

RO – IR2

TD 1 - Modélisation LP

► **Exercice 1** ◀ Un carrossier industriel prépare des **fourgons** et des **plateaux**. Il dispose de quatre ateliers : *mécanique, tôlerie, sellerie et peinture*. Chaque atelier fonctionne 60 heures par semaine.

La préparation d'un **fourgon** nécessite 5 heures de mécanique, 12 heures de tôlerie et 10 heures de peinture. La préparation d'un **plateau** nécessite 10 heures de mécanique, 12 heures de sellerie et 5 heures de peinture.

Le marché n'est pas saturé, chaque véhicule offre un bénéfice net de 1000€ et le carrossier cherche la production qui maximisera son bénéfice.

(a) Formalisez ce problème par un programme linéaire.

(b) Déterminez graphiquement l'optimum.

► **Exercice 2** ◀ Une entreprise étrangère de poterie fabrique des pots et des vases. La fabrication de ces produits nécessite du temps de travail (main d'oeuvre), du temps de cuisson et de la matière première. Les coefficients techniques de production ainsi que les prix de vente par unité de produit sont fournis dans le tableau suivant :

produit	fabrication (heures)	argile (kg)	cuisson (heures)	prix
pot	0.5	1	0.8	8
vase	0.75	2	1.5	15

On a les contraintes suivantes :

- Le fournisseur d'argile peut en vendre au plus 400 kg par semaine, à 1.5€ le kilo.
- L'entreprise emploie 4 personnes qui travaillent 40 heures par semaine.
- Le temps de disponibilité des fours est de 320 h par semaine.

(a) L'entreprise souhaite maximiser ses bénéfices. Modélisez le problème en programmation linéaire.

(b) L'entreprise fait appel à un expert pour mieux gérer sa production. L'expert leur dit que sans publicité, ils ne peuvent vendre que 50 vases et 60 pots par semaine. En revanche, chaque semaine, pour chaque euro investi en publicité sur un des deux produits, on augmente la demande de 10 unités de ce produit. Comme les espaces publicitaires disponibles localement sont réduits, on ne peut dépenser plus de 100€ en publicité en tout. Sachant que l'entreprise ne veut plus d'invendus, modélisez le problème avec les nouveaux paramètres à prendre en compte.

(c) Le pays passe au 35h, mais l'entreprise peut proposer des heures supplémentaires à ses employés (qui acceptent toujours), au tarif de 6€ de l'heure. Comment change la formulation du problème pour tenir compte de ces changements ?

► **Exercice 3** ◀ Une usine produit trois composants A, B et C sur la même ligne de production. Produire une unité de A coûte 1 heure, une de B coûte $\frac{3}{4}$ d'heure et une de C coûte une demi-heure. Cependant le produit C doit être finalisé à la main, ce qui coûte 0.25 heure de travail manuel. Chaque semaine, on peut aller jusqu'à 300h de travail en ligne de production et 45 heures en finitions manuelles.

Les composants ne sont pas vendus tels quels, mais utilisés pour deux types de produits finis X et Y. Le produit X coûte une unité de A et une de C, et se vend avec un profit de 30e. Le produit Y coûte deux unités de B et une de C, et se vend avec un profit de 45e. Chaque semaine, l'entreprise ne peut vendre que jusqu'à 130 unités de X et 100 de Y. Elle cherche à maximiser son profit.

(a) Formuler le problème par un programme linéaire.

► **Exercice 4** ◀ Le service de police de Gotham City doit assurer une présence policière minimale dans les rues en fonction des heures, récapitulé dans le tableau suivant.

minuit – 4h	4h – 8h	8h – 12h	12h – 16h	16h – 20h	20h – minuit
15 p.	35 p.	65 p.	80 p.	40 p.	25 p.

Chaque policier prend son service à minuit, 4h, 8h, 12h, 16h ou 20h et travaille pendant 8 heures consécutives.

(a) Ecrire un programme linéaire qui permet d'organiser l'emploi du temps des policiers de façon à ce que la ville minimise le nombre qu'elle en embauche, tout en assurant la présence minimale.

► **Exercice 5** ◀ Une entreprise de manufacture de canoës emploie 120 personnes, qui travaille chacun 30 heures par semaine. 60 personnes travaillent au département charpenterie, 20 personnes au département plastique et le reste à l'assemblage.

L'entreprise vend des canoës simples avec un bénéfice net de 70€ et des canoës de luxe avec 100€ de profit.

Un canoë simple demande 4.5 heures de travail en charpenterie, et 2h dans chacun des deux autres départements. Un canoë de luxe nécessite 5h de charpenterie, 1 heure de plastique et 4 heures d'assemblage.

Des études de marketing ont montré que les canoës de luxe doivent constituer entre un tiers et deux tiers de la production.

(a) Proposez un programme linéaire pour maximiser le bénéfice.

► **Exercice 6** ◀ Un avion de transport dispose de trois compartiments pour entreposer sa cargaison, une à l'avant, une au centre et une à l'arrière. Ces compartiments ont les capacités suivantes en espace et en poids :

Compartiment	Poids maximal (tonnes)	Volume de stockage (m^3)
Avant	10	6800
Centre	16	8700
Arrière	8	5300

Afin de maintenir l'équilibre du vol, le poids des marchandises entreposées dans chaque compartiment doivent représenter la même proportion du poids total admis pour ce compartiment (si l'on entrepose 5 tonnes à l'avant il faudra entreposer 8 tonnes au centre et 4 tonnes à l'arrière). Les marchandises suivantes sont prêtes à être embarquées sur le prochain vol :

Marchandise	Quantité disponible (tonnes)	Volume ($m^3/tonne$)	Bénéfice (E/tonne)
M1	18	480	310
M2	15	650	380
M3	23	580	350
M4	12	390	285

Tout fractionnement de ces marchandises est possible.

(a) Proposez un programme linéaire déterminant un chargement maximisant le bénéfice.

► **Exercice 7** ◀ Une entreprise achète des barres d'aluminium de 3 mètres et les utilise pour découper des éléments de fenêtre dont les longueurs peuvent être de 0.50 m, 1.00 m, 1.20 m. L'entreprise doit réaliser un chantier demandant 300 éléments de 0.50 m, 130 éléments de 1.00 m et 100 éléments de 1.20 m. Les barres d'aluminium entamées ne pourront pas servir pour un autre chantier et sont considérées comme perdues. L'entreprise cherche un plan de découpe qui minimise le nombre de barres de 3m utilisées.

(a) Proposez une formulation de ce problème comme un programme linéaire.

► **Exercice 8** ◀ Une petite compagnie d'aviation possède un avion qui fait le trajet entre les villes A, B et C de la façon suivante : A → B → C chaque jour. La nuit, il revient de C à A, mais cela ne fait pas partie de notre exercice.

Il y a trois types de voyages qui sont proposés : A → B, A → C et B → C, et trois classes différentes, par ordre de confort croissant : 2eme classe, 1ere classe, business. Le prix des différents trajets a déjà été fixé par les services marketing, basé sur ce qu'offre la concurrence :

	A → B	B → C	A → C
business	300€	160€	360€
1ere	220€	130€	280€
2nd	100€	80€	140€

Des études ont été menées pour essayer de prévoir les préférences des voyageurs. Plus précisément, on a estimé combien on pouvait espérer au maximum vendre de billet de chaque type. Cela donne le tableau des demandes suivants :

	A → B	B → C	A → C
business	4	8	3
1ere	8	13	10
2nd	22	20	18

L'avion peut transporter jusqu'à 30 passagers.

(a) Ecrire un programme linéaire qui indique combien on doit mettre en vente de billets de chaque type pour maximiser les profits, tout en étant sur de ne pas faire de sur-booking et en ne dépassant pas les estimations du tableau des demandes.