PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 16 MAI 2018
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le probléme.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Régles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Le groupe B est constitué des élèves nés le 21 décembre 2002 au plus tôt. Le groupe A est constitué des autres élèves.
- Les exercices 1 à 4 ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices 5 à 7 ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices du groupe B – Énoncés et solutions

Exercice 1. Trouver tous les triplets (a, b, c) de réels strictement positifs tels que

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a, \\ b\sqrt{c} - a = b, \\ c\sqrt{a} - b = c. \end{cases}$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On remarque que $a = b = c = 4$ est solution. On va montrer que c'est en fait la seule.
Si deux des trois nombres sont égaux à 4 (disons a et b), on vérifie facilement que le troisième aussi, car $4\sqrt{4} - c = 4$, donc $c = 4$. Si un des trois nombres vaut 4 (disons a), alors $c\sqrt{a} - b = c$ devient $2c - b = c$, donc $b = c$. De plus, on a $4\sqrt{b} - b = 4$, qui se réécrit $(\sqrt{b} - 2)^2 = 0$, donc $b = 4$ et $c = 4$. Il reste à montrer qu'il est impossible que les trois nombres soient différents de 4.
Si c'est le cas, alors soit au moins deux des nombres sont strictement supérieurs à 4, soit au moins deux sont strictement inférieurs à 4. On traite les deux cas séparément.
Si au moins deux des nombres sont > 4, mettons que c soit le plus petit des trois nombres. Alors $a, b > 4$, donc $a = a\sqrt{b} - c > 2a - c$, donc $c > a > 4$, ce qui contredit la minimalité de c.
De même, si au moins deux des nombres sont < 4, supposons que c est le plus grand. Alors $a, b < 4$, donc $a = a\sqrt{b} - c < 2a - c$, donc $c < a$, ce qui contredit la maximalité de c. La seule solution est donc bien $(4, 4, 4)$.

Exercice 2. Trouver toutes les paires (m, n) d'entiers strictement positifs telles que

$$m! + n! = m^n.$$

Remarque. Pour tout entier n, on rappelle que $n!$ désigne l'entier $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On vérifie facilement que les paires $(2, 2)$ et $(2, 3)$ sont solutions. On va montrer que ce sont les seules.
On commence par traiter le cas où m ou n vaut 1 ou 2. Si $m = 1$, alors $m^n = 1$ mais $m! + n! \geqslant 2$, donc il n'y a pas de solution. Si $m = 2$, l'équation devient $2 + n! = 2^{n-1}$. Si $n \geqslant 4$, alors le membre de gauche est congru à 2 modulo 4, et le membre de droite à 0, donc n vaut 1, 2 ou 3, et $n = 1$ ne marche pas. Si $n = 1$, l'équation devient $m! + 1 = m$, mais m divise $m!$ et m, donc m divise 1 et $m = 1$, mais $(1, 1)$ n'est pas solution. Enfin, si $n = 2$, on obtient $m! + 2 = m^2$. Mais m divise $m!$ et m^2 donc m divise 2, donc m vaut 1 ou 2 et on retombe sur des cas déjà traités.
On traite maintenant le cas $2 < m \leqslant n$. Dans ce cas $m!$ divise $n!$ donc $m!$ divise m^n. En particulier, $m - 1$ divise $m!$ donc aussi m^n, mais $m - 1$ est premier avec m, donc aussi avec m^n. Par conséquent, $m - 1$ ne peut valoir que 1 donc $m = 2$, contradiction.
Enfin, on traite le cas $2 < n < m$. Dans ce cas $n!$ divise $m!$, donc on peut écrire $n!\left(1 + \frac{m!}{n!}\right) = m^n$. En particulier, $1 + \frac{m!}{n!}$ divise m^n. Mais $\frac{m!}{n!} = (n+1)(n+2)\dots m$ est divisible par m, donc $1 + \frac{m!}{n!}$ est premier avec m, donc avec m^n. On a donc $1 + \frac{n!}{m!} = 1$, ce qui est impossible.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) et (CD) sont parallèles. On suppose que $AD < CD$ et que $ABCD$ est inscrit dans un cercle Γ. Soit P sur Γ tel que (DP) est parallèle à (AC). La tangente à Γ en D recoupe (AB) en E, et les cordes $[BP]$ et $[CD]$ s'intersectent en Q. Montrer que $EQ = AC$.

Solution de l'exercice 3 On sait que (CQ) est parallèle à (AE), donc l'énoncé revient à montrer que $ACQE$ est un parallélogramme, donc il suffit de montrer que (EQ) et (AC) sont parallèles. Le quadrilatère $BQDE$ est un trapèze, avec (BE) et (DQ) parallèles. On va d'abord montrer que c'est un trapèze isocèle. En effet, on a

$$\widehat{EDQ} = \widehat{EDC} = 180° - \widehat{DAC}$$

d'après le cas limite du théorème de l'angle inscrit. D'autre part, on a

$$\widehat{DQB} = 180° - \widehat{BDC} - \widehat{DBP} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{DAP}.$$

Or, les quadrilatères $ABCD$ et $ACPD$ sont des trapèzes inscriptibles, donc isocèles, donc $PC = AD = BC$, donc C est le milieu de l'arc entre B et P. On a donc $\widehat{BAC} = \widehat{CAP}$, donc

$$\widehat{DQB} = 180° - \widehat{CAP} - \widehat{DAP} = 180° - \widehat{DAC} = \widehat{EDQ},$$

donc le trapèze $EBQD$ est bien isocèle, et a un axe de symétrie. On en déduit

$$\widehat{DQE} = \widehat{QDB} = \widehat{CDB} = \widehat{DCA},$$

en utilisant à la fin le fait que $ABCD$ a un axe de symétrie. Cela montre que (QE) et (AC) sont parallèles, ce qui conclut.

Exercice commun aux groupes A et B – Énoncé et solution

Exercice 4. Un grand carré de côté n est découpé en n^2 petits carrés de côté 1. On veut colorier en rouge ou bleu chacun des $(n+1)^2$ sommets des petits carrés de telle manière que chacun des petits carrés a exactement 2 sommets rouges. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?

Solution de l'exercice 4 La réponse est $2^{n+2} - 2$. Pour le montrer, on commence par colorier les $n + 1$ sommets les plus hauts. Il y a 2^{n+1} manières de le faire.
Si il existe deux sommets consécutifs de même couleur sur la rangée supérieure ($2^{n+1} - 2$ coloriages de la rangée supérieure), alors ils fixent les couleurs sur la rangée juste en-dessous, et ainsi de suite, ce qui donne $2^{n+1} - 2$ coloriages.
Si les couleurs sur la rangée supérieure sont alternées (2 coloriages de la rangée supérieure), alors on est obligé d'alterner les couleurs sur la rangée d'en-dessous, et sur les suivantes... On peut cependant, à chaque ligne, choisir la couleur par laquelle on commence, ce qui donne 2×2^n coloriages, donc $2^{n+2} - 2$ au total.

Exercices du groupe A – Énoncés et solutions

Exercice 5. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ vérifiant la propriété suivante : pour tous entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ dont la somme n'est pas divisible par n, il existe un indice i tel qu'aucun des nombres

$$a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + \dots + a_{i+n-1}$$

n'est divisible par n (pour $i > n$, on pose $a_i = a_{i-n}$).

Solution de l'exercice 5 Ce sont exactement les nombres premiers !

En effet, si $n = ab$, on peut prendre $a_1 = 0$ et $a_2 = \cdots = a_n = a$. La somme des a_i vaut $a(n-1)$ donc n'est pas divisible par n. Cependant, soit $1 \leqslant i \leqslant n$. Si $i+b-1 \leqslant n$, alors le nombre $a_i + \cdots + a_{i+b-1} = ab = n$ est divisible par n. Si $i+b-1 > n$, alors le nombre $a_i + \cdots + a_{i+b} = ab = n$ est divisible par n.
Réciproquement, supposons n premier, et soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers dont la somme n'est pas divisible par n. Si n ne vérifie pas la propriété, alors pour tout indice i, il existe $j(i)$ avec $i+1 \leqslant j(i) \leqslant i+n$ tel que

$$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{j(i)-1}$$

est divisible par n. De plus, comme la somme des a_i n'est pas divisible par n, on ne peut pas avoir $j(i) = i+n$, donc $i+1 \leqslant j(i) \leqslant i+n-1$. On définit alors par récurrence une suite d'indices (i_n) par $i_1 = 1$ et $i_{n+1} = j(i_n)$. On sait que pour tout k, l'entier

$$a_{i_k} + \cdots + a_{i_{k+1}-1}$$

est divisible par n donc, en sommant, pour tous indices $k < \ell$, l'entier

$$a_{i_k} + \cdots + a_{i_\ell - 1} \tag{1}$$

est divisible par n. Par le principe des tiroirs, il existe $1 \leqslant k < \ell \leqslant n+1$ tels que $i_k \equiv i_\ell \pmod n$. Le nombre de termes de la somme (1) vaut alors $i_\ell - i_k$ donc est divisible par n, donc chacun des a_i y apparaît exactement $\frac{i_\ell - i_k}{n}$ fois. De plus, on sait que $i_{j+1} - i_j \leqslant n-1$ pour tout j et que $\ell - k \leqslant n$, donc $i_\ell - i_k \leqslant n(n-1)$. La somme (1) vaut donc

$$\frac{i_\ell - i_k}{n} \times \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Mais $\frac{i_\ell - i_k}{n} \leqslant n-1$ donc ne peut pas être divisible par n, et la somme des a_i ne l'est pas non plus. Comme n est premier, la somme (1) n'est pas divisible par n, d'où la contradiction.

Exercice 6. Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$, et soit ω le cercle A-exinscrit à ABC. On note D, E et F les points de tangence de ω avec $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Le cercle circonscrit à AEF recoupe (BC) en P et Q. On note M le milieu de $[AD]$. Montrer que le cercle circonscrit à MPQ est tangent à ω.

Remarque. On rappelle que le cercle A-exinscrit à ABC est l'unique cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C.

Solution de l'exercice 6 On note Γ le cercle passant par A, E, F, P et Q. Soit T le second point d'intersection de (AD) avec ω. On va montrer que ω et le cercle circonscrit à MPQ sont tangents en T. On commence pour cela par montrer que M, P, Q et T sont cocycliques.
Soient J le centre de ω, et N le milieu de $[DT]$. Alors les angles $\widehat{AEJ}$ et $\widehat{AFJ}$ sont droits, donc E et F sont sur le cercle de diamètre $[AJ]$, donc Γ est le cercle de diamètre $[AJ]$. De plus, la droite (JN) est la médiatrice de $[DT]$, donc l'angle $\widehat{ANJ}$ est aussi droit et $N \in \Gamma$. La puissance de D par rapport à Γ donne alors

$$DP \times DQ = DA \times DN = DA \times \frac{1}{2}DT = \frac{1}{2}DA \times DT = DM \times DT,$$

donc M, T, P et Q sont bien cocycliques.
On trace maintenant la tangente en T à ω, qui recoupe (BC) en X. On a $XD = XT$, donc les points X, J et N sont alignés sur la médiatrice de $[DT]$. Les triangles XND et XDJ sont alors

rectangles en N et D et partagent l'angle $\widehat{DRJ}$, donc ils sont semblables, donc $\frac{XN}{XD} = \frac{XD}{XJ}$, donc $XD^2 = XN \times XJ$. On sait aussi que $XT = XD$, et la puissance de X par rapport à Γ donne $XN \times XJ = XP \times XQ$. On obtient donc

$$XT^2 = XP \times XQ,$$

donc (XT) est tangente au cercle circonscrit à PQT, ce qui conclut.