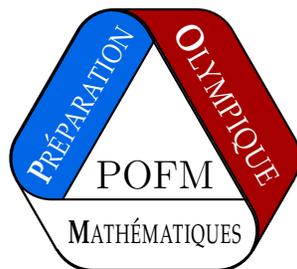


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 16 MAI 2018
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- ▷ Le groupe B est constitué des élèves nés le 21 décembre 2002 au plus tôt. Le groupe A est constitué des autres élèves.
- ▷ Les exercices 1 à 4 ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- ▷ Les exercices 5 à 7 ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices du groupe B – Énoncés

Exercice 1. Trouver tous les triplets (a, b, c) de réels strictement positifs tels que

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a, \\ b\sqrt{c} - a = b, \\ c\sqrt{a} - b = c. \end{cases}$$

Exercice 2. Trouver toutes les paires (m, n) d'entiers strictement positifs telles que

$$m! + n! = m^n.$$

Remarque. On rappelle que $n!$ désigne l'entier $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Exercice 3. Soit ABCD un trapèze tel que (AB) et (CD) sont parallèles. On suppose que $AD < CD$ et que ABCD est inscrit dans un cercle Γ . Soit P sur Γ tel que (DP) est parallèle à (AC) . La tangente à Γ en D recoupe (AB) en E, et les cordes $[BP]$ et $[CD]$ s'intersectent en Q. Montrer que $EQ = AC$.

Exercice commun aux groupes A et B – Énoncé

Exercice 4. Soit $n \geq 1$. Un grand carré de côté n est découpé en n^2 petits carrés de côté 1. On veut colorier en rouge ou bleu chacun des $(n + 1)^2$ sommets des petits carrés de telle manière que chacun des petits carrés a exactement 2 sommets rouges. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?

Exercices du groupe A – Énoncés

Exercice 5. Déterminer tous les entiers $n \geq 2$ vérifiant la propriété suivante : pour tous entiers a_1, a_2, \dots, a_n dont la somme n'est pas divisible par n , il existe un indice i tel qu'aucun des nombres

$$a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + \dots + a_{i+n-1}$$

n'est divisible par n (pour $i > n$, on pose $a_i = a_{i-n}$).

Exercice 6. Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$, et soit ω le cercle A-exinscrit à ABC. On note D, E et F les points de tangence de ω avec $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Le cercle circonscrit à AEF recoupe (BC) en P et Q. On note M le milieu de $[AD]$. Montrer que le cercle circonscrit à MPQ est tangent à ω .

Remarque. On rappelle que le cercle A-exinscrit à ABC est l'unique cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C.