Coupe Animath de Printemps

Samedi 6 juin 2020

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.

Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

▷ **Pour les exercices 1, 2 et 9,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

▷ **À part dans les exercices 1, 2 et 9,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés, il faut tracer la droite qui passe par ces points. **Le respect de cette consigne rapportera automatiquement un point.**

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/pofm/form/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

`contact-pofm@animath.fr`

Exercices collégiens

Exercice 1. Donner la valeur de $0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots - 49 + 50$.
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 On regroupe les termes deux par deux :

$$0 + (-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + \ldots + (-49 + 50)$$

Chaque soustraction à l'intérieur d'une parenthèse vaut 1 et il y a $\frac{50}{2} = 25$ telles parenthèses. Ainsi, la somme vaut 25.

Commentaire des correcteurs La très grande majorité des élèves a trouvé la bonne réponse, souvent en ne donnant que le résultat.

Exercice 2. On dispose d'un jeu contenant 52 cartes. Chaque carte comporte une *valeur* parmi « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi » ainsi qu'une *couleur* parmi « cœur, carreau, pique, trèfle », de telle sorte que, pour chaque valeur et chaque couleur, le jeu contient une unique carte comportant cette valeur *et* ayant cette couleur. Une *main de 5 cartes* est un choix de 5 cartes de ce jeu, sans se soucier de l'ordre dans lequel on choisit les cartes. Combien existe-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent quatre cartes ayant la même valeur ?

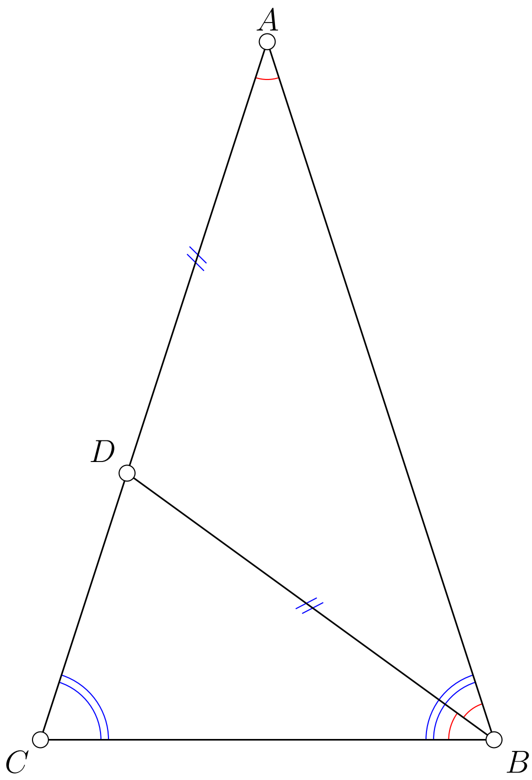
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 2 Pour choisir un main de 5 cartes dont 4 cartes ont la même valeur, il faut d'abord choisir la valeur en question. Il y a pour cela 13 choix puisqu'il y a 13 valeur. Il y a alors 48 choix pour la cinquième carte. On a donc en tout $13 \times 48 = 624$ mains possibles.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été très bien traité dans l'ensemble. Quelques fautes récurrentes sont à noter cependant. Plusieurs élèves ont oublié de prendre en compte le choix de la couleur de la cinquième carte. D'autres se sont malheureusement trompés lors du décompte des valeurs présentes dans le jeu.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D. On suppose que $BD = DA$. Déterminer les angles du triangle.

Solution de l'exercice 3



Appelons $\alpha = \widehat{ABD}$. Examinons les différents angles de la figure et essayons de la exprimer en fonction de α. Puisque la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$, on sait que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ et donc $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque $DB = DA$, le triangle ADB est isocèle au point D, ce qui se traduit par le fait que $\widehat{BAD} = \widehat{ABD}$ donc $\widehat{BAC} = \widehat{DAB} = \alpha$. Enfin, le triangle ABC est isocèle au point A, ce qui signifie que $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque la somme des angles dans le triangle ABC vaut $180°$, on trouve

$$180° = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 5\alpha$$

Ainsi, $\alpha = \frac{180°}{5} = 36°$. Cela signifie que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$ et $\widehat{BAC} = 36°$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été dans l'ensemble bien résolu, avec des preuves et des rédactions particulièrement efficaces et soignées. Attention à ne pas confondre les différentes droites remarquables dans le triangle. On rappelle que la bissectrice d'un angle est la droite qui coupe cet angle en deux angles adjacents et de même mesure. Il ne faut pas la confondre avec la hauteur. La hauteur issue du sommet A est la droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point A. La médiane est la droite qui relie le milieu d'un côté au sommet opposé. Dans un triangle isocèle en A, seule la bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe le côté opposé perpendiculairement en son milieu. Ces confusions ont été la source de quelques erreurs.

Exercice 4. Un nombre apparait sur un écran d'ordinateur. On sait que si x apparait sur l'écran, le nombre $x^2 - 2x + 1$ apparaît juste après. Si le premier nombre à apparaitre est 2, quel est le 2020-ème nombre à apparaître ?

Solution de l'exercice 4 Commençons par regarder les premières valeurs affichées par l'ordinateur :

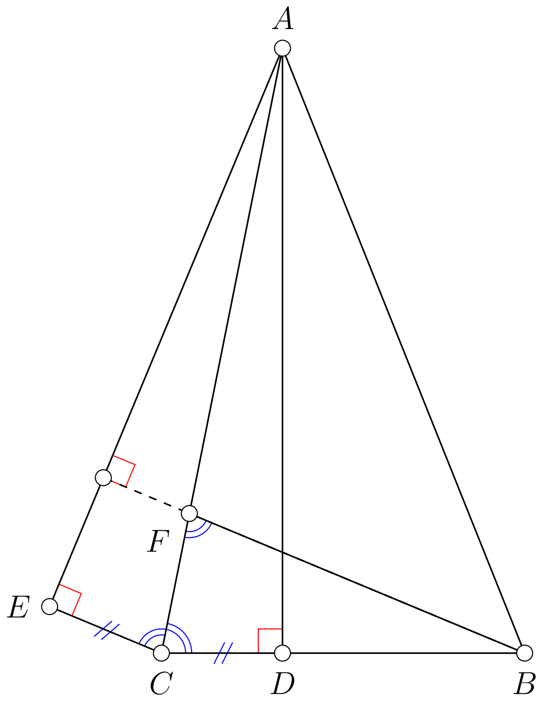
- ▷ Le premier nombre est 2.
- ▷ Le second nombre est $2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$
- ▷ Le troisième nombre est $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$
- ▷ Le quatrième nombre est $0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$
- ▷ Le cinquième nombre est $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$
- ▷ Le sixième nombre est $0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$
- ▷ Le septième nombre est $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

On voit que les nombres qui apparaissent sont dans l'ordre $2, 1, 0, 1, 0, 1, 0$. Comme après un 0 il y a forcément $0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$ et après un 1 il y a forcément $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, on va avoir une alternance de 0 et de 1. Comme 1 apparait en deuxième, tout les nombres apparaissant à un rang pair seront des 1 donc le 2020-ième nombre vaut 1.

Commentaire des correcteurs Nous félicitons les élèves qui ont largement réussi cet exercice. Les quelques erreurs observées sont principalement des erreurs de calcul ou de décalage du rang des nombres affichés. Par exemple, certains élèves ont considéré que le rang du premier nombre à apparaître sur l'écran était le rang 0 alors qu'il s'agit du rang 1. Afin d'éviter de faire cette faute, certains élèves ont utilisé un tableau, ce qui a été grandement apprécié. Nous invitons les élèves à être vigilants sur ce genre d'erreur qui a parfois causé beaucoup de dégâts, et à ne pas passer trop vite sur les exercices, toujours en vérifiant le raisonnement utilisé.

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. Soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. Soit E le symétrique du point D par rapport à la droite (AC). La perpendiculaire à la droite (AE) passant par B coupe la droite (AC) en un point noté F. Démontrer que le triangle FBC est isocèle en B.

Solution de l'exercice 5



Pour montrer que le triangle FBC est isocèle au point B, nous allons montrer que $\widehat{CFB} = \widehat{FCB}$

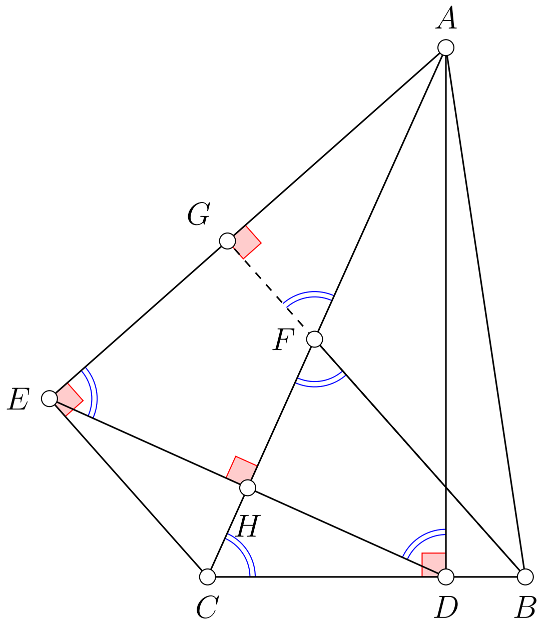
Le fait que le point E soit la symétrique du point D par rapport à la droite (AC) signifie que $\widehat{CEA} = 90°$ et que les droites (CE) et (AE) sont perpendiculaire. Or, la droite (BF) est également perpendiculaire à la droite (AE). Les droites (BF) et (CE) sont perpendiculaire à une même droite, elles sont donc parallèles.

Les angles $\widehat{CFB}$ et $\widehat{ECA}$ sont alternes-internes par rapport aux droites (EC) et (FB) donc ils sont égaux. Par ailleurs, puisque la symétrie axiale conserve les angles, $\widehat{DCA} = \widehat{ECA}$. Finalement :

$$\widehat{CFB} = \widehat{ECF} = \widehat{ECA} = \widehat{ACD} = \widehat{FCD} = \widehat{FCB}$$

donc le triangle FCB est bien isocèle au point B.

Solution alternative n°1



Comme dans la solution précédente, on va chercher à montrer que $\widehat{CFB} = \widehat{FCB}$. Pour cela on introduit H le point d'intersection des droites (DE) et (AC) et G le point d'intersection des droites (AE) et (BF). Puique'ils sont opposés par le sommet, les angles $\widehat{CFB}$ et $\widehat{AFG}$ sont égaux. Puisque la somme des angles du triangle AGF vaut $180°$ et que les droite (AE) et (BG) sont perpendiculaires, on a :

$$\widehat{CFB} = 180° - \widehat{AGF} - \widehat{GAF} = 180° - 90° - \widehat{EAH} = 90° - \widehat{GAF}$$

Les points D et E sont symétriques par rapoort à la droite (AH) donc les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires. Ainsi, $\widehat{EHA} = 90°$. Puisque la somme des angles dans le triangle AEH vaut $180°$, on a

$$\widehat{HEA} = 180° - \widehat{EHA} - \widehat{EAH} = 180° - 90° - \widehat{EAH} = 90° - \widehat{EAH}$$

Ainsi :

$$\widehat{CFB} = 90° - \widehat{GAF} = 90° - \widehat{EAH} = \widehat{HEA}$$

Puisque la symétrie axiale conserve les angles, $\widehat{HEA} = \widehat{HDA}$.
Concentrons-nous à présent sur les points A, D, C et H. Puisque les droites (AD) et (CD) sont perpendiculaires, $\widehat{HDA} = 90° - \widehat{CDH}$. Le triangle HCD est rectangle en H et la somme de ses angles fait $180°$. Ainsi :

$$\widehat{HCD} = 180° - \widehat{CHD} - \widehat{CDH} = 180° - 90° - \widehat{CDH} = 90° - \widehat{CDH}$$

En rassemblant toutes ces informations :

$$\widehat{CFB} = \widehat{HEA} = \widehat{HDA} = 90° - \widehat{CDH} = \widehat{HCD} = \widehat{FCB}$$

et on retrouve que le triangle FCB est isocèle au point B.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été bien réussi par les élèves qui l'ont traité. Certaines personnes ont trouvé des preuves remarquablement élégantes et rapides !

Exercice 6.

1) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 8 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 8 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 8$ en utilisant k couleurs.
2) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 31$ en utilisant k couleurs.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Dans ce problème, on cherche le plus petit entier k satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Il y aura alors deux parties dans la démonstration. D'une part il faut montrer que si un entier k satisfait la propriété, alors $k \geqslant c$, d'autre part il faut montrer que l'on peut effectivement trouver un coloriage des entiers avec c couleurs.

1) Tout d'abord, essayons de colorier les entiers au fur et à mesure de façon naïve :

- ▷ On colorie 2 de la première couleur
- ▷ On colorie 3 aussi de la première couleur (c'est possible car 2 ne divise pas 3).
- ▷ 4 est divisible par 2 donc on ne peut pas le colorier de la même couleur que 2, on le colorie donc d'une autre couleur (la deuxième couleur).
- ▷ On peut colorier 5 de la première couleur.
- ▷ 6 étant divisible par 2 et 3 on le colorie de la deuxième couleur.
- ▷ On peut colorier 7 de la première couleur.
- ▷ Par contre 8 est divisible par 2 et 4, il faut donc le colorier d'une troisième couleur.

On a donc obtenu un coloriage avec 3 couleurs des entiers de 2 à 8. Il faut maintenant vérifier qu'il faut forcément 3 couleurs dans un coloriage satisfaisant la propriété de l'énoncé. Dans la construction précédente, le problème était de colorier 8. En effet, 8 est un multiple de 4 et 2 et 4 est un multiple de 2. Ainsi 4 ne peut avoir la même couleur que 2 et 8 ne peut avoir la même couleur que 2 ou 4. Il faut donc au moins 3 couleurs différentes pour colorier $2, 4, 8$, donc le plus petit nombre de couleurs nécessaires est $k = 3$.

2) Ici inspirons nous de la première question. On a vu que $2, 4, 8$ étaient les nombres apportant une contrainte dans le coloriage. On remarque qu'il s'agit de puissances de 2. On peut donc conjecturer que les puissances de 2 jouent un rôle important dans le problème. Parmi les entiers de 2 à 32 il y a 5 puissances de 2 : $2, 4, 8$ et 16 Comme 2 divise $4, 8, 16$, 2 est forcément d'une couleur différente des 3 autres. Comme 4 divise $8, 16$, 4 est forcément d'une couleur différente des 2 autres. De même comme 8 divise 16 donc $2, 4, 8, 16$ ont forcément des couleurs différentes deux à deux. Il faut donc au moins 4 couleurs différentes.

Réciproquement, on cherche un coloriage des entiers de 2 à 32 utilisant exactement 4 couleurs. On peut en fait continuer le coloriage précédent en coloriant chaque entier au fur et à mesure avec la plus petite couleur possible. On obtient le coloriage suivant :

1. Les nombres coloriés avec la couleur 1 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$
2. Les nombres coloriés avec la couleur 2 sont $4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26$
3. Les nombres coloriés avec la couleur 3 sont $8, 12, 18, 20, 27, 28, 30$
4. Les nombres coloriés avec la couleur 4 sont $16, 24$

On a bien un coloriage correct avec 4 couleurs donc le nombre minimal de couleur est 4.

<u>*Solution alternative n°1*</u> On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici de généraliser le coloriage précédent : on construit un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à r, avec $r \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$, posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. On va colorier n avec la couleur $a_1 + \cdots + a_k$ (notons que comme $n \geqslant 2$, on a bien $a_1 + \cdots + a_k \geqslant 1$). Montrons que ce coloriage est correct : soit $m \neq n$ deux entiers tels que m divise n. Posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. m s'écrit nécessairement sous la forme $m = p_1^{b_1} \times \cdots \times p_k^{b_k}$ avec $b_1 \leqslant a_1, \ldots b_k \leqslant a_k$. Comme $m \neq n$, il existe forcément i tel que $a_i \neq b_i$ donc $a_i > b_i$. Ainsi on a forcément $a_1 + \cdots + a_k > b_1 + \cdots + b_k$ donc m et n sont bien de couleur différente.

Si $n \leqslant 8$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^3 = 8 \geqslant n \geqslant 2^{a_1 + \cdots + a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 3$, le coloriage utilise au plus 3 couleurs pour les entiers de 2 à 8 donc pour la première question le k minimal vaut 3.

Si $n \leqslant 31$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^5 = 32 > n \geqslant 2^{a_1 + \cdots + a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k < 5$ et comme $a_1 + \cdots + a_k$ est entier, on a $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 4$, le coloriage utilise au plus 4 couleurs pour les entiers de 2 à 31 donc pour la deuxième question le k minimal vaut 4.

Solution alternative n°2 On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici une généralisation de la construction d'un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à n, où n est un entier strictement positif quelconque supérieur à 2. Soit k le plus grand entier tel que $2^k \leqslant n$, on a donc $2^{k+1} > n$. Soit j un entier vérifiant $2 \leqslant j \leqslant n$. Notons l le plus grand entier tel que $2^l \leqslant j$ et de même $2^{l+1} > j$. Comme $2 \leqslant j \leqslant n < 2^{k+1}$, on a $1 \leqslant l < k + 1$, donc $1 \leqslant l \leqslant k$. On va colorier j de la couleur l.

Notons que comme $1 \leqslant l \leqslant k$, ce coloriage utilise au plus k couleurs. Comme $2 \leqslant 2 \leqslant 4 \leqslant \cdots \leqslant 2^k \leqslant n$, les 2^j pour $1 \leqslant j \leqslant k$ sont entre 2 et n, et comme 2^j est colorié de la couleur j, le coloriage utilise exactement j couleurs.

Ce coloriage vérifie de plus la propriété de l'énoncé : soit m, n tels que m divise n et $m \neq n$. Notons j la couleur de m, on a $m \geqslant 2^j$. Comme m divise n et $m \neq n$, $n \geqslant 2m \geqslant 2^{j+1}$ donc n ne peut être colorié avec la couleur j, car sinon on aurait $n < 2^{j+1}$.

En particulier pour $n = 8$, comme $2^3 = 8 < 2^4$, le coloriage proposé utilise 3 couleurs et pour $n = 31$, comme $2^4 \leqslant n < 2^5$, le coloriage utilise 4 couleurs. Ainsi pour la première question le k minimal vaut 3, pour la seconde il vaut 4

Commentaire des correcteurs Dans cet exercice, chaque question contenait deux parties. Par exemple pour la question 2), il fallait d'une part montrer qu'on peut colorier les entiers avec 4 couleurs, d'autre part il faut montrer que, quelque soit le coloriage, il utilise toujours au moins 4 couleurs. Une grande majorité d'élèves a oublié de traiter l'une de ces deux parties. Ce n'est qu'en traitant séparément chaque point que l'on pouvait avoir le score maximal. Par ailleurs, une grande partie des élèves a bien avancé sur le problème et a fourni un coloriage valide avec le bon nombre de couleurs.

Exercice 7. Le jeu de *mathinal* est un jeu qui se joue à n joueurs (avec $n \geqslant 2$), n cartes vertes et n cartes rouges. Initialement, chaque joueur prend une carte verte et une carte rouge, et écrit un entier sur chacune de ces deux cartes (il a le droit d'écrire le même entier sur les deux cartes). Puis chaque joueur calcule la somme des numéros de ses deux cartes, et on note M la plus grande somme parmi les sommes des n joueurs.

Ensuite, les joueurs redistribuent les cartes rouges comme suit : le joueur possédant la carte verte de plus petit numéro reçoit la carte rouge de plus grand numéro, puis le joueur possédant la carte verte de deuxième plus petit numéro reçoit la carte rouge de deuxième plus grand numéro, et ainsi de suite. Chaque joueur calcule alors de nouveau la somme des numéros de ses deux cartes, et on note M' la plus grande somme parmi les sommes des n joueurs.

1) Est-il possible d'avoir $M' < M$?

2) Est-il possible d'avoir $M' > M$?

Solution de l'exercice 7

1) Pour bien comprendre l'exercice, il est conseillé de regarder ce qu'il se passe pour des petites valeurs. Prenons donc une partie à deux joueurs où le joueur 1 inscrit 0 sur sa carte verte et 0 sur sa carte rouge et le joueur 2 inscrit 1 sur sa carte verte et 1 sur sa carte rouge.

	carte verte	carte rouge	somme
joueur 1	0	0	0
joueur 2	1	1	2

On a alors $M = 2$. Si l'on redistribue les cartes rouges, le joueur 1 reçoit la carte rouge avec un 1 inscrit et le joueur 2 reçoit la carte bleue avec un 0 inscrit.

	carte verte	nouvelle carte rouge	somme
joueur 1	0	1	1
joueur 2	1	0	1

On a alors $M' = 1$. Ici $M' < M$ donc on a construit une situation répondant positivement à la question, la réponse à la question 1) est donc **OUI**.

2) Une fois de plus, on teste l'énoncé sur des parties à 2 ou 3 joueurs pour deviner la réponse. On va montrer qu'on ne peut jamais avoir $M' > M$ quelle que soit la répartition des cartes.

Considérons une partie à n joueurs et notons v_j le numéro que le joueur numéro j inscrit sur sa carte verte. Quitte à renuméroter les joueurs, on peut supposer que $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_n$. On note également $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n$ les numéros des cartes rouges dans l'ordre croissant, de telle sorte que **lors de la redistribution**, le joueur j reçoive la carte rouge avec le numéro r_j. On note r_{i_j} le numéro que le joueur j inscrit sur sa carte rouge. Le nombre M correspond donc au plus grand nombre parmi les nombres $v_j + r_{i_j}$, pour j allant de 1 à n. Le nombre M' correspond au plus grand nombre parmi les nombres $v_j + r_j$. Voici ici une situation à 4 joueurs.

	carte verte	carte rouge inscrite par le joueur	carte rouge reçue après la redistribution
joueur 1	$v_1 = 0$	$r_{i_1} = 3 (= r_2)$	$r_1 = 4$
joueur 2	$v_2 = 1$	$r_{i_2} = 1 (= r_4)$	$r_2 = 3$
joueur 3	$v_3 = 2$	$r_{i_3} = 4 (= r_1)$	$r_3 = 2$
joueur 4	$v_4 = 3$	$r_{i_4} = 2 (= r_3)$	$r_4 = 1$

On note k un entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$ vérifiant $M' = v_k + r_k$. On suppose par l'absurde que $M < M'$. Soit l un entier tel que $n \geqslant l \geqslant k$. Par hypothèse sur M, $v_l + r_{i_l} \leqslant M$. De plus, on sait que $M < M' = v_k + r_k$. D'autre part, puisque $l \geqslant k$, on sait que $v_k \leqslant v_l$. Ainsi

$$v_l + r_{i_l} \leqslant M' < M = v_k + r_k \leqslant v_l + r_k$$

On obtient que $r_k > r_{i_l}$. Ceci implique que $i_l > k$.

$$r_1, r_2, \ldots, r_k, \underbrace{r_{k+1}, \ldots, r_n}_{r_{i_l} \text{ appartient à}}$$

$$1, 2, \ldots, k, \underbrace{k+1, \ldots, n}_{i_l \text{ appartient à}}$$

L'inégalité étant vrai pour tout entier l tel que $n \geqslant l \geqslant k$, on a donc prouvé que $i_k, i_{k+1}, \ldots i_n$ appartiennent à $\{k+1, \ldots, n\}$.

$$1, 2, \ldots, k, \qquad \underbrace{k+1, \ldots, n}_{i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n \text{ appartiennent à}}$$

On a donc $n-k+1$ entiers distincts dans un ensemble de cardinal $n-k$, ce qui est une contradiction. En particulier, on ne peut pas avoir $M < M'$. La réponse à la question $2)$ est donc **NON**.

<u>*Solution alternative n°1*</u> On peut également procéder comme suit pour démontrer que l'on a nécessairement $M' \leqslant M$. Au lieu de procéder en deux tours, les joueurs vont effectuer les opérations suivantes : si un joueur possédant des cartes verte et rouge de valeurs v et r rencontre un autre joueur possédant des cartes verte et rouge de valeurs v' et r' telles que $v' < v$ et $r' < r$, ils échangent leurs cartes rouges. Puis on recommence tant qu'un tel échange est possible.

Le nombre d'échanges auxquels on procédera est nécessairement fini. Il existe de multiples manières de le démontrer, par exemple en procédant comme suit. Tout d'abord, on suppose, sans perte de généralité, que chaque joueur a écrit un nombre positif ou nul. Supposons ensuite que chaque joueur calcule également le produit de ses deux cartes, et notons $\mathcal{P}$ la somme de ces produits. Alors la valeur de $\mathcal{P}$ sera nécessairement un entier positif ou nul. Cependant, lors de l'échange, la valeur de $\mathcal{P}$ varie de

$$(vr' + v'r) - (vr + v'r') = (v - v')(r' - r) < 0.$$

L'entier $\mathcal{P}$ prend donc des valeurs entières positives ou nulles décroissantes, et finira bien par ne plus varier, ce qui signifie que l'on ne pourra plus faire d'échange. Et, si l'on ne peut plus faire d'échange, cela signifie précisément que les joueurs ont redistribué leurs cartes comme demandé dans la deuxième étape du jeu de mathinal.

Notons alors $\mathcal{M}$ la plus grande somme des cartes possédées par un joueur : initialement, on a $\mathcal{M} = M$, et à la fin, on a $\mathcal{M} = M'$. Or, avant l'échange, les sommes de nos deux joueurs étaient $v + r$ et $v' + r'$, et maintenant ce sont $v + r'$ et $v' + r$. Puisque $\max\{v + r', v' + r\} < v + r \leqslant \mathcal{M}$, on en déduit que $\mathcal{M}' \leqslant \mathcal{M}$. On en conclut donc comme souhaité que $M' \leqslant M$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Cet exercice était difficile. La première partie a été correctement traitée par de très nombreux élèves, ce qui était fort satisfaisant. En revanche, dans le cadre du traitement de la deuxième partie, qui était nettement plus délicate, plusieurs erreurs ou approximations sont revenues fréquemment :

- ▷ démontrer que $M' \leqslant M$ sur un exemple précis : cela ne nous apprend a priori rien sur l'infinité d'exemples restants ;
- ▷ supposer que les sommes M et M' étaient nécessairement calculées par le joueur possédant la plus grande carte verte ; remarquer que les cartes vertes et rouges jouaient des rôles symétriques aurait sans doute permis à plusieurs candidats de ne pas faire cette erreur, puisque le même raisonnement sous-jacent aurait permis de « démontrer » que la somme M' était aussi calculée par le joueur possédant la plus grande carte rouge ;

- ▷ utiliser des arguments flous consistant à invoquer la notion de moyenne ou d'équilibrage ;
- ▷ affirmer (à tort) que, pour donner sa carte rouge à un autre joueur, il fallait avoir une carte verte plus grande que celui-ci : cette affirmation est fausse dès lors qu'un joueur possède les deux plus petites cartes, puisqu'il va bien donner l'une des deux ;
- ▷ mal traiter un exemple ; ce cas de figure est évidemment dommage, puisque les correcteurs ne doutent pas une seconde que les élèves concernés auraient pu éviter cette faute, voire qu'elle les a coupés dans leur élan en laissant croire que l'exercice était résolu.

Exercice 8. Déterminer les entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 3$ ayant la propriété suivante : m et n ont chacun k diviseurs positifs et, si l'on note $d_1 < \ldots < d_k$ les diviseurs positifs de m (avec $d_1 = 1$ et $d_k = m$) et $d'_1 < \ldots < d'_k$ les diviseurs positifs de n (avec $d'_1 = 1$ et $d'_k = n$), alors $d'_i = d_i + 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant k-1$.

<u>Solution de l'exercice 8</u> Tout d'abord notons que les plus petits diviseurs strictement plus grands que 1 de m et n sont d_2 et d_2+1 qui sont donc forcément premiers. Or ces deux nombres étant consécutifs, l'un d'entre eux est pair donc vaut 2. Si $d_2+1=2$, $d_2=1$ ce qui contredit l'énoncé. On a donc $d_2=2$ et $d_2+1=3$.

Si $k=3$ le seul diviseur strict de m vaut 2 donc $m=4$, le seul diviseur strict de m valant 3 on a forcément $n=9$. Récirproquement, comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4,9,3)$ convient.

Supposons $k \geqslant 4$. Comme le plus petit diviseur strict de m vaut 3, m n'est pas divisible par 2, il est donc impair. On a donc forcément d_3+1 impair, donc d_3 est pair. Posons $d_3 = 2l$, comme $d_3 > d_2 = 2$, on a $l > 1$ donc $l \geqslant 2$. Si $l \geqslant 4$ alors l divise d_3 donc l divise m et $l \neq m$ car $2l$ divise m. En particulier comme $l < 2l$ est un diviseur de m cela contredit l'énoncé. On a donc forcément $l=2$ donc $d_3=4$. On en déduit que $d_3+1=5$. Si $k=4$ les diviseurs stricts de m étant 2 et 4, on a $m=8$ et comme les diviseurs stricts de n sont 3 et 5 on a $n=15$. Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8,15,4)$ vérifie l'énoncé.

Si $k \geqslant 5$, comme 3 et 5 divisent n, 15 divise n. Comme $k \geqslant 3$ on ne peut pas avoir $n=15$ sinon n n'a que 2 diviseurs stricts. En particulier, 15 est un diviseur strict de n donc $15-1=14$ est un diviseur strict de m. En particulier, $7+1=8$ est un diviseur strict de n donc n est pair, on obtient une contradiction.

En particulier pour $k \geqslant 5$ il n'y a pas de solutions, les seules solutions sont donc $(4,9,3)$ et $(8,15,4)$

<u>Solution alternative n°1</u> De la même manière que dans la solution précédente, on obtient que $d_2=2$. Si m est divisible par un nombre impair l, celui-ci est un diviseur strict car m est divisible par 2 donc il est pair. En particulier $l+1$ est pair et divise n, donc 2 divise n ce qui contredit le fait que d_2+1 est le plus petit diviseur de n. En particulier m est forcément une puissance de 2. Si $m \geqslant 16$, alors 8 et 4 sont des diviseurs stricts de m. Ainsi 9 et 5 divisent n, donc 45 divise n. En particulier 15 est un facteur strict de n donc $15-1=14$ est un facteur strict de m. Ainsi m est divisible par 7, cela contedit le fait que m est une puissance de 2.

Ainsi, m est une puissance de 2 vérifiant $m < 16$ et 2 est un facteur strict de m. On a donc $m=4$ ou $m=8$. Si $m=4$, le seul diviseur strict de 4 est 2 donc le seul diviseur strict de n est 3 donc $n=9$. Comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4,9,3)$ convient.

Si $m=8$, m a pour diviseurs stricts 2 et 4, n a pour diviseurs stricts 3 et 5 donc $n=15$.Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8,15,4)$ vérifie l'énoncé.

Les triplets solutions sont donc $(4,9,3)$ et $(8,15,4)$.

<u>Commentaire des correcteurs</u> L'exercice était difficile, mais un bon nombre d'élèves a réussi à avancer de façon significative sur l'exercice. Attention quand on regarde les parités possibles pour m et n à bien traiter tous les cas. Aussi, il faut bien penser à vérifier les solutions obtenues !

Exercices lycéens

Exercice 9. On dispose d'un jeu contenant 52 cartes. Chaque carte comporte une *valeur* parmi « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi » ainsi qu'une *couleur* parmi « cœur, carreau, pique, trèfle », de telle sorte que, pour chaque valeur et chaque couleur, le jeu contient une unique carte comportant cette valeur *et* ayant cette couleur. Une *main de* 5 *cartes* est un choix de 5 cartes de ce jeu, sans se soucier de l'ordre dans lequel on choisit les cartes. Combien existe-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent quatre cartes ayant la même valeur ?

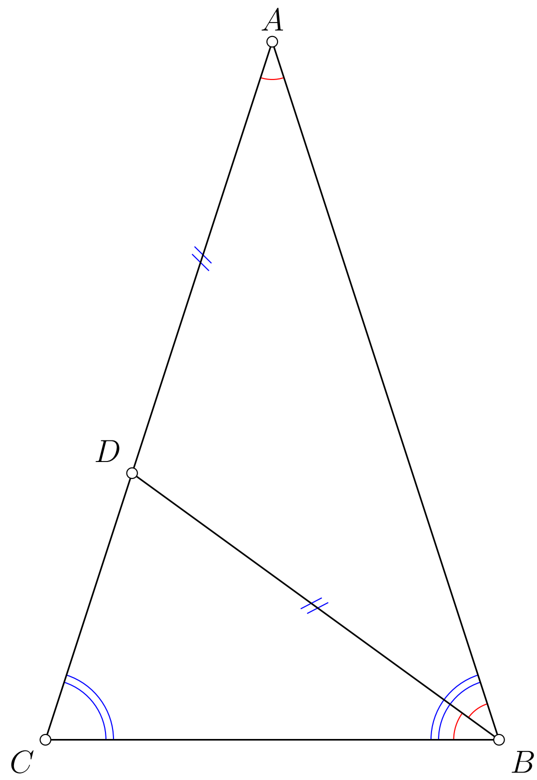
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 9 Pour choisir un main de 5 cartes dont 4 cartes ont la même valeur, il faut d'abord choisir la valeur en question. Il y a pour cela 13 choix puisqu'il y a 13 valeur. Il y a alors 48 choix pour la cinquième carte. On a donc en tout $13 \times 48 = 624$ mains possibles.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été réussi par une majorité d'élèves. Les erreurs principales résident dans l'oubli de la couleur de la dernière carte (pour ceux qui trouvent 156), voire carrément l'oubli de la dernière carte (pour ceux qui trouvent 13). Certains ont mal compris l'énoncé, en cherchant à compter le nombre de mains possibles simultanément. Enfin, plusieurs se trompent dans le calcul final de 13×48, ce qui est dommage.

Exercice 10. Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D. On suppose que $BD = DA$. Déterminer les angles du triangle ABC.

Solution de l'exercice 10



Appelons $\alpha = \widehat{ABD}$. Examinons les différents angles de la figure et essayons de la exprimer en fonction de α. Puisque la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$, on sait que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ et donc $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque $DB = DA$, le triangle ADB est isocèle au point D, ce qui se traduit par le fait que $\widehat{BAD} = \widehat{ABD}$ donc $\widehat{BAC} = \widehat{DAB} = \alpha$. Enfin, le triangle ABC est isocèle au point A, ce qui signifie que $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque la somme des angles dans le triangle ABC vaut $180°$, on trouve

$$180° = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 5\alpha$$

Ainsi, $\alpha = \frac{180°}{5} = 36°$. Cela signifie que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$ et $\widehat{BAC} = 36°$.

Commentaire des correcteurs L'exercice reposait sur le fait que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux. Une très large majorité d'élèves a résolu complètement l'exercice. Malgré tout, un nombre non négligeable a commis des erreurs comme confondre bissectrice et hauteur, bissectrice et médiane ou encore se tromper de sommet de la bissectrice. On notera qu'un grand nombre d'élèves n'a pas rendu de figure avec l'exercice. Nous tenons à rappeler l'importance de la figure dans un problème de géométrie, il s'agit du principal support de travail ! Certains élèves auraient sans doute pu éviter quelques erreurs en faisant une figure propre.

Exercice 11.

1) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 8 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 8 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 8$ en utilisant k couleurs.

2) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 31$ en utilisant k couleurs.

Solution de l'exercice 11 Dans ce problème, on cherche le plus petit entier k satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Il y aura alors deux parties dans la démonstration. D'une part il faut montrer que si un entier k satisfait la propriété, alors $k \geqslant c$, d'autre part il faut montrer que l'on peut effectivement trouver un coloriage des entiers avec c couleurs.

1) Tout d'abord, essayons de colorier les entiers au fur et à mesure de façon naïve :

- ▷ On colorie 2 de la première couleur
- ▷ On colorie 3 aussi de la première couleur (c'est possible car 2 ne divise pas 3).
- ▷ 4 est divisible par 2 donc on ne peut pas le colorier de la même couleur que 2, on le colorie donc d'une autre couleur (la deuxième couleur).
- ▷ On peut colorier 5 de la première couleur.
- ▷ 6 étant divisible par 2 et 3 on le colorie de la deuxième couleur.
- ▷ On peut colorier 7 de la première couleur.
- ▷ Par contre 8 est divisible par 2 et 4, il faut donc le colorier d'une troisième couleur.

On a donc obtenu un coloriage avec 3 couleurs des entiers de 2 à 8. Il faut maintenant vérifier qu'il faut forcément 3 couleurs dans un coloriage satisfaisant la propriété de l'énoncé. Dans la construction précédente, le problème était de colorier 8. En effet, 8 est un multiple de 4 et 2 et 4 est un multiple de 2. Ainsi 4 ne peut avoir la même couleur que 2 et 8 ne peut avoir la même couleur que 2 ou 4. Il faut donc au moins 3 couleurs différentes pour colorier $2, 4, 8$, donc le plus petit nombre de couleurs nécessaires est $k = 3$.

2) Ici inspirons nous de la première question. On a vu que $2, 4, 8$ étaient les nombres apportant une contrainte dans le coloriage. On remarque qu'il s'agit de puissances de 2. On peut donc conjecturer que les puissances de 2 jouent un rôle important dans le problème. Parmi les entiers de 2 à 32 il y a 5 puissances de 2 : $2, 4, 8$ et 16 Comme 2 divise $4, 8, 16$, 2 est forcément d'une couleur différente des 3 autres. Comme 4 divise $8, 16$, 4 est forcément d'une couleur différente des 2 autres. De même comme 8 divise 16 donc $2, 4, 8, 16$ ont forcément des couleurs différentes deux à deux. Il faut donc au moins 4 couleurs différentes.

Réciproquement, on cherche un coloriage des entiers de 2 à 32 utilisant exactement 4 couleurs. On peut en fait continuer le coloriage précédent en coloriant chaque entier au fur et à mesure avec la plus petite couleur possible. On obtient le coloriage suivant :

1. Les nombres coloriés avec la couleur 1 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$
2. Les nombres coloriés avec la couleur 2 sont $4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26$
3. Les nombres coloriés avec la couleur 3 sont $8, 12, 18, 20, 27, 28, 30$
4. Les nombres coloriés avec la couleur 4 sont $16, 24$

On a bien un coloriage correct avec 4 couleurs donc le nombre minimal de couleur est 4.

Solution alternative n°1 On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici de généraliser le coloriage précédent : on construit un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à r, avec $r \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$, posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. On va colorier n avec la couleur $a_1 + \cdots + a_k$ (notons que comme $n \geqslant 2$, on a bien $a_1 + \cdots + a_k \geqslant 1$). Montrons que ce coloriage est correct : soit $m \neq n$ deux entiers tels que m divise n. Posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. m s'écrit nécessairement sous la forme $m = p_1^{b_1} \times \cdots \times p_k^{b_k}$ avec $b_1 \leqslant a_1, \ldots b_k \leqslant a_k$. Comme $m \neq n$, il existe forcément i tel que $a_i \neq b_i$ donc $a_i > b_i$. Ainsi on a forcément $a_1 + \cdots + a_k > b_1 + \cdots + b_k$ donc m et n sont bien de couleur différente.

Si $n \leqslant 8$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^3 = 8 \geqslant n \geqslant 2^{a_1+\cdots+a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 3$, le coloriage utilise au plus 3 couleurs pour les entiers de 2 à 8 donc pour la première question le k minimal vaut 3.

Si $n \leqslant 31$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^5 = 32 > n \geqslant 2^{a_1+\cdots+a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k < 5$ et comme $a_1 + \cdots + a_k$ est entier, on a $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 4$, le coloriage utilise au plus 4 couleurs pour les entiers de 2 à 31 donc pour la deuxième question le k minimal vaut 4.

Solution alternative n°2 On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici une généralisation de la construction d'un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à n, où n est un entier strictement positif quelconque supérieur à 2. Soit k le plus grand entier tel que $2^k \leqslant n$, on a donc $2^{k+1} > n$. Soit j un entier vérifiant $2 \leqslant j \leqslant n$. Notons l le plus grand entier tel que $2^l \leqslant j$ et de même $2^{l+1} > j$. Comme $2 \leqslant j \leqslant n < 2^{k+1}$, on a $1 \leqslant l < k+1$, donc $1 \leqslant l \leqslant k$. On va colorier j de la couleur l.

Notons que comme $1 \leqslant l \leqslant k$, ce coloriage utilise au plus k couleurs. Comme $2 \leqslant 2 \leqslant 4 \leqslant \cdots \leqslant 2^k \leqslant n$, les 2^j pour $1 \leqslant j \leqslant k$ sont entre 2 et n, et comme 2^j est colorié de la couleur j, le coloriage utilise exactement j couleur.

Ce coloriage vérifie de plus la propriété de l'énoncé : soit m, n tels que m divise n et $m \neq n$. Notons j la couleur de m, on a $m \geqslant 2^j$. Comme m divise n et $m \neq n$, $n \geqslant 2m \geqslant 2^{j+1}$ donc n ne peut être colorié avec la couleur j, car sinon on aurait $n < 2^{j+1}$.

En particulier pour $n = 8$, comme $2^3 = 8 < 2^4$, le coloriage proposé utilise 3 couleurs et pour $n = 31$, comme $2^4 \leqslant n < 2^5$, le coloriage utilise 4 couleurs. Ainsi pour la première question le k minimal vaut 3, pour la seconde il vaut 4.

Commentaire des correcteurs Dans cet exercice, chaque question contenait deux parties. Par exemple pour la question 2), il fallait d'une part montrer qu'on peut colorier les entiers avec 4 couleurs, d'autre part il faut montrer que, quelque soit le coloriage, il utilise toujours au moins 4 couleurs. Beaucoup d'élèves n'ont traité qu'une des deux parties et n'ont donc pas eu le score maximal. Néanmoins, la plupart des élèves ont bien trouvé un coloriage qui convient. Pour montrer qu'un coloriage des entiers contient au moins 3 (respectivement 4) couleurs, les explications ont parfois été très laborieuses.

Exercice 12. Soit $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ deux listes de réels telles que $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \geqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i$. On pose alors $P = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - y_i)$ et $G = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i$. Démontrer que $P \leqslant G \leqslant 2P$.

Étant donnés des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, le nombre $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$ désigne le plus petit réel parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Le nombre $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$ désigne le plus grand réel parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Solution de l'exercice 12 1) Montrons d'abord que $G \geqslant P$: Soit j un entier tel que $P = x_j - y_j$. On a $P = x_j - y_j$ et $x_j \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ et $y_j \geqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i$. En particulier $P = x_j - y_j \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i = G$.

2) Montrons maintenant que $G \leqslant 2P$. Soit j un entier tel que $x_j = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ et k tel que $y_k = \min_{1\leqslant i\leqslant n} y_i$. Comme $y_j \leqslant x_k$, on a :

$$G = x_j - y_k = x_j - y_j + y_j - y_k \leqslant (x_j - y_j) + (x_k - y_k) \leqslant 2P$$

Commentaire des correcteurs Pour résoudre ce problème il fallait procéder en deux étapes : montrer que $P \leqslant G$ puis montrer $G \leqslant 2P$: peu d'élèves ont résolu le problème dans sa globalité, et beaucoup ont juste montré que $P \leqslant G$. De nombreux raisonnement contenaient des erreurs, parmi lesquelles il y avait :

- Considérer que $\max\{x_i - y_i\} = \max\{x_i\} - \max\{y_i\}$ ou bien $\max\{x_i - y_i\} = \max\{x_i\} - \min\{y_i\}$.
- Considérer qu'on pouvait supposer les listes dans un certain ordre, ce qui n'est pas le cas puisqu'en réordonnant les listes on change la valeur de P.

Exercice 13. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on nomme $s(n)$ la somme des chiffres de n. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $n \leqslant 2s(n)$.

Solution de l'exercice 13 Soit n un entier naturel et soit $\overline{a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0}$ son écriture décimale, c'est-à-dire que a_0 est le chiffre des unités, a_1 le chiffre des dizaines etc...

Tout d'abord, si n n'a qu'un chiffre, alors $n = a_0 \leqslant 2a_0$ donc n est solution de l'exercice et les nombres $0, 1, 2, \dots, 9$ sont solutions.

On suppose désormais que n a au moins deux chiffres.

Alors $n = a_d \cdot 10^d + a_{d-1} \cdot 10^{d-1} + \dots a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ et $s(n) = a_d + \dots + a_1 + a_0$. Si $d \geqslant 2$, alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant d-1$, $a_i \cdot 10^i \geqslant a_i \cdot 2$ et puisque a_d est non nul, $a_d \cdot 10^d = 2a_d + (10^d - 2) \cdot a_d \geqslant 2a_d + 10^d - 2 > 2a_d + a_0$ car $a_0 < 10$. Ainsi

$$n = a_d \cdot 10^d + a_{d-1} \cdot 10^{d-1} + \dots a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 > 2a_d + a_0 + 2a_{d-1} + \dots + 2a_1 + a_0 = 2s(n)$$

Donc si n a trois chiffres ou plus, n n'est pas solution.

On suppose que n possède deux chiffres. Si $a_1 \geqslant 2$, alors

$$n = a_1 \cdot 10 + a_0 = 2a_1 + a_0 + 8 \cdot a_1 \geqslant 2a_1 + a_0 + 8 \cdot 2 > 2a_1 + a_0 + a_0 = 2s(n)$$

donc n n'est pas solution du problème. On déduit que $a_1 = 1$. On peut alors aisément tester tous les nombres entre 10 et 19 pour voir lesquels vérifie le problème. Ou alors, on peut remarquer que l'inégalité $n \leqslant 2s(n)$ se réécrit $10 \cdot 1 + a_0 \leqslant 2(1 + a_0)$ soit $a_0 \geqslant 8$ donc les seuls entiers possibles à deux chiffres vérifiant l'énoncé sont 18 et 19. Réciproquement, on a bien $18 \leqslant 2(1+8)$ et $19 \leqslant 2(1+9)$.

Les solutions recherchées sont donc 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18, et 19.

Solution alternative n°1 Soit a le chiffre des unités de n et $b = \lfloor n/10 \rfloor$. Alors a et b sont des entiers tels que $0 \leqslant a \leqslant 9$, $0 \leqslant b$, $n = a + 10b$, et $s(n) = a + s(b)$. Si $n \leqslant 2s(n)$, cela signifie en particulier que

$$a + 10b = n \leqslant 2s(n) = 2a + 2s(b) \leqslant 2a + 2b,$$

donc que $8b \leqslant a$. On en déduit que soit $b = 0$, soit $b = 1$ et $a \in \{8, 9\}$.

Réciproquement, dans ces cas-là, on a bien $s(b) = b$, de sorte que $2s(n) = 2(a+b) \geqslant a + 10b = n$. En conclusion, les solutions recherchées sont donc 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18, et 19.

Commentaire des correcteurs Le problème est bien compris; les élèves ont vite une intuition du résultat et du raisonnement à faire, mais il est plus difficile de le mettre en place rigoureusement. La majoration de $s(n)$ était une bonne idée. Il faut éviter de parachuter des résultats, même corrects, lorsqu'ils ne sont pas immédiats : en l'occurrence, démontrer que $18k < 10^{k-1}$ pour tout $k \geqslant 3$ était une des difficultés principales de l'exercice, et une preuve de ce résultat était donc attendue. Enfin, beaucoup d'élèves oublient que 0 est une solution.

Exercice 14. Déterminer les entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 3$ ayant la propriété suivante : m et n ont chacun k diviseurs positifs et, si l'on note $d_1 < \ldots < d_k$ les diviseurs positifs de m (avec $d_1 = 1$ et $d_k = m$) et $d'_1 < \ldots < d'_k$ les diviseurs positifs de n (avec $d'_1 = 1$ et $d'_k = n$), alors $d'_i = d_i + 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant k-1$.

Solution de l'exercice 14 Tout d'abord notons que les plus petits diviseurs strictement plus grands que 1 de m et n sont d_2 et $d_2 + 1$ qui sont donc forcément premiers. Or ces deux nombres étant consécutifs, l'un d'entre eux est pair donc vaut 2. Si $d_2 + 1 = 2$, $d_2 = 1$ ce qui contredit l'énoncé. On a donc $d_2 = 2$ et $d_2 + 1 = 3$.

Si $k = 3$ le seul diviseur strict de m vaut 2 donc $m = 4$, le seul diviseur strict de m valant 3 on a forcément $n = 9$. Récirproquement, comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4, 9, 3)$ convient.

Supposons $k \geqslant 4$. Comme le plus petit diviseur strict de m vaut 3, m n'est pas divisible par 2, il est donc impair. On a donc forcément $d_3 + 1$ impair, donc d_3 est pair. Posons $d_3 = 2l$, comme $d_3 > d_2 = 2$, on a $l > 1$ donc $l \geqslant 2$. Si $l \geqslant 4$ alors l divise d_3 donc l divise m et $l \neq m$ car $2l$ divise m. En particulier comme $l < 2l$ est un diviseur de m cela contredit l'énoncé. On a donc forcément $l = 2$ donc $d_3 = 4$. On en déduit que $d_3 + 1 = 5$. Si $k = 4$ les diviseurs stricts de m étant 2 et 4, on a $m = 8$ et comme les diviseurs stricts de n sont 3 et 5 on a $n = 15$. Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8, 15, 4)$ vérifie l'énoncé.

Si $k \geqslant 5$, comme 3 et 5 divisent n, 15 divise n. Comme $k \geqslant 3$ on ne peut pas avoir $n = 15$ sinon n n'a que 2 diviseurs stricts. En particulier, 15 est un diviseur strict de n donc $15 - 1 = 14$ est un diviseur strict de m. En particulier, $7 + 1 = 8$ est un diviseur strict de n donc n est pair, on obtient une contradiction.

En particulier pour $k \geqslant 5$ il n'y a pas de solutions, les seules solutions sont donc $(4, 9, 3)$ et $(8, 15, 4)$

Solution alternative n°1 De la même manière que dans la solution précédente, on obtient que $d_2 = 2$. Si m est divisible par un nombre impair l, celui-ci est un diviseur strict car m est divisible par 2 donc il est pair. En particulier $l + 1$ est pair et divise n, donc 2 divise n ce qui contredit le fait que $d_2 + 1$ est le plus petit diviseur de n. En particulier m est forcément une puissance de 2. Si $m \geqslant 16$, alors 8 et 4 sont des diviseurs stricts de m. Ainsi 9 et 5 divisent n, donc 45 divise n. En particulier 15 est un facteur strict de n donc $15 - 1 = 14$ est un facteur strict de m. Ainsi m est divisible par 7, cela contedit le fait que m est une puissance de 2.

Ainsi, m est une puissance de 2 vérifiant $m < 16$ et 2 est un facteur strict de m. On a donc $m = 4$ ou $m = 8$. Si $m = 4$, le seul diviseur strict de 4 est 2 donc le seul diviseur strict de n est 3 donc $n = 9$. Comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4, 9, 3)$ convient.

Si $m = 8$, m a pour diviseurs stricts 2 et 4, n a pour diviseurs stricts 3 et 5 donc $n = 15$.Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8, 15, 4)$ vérifie l'énoncé.

Les triplets solutions sont donc $(4, 9, 3)$ et $(8, 15, 4)$.

Commentaire des correcteurs Ce problème de théorie des nombres a été plutôt bien réussi, avec près d'un élève sur deux rendant une copie qui a obtenu 6 ou 7 points. Il y avait de très nombreuses solutions : même si la plupart des élèves résolvant le problème utilisent l'une des solutions du corrigé, certains en ont trouvé d'autres plus originales. Par exemple, certains ont remarqué que si $k \geqslant 5$, on a $d_2 d_{k-1} = d_3 d_{k-2} = m$ et $d'_2 d'_{k-1} = d'_3 d'_{k-2} = n$ puis que cela impliquait comme $d'_2 = d_2 + 1$ et $d'_3 = d_3 + 1$, que $d_2 + d_{k-1} = d_3 + d_{k-2}$ donc en particulier $d_2 = d_3$, ce qui fournissait la contradiction. D'autres ont très justement remarqué que si $k \geqslant 4$, on a $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, donc $d'_2 = 3$, $d'_3 = 5$, pour aboutir au système des deux équations $\frac{m}{2} + 1 = \frac{n}{3}$, et $\frac{m}{4} + 1 = \frac{n}{5}$ Nous attirons néanmoins l'attention des élèves sur les quelques points problématiques ou erreurs ci-dessous :

- Certains élèves ont des preuves quasi-complètes, mais oublient à la fin de vérifier si les triplets trouvés sont effectivement tous solutions, ce qui conduit parfois à l'obtention de quelques triplets supplémentaires. A contrario, d'autres oublient l'un des deux triplets solutions, en ne traitant pas ce qui se passe lorsque $k = 3$.

▷ Un grand nombre d'élèves ont des intuitions fondées (parfois même intuitent les deux seuls triplets solutions), mais ne justifient pas leurs affirmations. Nous rappelons que tout résultat énoncé dans les copies doit être au moins justifié par une phrase. Typiquement, même si l'explication de ce fait est très simple, seulement dire que n ne peut pas être pair n'est pas suffisant pour avoir les points correspondants. Écrire une copie lisible et précise permet non seulement au correcteur de savoir que vous avez compris, mais cela vous permet aussi de vérifier et d'être vous-même convaincus de vos affirmations.

▷ Les disjonctions de cas pouvaient être nombreuses dans certaines solutions du problème et manquaient parfois de rigueur. Certains élèves affirment qu'un entier qui a 4 diviseurs est nécessairement le cube d'un nombre premier, mais en réalité il peut aussi être un produit de deux nombres premiers distincts. D'autre part, certains donnent un argument valable pour obtenir une contradiction dès que $k \geqslant 7$ (l'argument qui consiste à dire que 33 diviserait n mais 11 n'est pas dans la liste de ses diviseurs). Dans ce cas, il faut bien veiller à traiter explicitement les cas $k = 6$ et $k = 5$ séparément.

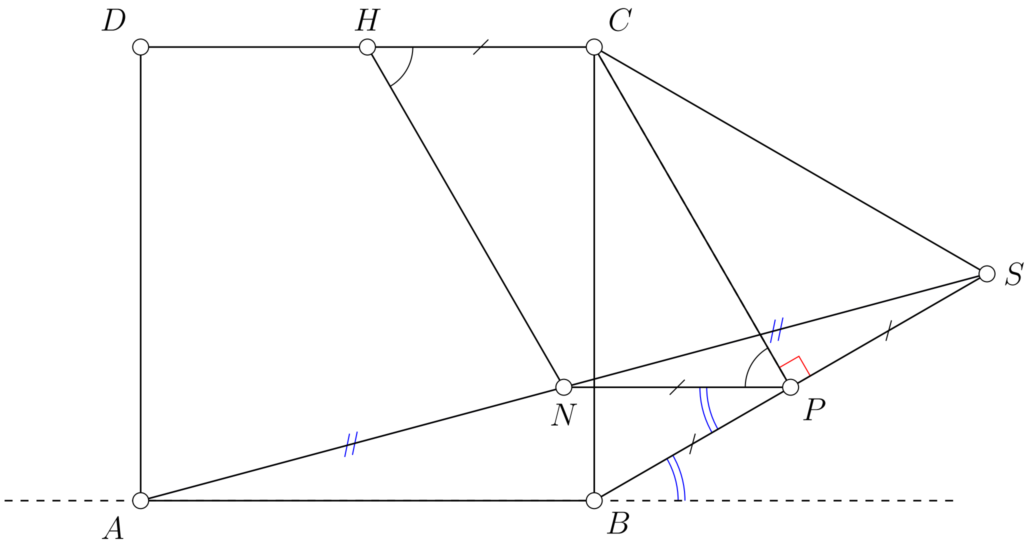
▷ Quelques remarques plus techniques. Effectivement l'énoncé implique que m ou n est impair. Mais on perd évidemment de la généralité en ne traitant que le cas où m est pair, puisque l'énoncé n'est pas symétrique en m et n. Par ailleurs, s'il est vrai que $d_2' = d_2 + 1$ et d_2 sont premiers et divisent respectivement n et m, il n'est pas correct de dire que si p premier divise m alors $p+1$ est aussi un nombre premier qui divise n. Enfin, la mauvaise utilisation des termes « multiples » et « diviseurs » rend certaines preuves confuses.

Exercice 15. Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'extérieur du carré $ABCD$ tel que le triangle BCS soit équilatéral. On note N le milieu du segment $[AS]$ et H le milieu du segment $[CD]$. Soit P le milieu du segment $[BS]$.

1) Calculer l'angle $\widehat{BPN}$.

2) Calculer l'angle $\widehat{NHC}$.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>



1) Puisque le point N est le milieu du segment $[AS]$ et que le point P est le milieu du segment $[BC]$, d'après le théorème de Thalès les droite (NP) et (AB) sont parallèles. On déduit que $\widehat{NPS} = \widehat{ABS}$. Puisque le quadrilatère $ABCD$ est un carré, $\widehat{ABC} = 90°$. Puisque le triangle SBC est équilatéral, $\widehat{SBC} = 60°$. Ainsi, $\widehat{ABS} = 90° + 60° = 150°$.
On déduit que

$$\widehat{BPN} = 180° - \widehat{NPS} = 180° - \widehat{ABS} = 180° - 150° = 30°$$

2) On utilise à nouveau le fait que les droites (NP) et (AB) sont parallèles. Puisque les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, les droites (NP) et (CD) sont également parallèles. De plus, d'après le théorème de Thalès, $NP = \frac{1}{2}AB$ et puisque le quadrilatère $ABCD$ est un carré, $AB = CD$. Ainsi, $NP = \frac{1}{2}CD = HC$ puisque le point H est le milieu du segment $[CD]$.
Le quadrilatère $HCPN$ à deux côtés opposés égaux et parallèles, il s'agit donc d'un parallélogramme. Ses angles opposés sont égaux, on a donc que $\widehat{NHC} = \widehat{NPC}$.
Puisque le point P est le milieu du segment $[BS]$ et que le triangle BCS est équilatéral, la droite (CP) est la hauteur issue du sommet C dans le triangle BCS. On a donc $\widehat{CPS} = 90°$. On a établi à la question précédente que $\widehat{NPS} = 150°$. Ainsi, $\widehat{NPC} = \widehat{NPS} - \widehat{CPS} = 150° - 90° = 60°$
On a donc $\widehat{NHC} = 60°$.

Commentaire des correcteurs Le problème était composé de deux questions. La première question a été résolue par une large majorité d'élèves. La deuxième question, plus difficile, a tout de même été résolue entièrement par un nombre significatif d'élèves. Plusieurs approches étaient possibles. La plus élégante consistait à utiliser des résultats de géométrie élémentaire tels que le théorème de Thalès et d'identifier le quadrilatère $CPNH$ comme un parallélogramme. Plusieurs élèves ont tenté, avec un succès variable, une approche analytique. Cela a parfois amené à des réponses impliquant des cosinus ou des tangentes. De tels résultats, souvent facilement simplifiable, ne pouvaient pas rapporter la totalité des points. Enfin, quelques élèves ont malheureusement mal lu l'énoncé et ont mal placé le point S. Si la suite de leur raisonnement était souvent correcte par rapport à leur figure, ils ne pouvaient pas pour autant obtenir tous les points de l'exercice.

Exercice 16. La somme de certains entiers positifs (pas forcément distincts) inférieurs ou égaux à 10 vaut S. Trouver toutes les valeurs de S telles que, quels que soient ces entiers, ils peuvent **toujours** être partitionnés en deux groupes, chacun de somme inférieure ou égale à 70.

Solution de l'exercice 16

Notons déjà que s'il est possible de partitionner les entiers en deux groupes, chacun de somme au plus 70, la somme totale vaut au plus 140 : on a donc forcément $S \leqslant 140$. On peut ensuite essayer de tester quelques cas avec $S \leqslant 140$ et essayer de voir s'il est possible ou non de les partitionner en deux groupes. A priori les cas contraignants semblent être ceux avec des grands nombres : si les entiers valent tous 10 et qu'on en prend 14, on peut les diviser en deux groupes de 7, dont la somme vaudra 70, on ne gagne donc pas d'information. Par contre si on ne prend que des 9 et qu'on en prend 15, on a $S = 15 \times 9 = 135$. Si on sépare ces entiers en deux groupes, alors on aura forcément un groupe contenant 8 fois le nombre 9, donc de somme valant au moins 72. En particulier, on en déduit que $S = 135$ ne vérifie pas l'énoncé. De plus en rajoutant de 1 à 4 fois le nombre 1, on obtient les sommes entre 136 et 139 et l'argument précédent reste valable, donc ces valeurs ne conviennent pas non plus.

En fait, en considérant 14 fois le nombre 9 et 1 fois le nombre 8, la somme vaut $9 \times 14 + 8 = 134$. Si on sépare ces entiers en deux groupes, alors on aura forcément un groupe contenant 8 nombres, donc de somme valant au moins $7 \times 9 + 8 = 71$. En particulier, on en déduit que $S = 134$ ne vérifie pas l'énoncé.

Montrons que pour tout ensemble d'entiers naturels inférieurs à 10 de somme totale inférieure à 133, on peut répartir ces entiers dans deux groupes de somme inférieure à 70.

Pour cela, on considère un ensemble d'entiers naturels inférieurs à 10 dont la somme est inférieure ou égale à 133. On répartit arbitrairement certains entiers dans le premier groupe, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus ajouter d'entier à ce premier groupe sans que la somme des éléments dépasse 70. Après cette première opération, on dispose de deux ensembles A et B partitionnant les entiers dont on dispose, de telle sorte que la somme des éléments de A ne dépasse pas 70 et pour tout entier a de B, la somme des éléments de A ajoutée à a dépasse 70. Autrement dit, si on note S_A la somme des éléments de A, alors $61 \leqslant S_A \leqslant 70$ et pour tout a de B, $S_A + a \geqslant 71$.

Notons que si $S_A \geqslant 63$, alors les éléments de B ont une somme inférieure à $133 - 63 = 70$ donc on a obtenu une partition des entiers en deux groupes de somme inférieure à 70. On se place donc dans le cas où $61 \leqslant S_A \leqslant 62$. Posons $d = 62 - S_A$. Cela signifie que tout élément de B est supérieur ou égal à $9 + d$. Si on dispose de moins de 7 entiers dans le groupe B, alors leur somme est inférieure à 70 donc on peut les répartir dans un groupe de somme inférieure à 70.

Si l'on dispose de plus de 7 entiers dans B, comme chaque entier de B vaut au moins $9+d$, la somme totale vaut

$$S = S_A + (S - S_A) \geqslant 62 - d + 8(9 + d) = 134 + 7d > 133$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On peut donc répartir les entiers en deux groupes de somme au plus 70.

Solution alternative n°1 On montre de même que si $S \geqslant 135$, S ne vérifie pas l'énoncé.

On a donc obtenu $S \leqslant 134$, mais il faudrait trouver une procédure efficace pour des S plus petits pour répartir les entiers en deux groupes distincts de somme au plus 70. Si $S \leqslant 70$ il est assez clair que S vérifie l'énoncé car il suffit de mettre tous les entiers dans le même groupe. Sinon on aimerait bien répartir les entiers deux groupes A et B et pour avoir deux sommes valant au plus 70, on aimerait que le groupe A ait la plus grande somme possible valant au plus 70.

Notons donc $x_1, \dots x_n$ les entiers de somme S, on prend $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que la somme des x_i pour i dans I vaut au plus 70, et elle est maximale c'est-à-dire qu'on ne peut trouver $I' \subset \{1, \dots, n\}$ tel que la somme des x_i pour i dans I' vaut au plus 70 et soit strictement plus grand que celle des x_i pour i dans I.Posons S' la somme des x_i pour i dans I. Si $S > 70$, on a forcément $S' \geqslant 61$. En effet supposons $S' \leqslant 60$, comme $S > S'$ il existe j dans $\{1, \dots, n\}$ privé de I tel que $x_j \geqslant 0$. Comme $x_j \leqslant 10$ on a $S' + x_j \leqslant 6 + 10 = 70$, cela contredit la maximalité de I. En particulier on a donc $S' \geqslant 61$.

Posons S'' la somme des x_i pour i n'appartenant pas à I, on a donc $S'' + S' = S$ sont $S \geqslant 61 + S''$. En particulier $S'' \leqslant S - 61$. Ceci prouve que si $S \leqslant 131$, alors $S'' \leqslant 70$ on peut donc bien répartir les entiers en deux groupes de sommes au plus 70.

Il reste donc trois cas à traiter $S = 132, 133, 134$. On peut essayer de voir si on peut affiner le raisonnement précédent.

Supposons $S = 132$. Si $S' \geqslant 62$, alors $S'' = S - S' \leqslant 70$ et les entiers peuvent bien être répartis en deux groupes de somme au plus 70. Comme on a prouvé $S' \geqslant 61$, il reste à voir ce qu'il se passe si $S' = 61$. Dans ce cas intéressons nous aux x_j pour j pas dans I. Si $x_j \leqslant 9$, alors $S' + x_j \leqslant 70$ ce qui contredit la maximalité de S. En particulier tous les x_j restants valent 10. Il existe donc un entier positif k tel que $S'' = 10k$, on a donc $S = 61 + 10k$ donc $10k = 71$ ce qui est impossible car $10k$ est pair mais pas 71. En particulier $S = 132$ vérifie l'énoncé.

Supposons $S = 133$ et essayons d'adapter l'argument précédent. Si $S' \geqslant 63$, alors $S'' = S - S' \leqslant 70$ et les entiers peuvent bien être répartis en deux groupes de somme au plus 70. Comme on a prouvé $S' \geqslant 61$, il reste à voir ce qu'il se passe si $S' = 62$ ou 61. Dans ce cas intéressons nous aux x_j pour j pas dans I. Si $x_j \leqslant 8$, alors $S' + x_j \leqslant 70$ ce qui contredit la maximalité de S. En particulier tous les x_j restants valent 9 ou 10. De plus $S'' = S - S'$ vaut 71 ou 72. Or il existe k, l des entiers positifs tels que $9k + 10l = S''$. On a forcément $S'' < 80$ donc $l < 8$. En testant les différentes valeurs de l possibles, c'est-à-dire $1, \dots, 7$, on obtient que forcément $S'' = 72$, $l = 0$ et $k = 8$. Or comme il y a au moins 7 fois le nombre neuf et que $7 \times 9 = 63 > S'$ on a une contradiction. En particulier $S = 133$ vérifie l'énoncé.

Maintenant on peut essayer de faire de même avec 134. Si $S' \geqslant 64$, alors $S'' = S - S' \leqslant 70$ et les entiers peuvent bien être répartis en deux groupes de somme au plus 70. Comme on a prouvé $S' \geqslant 61$, il reste à voir ce qu'il se passe si $S' = 62$ ou 61 ou 63. Dans ce cas intéressons nous aux x_j pour j pas dans I. Si $x_j \leqslant 7$, alors $S' + x_j \leqslant 70$ ce qui contredit la maximalité de S. En particulier tous les x_j restants valent 8 9 ou 10. On a de même que précédemment forcément $S'' = 71, 72, 73$ et $S'' = 8k + 9l + 10m$ pour k, l, m des entiers positifs. On cherche donc les valeurs de k, l, m convenables. Après quelques calculs on peut remarquer que $l = 7, k = 1$ convient, dans ce cas $S'' = 73$ donc $S' = S - S'' = 63$. Comme $7 \times 9 = 63$, on peut donc regarder le cas où on a $7 + 7 = 14$ fois le nombre 9 et une fois le 8. Dans ce cas on a bien $S = 14 \times 9 + 8 = 134$. Supposons qu'on peut répartir ces éléments en deux groupes de sommes au plus 70 : dans ce cas on aura forcément 8 éléments parmi les 15 dans le même groupe, donc la somme de ses éléments vaudra au moins $9 \times 7 + 8 = 71$ contradiction. En particulier 134 ne convient pas.

Les valeurs de S vérifiant l'énoncé sont donc les entiers positifs inférieurs ou égaux à 133.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Le problème était vraiment difficile et peu sont ceux qui ont obtenus de réelles avancées. Certains ont constaté qu'il fallait $S \leqslant 140$ et que si $S \geqslant 70$ ou $S \leqslant 80$, S vérifiait l'énoncé. Même si cela ne valait pas de points, cela permettait de commencer à voir les cas un peu plus complexes se dessiner. Par contre en aucun cas cela permettait d'affirmer que tous les S inférieurs ou égaux à 140 conviennent. Certains ont affirmé sans justification qu'on ne pouvait pas répartir 14 fois 9 et une fois 8 en deux groupes de somme au plus 70 : certes c'est vrai, mais comme tout énoncé mathématique cela mérite une preuve! Il n'est pas suffisant de dire que la répartition "optimale" consiste à mettre sept 9 d'un côté et le reste de l'autre : il faut le prouver. Attention aussi à l'énoncé : certains ont mal compris l'énoncé et ont cherché les valeurs de S pour lesquels il existe des nombres de somme S qu'on peut répartir en deux ensembles de somme au plus 70. D'autres ont cru qu'il fallait que ce soit le cas pour toute partition en deux et les énoncés devenaient beaucoup plus faciles et très différents de l'énoncé initial. Nous recommandons de bien lire et comprendre l'énoncé avant de se lancer tête baissée dans le problème.

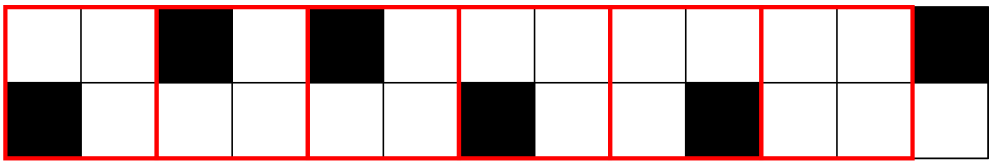
Exercice 17. Soit $k > 1$ un entier positif. Déterminer le plus petit entier n pour lequel on peut colorier certaines cases d'un tableau $n \times n$ en noir de telle sorte que deux cases noires n'aient pas de côté ou de sommet en commun et chaque ligne et chaque colonne possède exactement k cases noires.

Solution de l'exercice 17 Dans ce problème, on cherche le plus petit entier n satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c'est bien le plus petit entier, on doit d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \geqslant c$ et on doit montrer d'autre part que l'on peut trouver un tableau $n \times n$ satisfaisant la propriété de l'énoncé.

Commençons par déterminer la valeur minimale que peut prendre l'entier n. Soit donc n un entier vérifiant la propriété de l'énoncé.

Considérons un carré quelconque de taille 2×2 à l'intérieur du tableau. Si un tel carré contenait 2 cases noires, ces deux cases auraient un côté ou un sommet en commun, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi, un quelconque carré de taille 2×2 contenu dans le tableau $n \times n$ ne peut contenir au plus qu'une case noire.

Regardons maintenant 2 lignes consécutives du tableau. On découpe ces deux lignes en carrés de tailles 2×2 en partant de la gauche (la colonne située à l'extrémité droite peut éventuellement n'appartenir à aucun carré 2×2 si n est un entier impair). Chaque carré contient au plus une case noire, et la rangée constituée de deux lignes consécutives doit contenir exactement $2k$ cases noires car chaque ligne contient exactement k cases noires. La colonne située à l'extrémité droite contient au plus 1 case noire, ce qui signifie qu'il y a au moins $2k - 1$ cases noires réparties dans les carrés de taille 2×2. Il y a donc au moins $2k - 1$ tels carrés de taille 2×2. Ainsi, la longueur n des deux lignes vérifie $n \geqslant 2(2k - 1) + 1 = 4k - 1$.

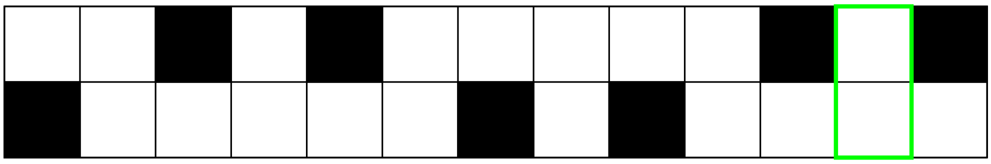


Nous avons démontré que n était forcément supérieur à un certaine expression dépendant de k. On est alors tenté de penser qu'il s'agit là de la valeur optimale et pour le montrer, on entreprend de construire un tableau $(4k - 1) \times (4k - 1)$ satisfaisant la propriété. Pour trouver un tel tableau dans le cas général, on commence d'abord par trouver un tableau fonctionnel pour les petites valeurs de k. Par exemple, on essaye de trouver un tableau 7×7 vérifiant la propriété pour $k = 2$. Après plusieurs essais, on s'aperçoit qu'un tel tableau n'existe pas, signifiant que $4k - 1$ n'est pas la valeur optimale désirée.

On entreprend désormais de démontrer qu'un entier n vérifiant la propriété vérifie $n \geqslant 4k$. Pour cela, il nous suffit de démontrer que n ne peut valoir $4k - 1$.

Supposons par l'absurde qu'il soit possible de colorier certaines cases d'un tableau de taille $(4k - 1) \times (4k - 1)$ de telle sorte que chaque ligne et chaque colonne possède exactement k cases noires.

On a vu dans le raisonnement précédent que pour deux lignes consécutives, il y avait au plus $2k - 1$ cases noires contenues dans les $4k - 2$ première colonnes (les colonnes les plus à gauche). Donc la dernière colonne contient forcément exactement une case noire. Cela signifie que les deux cases de la deuxième colonne en partant de la droite sont toutes les deux blanches. Comme ce raisonnement est valable pour n'importe quelles deux lignes consécutives, cela signifie que la deuxième colonne en partant de la droite ne contient aucune case noire, ce qui est contraire à l'hypothèse.



On a donc montré que n ne pouvait valoir $4k-1$. Ainsi, $n \geqslant 4k$.

Réciproquement, on peut bien construire un tableau $4k \times 4k$ satisfaisant la propriété de l'énoncé. Pour trouver une telle construction, on essaye bien sûr de trouver une construction pour des petites valeurs de k. Voici un construction dans le cas général : on découpe le tableau $4k \times 4k$ en 4 carrés de côté $2k \times 2k$. Le carré $2k \times 2k$ du coin supérieur gauche est appelé SG, le carré $2k \times 2k$ du coin inférieur gauche est appelé SD, le carré $2k \times 2k$ du coin supérieur droit est appelé IG et le carré $2k \times 2k$ du coin inférieur droit est appelé ID.

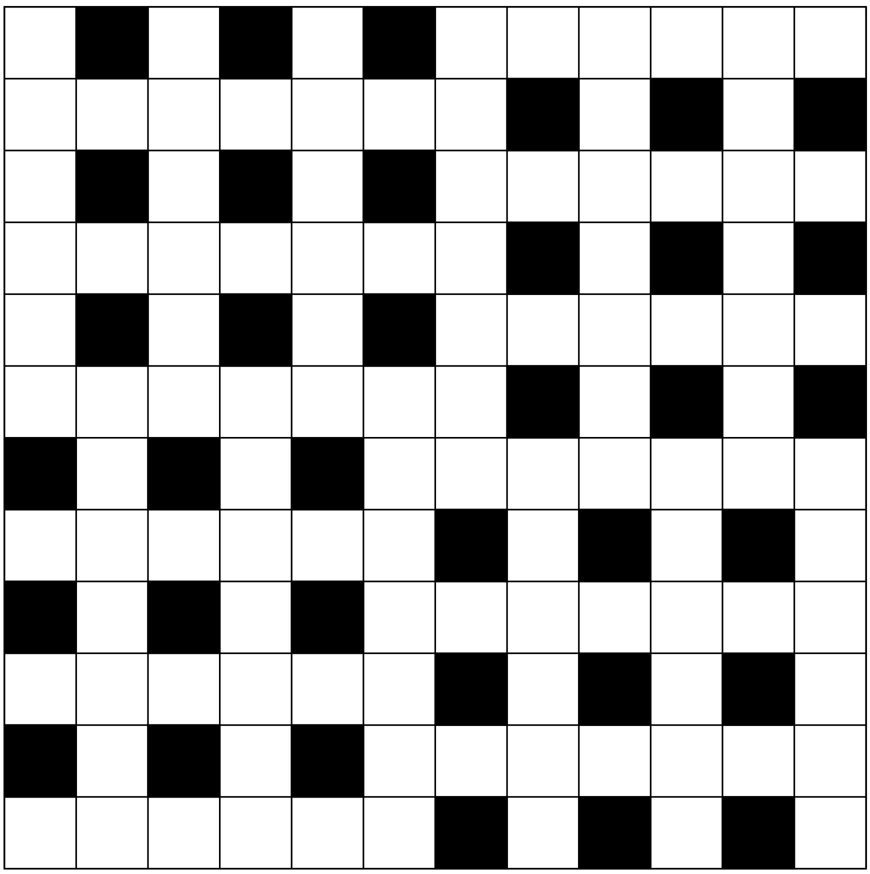
On quadrille le carré SG avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin supérieur droit.

On quadrille le carré SD avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin inférieur droit.

On quadrille le carré IG avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin supérieur gauche.

On quadrille le carré ID avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin inférieur gauche.

On a représenté ici un configuration vérifiant la propriété pour $k=3$.



Commentaire des correcteurs Ce problème était très difficile et très peu d'élèves ont réussi à trouver des résultats significatifs. Certains ont trouvé une construction pour $n = 5k$, mais rarement pour $n = 4k$. Une majorité d'élèves n'ont pas compris l'énoncé du problème, et croyaient qu'il fallait trouver une construction avec n minimal tel qu'il existe $k > 1$ pour que la construction fonctionne. Cependant, la plupart de ces élèves n'ont pas réussi à trouver la construction avec $n = 8$ et $k = 2$.