Université de Marne-la-Vallée

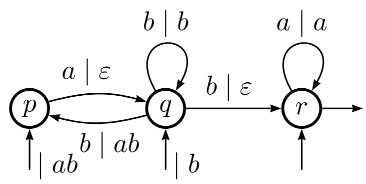
Master Science Informatique 2ème année. Tronc commun
Examen d'algorithmique et automates (Lombardy) 2 pages
15 novembre 2006. Durée : 1h30

Les documents sont autorisés.

Exercice 1. On s'intéresse aux transducteurs qui recherchent un facteur u fixé dans un mot et qui le remplacent par un autre facteur v, en essayant d'éliminer toutes les occurences de u dans le mot (en priorité celles situées le plus à droite).

Dans tout ce qui suit, on supposera que l'alphabet est $A = \{a, b\}$ et que le facteur à remplacer est le mot $u = aab$.

Tous les transducteurs à partir desquels nous travaillerons sont construits à partir du transducteur $\mathcal{T}_0$ suivant :



On considère un mot v dont u n'est pas préfixe. Soit $w = \mathsf{sufpref}(u, v)$, le plus long mot qui est à la fois un suffixe de u et un préfixe de v. On note v' l'unique mot tel que $v = w.v'$. On obtient le transducteur $\mathcal{T}_v$ à partir de $\mathcal{T}_0$ en ajoutant une transition partant de l'état w avec pour étiquette d'entrée a et pour sortie le mot v' et dont l'état d'arrivée s dépend de la valeur de w :

w	ab	b	ε
s	p	q	r

1) On suppose dans cet exercice $v = abb$. Dessiner le transducteur $\mathcal{T}_v$. Montrer que ce transducteur réalise une fonction. Décider si ce transducteur est séquentialisable, et, si c'est le cas, le séquentialiser.

2) Même questions pour $v = ba$.

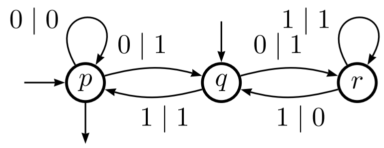
3) On considère maintenant un mot v quelconque dont u n'est pas préfixe. Soit $w = \mathsf{sufpref}(u, v)$ et u' l'unique mot tel que $u = u'.w$. Quelle est l'image par $\mathcal{T}_v$ de $u'^n.w$? Donner, selon les valeurs de w, l'image de u'^n par $\mathcal{T}_v$ (on pourra utiliser le fait que $u = aab$). Montrer que le transducteur $\mathcal{T}_v$ est séquentialisable si et seulement si $\mathsf{sufpref}(u, v)$ est le mot vide.

4) On suppose dans cet exercice qu'il existe un mot x non vide qui est à la fois préfixe de u et suffixe de v. Montrer qu'il existe des mots dont l'image par le transducteur $\mathcal{T}_v$ contient un facteur égal à u.

Exercice 2. On s'intéresse dans cet exercice à la composition des transducteurs. On se restreindra aux transducteurs lettre-à-lettre.

Un transducteur $\mathcal{T}$ est un transducteur lettre-à-lettre si chaque transition de $\mathcal{T}$ a une lettre en entrée et une lettre en sortie et si les sorties des flèches intiales et finales sont le mot vide.

Exemple de transducteur lettre-à-lettre :

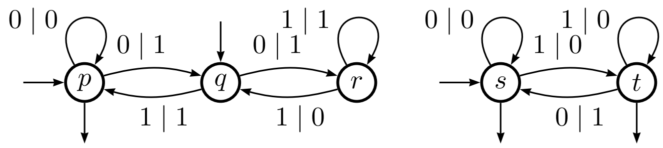


Soit $\mathcal{T}_1$ un transducteur lettre-à-lettre d'ensemble d'états Q dont l'alphabet d'entrée est A et l'alphabet de sortie B et $\mathcal{T}_2$ un transducteur lettre-à-lettre d'ensemble d'états R dont l'alphabet d'entrée est B et l'alphabet de sortie C.

On définit le transducteur *composé* $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ de la façon suivante :

– l'alphabet d'entrée est A et l'alphabet de sortie est C ;
– l'ensemble d'états est $Q \times R$;
– l'état (p, q) est initial si et seulement si p est initial dans $\mathcal{T}_1$ et q est initial dans $\mathcal{T}_2$;
– l'état (p, q) est final si et seulement si p est final dans $\mathcal{T}_1$ et q est final dans $\mathcal{T}_2$;
– il y a une transition $(p, q) \xrightarrow{a \mid c} (p', q')$ dans $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ si et seulement si il existe une lettre b dans B, une transition $p \xrightarrow{a \mid b} p'$ dans $\mathcal{T}_1$ et une transition $q \xrightarrow{b \mid c} q'$ dans $\mathcal{T}_2$.

1) Soit $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ les deux transducteurs ci-dessous :



Dessiner le transducteur $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$.

2) Quelle est la complexité de cette construction ?

3) Montrer que si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont des transducteurs séquentiels, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ l'est aussi.

4) Montrer que si $\mathcal{T}_1$ réalise la fonction f_1 et $\mathcal{T}_2$ réalise la fonction f_2, alors $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ est un transducteur fonctionnel qui réalise la fonction $f_2 \circ f_1$.