Mathématiques pour l'informatique 3
(notes de cours)

L2 – Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Cyril Nicaud

25 janvier 2012

CHAPITRE I

Relations d'ordre

Ce chapitre traite des relations d'ordre. Après des rappels de notions abordées l'an dernier, on s'intéresse plus particulièrement aux "ordres bien fondés" qui permettent de généraliser le principe de récurrence.

I.1 Ordre et ordre strict

Définition (relation binaire) Soit E un ensemble. Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de $E \times E$. On note $x\mathcal{R}y$ pour signifier que $(x, y) \in \mathcal{R}$ et $x \not\mathcal{R} y$ pour signifier que $(x, y) \notin \mathcal{R}$.

Définition (classification) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est

- *réflexive* quand $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$;
- *irréflexive* quand $\forall x \in E$, $x\not\mathcal{R}x$;
- *symétrique* quand $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- *antisymétrique* quand $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$;
- *transitive* quand $\forall x, y, z \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Définition (ordre) Une relation binaire est un *ordre* (ou une *relation d'ordre*) quand elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition (ensemble ordonné) Soit E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. On dit que $(E, \preccurlyeq)$ est un *ensemble ordonné*.

▶ Attention, les définitions ci-dessus correspondent à l'ordre large mais pas à l'ordre strict : $(\mathbb{R}, <)$ où $<$ est l'ordre strict usuel sur les réels n'est pas un ensemble ordonné (c'est un ensemble strictement ordonné, voir en-dessous).

Définition (ordre strict) Une relation binaire est un *ordre strict* (ou une *relation d'ordre strict*) quand elle est irréflexive et transitive.

Théorème I.1 *Un ordre strict est toujours antisymétrique.*

Définition (ensemble strictement ordonné) Soit E un ensemble et $<$ une relation d'ordre strict sur E. On dit que $(E, \prec)$ est un *ensemble strictement ordonné.*

Définition (ordre total) Un ordre $\preccurlyeq$ sur E est dit *total* si deux éléments sont toujours comparables : $\forall x, y \in E,\ x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Un ordre qui n'est pas total est dit *partiel.*

Définition (ordre strict total) Un ordre strict $\prec$ sur E est dit *strict total* si deux éléments différents sont toujours comparables : $\forall x, y \in E,\ x \neq y \Rightarrow x \prec y$ ou $y \prec x$.

► Sans surprise, on peut toujours passer d'un ordre à un ordre strict et réciproquement. Si $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné, la relation $\prec$ définie par $x \prec y$ ssi ($x \neq y$ et $x \preccurlyeq y$) est un ordre strict. Réciproquement, si $(E, \prec)$ est un ensemble strictement ordonné, la relation $\preccurlyeq$ définie par $x \preccurlyeq y$ ssi ($x = y$ ou $x \prec y$) est une relation d'ordre.

I.2 Minorants, majorants, minimaux et maximaux

Définition (minorant, plus petit élément) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et F une partie (c'est-à-dire un sous-ensemble) non vide de E. On dit que $x \in E$ est un *minorant* de F si tout élément de F est plus grand que x pour $\preccurlyeq$: $\forall y \in F,\ x \preccurlyeq y$. Si le minorant de F est un élément de F on dit que c'est *le plus petit élément* de F.

Définition (majorant, plus grand élément) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E. On dit que $x \in E$ est un *majorant* de F si tout élément de F est plus petit que x pour $\preccurlyeq$: $\forall y \in F,\ y \preccurlyeq x$. Si le majorant de F est un élément de F on dit que c'est *le plus grand élément* de F.

► Il n'y a pas toujours un minorant ou un majorant : si l'ensemble c'est $\mathbb{Z}$ et la partie $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 2, il n'y a ni minorant ni majorant.

Théorème I.2 *Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E. F a au plus un plus petit élément et au plus un plus grand élément.*

Définition (élément minimal) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E. Un élément $x \in F$ est un *élément minimal* de F quand aucun élément de F n'est strictement plus petit, pour $\preccurlyeq$, que x : $\forall y \in F,\ y \preccurlyeq x \Rightarrow y = x$.

Définition (élément maximal) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E. Un élément $x \in F$ est un *élément maximal* de F quand aucun élément de F n'est strictement plus grand, pour $\preccurlyeq$, que x : $\forall y \in F,\ x \preccurlyeq y \Rightarrow y = x$.

I.3 Produit d'ordres

Définition (ordre produit simple) Soit $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$ deux ensembles ordonnés. On définit l'*ordre produit simple* $\preccurlyeq_{\text{prod}}$ sur $E \times F$ par

$$\forall (x,y) \in E \times F, \forall (x',y') \in E \times F,\ (x,y) \preccurlyeq_{\text{prod}} (x',y') \Leftrightarrow x \preccurlyeq_E x' \text{ et } y \preccurlyeq_F y'.$$

Définition (ordre produit lexicographique) Soit $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$ deux ensembles ordonnés. On définit l'*ordre produit lexicographique* $\preccurlyeq_{\text{prod}}$ sur $E \times F$ par, on notant $\prec_E$ et $\prec_F$ les ordres stricts associés à $\preccurlyeq_E$ et $\preccurlyeq_F$,

$$\forall (x,y) \in E \times F, \forall (x',y') \in E \times F,\ (x,y) \preccurlyeq_{\text{lex}} (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x \prec_E x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \preccurlyeq_F y'. \end{cases}$$

► Si $\preccurlyeq_E$ et $\preccurlyeq_F$ sont des ordres totaux, $\preccurlyeq_{\text{lex}}$ est aussi un ordre total ; ce n'est pas vrai pour $\preccurlyeq_{\text{prod}}$.

I.4 Ordre bien fondé

Définition (ordre bien fondé) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On dit que $\preccurlyeq$ est *bien fondé* quand il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de E.

► L'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est bien fondé, mais pas celui sur $\mathbb{Z}$, ni celui sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème I.3 (caractérisation des ordres bien fondés) *Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. L'ordre $\preccurlyeq$ est bien fondé si et seulement si tout partie non vide F de E admet au moins un élément minimal.*

Théorème I.4 *Le produit lexicographique de deux ordres bien fondés est bien fondé.*

► Le programme suivant se termine pour toutes entrées n et m dans $\mathbb{N}^*$:

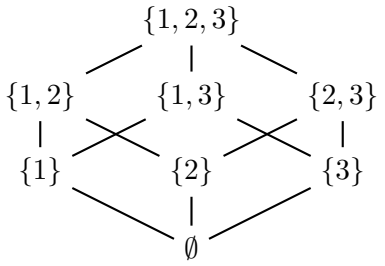
```
while (m != n) {
  if (m > n)
    m = m - n;
  else
    n = n - m;
}
```

En effet, si on considère l'ordre lexicographique naturel sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on s'aperçoit qu'à chaque itération le couple (m, n) est strictement inférieur à celui d'avant. Comme l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est bien fondé (d'après le théorème précédent), on ne peut effectuer qu'un nombre fini d'itérations dans le programme.

I.5 Ordres sur des ensembles finis, diagramme de Hasse

Quand $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble fini ordonné, on peut le représenter graphiquement par son *diagramme de Hasse*, qui est un graphe non-orienté avec les contraintes suivantes :
- les sommets sont les éléments de E ;
- si $x \prec y$ on place x plus bas que y sur le diagramme ;
- si $x \prec y$ et qu'il n'y a pas de $z \in E$ tel que $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, on met une arête entre x et y.

► Le diagramme de Hasse pour l'ordre $\subset$ sur $E = \{1, 2, 3\}$ est :



Théorème I.5 *Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble fini ordonné. L'ordre $\preccurlyeq$ est bien fondé sur E.*

I.6 Ordres sur les mots

On se donne un ordre strict $\prec$ sur l'alphabet.

Définition (ordre lexicographique sur les mots) Soit A un alphabet fini. On définit l'ordre lexicographique sur les mots $\leq_{\text{lex}}$ par

$$\forall u, v \in A^*,\ u \leq_{\text{lex}} v \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ est préfixe de } v \\ \text{ou} \\ \exists w, s, t \in A^*,\ \exists a, b \in A, a \prec b \text{ et } u = was \text{ et } v = wbt \end{cases}$$

Définition (ordre militaire sur les mots) Soit A un alphabet fini. On définit l'ordre militaire sur les mots $\leq_{\text{mil}}$ par

$$\forall u, v \in A^*,\ u \leq_{\text{mil}} v \Leftrightarrow \begin{cases} |u| < |v| \\ \text{ou} \\ |u| = |v| \text{ et } u \leq_{\text{lex}} v \end{cases}$$

Théorème I.6 *Sur les mots, l'ordre militaire est bien fondé, mais pas l'ordre lexicographique.*