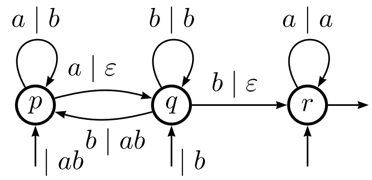
Université de Marne-la-Vallée

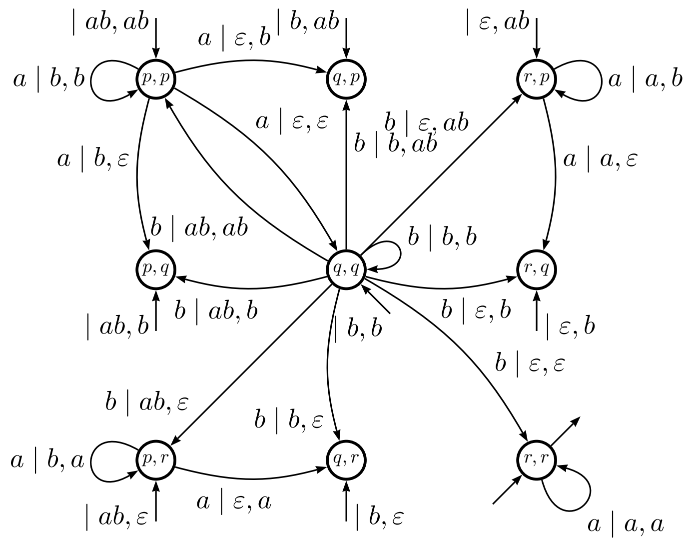
Master Science Informatique 2ème année. Tronc commun
Examen d'algorithmique et automates (Lombardy) Corrigé
15 novembre 2006. Durée : 1h30

Exercice 1.

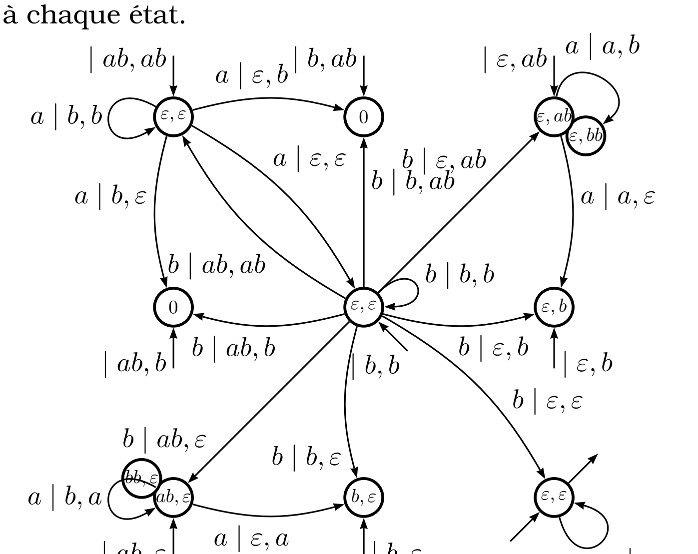
1) $u = aab$ et $v = abb$. $w = \mathsf{sufpref}(u, v)$ est donc égal à ab et $v' = b$. D'après le tableau, on doit donc ajouter à $\mathcal{T}_0$ une transition de p à p avec entrée a et sortie b :



Calculons le carré de ce transducteur :

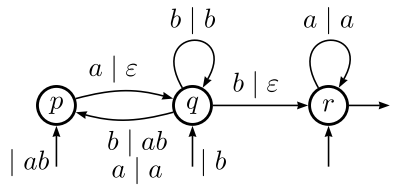


Tous les états sont initiaux, mais l'unique état final est (r, r). Les seuls états à partir desquels on peut aller en (r, r) sont (p, p) et (q, q). La partie émondée du produit est donc restreinte à ces trois états, donc l'automate support est non ambigu et le transducteur réalise une fonction. Pour savoir si il s'agit d'une fonction séquentielle, on calcule la valeur associée à chaque état.

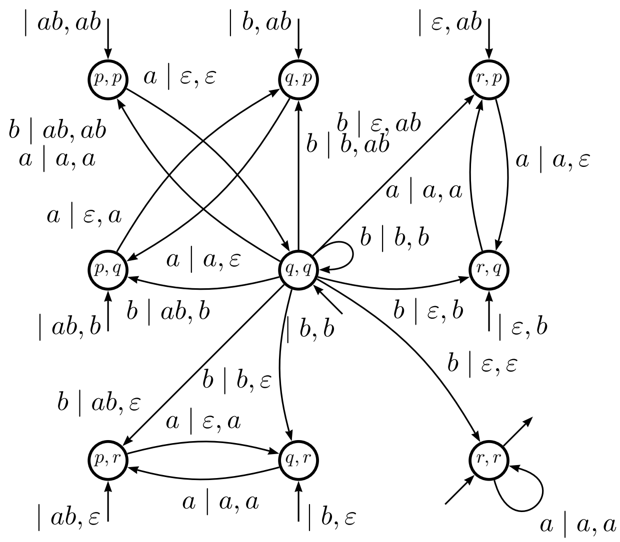


Il y a un conflit pour attribuer une valeur aux états (p,r) et (r,p), donc leur valeur est 0 ; ce sont des états accessibles dans des ciruits dont la sortie n'est pas vide. Le transducteur ne réalise donc pas de fonction séquentielle.

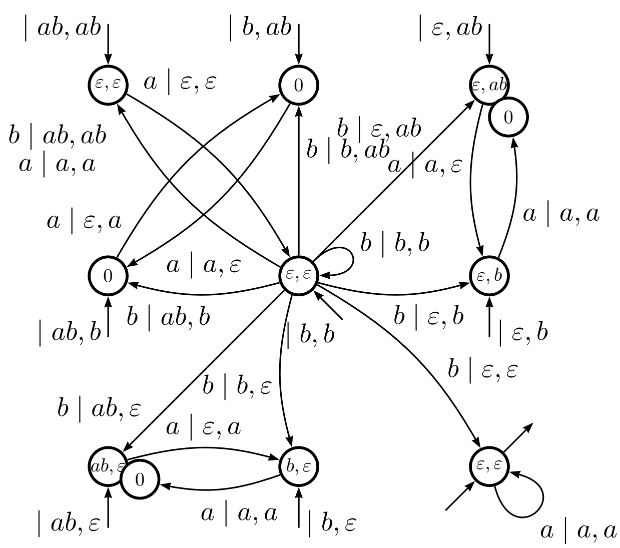
2) $u = aab$ et $v = ba$. $w = \mathsf{sufpref}(u,v)$ est donc égal à b et $v' = a$. D'après le tableau, on doit donc ajouter à $\mathcal{T}_0$ une transition de q à p avec entrée a et sortie a :



Calculons le carré de ce transducteur :



Tous les états sont initiaux, mais l'unique état final est (r,r). Les seuls états à partir desquels on peut aller en (r,r) sont (p,p) et (q,q). La partie émondée du produit est donc restreinte à ces trois états, donc l'automate support est non ambigu et le transducteur réalise une fonction. Pour savoir si il s'agit d'une fonction séquentielle, on calcule la valeur associée à chaque état.



Les états (p, r), (r, p), (p, q) et (q, p) ont une valeur 0 ; ce sont des états accessibles dans des ciruits dont la sortie n'est pas vide. Le transducteur ne réalise donc pas de fonction séquentielle.

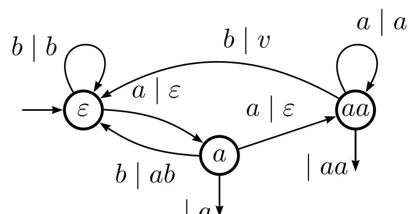
3) Dans l'exemple de l'exercice 1, avec $u = aab$, $v = abb$, $w = ab$, $u' = a$, on constate que l'image de $a^n ab$ par le transducteur $\mathcal{T}_v$ est $ab.b^n$. Par contre, l'image de a^n par $\mathcal{T}_v$ est a^n.

Dans l'exemple de l'exercice 2, avec $u = aab$, $v = ba$, $w = b$, $u' = aa$, on constate que l'image de $(aa)^n b$ par le transducteur $\mathcal{T}_v$ est $ab.a^n$. Par contre, l'image de $(aa)^n$ par $\mathcal{T}_v$ est $(aa)^n$.

De façon plus générale, comme $u = aab$, w peut prendre trois valeurs :
– si $w = ab$, $u' = a$, $v = ab.v'$ et l'image de $a^n ab$ par le transducteur est $ab.v'^n$; l'image de a^n par $\mathcal{T}_v$ est a^n.
– si $w = b$, $u' = aa$, $v = b.v'$ et l'image de $(aa)^n b$ par le transducteur est $b.v'^n$; l'image de $(aa)^n$ par $\mathcal{T}_v$ est $(aa)^n$.
– si $w = \varepsilon$, $u' = aab$ $v = v'$ et l'image de $(aab)^n$ par le transducteur est v^n.

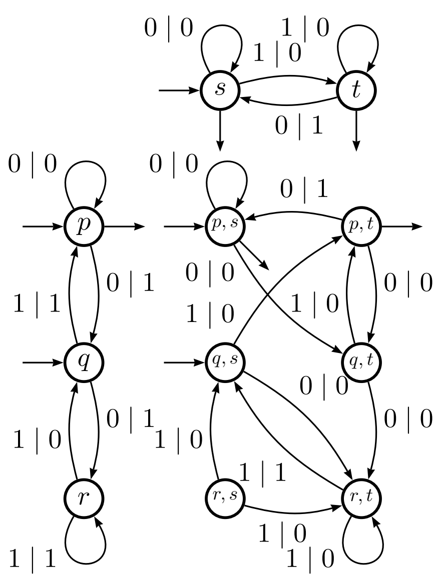
Dans les 2 premiers cas, on voit qu'il existe des mots à distance préfixe bornée ($d(u'^n w, u'^n) = |w|$) dont les images sont à distance non bornée ($d(ab.v'^n, a^n) = n(1 + |v'|)$ et $d(b.v'^n, (aa)^n) = 1 + n(2 + |v'|)$). Dans ces deux cas, la fonction réalisée n'est donc pas séquentielle.

Si $w = \varepsilon$, la fonction réalisée consiste à repérer les facteurs u dans l'entrée et à les remplacer par v en recopiant les autres lettres, ce qui peut se faire de manière séquentielle :



4) Soit x non vide tel que $u = x.u''$ et $v = v''.x$. Alors l'image de $u.u''$ par $\mathcal{T}_v$ est $v.u'' = v''.x.u'' = v''.u$ et contient donc un facteur u.

Exercice 2. 1)



2) Cette construction, comme le produit d'automate, a pour complexité $O(nm)$, où n et m sont les tailles des transducteurs de départ.

3) Si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont séquentiels, $\mathcal{T}_1$ a un unique état initial p et $\mathcal{T}_2$ a un unique état initial q, donc $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ a pour unique état initial (p, q).

Pour tout état (p, q) de $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$, pour toute lettre d'entrée a, comme $\mathcal{T}_1$ est séquentiel, il y a au plus une transition partant de p avec entrée a ; soit b la sortie de cette transition, comme $\mathcal{T}_2$ est séquentiel, il y a au plus une transition partant de p avec entrée b (soit c la sortie de cette transition). Donc il y a au plus une transition dans $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ partant de (p, q) avec entrée a (sa sortie est c).

Donc $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ est séquentiel.

4) Soit $u = u_1u_2...u_n$ un mot dans le domaine de f_1, donc accepté par $\mathcal{T}_1$. Donc il existe un calcul partant d'un état initial p_0 jusqu'à un état final p_n dont l'entrée est u et la sortie de tout calcul étiqueté par u est $f_1(u) = v = v_1v_2...v_n$. On a donc

$$\to p_0 \xrightarrow{u_1|v_1} p_1 \dots p_{n-1} \xrightarrow{u_n|v_n} p_n \to$$

Si v est dans le domaine de f_2, v est accepté par $\mathcal{T}_2$, et tout calcul d'entrée v a pour sortie $f_2(v) = w = w_1w_2...w_n$; il existe donc un état initial q_0 et un état final q_n tel que :

$$\to q_0 \xrightarrow{v_1|w_1} q_1 \dots q_{n-1} \xrightarrow{v_n|w_n} q_n \to$$

Donc dans $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$, on a le calcul

$$\to (p_0, q_0) \xrightarrow{u_1|w_1} (p_1, q_1) \dots (p_{n-1}, q_{n-1}) \xrightarrow{u_n|w_n} (p_n, q_n) \to$$

Donc $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ réalise une relation qui contient $f_2 \circ f_1$.

Réciproquement, si $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ contient un calcul

$$\to (p_0, q_0) \xrightarrow{u_1|w_1} (p_1, q_1) \dots (p_{n-1}, q_{n-1}) \xrightarrow{u_n|w_n} (p_n, q_n) \to,$$

alors il existe un mot $v = v_1v_2...v_n$ tel que

$$\to p_0 \xrightarrow{u_1|v_1} p_1 \dots p_{n-1} \xrightarrow{u_n|v_n} p_n \to$$

est un calcul de $\mathcal{T}_1$ et

$$\to q_0 \xrightarrow{v_1|w_1} q_1 \dots q_{n-1} \xrightarrow{v_n|w_n} q_n \to$$

est un calcul de $\mathcal{T}_2$. Donc la relation réalisée par $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ est contenue dans $f_2 \circ f_1$.

En conclusion, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ réalise $f_2 \circ f_1$.