Réseaux de transport

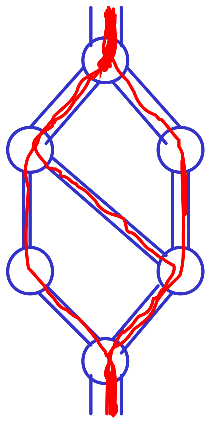
Graphe orienté valué $G = (S, A, c)$

$c(p, q)$: capacité de l'arc (p, q)
$f(p, q)$: débit ou flot de l'arc (p, q)

Exemples

- Canalisations hydrauliques
- Pipe-lines
- Voies de circulation
- Transports de marchandises,
- Réseau de communication

source *s*



puits *t*

Conditions

Capacité c : S x S ® **R** avec $c(p, q)$ ³ 0
et si (p, q) ¹ A $c(p, q) = 0$
Flot f : S x S ® **R**

source $s \in S$, puits $t \in S$

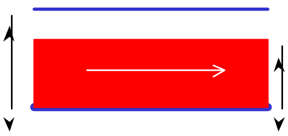
Accessiblité

tous les sommets sont sur un chemin de s à t

Contrainte de capacité

pour tous $p, q \in S$ $f(p, q)$ £ $c(p, q)$

$c(p, q)$



$f(p, q)$

Conditions (suite)

Anti-symétrie

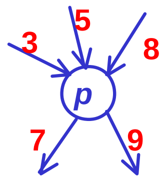
pour tous $p, q \in S \quad f(q, p)$ **=** $- f(p, q)$

$p \xrightarrow{17} q$ flot direct

$p \xleftarrow{-17} q$ flot prélevable

Conservation du flot

pour tout $p \in S \setminus \{s,t\}$ S **(**$f(p, q) \mid q \in S$ **)** $= 0$



Flot

Valeur du flot

$| f | = \mathrm{S}$ **(**$f(s, q) \mid q \in S$ **)**
ce qui part de la source

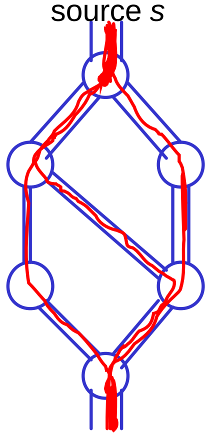
Propriétés

pour tout $p \in S \quad f(p, p) = 0$

pour tout $q \in S$ S **(**$f(p, q) \mid p \in S$ **)** $= 0$

$| f | = \mathrm{S}$ **(**$f(p, t) \mid p \in S$ **)**
ce qui arrive au puits

source *s*



puits *t*

Représentations

Matrices d 'adjacence
matrice des capacités
matrice des flots

Listes des successeurs
avec capacités et flots

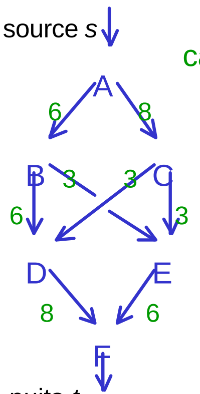
Graphique

Problème

Graphe orienté valué *G* = (*S*, *A*, *c*)
Calculer le **flot maximum**,
i.e. un flot *f* dont la valeur est maximale

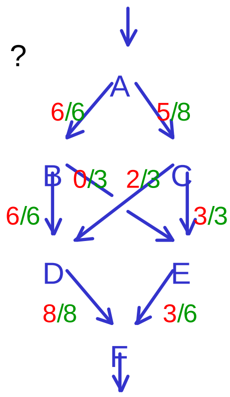
source *s*

capacités



puits *t*

un flot maximal ?
| *f* | = 11



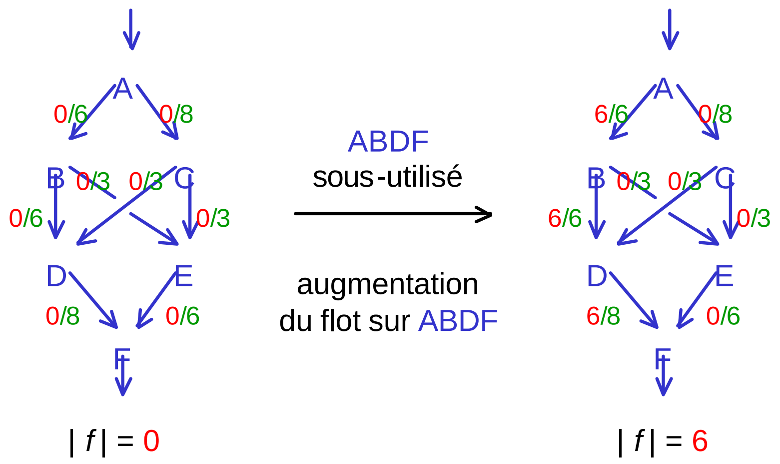
Méthode de Ford et Fulkerson

1 initialiser le flot *f* à 0 ;
2 **`tant qu`**'il existe un chemin de *s* à *t* sous-utilisé **`faire`**
    augmenter le flot *f* sur ce chemin ;
3 **`retour`** le flot *f*

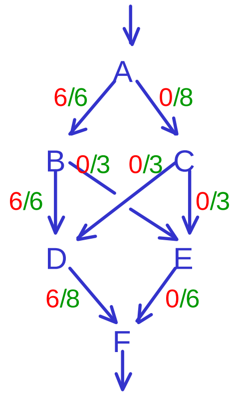
Théorème

si tout chemin (*s, …, p, q, …, p', q', …, t*) possède
un arc avant plein, *f* (*p*, *q*) **=** *c* (*p*, *q*),
ou un arc arrière vide, *f* (*q'*, *p'*) **=** 0,
alors le flot est maximum

Exemple



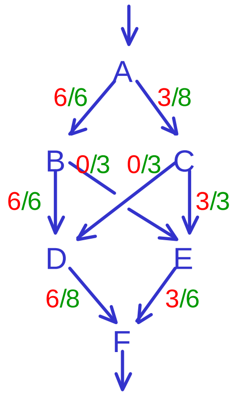
Exemple (suite)



| *f* | = 6

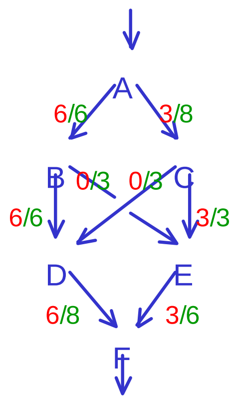
ACEF
sous-utilisé

augmentation
du flot sur ACEF



| *f* | = 9

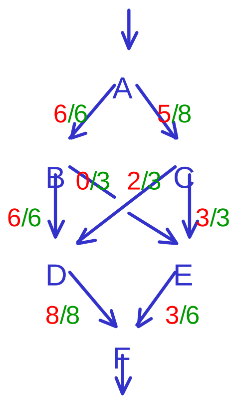
Exemple (suite)



| *f* | = 9

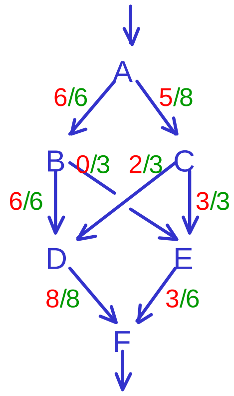
ACDF
sous-utilisé

augmentation
du flot sur ACDF



| *f* | = 11

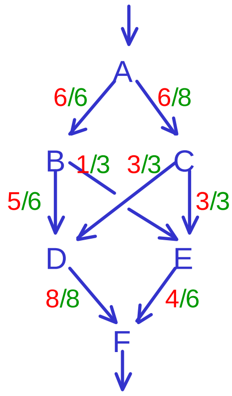
Exemple (suite)



| *f* | = 11

ACDBEF
sous-utilisé

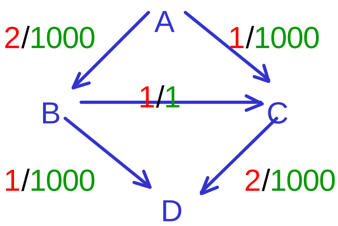
augmentation
du flot sur ACDBEF

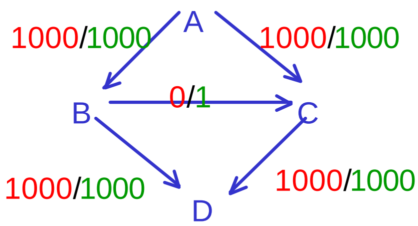


| *f* | = 12
maximum

Exemple

Le nombre d'itérations dépend du choix des chemins





augmentations	chemins
1	ABCD
1	ACBD
1	ABCD
etc.	

augmentations	chemins
1000	ABD
1000	ACD
flot maximum	

Stratégie 1

Pour augmenter le flot :

choisir le plus court chemin sous-utilisé

Théorème

le calcul du flot maximum obtenu avec cette stratégie nécessite l'examen de moins de card*S*.card*A* chemins.

Stratégie 2

Pour augmenter le flot :

choisir le chemin qui a la plus forte capacité disponible
[augmentation maximum du flot à cette itération]
Choix du chemin : problème dual du plus court chemin de *s* à *t*

Réalisation :

en utilisant une file de priorité sur les sommets

Coupure

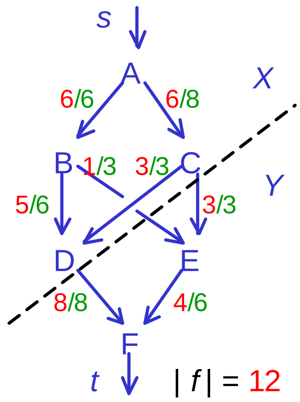
(X, Y) coupure de $G = (S, A, c)$:
(X, Y) partition de S avec $s \in X$, $t \in Y$

capacité

$$c(X, Y) = \mathrm{S}\ \mathbf{(}\ c(x, y) \mid x \in X, y \in Y\ \mathbf{)}$$

flot

$$f\,(X, Y) = \mathrm{S}\ \mathbf{(}\ f\,(x, y) \mid x \in X, y \in Y\ \mathbf{)}$$



$X = \{A,B,C,D\}$ $Y = \{E,F\}$ $c(X,Y) = 14$ $f\,(X,Y) = 12$

Propriétés (X,Y) coupure

1 $f\,(X,Y) = |\,f\,|$

2 $f\,(X,Y) \leq c(X,Y)$

Le flot maximum est borné par le minimum des capacités des coupures

3 f est un flot maximal ssi $|\,f\,| = c(X', Y')$ pour une coupure (X', Y')

Coupure optimale

X' = {A,C}

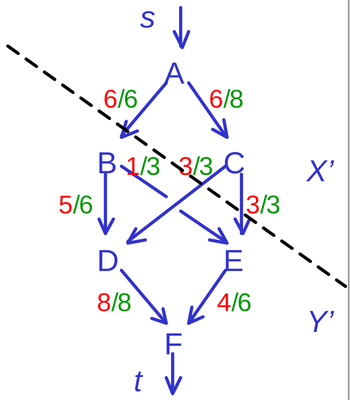
Y' = {B,D,E,F}

$c(X',Y')$ = 12

(X',Y') de capacité minimale

$f\,(X',Y')$ = 12

flot maximum



| f | = 12