)$. On trouve, en déve-
131 loppant par rapport à la première ligne :

$$(24) \quad \begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 & 0 \\ 11 & -7 - \lambda & 2 \\ 4 & -3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda) \begin{vmatrix} -7 - \lambda & 2 \\ -3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda) ((-7 - \lambda)(3 - \lambda) - (-3) \times 2) - (-3)(11(3 - \lambda) - 4 \times 2) \\ &= (5 - \lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 15) + 3(-11\lambda + 25) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda. \end{aligned}$$

132 Ce polynôme se factorise facilement car 0 est racine évidente et on a alors une équation
133 du second degré

$$(25) \quad D = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

134 Ainsi, M a trois valeurs propres qui sont 0, -1 et 2.

135 Le calcul des espaces propres pour chacune des valeurs propres est désormais assez
136 routinier : on calcule pour chacune des trois l'ensemble des solutions à $(M - \lambda I).X =$
137 0. Pour chacune, on trouvera un espace de dimension 1 (une droite donc), on en
138 choisira une base et on obtiendra ainsi une base de vecteurs propres, montrant que
139 M est diagonalisable.

140 Tous calculs faits, on trouve

$$(26) \quad \begin{aligned} E_2 &= \text{Vect}(\{1, 1, -1\}) \\ E_{-1} &= \text{Vect}(\{2, 4, 1\}) \\ E_0 &= \text{Vect}(\{3, 5, 1\}) \end{aligned}$$

141 et tout cela permet d'écrire :

$$(27) \quad M = P \Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

142 et on pourra vérifier que le calcul tombe encore juste.

143 5.2. **Une matrice 2×2 non diagonalisable.** Considérons pour finir ce cours une
144 matrice 2×2 toute simple :

$$(28) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

145 Son polynôme caractéristique vaut

$$(29) \quad \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 = \lambda^2.$$

146 Donc M a une valeur propre double : 0.

147 L'espace propre associé à la valeur propre 0 est aussi facile à calculer : on doit
148 résoudre $(M - \lambda I).X = 0$, ce qui se ramène dans ce cas à $M.X = 0$. En écrivant
149 X comme le vecteur (x, y) , la deuxième équation donne $0 = 0$ et on doit donc
150 simplement résoudre $y = 0$ (première équation). C'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
151 : $\text{Vect}(\{(1, 0)\})$.

152 On a donc trouvé *un* vecteur propre pour M . Or, pour que M soit diagonalisable,
153 il faudrait en avoir une base, donc ici deux vecteurs linéairement indépendants. Cela
154 n'est pas possible car M n'a qu'une seule valeur propre (double) donc il est inutile
155 de chercher un vecteur propre associé à une valeur propre autre que zéro puisqu'il
156 n'y en a pas. De plus, pour la valeur propre 0, on a vu que son espace propre était
157 une droite vectorielle, donc on ne peut pas en extraire deux vecteurs linéairement
158 indépendants.

159 Donc M n'est pas diagonalisable.

160 5.3. **Remarques conclusives.** On verra au prochain cours une condition nécessaire
161 et suffisante pour décider si une matrice M est diagonalisable. En pratique, quand on
162 calcule à la main, le plus rapide est encore de calculer les espaces propres et de tester
163 si on peut en extraire une base de l'espace (vérifier que la dimension de chaque espace
164 propre est égal à la multiplicité de la valeur propre correspondante dans le polynôme
165 caractéristique suffit et on reparlera aussi de cela). Mais il existe une méthode plus
166 efficace, au moins pour un ordinateur.

167 Enfin, puisque parfois la diagonalisation n'est pas possible, il nous faudra un autre
168 algorithme pour, partant d'une matrice, obtenir une matrice la plus simple possible
169 qui lui soit semblable. Ce sera l'algorithme de trigonalisation que je considère déjà
170 dans des conditions habituelles de fonctionnement du cours comme à la limite du
171 programme. Je le présenterai malgré tout parce qu'il est utile en pratique mais cela
172 restera un point culturel, dont je ne testerai pas la maîtrise à l'examen.