
Conjugaison, équivalence et revêtements d'automates

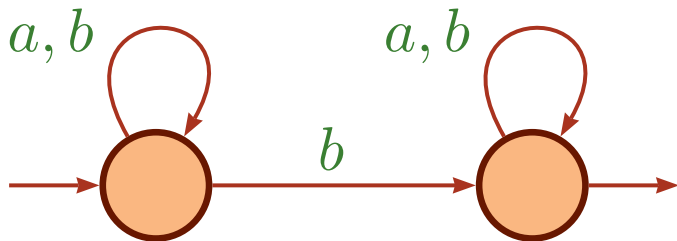
Sylvain Lombardy IGM - Université Marne-la-Vallée

Marie-Pierre Béal IGM - Université Marne-la-Vallée

Jacques Sakarovitch LTCI - ENST/CNRS

Automate... avec multiplicité

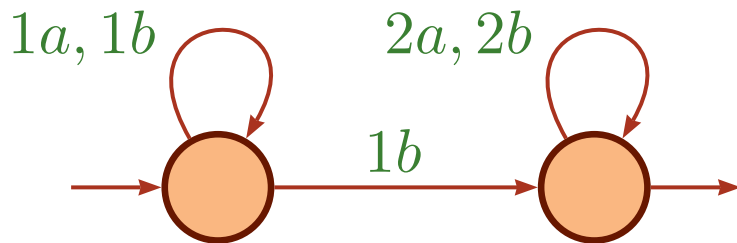
$\mathbb{B}$	automates “classiques”
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	compter les chemins
Corps	
$\text{Rat}(B^*)$	transducteurs
max-plus, min-plus	automates de distance ou de coût



Booléen: accepte les mots qui ont un b .
Sur $\mathbb{N}$: compte le nombre de b .

Automate... avec multiplicité

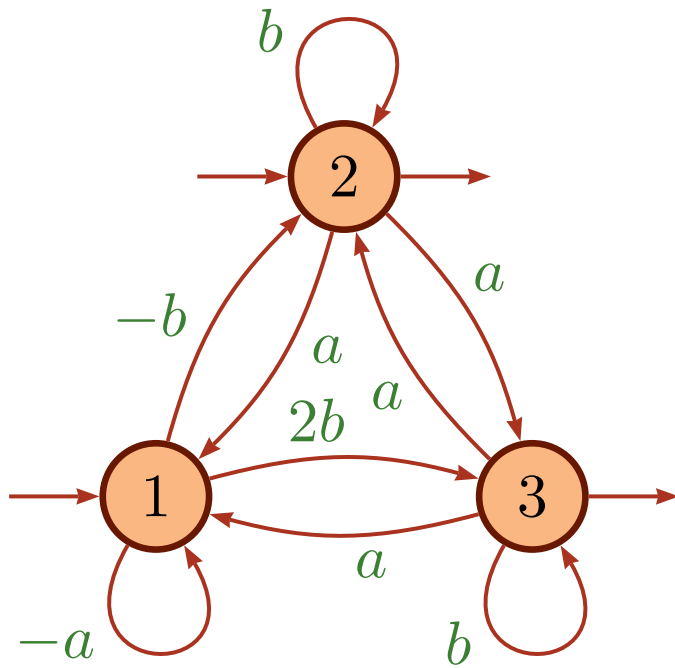
$\mathbb{B}$	automates “classiques”
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	compter les chemins
Corps	
$\text{Rat}(B^*)$	transducteurs
max-plus, min-plus	automates de distance ou de coût



Sur $\mathbb{N}$: valeur du nombre écrit en base 2.

Sur $(\mathbb{N}, \min, +)$:

longueur du mot + nbe de a à la fin

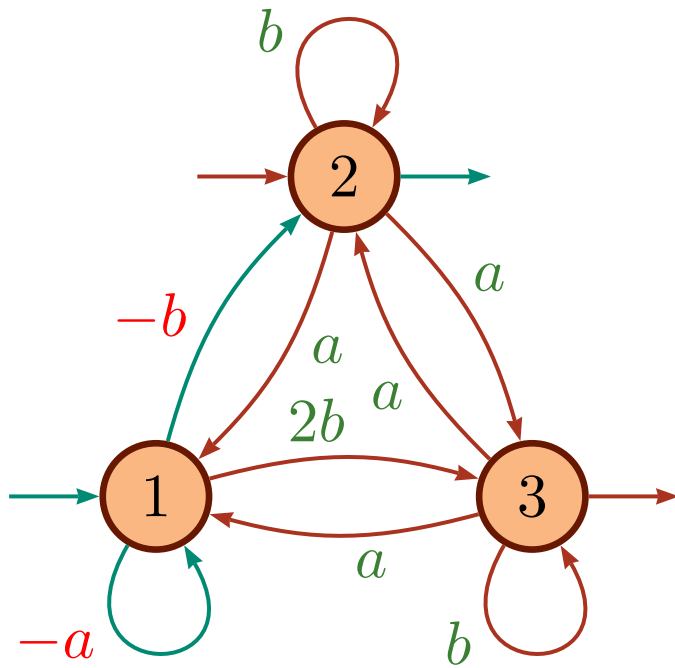


$\langle |\mathcal{A}|, ab \rangle =$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -a & -b & 2b \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

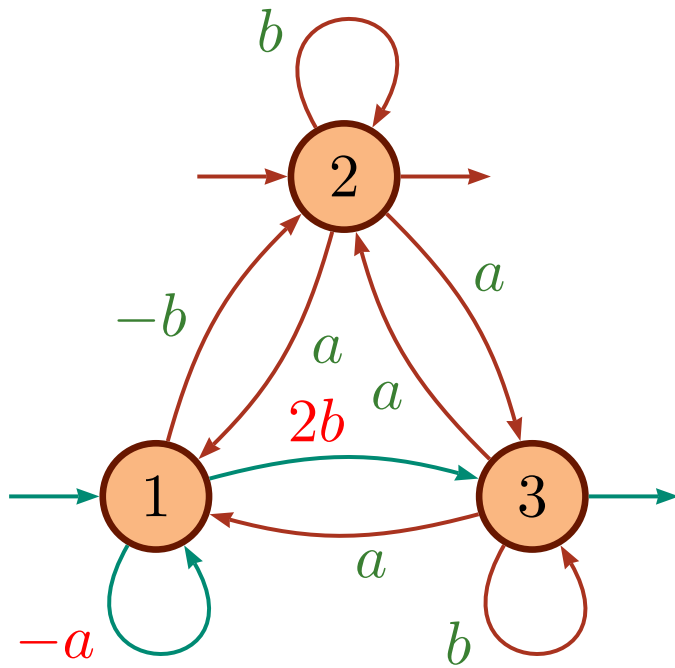


$$\langle |\mathcal{A}|, ab \rangle = 1$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -a & -b & 2b \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

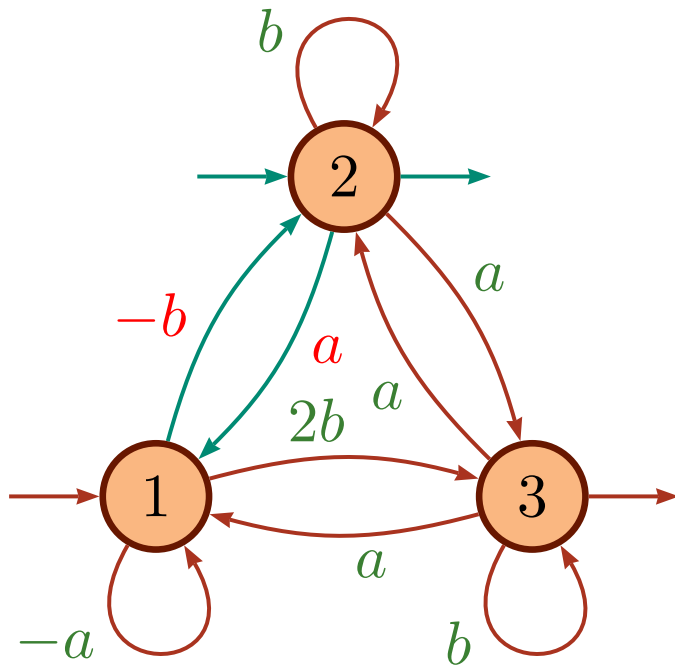


$$\langle |\mathcal{A}|, ab \rangle = 1 - 2$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -a & -b & 2b \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

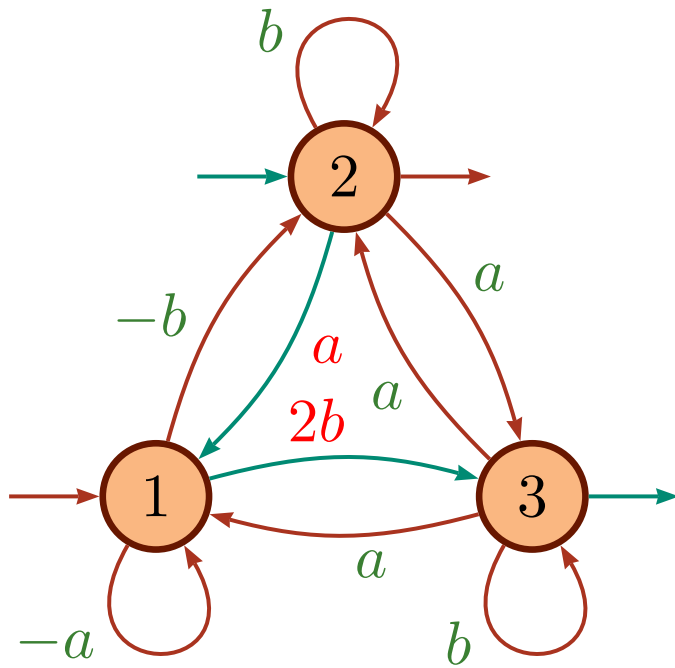


$$\langle |\mathcal{A}|, ab \rangle = 1 - 2 - 1$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -a & -b & 2b \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

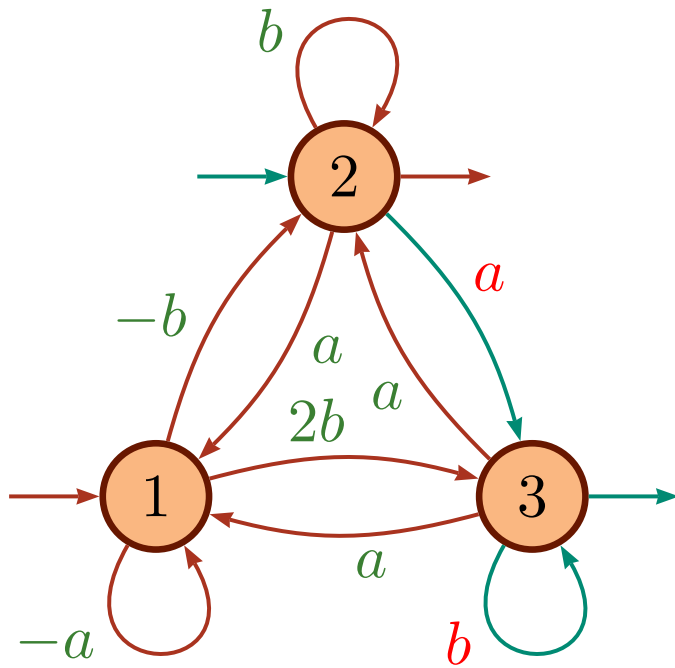


$$\langle |\mathcal{A}|, ab \rangle = 1 - 2 - 1 + 2$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -a & -b & 2b \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

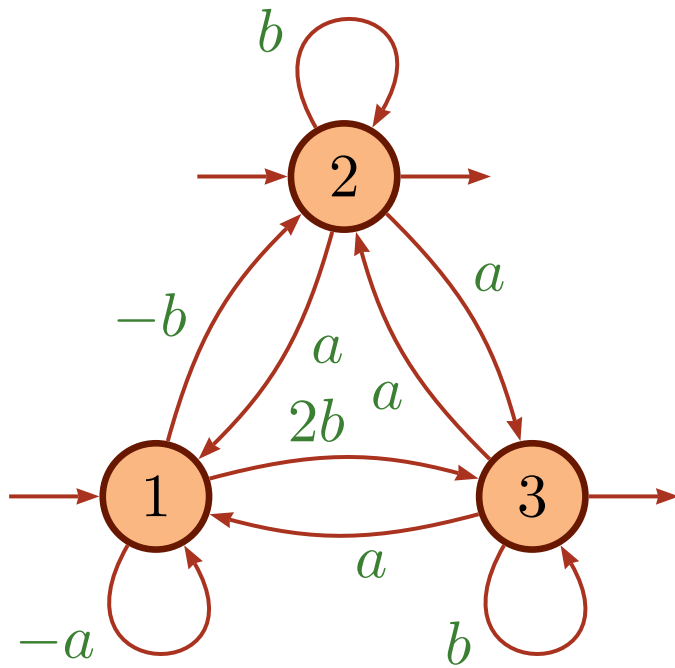


$$\langle |\mathcal{A}|, ab \rangle = 1 - 2 - 1 + 2 + 1 = 1$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -a & -b & 2b \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu(a) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu(b) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle |\mathcal{A}|, ab \rangle = 1 - 2 - 1 + 2 + 1 = 1 = I\mu(a)\mu(b)T$$

Deux automates sont équivalents s'ils réalisent la même série.

La décidabilité dépend du semi-anneau ou de la forme des automates:

Booléens	décidable		
Multiplicité dans un corps	décidable		
Transducteurs	indécidable	fonctionnel	décidable
Tropicaux	indécidable	non ambigu	décidable

$\mathcal{A} = (I, M, T), \mathcal{B} = (J, N, U). \mathcal{A} \xrightarrow{X} \mathcal{B}:$

$$IX = J, \quad MX = XN, \quad \text{et} \quad T = XU.$$

$\mathcal{A} = (I, M, T), \mathcal{B} = (J, N, U). \mathcal{A} \xrightarrow{X} \mathcal{B}$:

$$IX = J, \quad MX = XN, \quad \text{et} \quad T = XU.$$

Pour tout w , on a:

$$I\mu(w_1)\dots\mu(w_n)T = I\mu(w_1)\dots\mu(w_n)XU$$

$\mathcal{A} = (I, M, T), \mathcal{B} = (J, N, U). \mathcal{A} \xrightarrow{X} \mathcal{B}$:

$$IX = J, \quad MX = XN, \quad \text{et} \quad T = XU.$$

Pour tout w , on a:

$$I\mu(w_1)\dots\mu(w_n)T = I\mu(w_1)\dots X\nu(w_n)U$$

$\mathcal{A} = (I, M, T), \mathcal{B} = (J, N, U). \mathcal{A} \xrightarrow{X} \mathcal{B}$:

$$IX = J, \quad MX = XN, \quad \text{et} \quad T = XU.$$

Pour tout w , on a:

$$I\mu(w_1)\dots\mu(w_n)T = IX\nu(w_1)\dots\nu(w_n)U$$

$\mathcal{A} = (I, M, T), \mathcal{B} = (J, N, U). \mathcal{A} \xrightarrow{X} \mathcal{B}$:

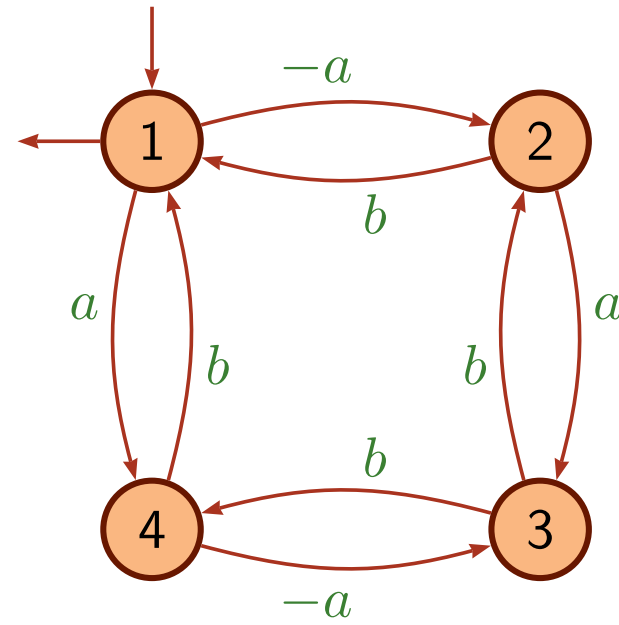
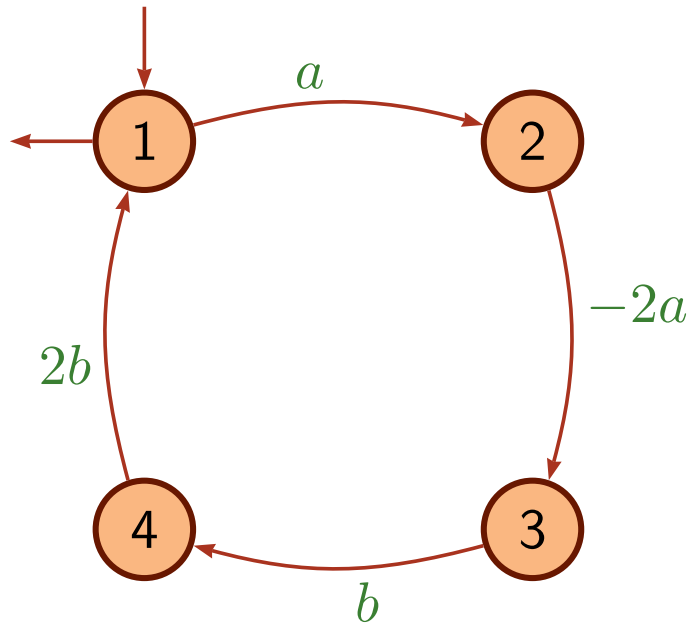
$$IX = J, \quad MX = XN, \quad \text{et} \quad T = XU.$$

Pour tout w , on a:

$$I\mu(w_1)\dots\mu(w_n)T = J\mu(w_1)\dots\mu(w_n)U$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalents.

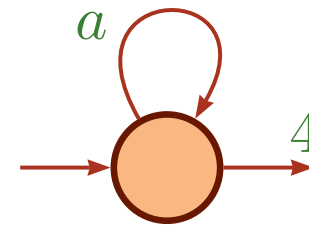
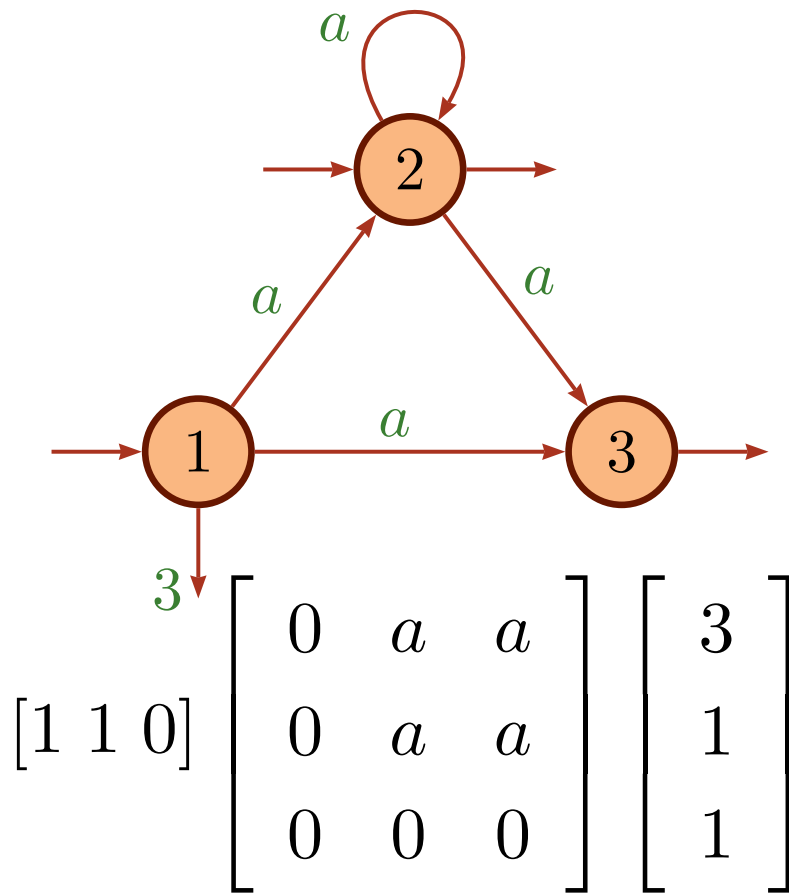
 La conjugaison **n'est pas** une relation d'équivalence.
C'est un pré-ordre.



Conjugués dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 2b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & a \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & b \\ b & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}$$

Deux automates équivalents ne sont pas forcément conjugués.



$$[1][a][4]$$

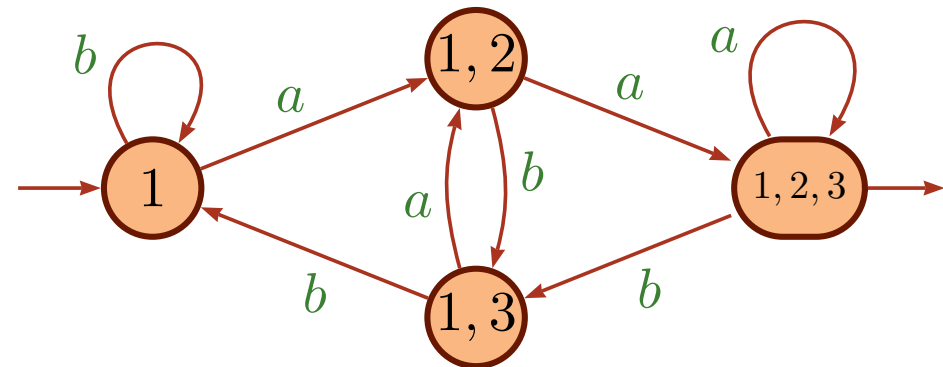
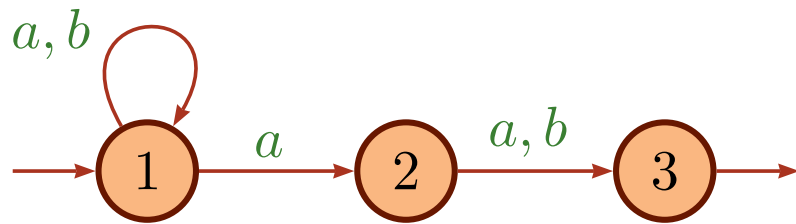
Théorème 1: Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

deux automates booléens,
deux $\mathbb{N}$ -automates,
deux $\mathbb{Z}$ -automates,
deux $\mathbb{K}$ -automates, avec $\mathbb{K}$ corps,
deux transducteurs fonctionnels.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalents, il existe $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{A} \xLeftrightarrow{X} \mathcal{C} \xRightarrow{Y} \mathcal{B}$.

Booléens: conjugaison et déterminisation

$$\det(\mathcal{A}) \xRightarrow{X} \mathcal{A}$$



Chaque état de $\det(\mathcal{A})$ est un vecteur $I_\mu(w)$.

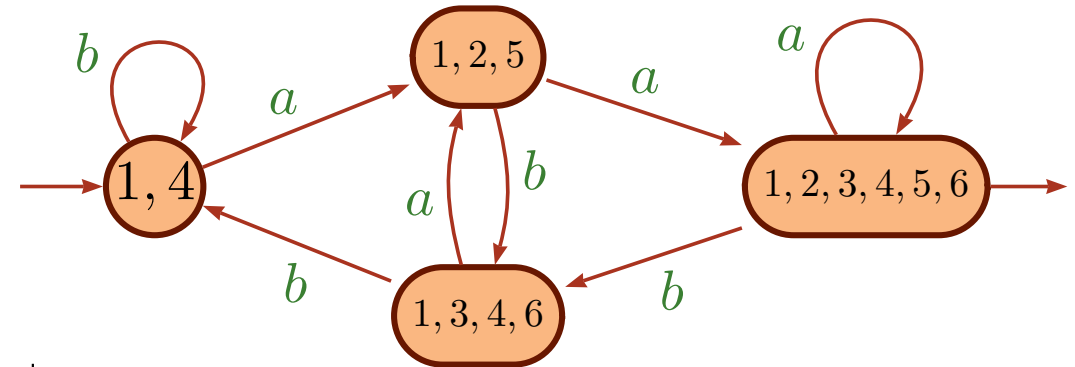
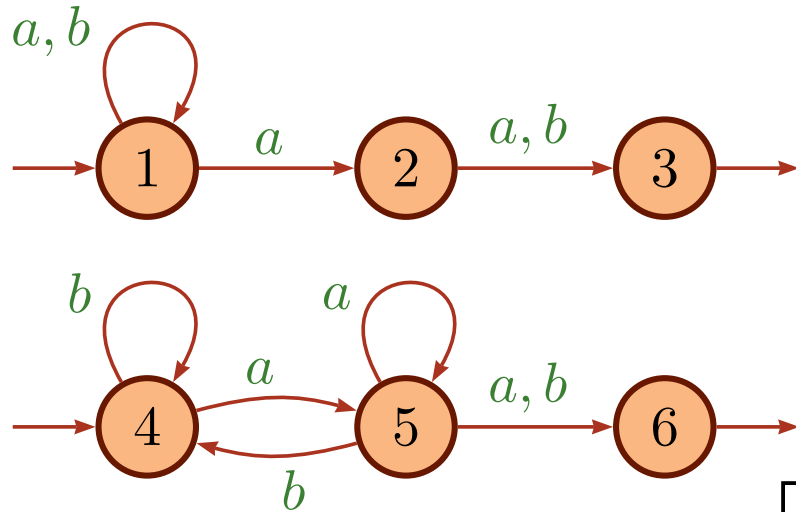
Matrice de conjugaison:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De même: $\mathcal{A} \xRightarrow{X} \text{codet}(\mathcal{A})$

Booléens: conjugaison et détermination

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ équivalents. Soit $\mathcal{C} = \det(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$



$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

On a $\mathcal{C} \xrightarrow{[X|Y]} \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

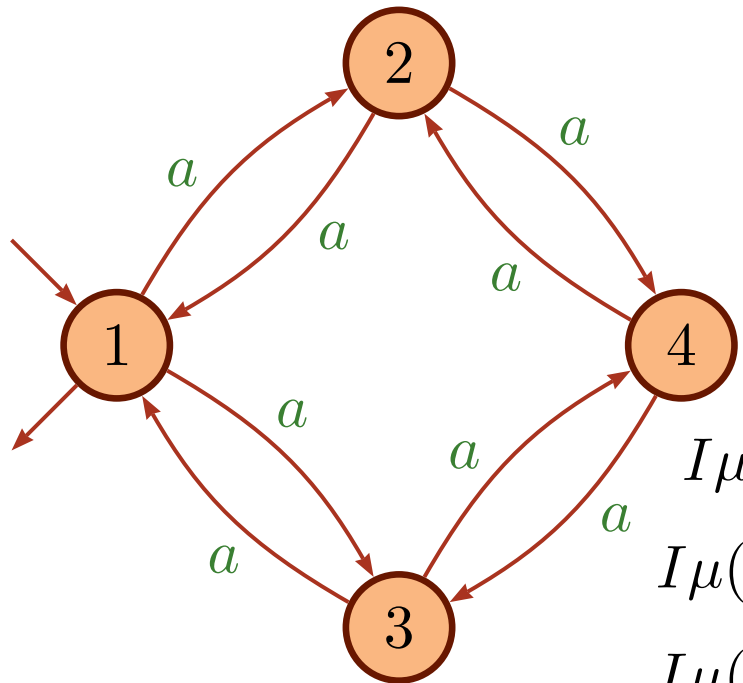
Finalement, on obtient $\mathcal{C} \xrightarrow{X} \mathcal{A}$ et $\mathcal{C} \xrightarrow{Y} \mathcal{B}$.

→ Théorème 1 pour les booléens.

Corps: réduction et conjugaison

$$\mathcal{A} = (I, \mu, T)$$

Réduction à gauche: calculer une base de $\langle I\mu(w) \rangle$.



$$I = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \rightarrow \text{état 1}$$

$$I\mu(a) = [0 \ 1 \ 1 \ 0] \rightarrow \text{état 2}$$

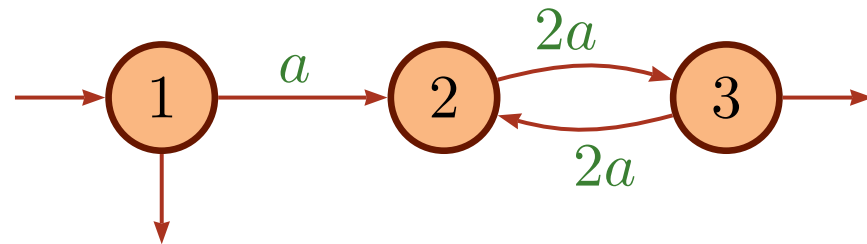
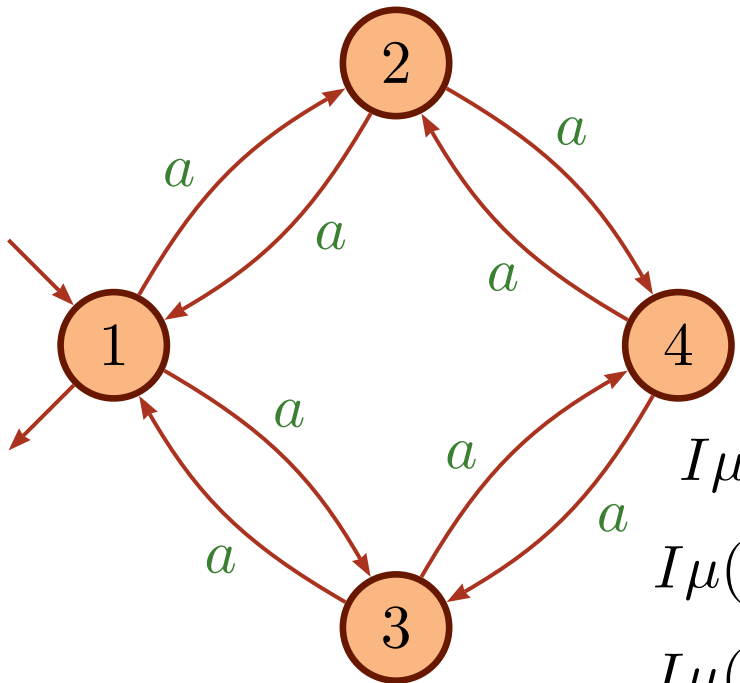
$$I\mu(a^2) = 2[1 \ 0 \ 0 \ 1] \rightarrow \text{état 3}$$

$$I\mu(a^3) = 4[0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

Corps: réduction et conjugaison

$$\mathcal{A} = (I, \mu, T)$$

Réduction à gauche: calculer une base de $\langle I\mu(w) \rangle$.



$$I = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \rightarrow \text{état 1}$$

$$I\mu(a) = [0 \ 1 \ 1 \ 0] \rightarrow \text{état 2}$$

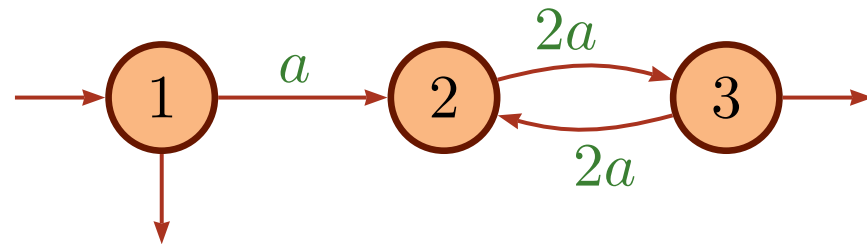
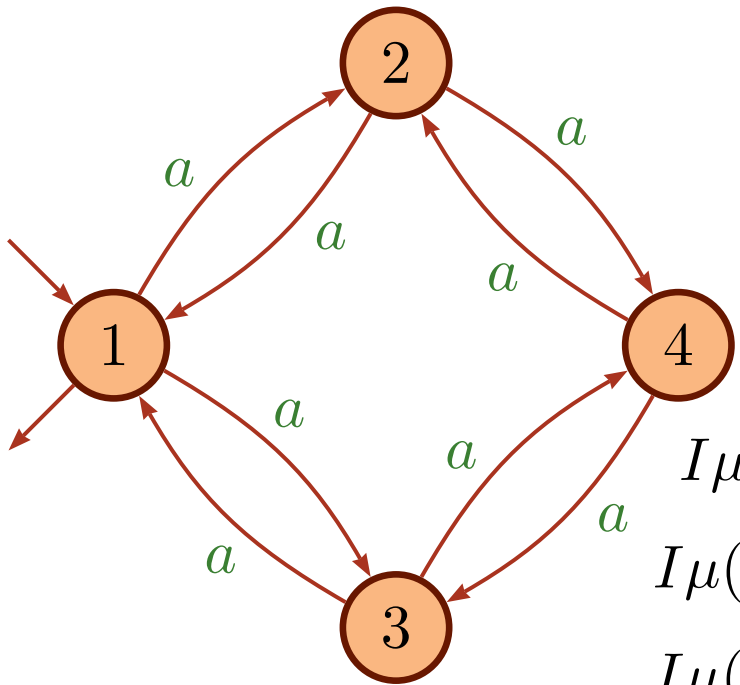
$$I\mu(a^2) = 2[1 \ 0 \ 0 \ 1] \rightarrow \text{état 3}$$

$$I\mu(a^3) = 4[0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

Corps: réduction et conjugaison

$$\mathcal{A} = (I, \mu, T)$$

Réduction à gauche: calculer une base de $\langle I\mu(w) \rangle$.



$$I = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \rightarrow \text{état 1}$$

$$I\mu(a) = [0 \ 1 \ 1 \ 0] \rightarrow \text{état 2}$$

$$I\mu(a^2) = 2[1 \ 0 \ 0 \ 1] \rightarrow \text{état 3}$$

$$I\mu(a^3) = 4[0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

$$\text{red}_g(\mathcal{A}) \xrightarrow{X} \mathcal{A}, \text{ avec } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De même $\mathcal{A} \xrightarrow{X} \text{red}_d(\mathcal{A})$.

Remarques:

- $\text{red}_g(\text{red}_d(\mathcal{A}))$ est un automate réduit (nombre d'états minimum);
- tous les automates réduits sont conjugués dans les deux sens avec une matrice de transformation inversible (changement de base).

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ équivalents. Soit $\mathcal{C} = \text{red}_g(\mathcal{A} + \mathcal{B})$

On a $\mathcal{C} \xrightarrow{[X|Y]} \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

$\mathcal{C} = (I, M, T)$; posons $\mathcal{C}' = (I, M, T/2)$.

On obtient $\mathcal{C}' \xrightarrow{X} \mathcal{A}$ et $\mathcal{C}' \xrightarrow{Y} \mathcal{B}$.

→ Théorème 1 pour les corps.

Pour $\mathbb{Z}$, tout fonctionne comme dans les corps; on calcule une base du $\mathbb{Z}$ -module $\langle I\mu(w) \rangle$.

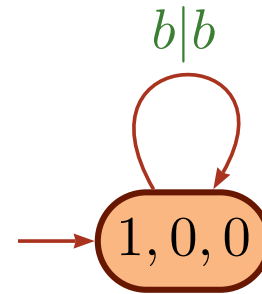
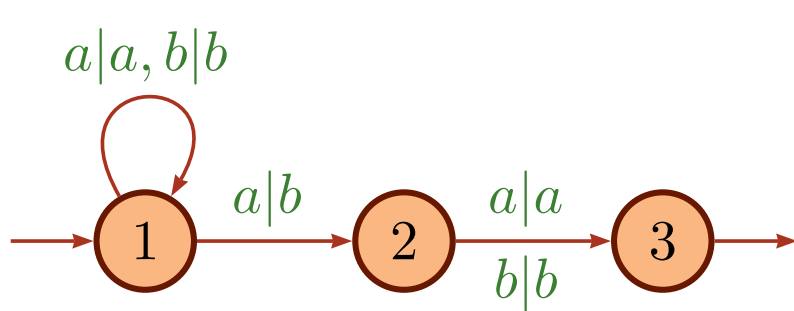
Pour $\mathbb{N}$, on calcule un ensemble **générateur** d'un $\mathbb{N}$ -semi-module contenant les $I\mu(w)$ en utilisant les bonnes propriétés de $\mathbb{N}^k$.

 Soit $\mathcal{A} = (I, \mu, T)$ et $\mathcal{B} = (J, \nu, U)$ équivalents de dim. resp. r et s .
Quand on “réduit” $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, on n'a pas le droit d'utiliser n'importe quel vecteur générateur de $\mathbb{N}^{r+s}$; on ne manipule que des vecteurs $[x \mid y]$ tels que $x.T = y.U$.

Transducteurs fonctionnels: séquentialisation

$\mathcal{T} = (I, \mu, T)$ transducteur fonctionnel

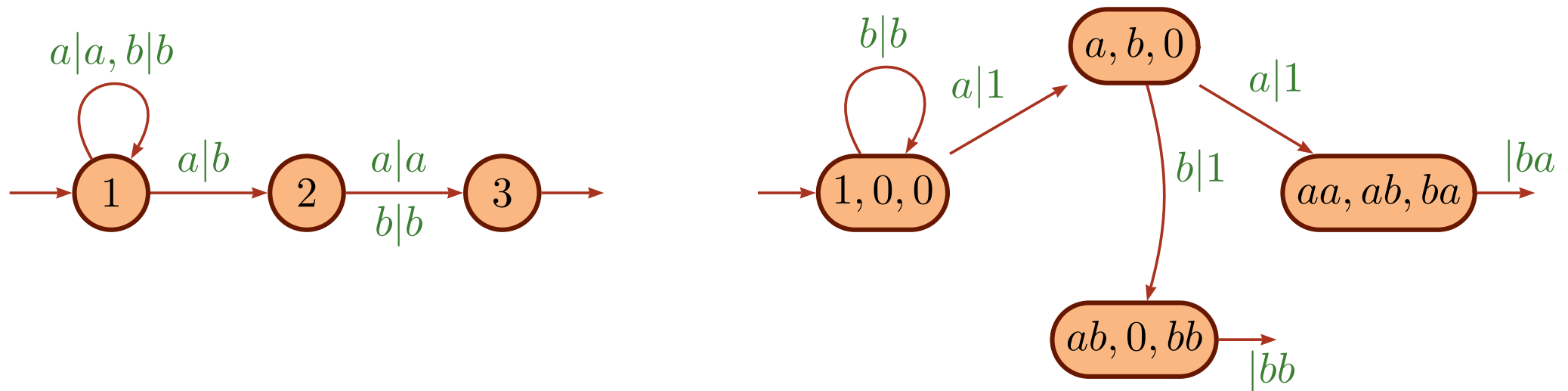
$$I = [1 \ 0 \ 0], \quad \mu(a) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transducteurs fonctionnels: séquentialisation

$\mathcal{T} = (I, \mu, T)$ transducteur **fonctionnel**

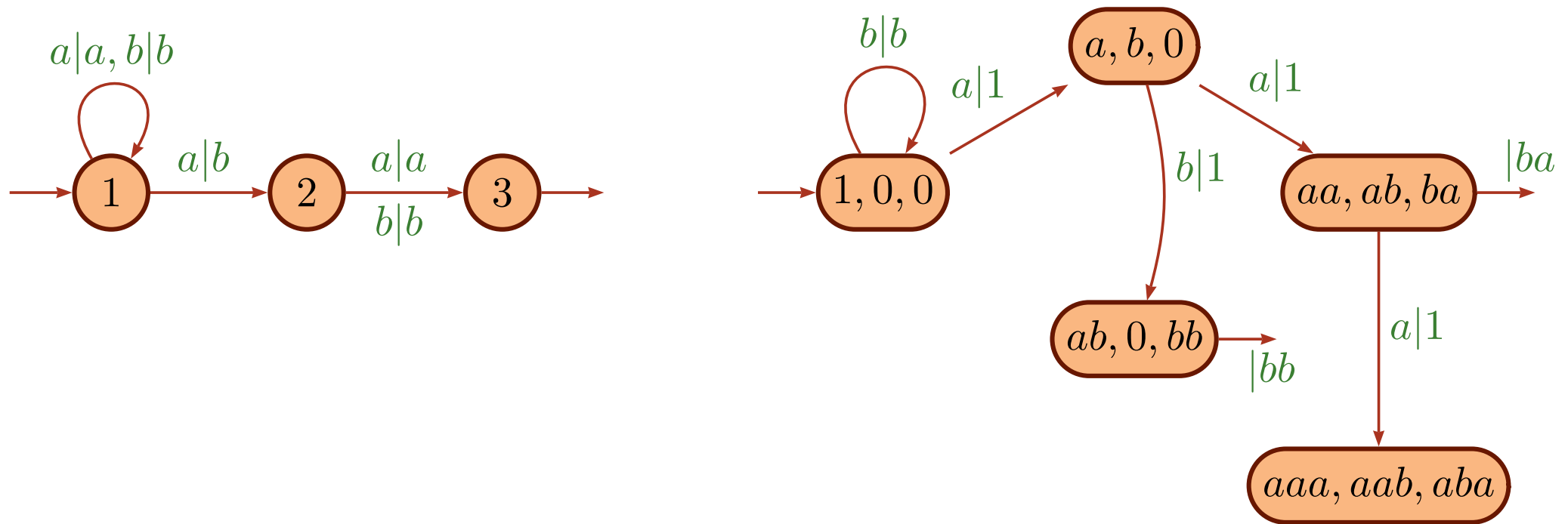
$$I = [1 \ 0 \ 0], \quad \mu(a) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transducteurs fonctionnels: séquentialisation

$\mathcal{T} = (I, \mu, T)$ transducteur **fonctionnel**

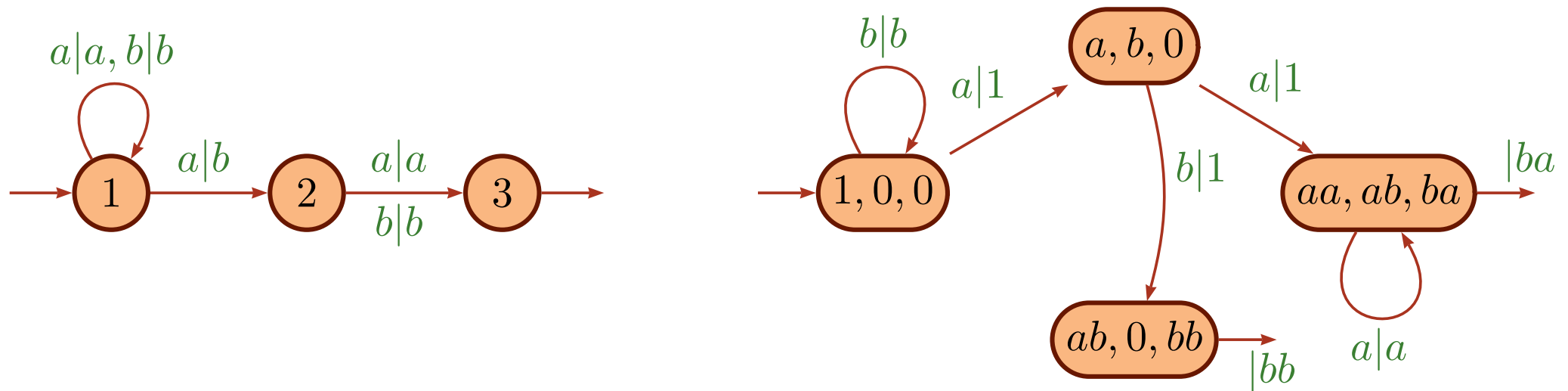
$$I = [1 \ 0 \ 0], \quad \mu(a) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transducteurs fonctionnels: séquentialisation

$\mathcal{T} = (I, \mu, T)$ transducteur **fonctionnel**

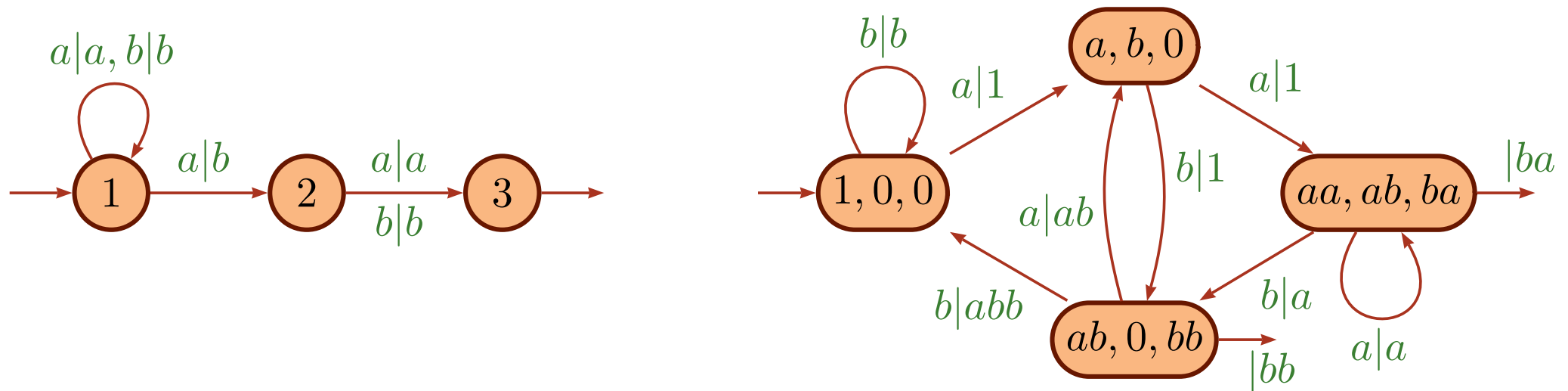
$$I = [1 \ 0 \ 0], \quad \mu(a) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transducteurs fonctionnels: séquentialisation

$\mathcal{T} = (I, \mu, T)$ transducteur **fonctionnel**

$$I = [1 \ 0 \ 0], \quad \mu(a) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



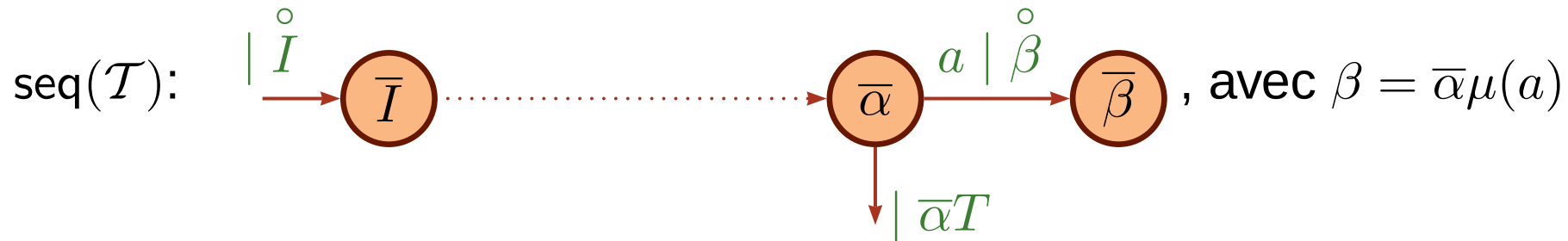
Transducteurs fonctionnels: séquentialisation

$\mathcal{T} = (I, \mu, T)$ transducteur fonctionnel

Séquentialisation: α vecteur de mots

$\overset{\circ}{\alpha}$: plus grand préfixe commun

$$\overline{\alpha} = \overset{\circ}{\alpha}^{-1} \alpha$$



⚠ $\mathcal{T}$ non séquentialisable $\implies$ seq($\mathcal{T}$) infini

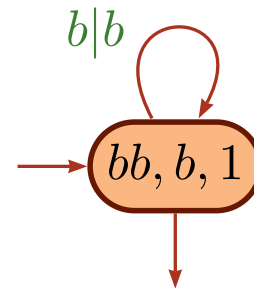
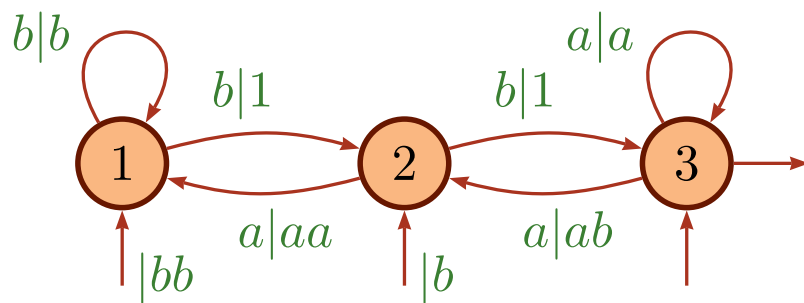
Transducteurs fonctionnels: séquentialisation avec échec

Idée: si les composantes de α sont trop différentes, elles ne servent pas pour les mêmes mots.

→ On impose:

- chaque $\bar{\alpha}$ doit contenir le mot vide
- si α_i non minimal, il existe α_j , préfixe de α_i tel que $|\alpha_i| - |\alpha_j| < K(\mathcal{T})$

Sinon, on décompose α en union de vecteurs à supports disjoints qui respectent ces propriétés et on construit un transducteur qui n'est plus séquentiel. → $\text{qseq}(\mathcal{T})$



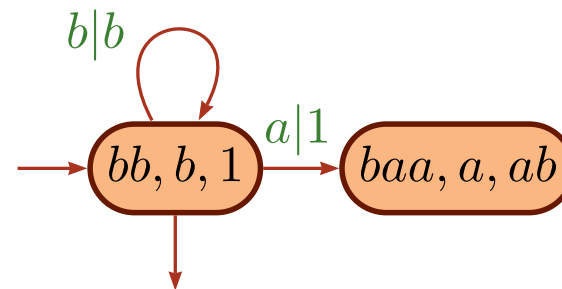
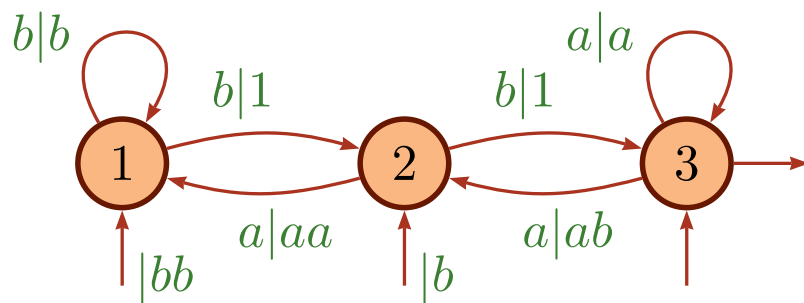
Transducteurs fonctionnels: séquentialisation avec échec

Idée: si les composantes de α sont trop différentes, elles ne servent pas pour les mêmes mots.

→ On impose:

- chaque $\bar{\alpha}$ doit contenir le mot vide
- si α_i non minimal, il existe α_j , préfixe de α_i tel que $|\alpha_i| - |\alpha_j| < K(\mathcal{T})$

Sinon, on décompose α en union de vecteurs à supports disjoints qui respectent ces propriétés et on construit un transducteur qui n'est plus séquentiel. → $\text{qseq}(\mathcal{T})$



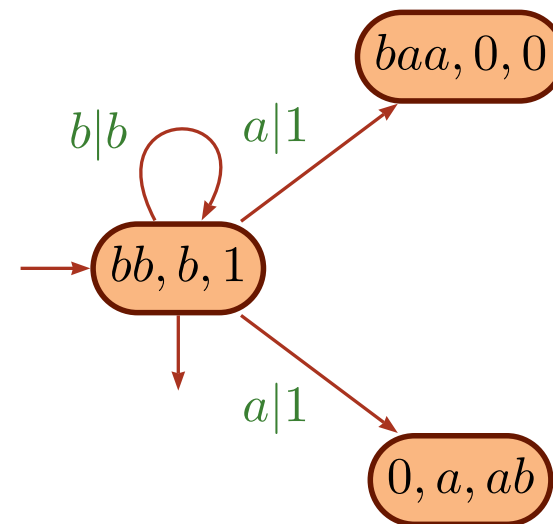
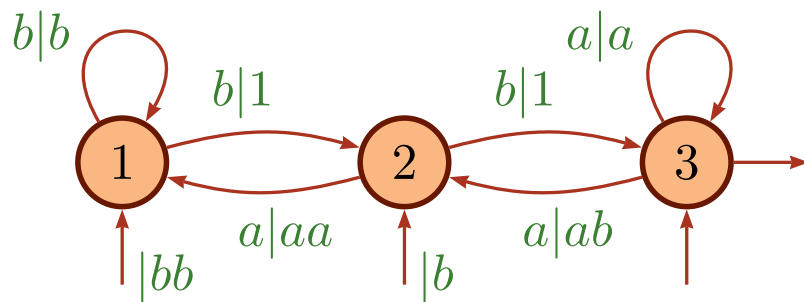
Transducteurs fonctionnels: séquentialisation avec échec

Idée: si les composantes de α sont trop différentes, elles ne servent pas pour les mêmes mots.

→ On impose:

- chaque $\bar{\alpha}$ doit contenir le mot vide
- si α_i non minimal, il existe α_j , préfixe de α_i tel que $|\alpha_i| - |\alpha_j| < K(\mathcal{T})$

Sinon, on décompose α en union de vecteurs à supports disjoints qui respectent ces propriétés et on construit un transducteur qui n'est plus séquentiel. → $\text{qseq}(\mathcal{T})$



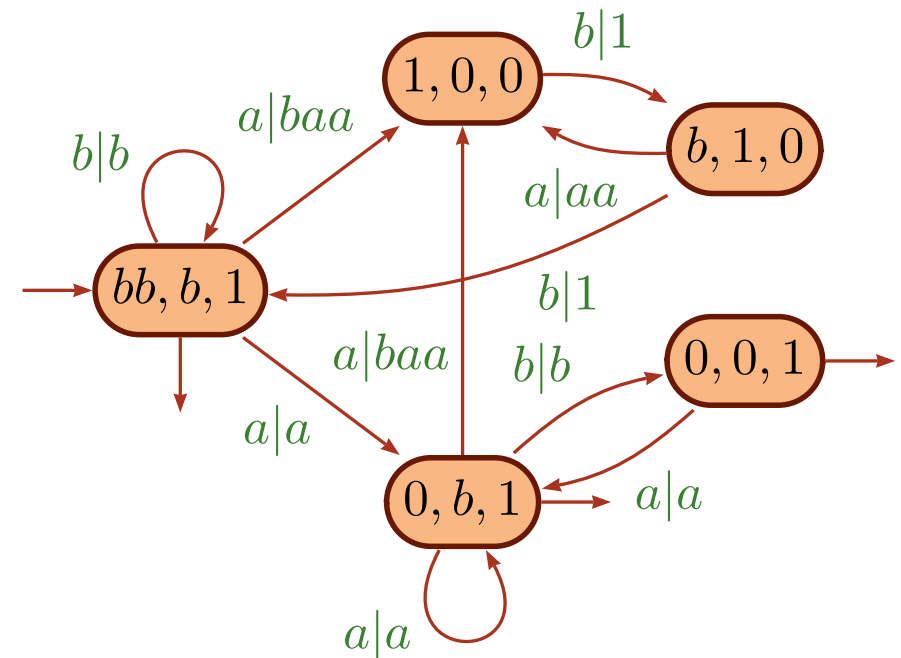
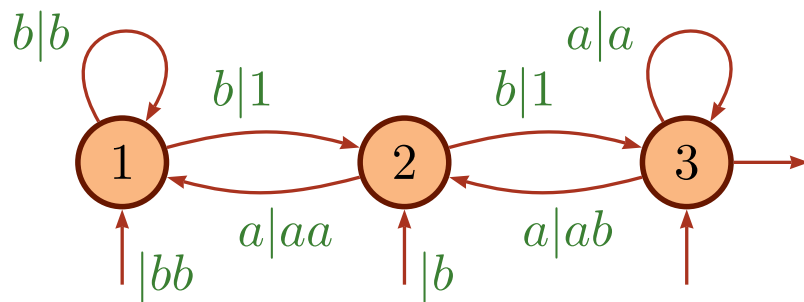
Transducteurs fonctionnels: séquentialisation avec échec

Idée: si les composantes de α sont trop différentes, elles ne servent pas pour les mêmes mots.

→ On impose:

- chaque $\bar{\alpha}$ doit contenir le mot vide
- si α_i non minimal, il existe α_j , préfixe de α_i tel que $|\alpha_i| - |\alpha_j| < K(\mathcal{T})$

Sinon, on décompose α en union de vecteurs à supports disjoints qui respectent ces propriétés et on construit un transducteur qui n'est plus séquentiel. → $\text{qseq}(\mathcal{T})$



Transducteurs fonctionnels: séquentialisation avec échec

Idée: si les composantes de α sont trop différentes, elles ne servent pas pour les mêmes mots.

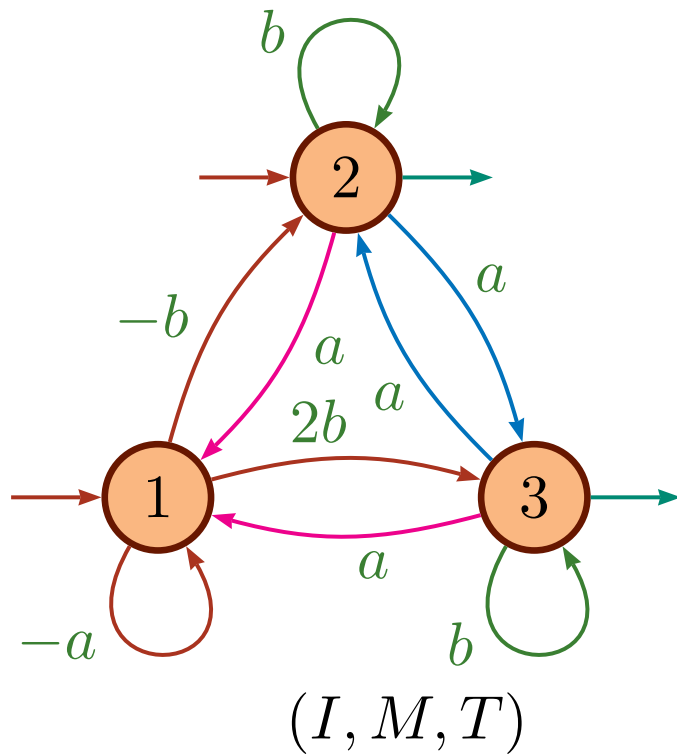
→ On impose:

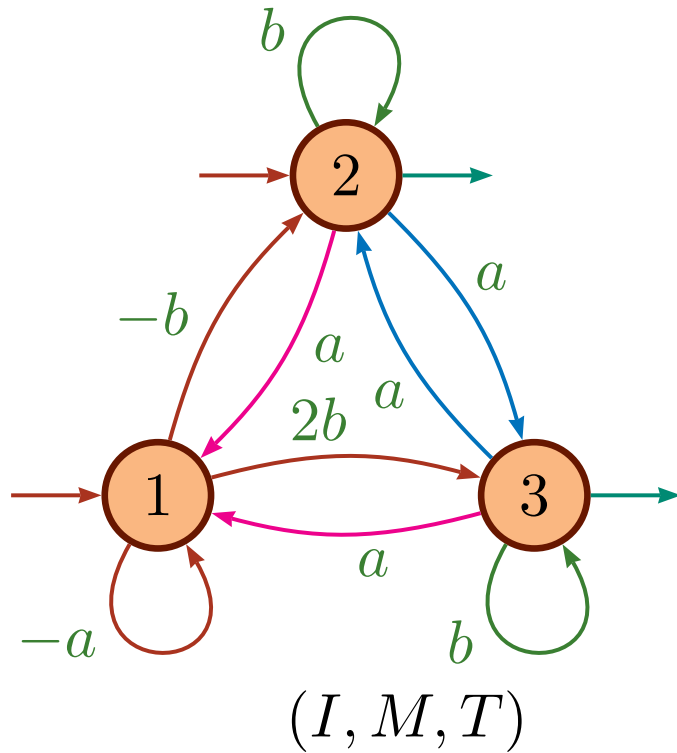
- chaque $\bar{\alpha}$ doit contenir le mot vide
- si α_i non minimal, il existe α_j , préfixe de α_i tel que $|\alpha_i| - |\alpha_j| < K(\mathcal{T})$

Sinon, on décompose α en union de vecteurs à supports disjoints qui respectent ces propriétés et on construit un transducteur qui n'est plus séquentiel. → $\text{qseq}(\mathcal{T})$

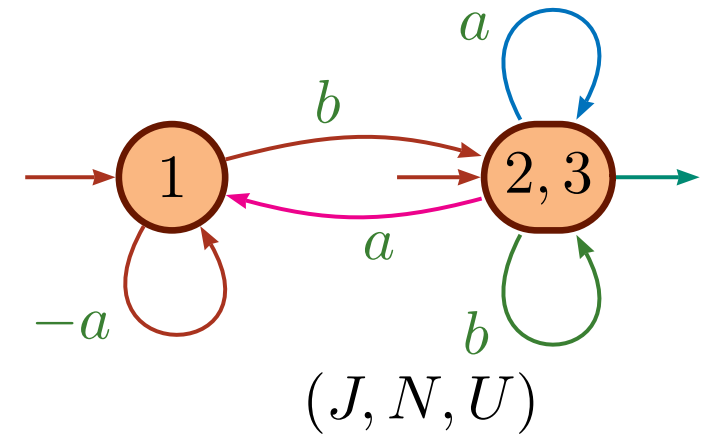
À quoi ça sert ?

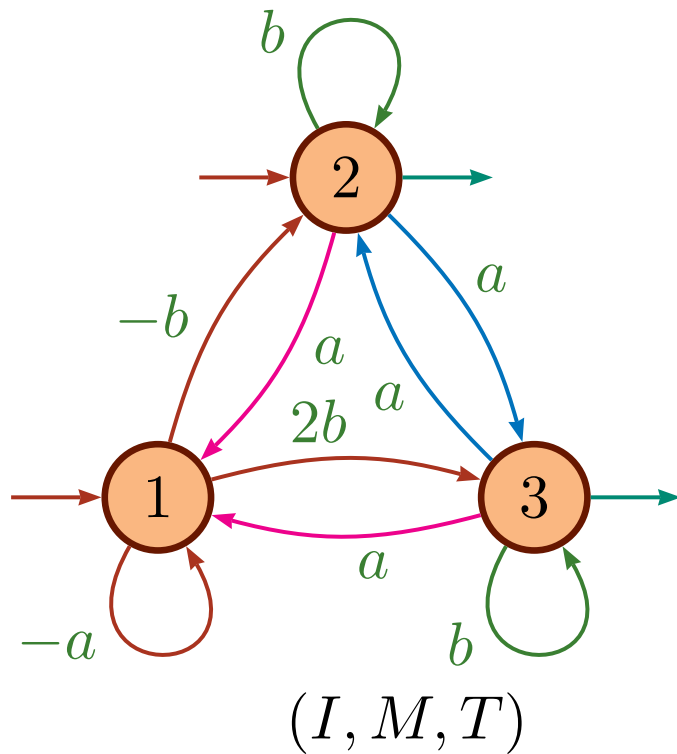
- Le transducteur obtenu est non ambigu
- $\text{qseq}(\mathcal{T}) \xrightarrow{X} \mathcal{T}$
- $\text{qseq}(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}')$ est conjugué à $\mathcal{T}$ et à $\mathcal{T}'$ (s'ils sont équivalents)
 - Théorème 1 pour les transducteurs.



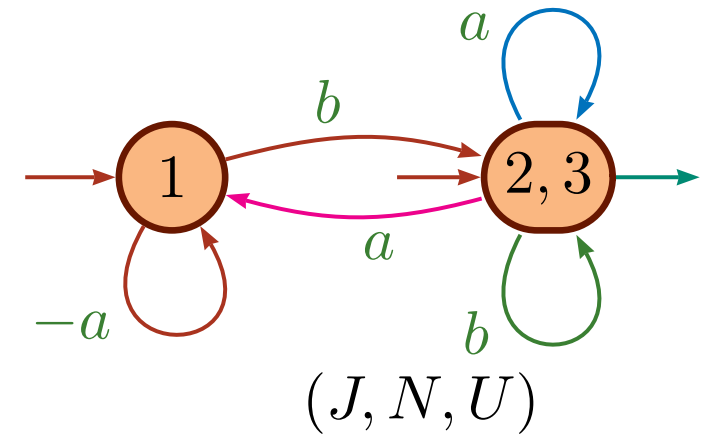


Revêtement





Revêtement



$$\left[\begin{array}{c} -a \\ \textcolor{violet}{a} \\ \textcolor{violet}{a} \end{array} \begin{array}{cc} \boxed{-b} & \boxed{2b} \\ \boxed{\textcolor{green}{b}} & \boxed{\textcolor{blue}{a}} \\ \boxed{\textcolor{blue}{a}} & \boxed{\textcolor{green}{b}} \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc} -a & b \\ \textcolor{violet}{a} & \textcolor{blue}{a} + \textcolor{green}{b} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} -a & \begin{pmatrix} -b & 2b \\ b & a \\ a & b \end{pmatrix} \\ a & \\ a & \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc} -a & b \\ a & a+b \end{array} \right]$$

— o —

$$\left[\begin{array}{ccc} -a & -b & 2b \\ a & b & a \\ a & a & b \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -a & b \\ a & a+b \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} -a & \begin{array}{cc} (-b & 2b) \\ \textcolor{magenta}{a} & \textcolor{blue}{a} \\ \textcolor{magenta}{a} & \textcolor{green}{b} \end{array} \end{array} \right] \} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc} -a & b \\ \textcolor{magenta}{a} & \textcolor{blue}{a} + \textcolor{green}{b} \end{array} \right]$$

— o —

$$\left[\begin{array}{ccc} -a & -b & 2b \\ \textcolor{magenta}{a} & \textcolor{green}{b} & \textcolor{blue}{a} \\ \textcolor{magenta}{a} & \textcolor{blue}{a} & \textcolor{green}{b} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -a & b \\ \textcolor{magenta}{a} & \textcolor{blue}{a} + \textcolor{green}{b} \end{array} \right]$$

$$\text{Initial: } \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \right], \text{ Final: } \left[\begin{array}{c} 0 \\ \textcolor{teal}{1} \\ \textcolor{teal}{1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \textcolor{teal}{1} \end{array} \right]$$

Définition: $\mathcal{A} = (I, M, T)$ et $\mathcal{B} = (J, N, U)$, $\mathbb{Z}$ -automata.

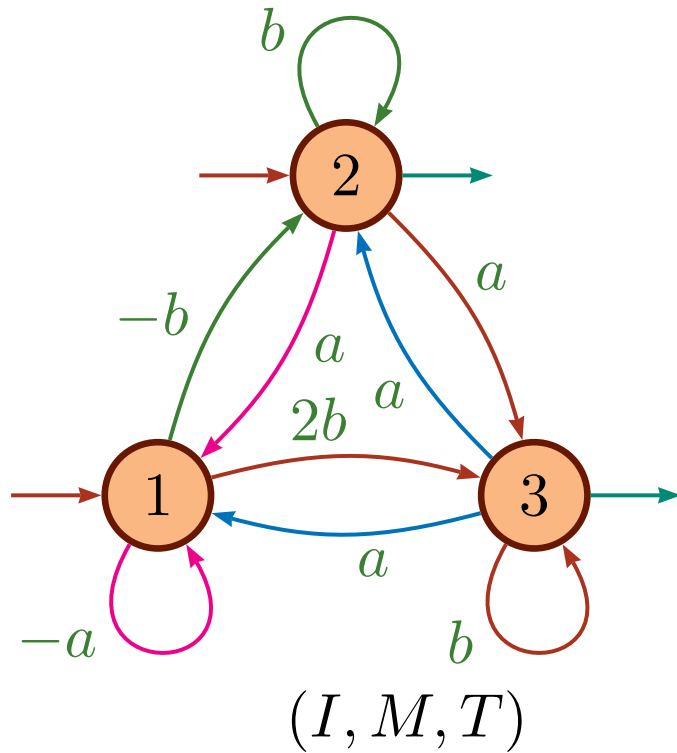
$\mathcal{A}$ est un *revêtement* de $\mathcal{B}$ s'il existe une matrice d'amalgamation X telle que
 $\mathcal{B}$ est un *quotient* de $\mathcal{A}$

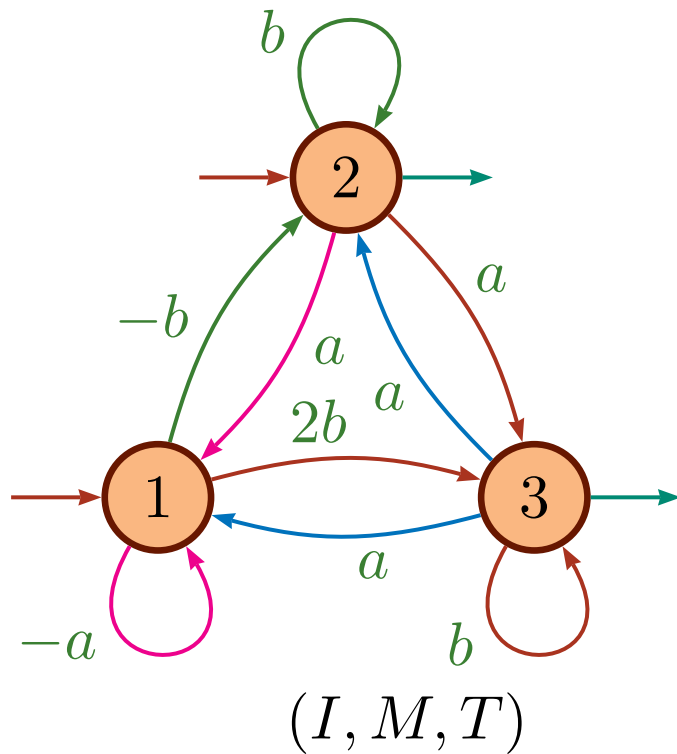
$$IX = J, \quad MX = XN, \quad \text{et } T = XU.$$

Définition: $\mathcal{A} = (I, M, T)$ et $\mathcal{B} = (J, N, U)$

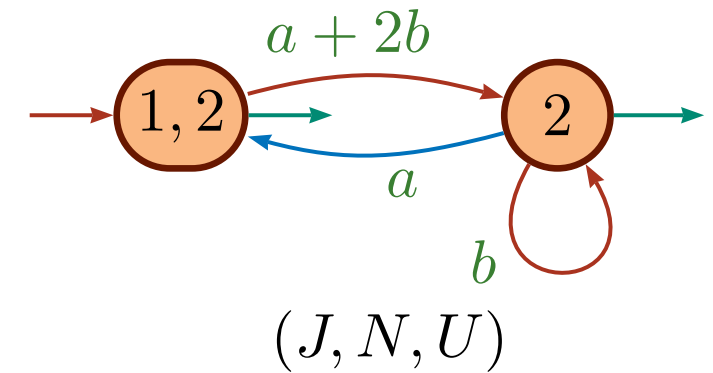
$\mathcal{A}$ est un *co-revêtement* de $\mathcal{B}$ s'il existe une matrice d'amalgamation X tq
 $\mathcal{B}$ est un *co-quotient* de $\mathcal{A}$

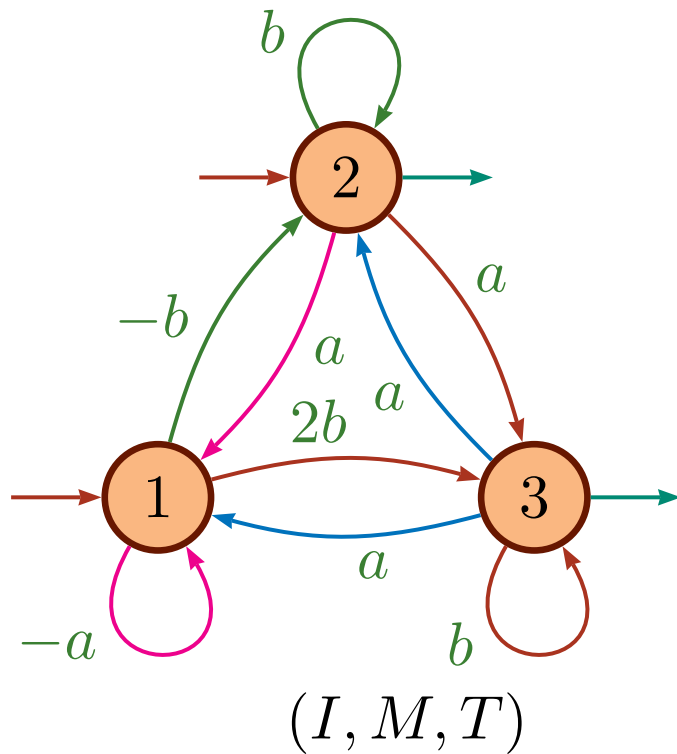
$$I = J {}^tX, \quad {}^tXM = N {}^tX, \quad \text{et } {}^tXT = U.$$



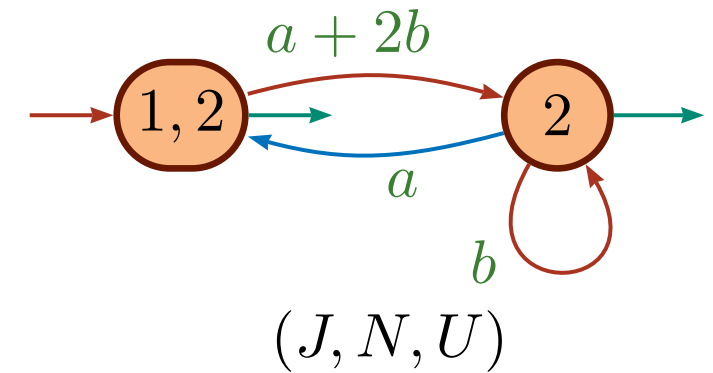


co-revêtement





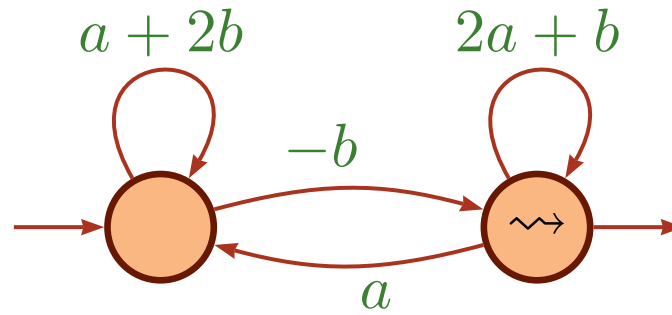
co-revêtement



$$\begin{bmatrix} -a & -b & 2b \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & a + 2b \\ a & b \end{bmatrix}$$

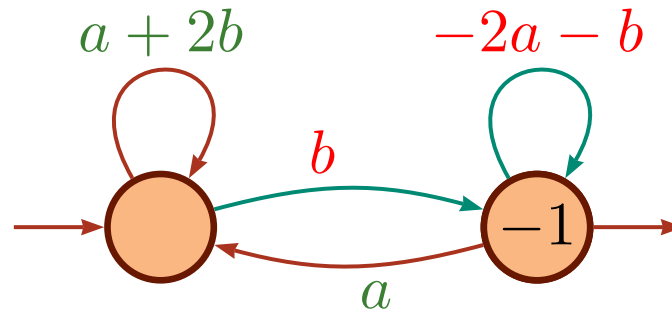
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$

Circulation d'éléments inversibles

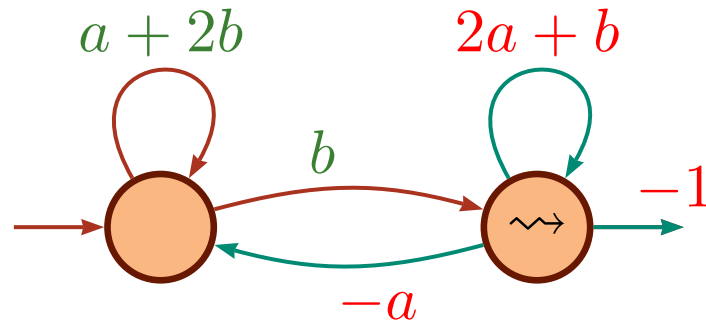


(I, M, T)

Circulation d'éléments inversibles

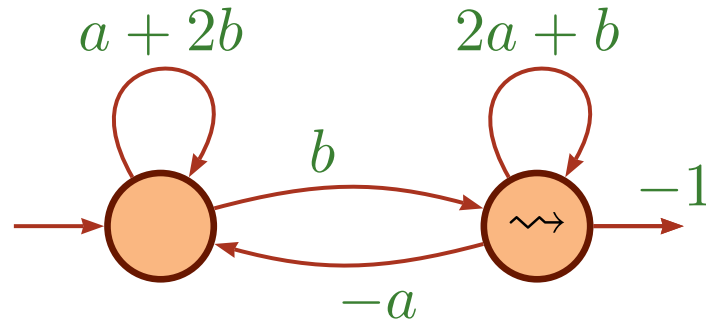


Circulation d'éléments inversibles



(J, N, U)

Circulation d'éléments inversibles

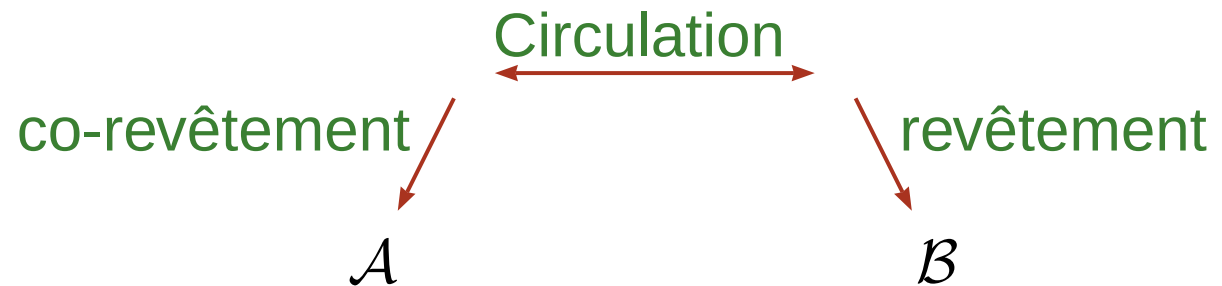


(J, N, U)

$$I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J, \quad M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} N, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U$$

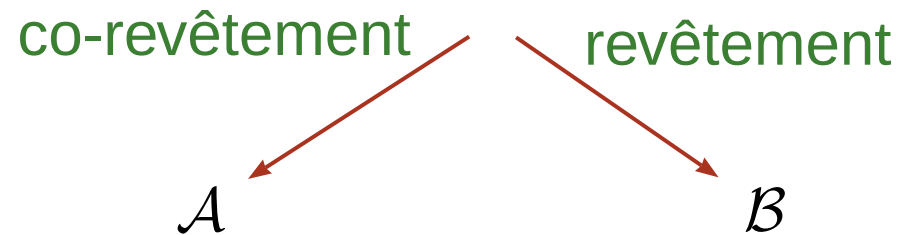
Théorème 2: Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ | deux $\mathbb{Z}$ -automates
deux $\mathbb{K}$ -automates, avec $\mathbb{K}$ corps
deux transducteurs fonctionnels émondés

Si $\mathcal{A} \xRightarrow{X} \mathcal{B}$, alors

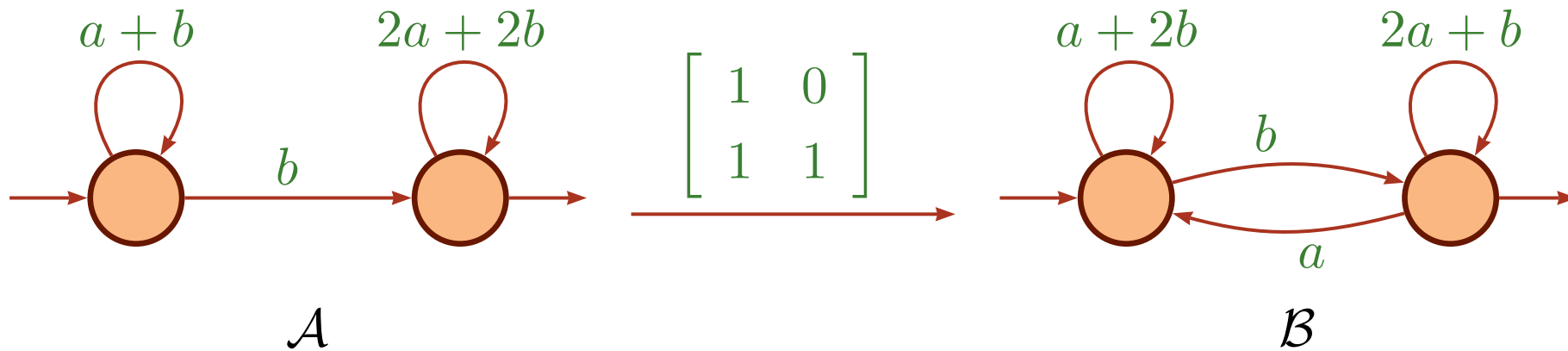


Théorème 2: Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ | deux automates booléens émondés
deux $\mathbb{N}$ -automates émondés

Si $\mathcal{A} \xRightarrow{X} \mathcal{B}$, alors



Conjugaisons et revêtements

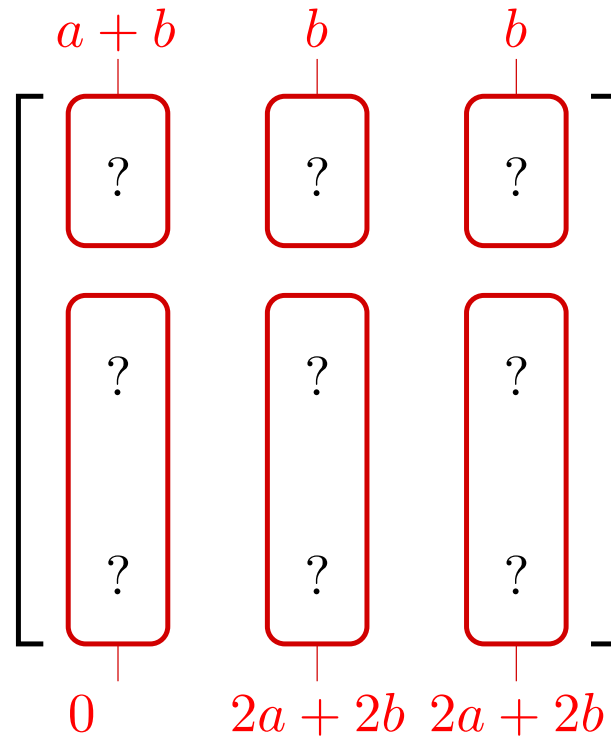


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On construit $\mathcal{C} = (K, C, V)$ tel que

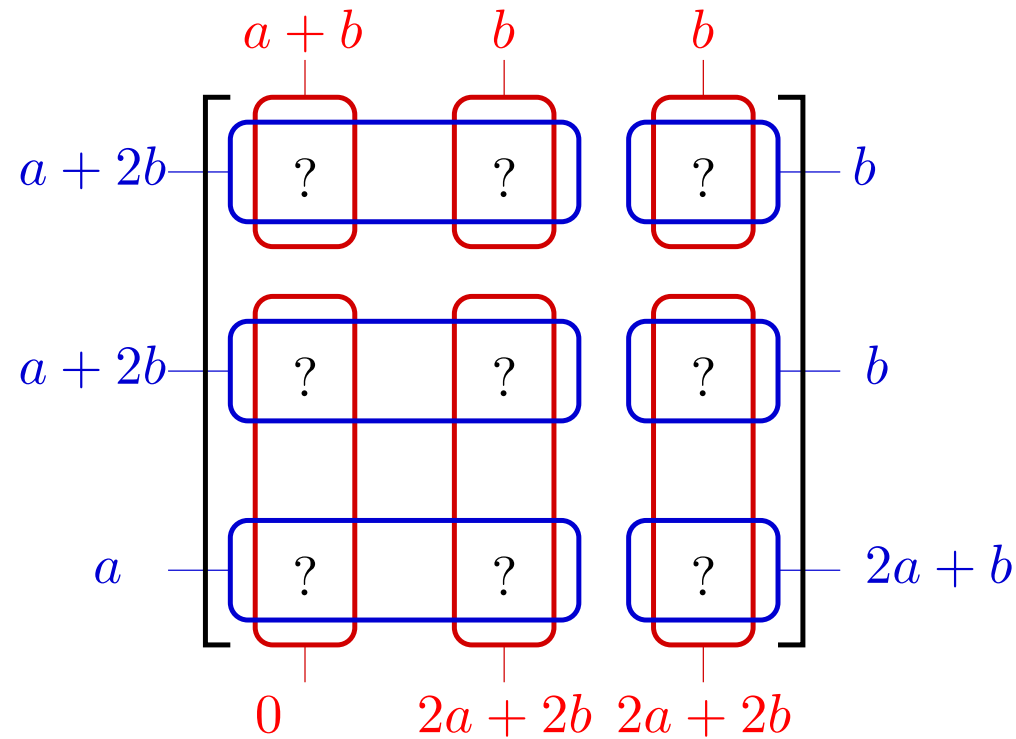
$\begin{array}{ccc} & \text{co-revêtement} & \\ & \swarrow & \searrow \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \end{array}$

Conjugaisons et revêtements



$$\begin{bmatrix} a + b & b \\ 0 & 2a + 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} C$$

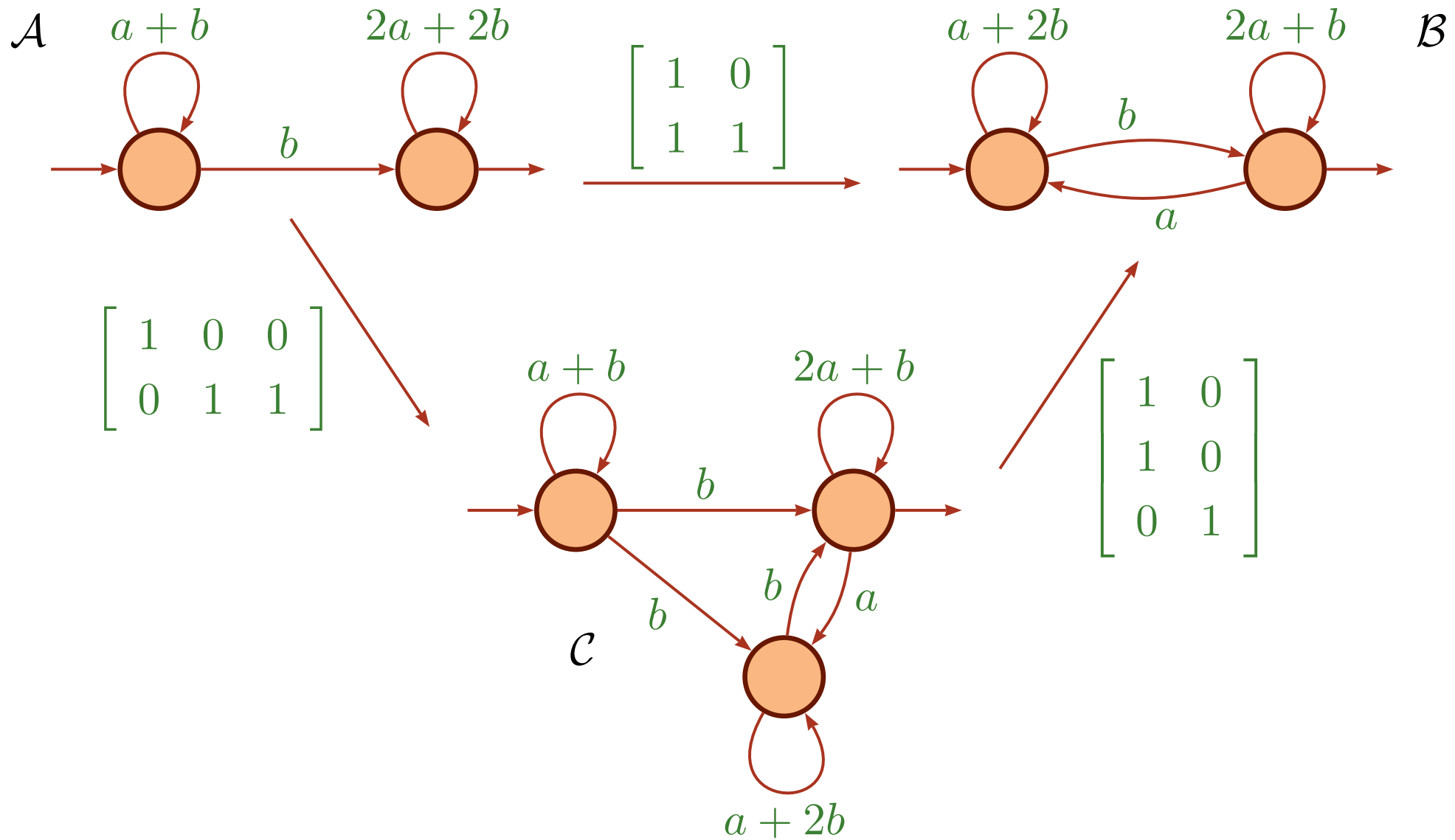
Conjugaisons et revêtements



$$C \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+2b & b \\ a & 2a+b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+b & b & b \\ 0 & a+2b & b \\ 0 & a & 2a+2b \end{bmatrix}$$

Conjugaisons et revêtements



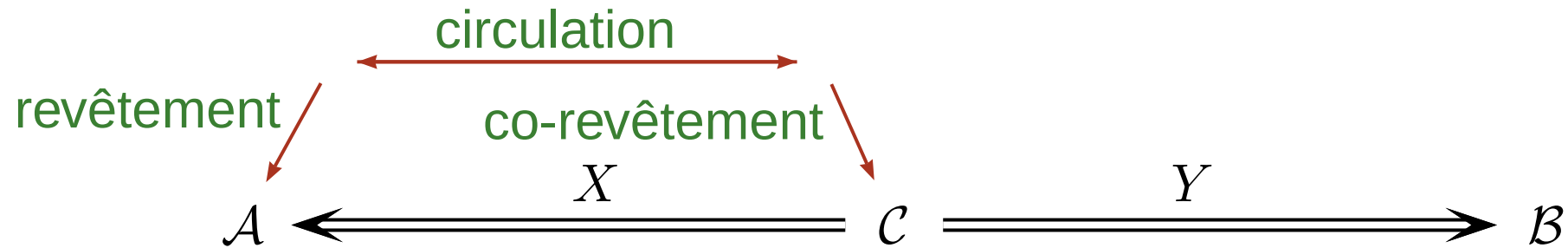
$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$$

Théorème 1:

$$\mathcal{A} \xleftarrow{X} \mathcal{C} \xrightarrow{Y} \mathcal{B}$$

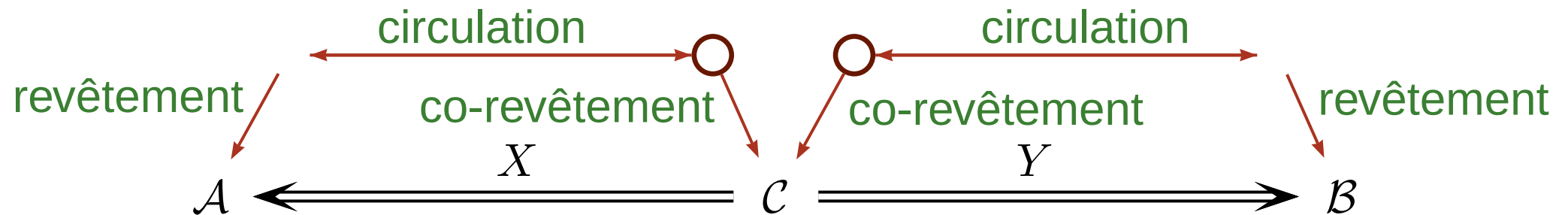
$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$$

Théorème 2:



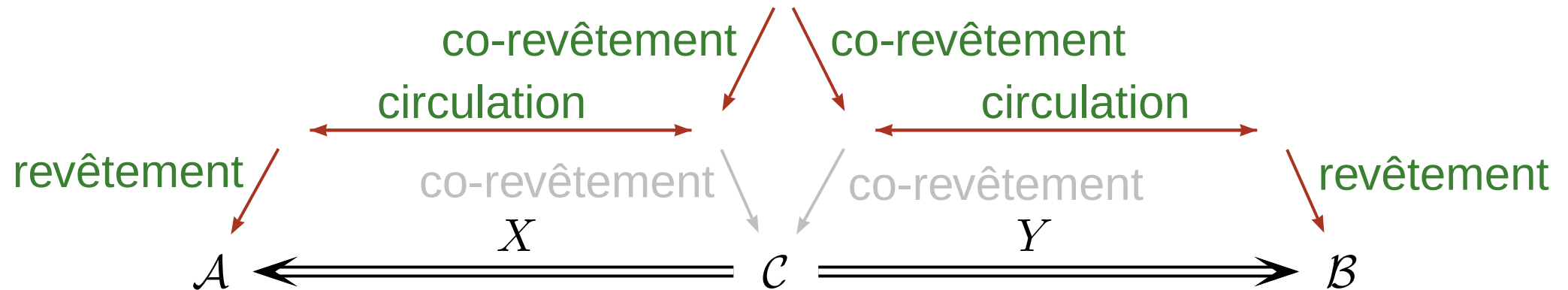
Équivalence et revêtements

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$$



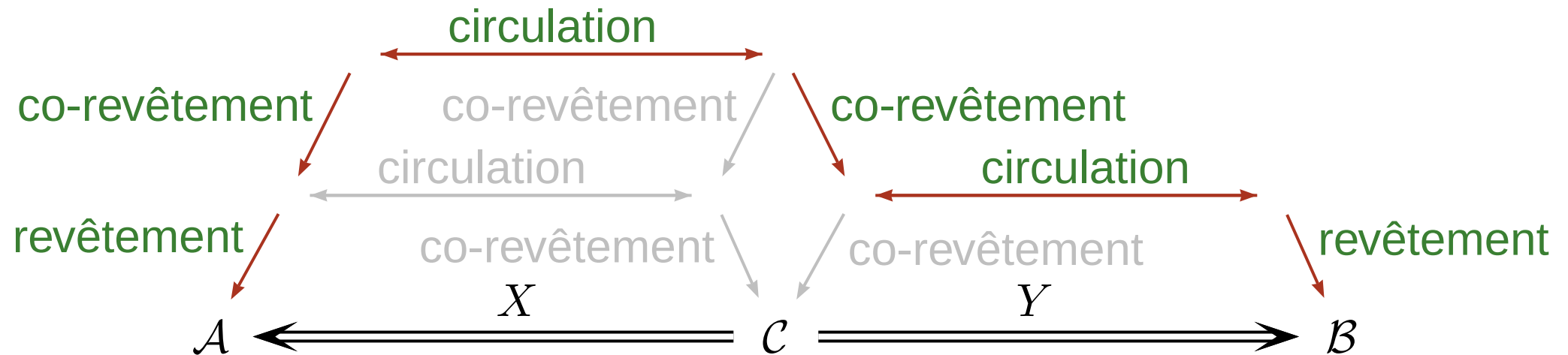
Équivalence et revêtements

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$$



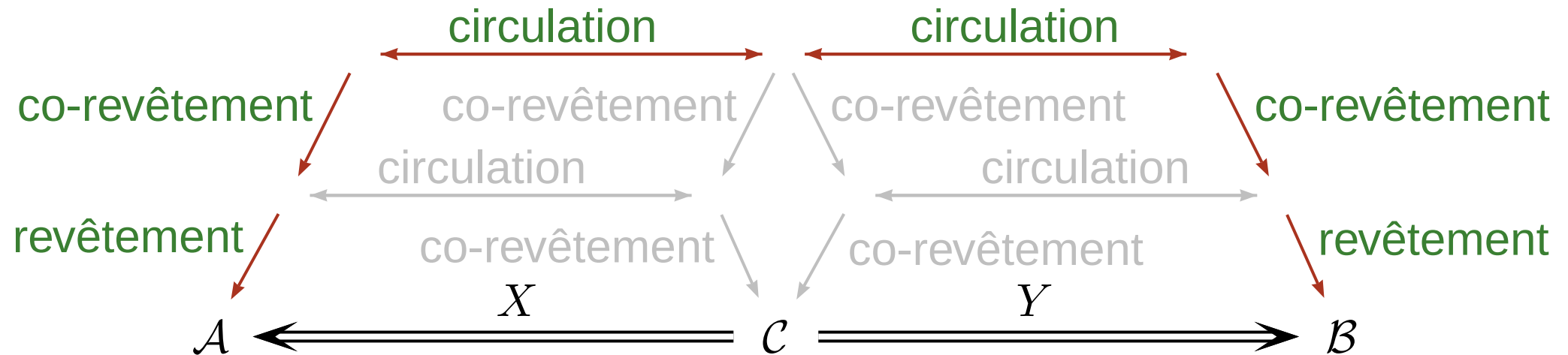
Équivalence et revêtements

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$$



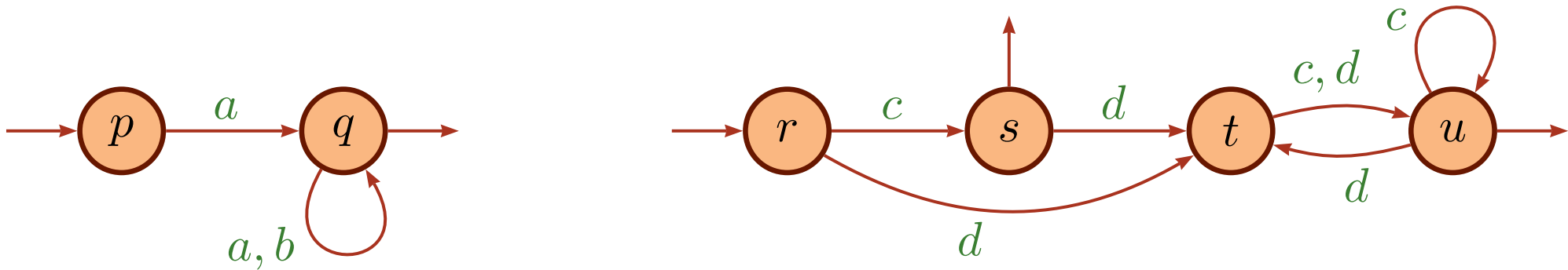
Équivalence et revêtements

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$$



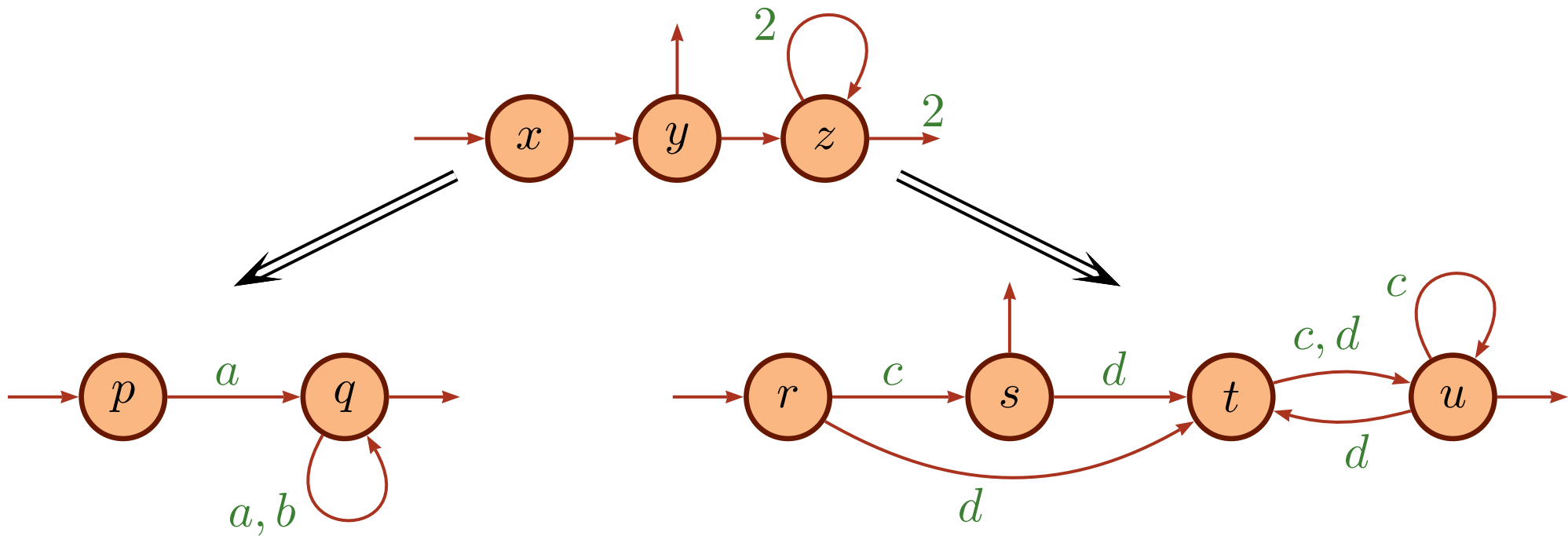
Proposition: Si deux langages rationnels ont la même fonction de croissance, il existe entre eux une bijection réalisée par un transducteur lettre à lettre.

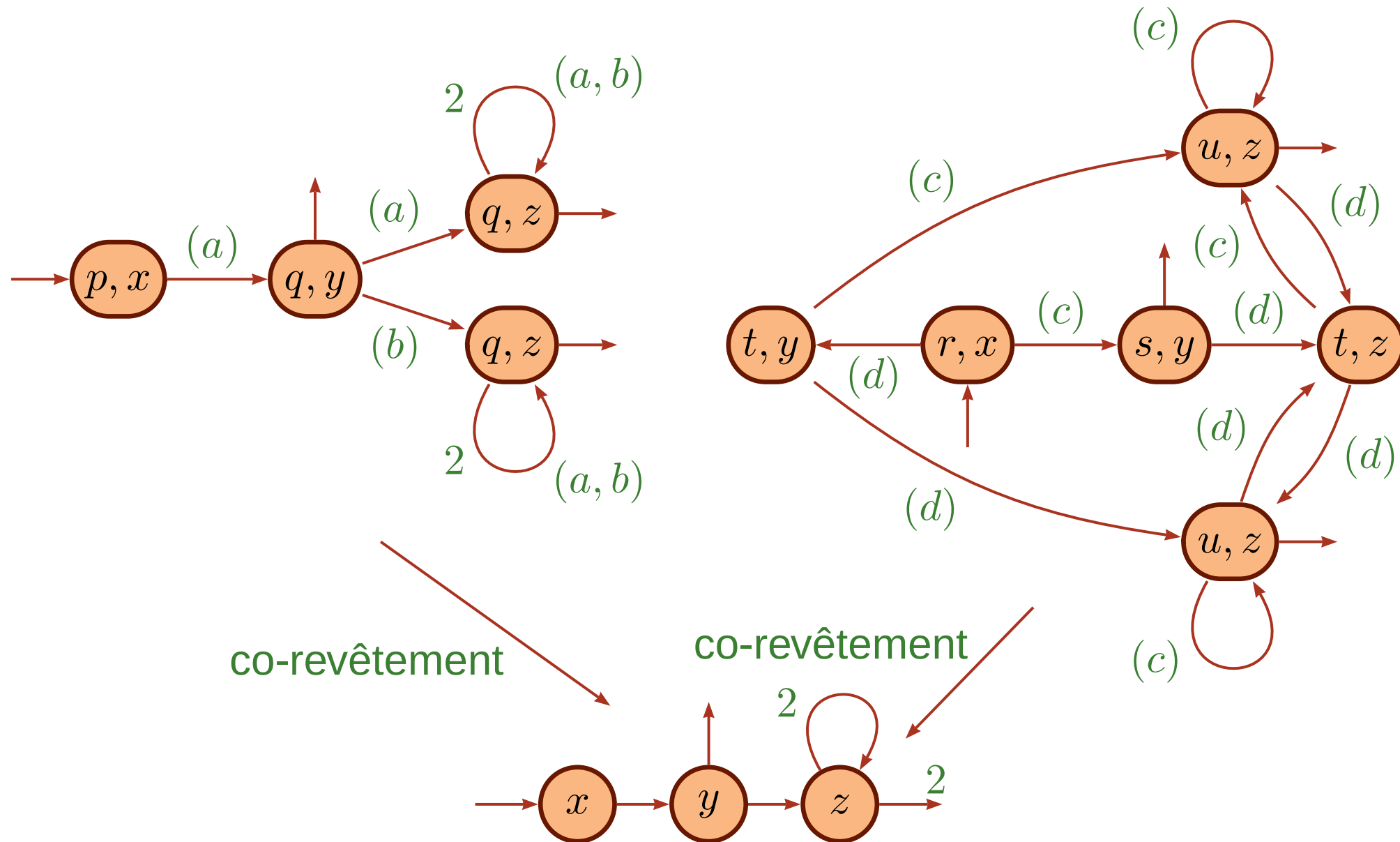
Exemple: $L_1 = a(a + b)^*$ et $L_2 = (c + dc + dd)^* \setminus cc(c + d)^*$:

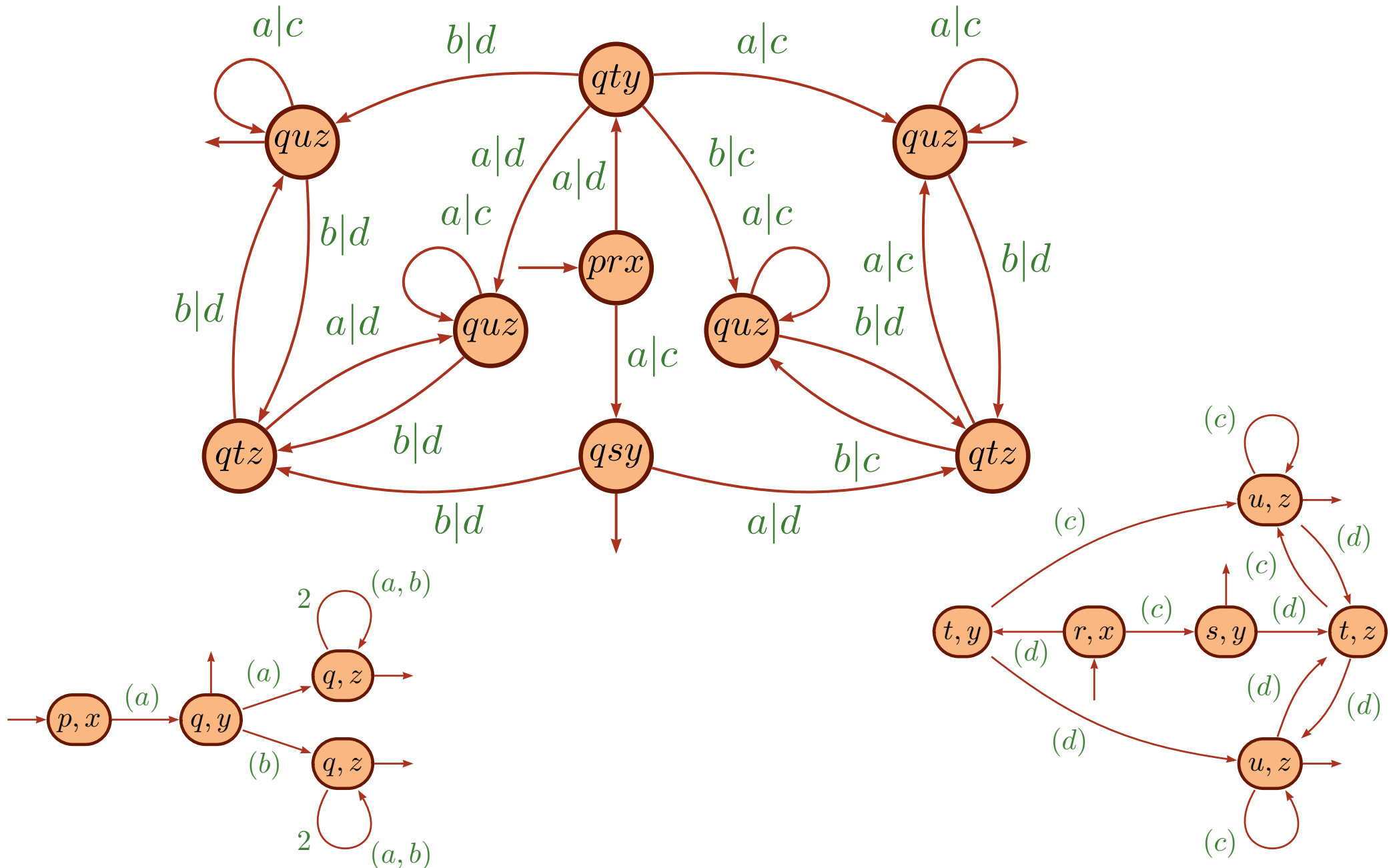


Proposition: Si deux langages rationnels ont la même fonction de croissance, il existe entre eux une bijection réalisée par un transducteur lettre à lettre.

Exemple: $L_1 = a(a + b)^*$ et $L_2 = (c + dc + dd)^* \setminus cc(c + d)^*$:







Conjugaison et systèmes dynamiques

Théorème de l'équivalence finie (Parry):

Deux sous-shifts sofiques sont images par une application *bloc-map finite-to-one* du même sous-shift de type fini si et seulement si ils ont la même entropie.

preuve:

Lemme de Furstenberg: X, Y même entropie $\Rightarrow XF = FY, F \geq 0, F \neq 0$
 $XF = FY \Rightarrow$ existence des applications *bloc-map finite-to-one*

- Travail en cours...
- Statut des transducteurs non fonctionnels, des automates tropicaux, *etc.*
- Liens entre décidabilité de l'équivalence et décidabilité de la conjugaison