STAGE OLYMPIQUE DE VALBONNE 2020

Animath
Association pour l'animation mathématique

Ministère de l'Éducation nationale

cnrs

Inria

École Polytechnique
Université Paris-Saclay

Texas Instruments

Fondation Blaise Pascal

Crédit Mutuel Enseignant

CASIO

Fondation Solidarité Société Générale

Avant-propos

Le stage olympique de Valbonne 2020 a été organisé par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler 80 collégiennes, collégiens,
lycéennes et lycéens de la quatrième à la terminale,
de 12 à 17 ans, passionnés de mathématiques
sélectionnés parmi les près de 700 candidats à la Coupe Animath,
dont certains représenteront la France aux compétitions internationales :
Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO),
Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques (JBMO),
Olympiades Européennes de Filles de Mathématiques (EGMO),
Romanian Masters of Mathematics (RMM),
Mediterranean Youth Mathematical Championship (MYMC),
Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM).

Environ la moitié des stagiaires ont pu découvrir la beauté des mathématiques olympiques,
tandis que l'autre moitié, ayant déjà une petite expérience dans ce domaine,
a pu approfondir ses connaissances.
Toute l'équipe représentant la France pour les IMO de cette année était présente,
et a bénéficié d'une préparation particulière dans l'inédit groupe E...

Nous tenons à remercier le Centre International de Valbonne pour son excellent accueil.

Les animatheurs


Omid Amini


Émile Avérous


Mathieu Barré


Paul Boureau


Matthieu Bouyer


Félix Breton

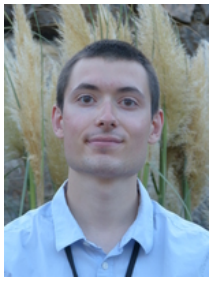

Aline Cahuzac


Yohann D'anello


Colin Davalo


Antoine Derimay


Raphael Ducatez


Pierre-Marie Esmenjaud


Cécile Gachet


Olivier Garçonnet

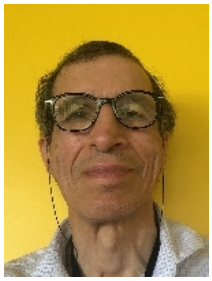

Ilyes Hamdi


Tristan Humbert


Vincent Jugé


Théo Lenoir


Rémi Lesbats


François Lo Jacomo


Pooran Memari


Matthieu Piquerez


Martin Rakovsky


Jean Rax


Alexander Semenov


Baptiste Serraille


Victor Vermès


Auguste de Lambilly

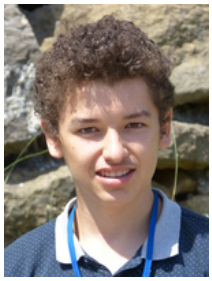
Les élèves


Sacha Arrouès-Paykin


Paul Averous


Samuel Avril


Serge Bidallier


Maher Billon


Antoine Bourion


Charlotte Bourny


Anatole Bouton

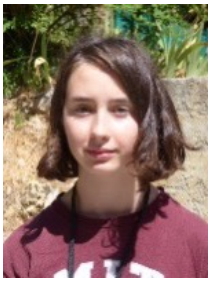

Elias Caeiro


Justin Cahuzac


Maxence Camus


Luka Ciric


François Combal


Claire Comiti


Gaëtan Dautzenberg


Adrien Déprés


Erik Desurmont


Yaël Dillies


Emilhan Dürrüoglu


Corentin Eggenspieler


Daniel Escartin Bustan


Mano Etilé


Hannah Faucheu


Mathilde Fiebig


Claire Fonteniaud


Aurélien Fourré


Natacha Francisco


Antoine Goix


Paul Graczyk


Patrick Gutsche


Zinedine Hamimed

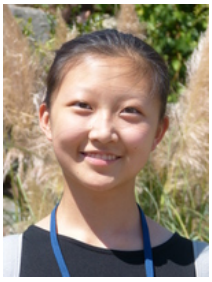

Aurélien Haumant


Axel Hovasse


Alexandre Ittah


Vladimir Ivanov


Loqman Jaouani


Ziyao Jiao


Maryam Kouhkan


Mithil Krishnan


Zoé Lassale—Deruelle


Mady Lecadet


Lise Lemoine


Enya Leroy


Paul Levy


Emma Lin


Anna Luchnikova


Brieux Madeline-Derou


Gaspard Malhomme


David Maris


Silvia Maris


Antoine Maugras


Alexis Miller


Stanislas Mischler


Mateo Muñoz


Pénélope Nazaret


Romeo Nazaret


Ten Nguyen


Ukyo Nguyen


Lucas Nistor

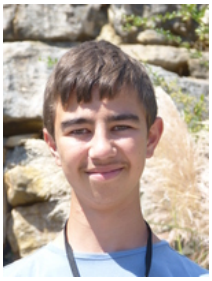

Simon Poirson


Alex-Pauline Poudade


François Quartier-dit-Maire


Auguste Ramondou


Paul Ruggeri


Victor Scuturici


Pierre-Andréa Silvente

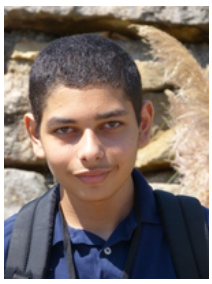

Inès Soua


Nell Souami


Georges Teze


Elliot Thorel


Clementina Tierno


Sami Trabelsi

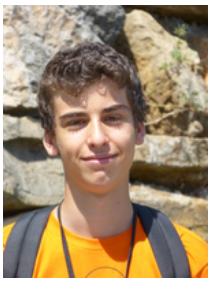

Amélie Triqueneaux


Hermance Vannier


Elie Verhille


Julien Verse


Camille Viénot


Matthieu Vogel


Ida Wolff


Elisa Zheng

Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour la septième fois, le Centre International de Valbonne (CIV) nous a accueilli du lundi 17 août vers 15 h au jeudi 27 août vers 11 h, avec un effectif final de 80 stagiaires et 28 animatheurs.

Parmi les presque 700 candidats à la Coupe Animath, un peu moins de 500 ont franchi le cap des éliminatoires en ligne. Sur la base des résultats de la Coupe, nous devions accueillir 80 stagiaires, dont environ 40 de fin de première, 20 de seconde, 10 de troisième et 10 de quatrième. En prévision des EGMO, Olympiades Européennes Féminines de Mathématiques, et de la JBMO, Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques, des bonifications ont été ajoutées pour favoriser les filles et les plus jeunes.

Le stage était structuré comme ceux des années précédentes : deux périodes de quatre jours (18 - 21 août et 22 - 26 août), trois de cours / exercices, un entraînement de type olympique le matin du quatrième jour (de 9h à 12h, ou, pour le groupe D, de 8h à 12h) et une après-midi récréative. Les élèves étaient répartis en 5 groupes A, B, C, D et E en fonction de leur expérience en mathématiques olympiques. Le programme est construit suivant ce qui est demandé lors des compétitions internationales : Arithmétique, Algèbre, Combinatoire et Géométrie.

En plus des cours étaient prévues, le soir, des conférences à vocation culturelle, permettant de découvrir de nouveaux pans des mathématiques. Merci à Pooran Memari pour son exposé sur les triangulations et leur utilisation dans la vie courante ; Colin Davalo pour sa présentation des jeux combinatoires (et avoir appris aux élèves à gagner à tous les coups au jeu de Nim !) ; Phong Nguyen pour son colloque sur l'utilisation de la théorie des nombres dans la vie courante et à Victor Vermès pour sa (très actuelle) conférence sur la propagation d'une épidémie.

L'après-midi suivant le premier entraînement fut organisée un grand jeu par une petite équipe chapeautée par Matthieu Piquerez.

Il est possible de retrouver les comptes rendus du stage au jour le jour sur le site de la POFM : https://maths-olympiques.fr/?p=5193

Voici quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :

— le site d'Animath : animath.fr ;
— le site de la POFM : maths-olympiques.fr et notamment
— les archives de problèmes (polycopiés etc. . .) : maths-olympiques.fr/?page_id=41 ;
— le site *Mathlinks* : mathlinks.ro ;
— le site *Art of Problem Solving* : artofproblemsolving.com.

II. Coupe Animath de printemps 2020

Le 6 juin avait lieu la coupe Animath de printemps, dans une version toute particulière puisqu'il s'agissait d'une édition à la maison ! Parmi les près de 700 candidats, 6 élèves se sont distingués en particulier, puisqu'ils ont fini en première position pour leur catégorie d'âge. Les lauréats de la coupe Animath de printemps de 2020 sont donc :

— Mohammed Ayoub MEBTOUL (parmi les élèves de première) ;
— Alec LE HELLOCO (parmi les élèves de seconde) ;
— Inès SOUA (parmi les élèves de troisième) ;
— Serge BIDALLIER et Oscar FISCHLER (parmi les élèves de quatrième) ;
— David MARIS (parmi les élèves de cinquième).

– Énoncés destinés aux élèves de collège –

Exercice 1
Donner la valeur de $0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots - 49 + 50$.
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2
On dispose d'un jeu contenant 52 cartes. Chaque carte comporte une *valeur* parmi « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi » ainsi qu'une *couleur* parmi « cœur, carreau, pique, trèfle », de telle sorte que, pour chaque valeur et chaque couleur, le jeu contient une unique carte comportant cette valeur *et* ayant cette couleur. Une *main de* 5 *cartes* est un choix de 5 cartes de ce jeu, sans se soucier de l'ordre dans lequel on choisit les cartes. Combien existe-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent quatre cartes ayant la même valeur ?
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 3
Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D. On suppose que $BD = DA$. Déterminer les angles du triangle.

Exercice 4
Un nombre apparait sur un écran d'ordinateur. On sait que si x apparait sur l'écran, le nombre $x^2 - 2x + 1$ apparaît juste après. Si le premier nombre à apparaitre est 2, quel est le 2020-ème nombre à apparaître ?

Exercice 5
Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. Soit D le pied de la hauteur issue du

sommet A. Soit E le symétrique du point D par rapport à la droite (AC). La perpendiculaire à la droite (AE) passant par B coupe la droite (AC) en un point noté F. Démontrer que le triangle FBC est isocèle en B.

Exercice 6

1) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 8 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 8 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 8$ en utilisant k couleurs.
2) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 31$ en utilisant k couleurs.

Exercice 7

Le jeu de *mathinal* est un jeu qui se joue à n joueurs (avec $n \geqslant 2$), n cartes vertes et n cartes rouges. Initialement, chaque joueur prend une carte verte et une carte rouge, et écrit un entier sur chacune de ces deux cartes (il a le droit d'écrire le même entier sur les deux cartes). Puis chaque joueur calcule la somme des numéros de ses deux cartes, et on note M la plus grande somme parmi les sommes des n joueurs.

Ensuite, les joueurs redistribuent les cartes rouges comme suit : le joueur possédant la carte verte de plus petit numéro reçoit la carte rouge de plus grand numéro, puis le joueur possédant la carte verte de deuxième plus petit numéro reçoit la carte rouge de deuxième plus grand numéro, et ainsi de suite. Chaque joueur calcule alors de nouveau la somme des numéros de ses deux cartes, et on note M' la plus grande somme parmi les sommes des n joueurs.

1) Est-il possible d'avoir $M' < M$?
2) Est-il possible d'avoir $M' > M$?

Exercice 8

Déterminer les entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 3$ ayant la propriété suivante : m et n ont chacun k diviseurs positifs et, si l'on note $d_1 < \ldots < d_k$ les diviseurs positifs de m (avec $d_1 = 1$ et $d_k = m$) et $d'_1 < \ldots < d'_k$ les diviseurs positifs de n (avec $d'_1 = 1$ et $d'_k = n$), alors $d'_i = d_i + 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant k - 1$.

– Énoncés destinés aux élèves de lycée –

Exercice 9

On dispose d'un jeu contenant 52 cartes. Chaque carte comporte une *valeur* parmi « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi » ainsi qu'une *couleur* parmi « cœur, carreau, pique, trèfle », de telle sorte que, pour chaque valeur et chaque couleur, le jeu contient une unique carte comportant cette valeur *et* ayant cette couleur. Une *main de* 5 *cartes* est un choix de 5 cartes de ce jeu, sans se soucier de l'ordre dans lequel on choisit les cartes. Combien existe-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent quatre cartes ayant la même valeur ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 10
Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D. On suppose que $BD = DA$. Déterminer les angles du triangle ABC.

Exercice 11

1) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 8 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 8 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 8$ en utilisant k couleurs.
2) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 31$ en utilisant k couleurs.

Exercice 12
Soit $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ deux listes de réels telles que $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$. On pose alors $P = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - y_i)$ et $G = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$. Démontrer que $P \leqslant G \leqslant 2P$.

Étant donnés des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, le nombre $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ désigne le plus petit réel parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Le nombre $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ désigne le plus grand réel parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Exercice 13
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on nomme $s(n)$ la somme des chiffres de n. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $n \leqslant 2s(n)$.

Exercice 14
Déterminer les entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 3$ ayant la propriété suivante : m et n ont chacun k diviseurs positifs et, si l'on note $d_1 < \ldots < d_k$ les diviseurs positifs de m (avec $d_1 = 1$ et $d_k = m$) et $d'_1 < \ldots < d'_k$ les diviseurs positifs de n (avec $d'_1 = 1$ et $d'_k = n$), alors $d'_i = d_i + 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant k - 1$.

Exercice 15
Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'extérieur du carré $ABCD$ tel que le triangle BCS soit équilatéral. On note N le milieu du segment $[AS]$ et H le milieu du segment $[CD]$. Soit P le milieu du segment $[BS]$.

1) Calculer l'angle $\widehat{BPN}$.
2) Calculer l'angle $\widehat{NHC}$.

Exercice 16
La somme de certains entiers positifs (pas forcément distincts) inférieurs ou égaux à 10 vaut S. Trouver toutes les valeurs de S telles que, quels que soient ces entiers, ils peuvent **toujours** être partitionnés en deux groupes, chacun de somme inférieure ou égale à 70.

Exercice 17
Soit $k > 1$ un entier positif. Déterminer le plus petit entier n pour lequel on peut colorier certaines cases d'un tableau $n \times n$ en noir de telle sorte que deux cases noires n'aient pas de côté ou de sommet en commun et chaque ligne et chaque colonne possède exactement k cases noires.

– Solutions –

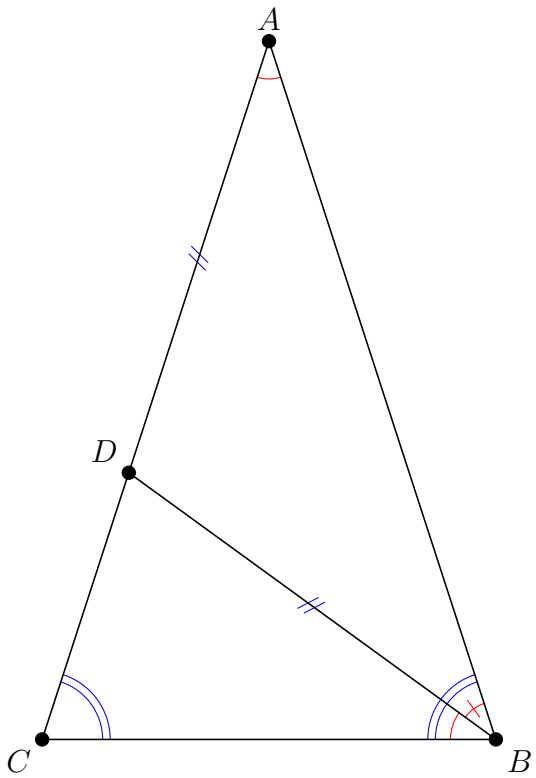
Solution de l'exercice 1
On regroupe les termes deux par deux :

$$0 + (-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + \ldots + (-49 + 50)$$

Chaque soustraction à l'intérieur d'une parenthèse vaut 1 et il y a $\frac{50}{2} = 25$ telles parenthèses. Ainsi, la somme vaut 25.

Commentaire : La très grande majorité des élèves a trouvé la bonne réponse, souvent en ne donnant que le résultat.
Solution de l'exercice 2
Pour choisir un main de 5 cartes dont 4 cartes ont la même valeur, il faut d'abord choisir la valeur en question. Il y a pour cela 13 choix puisqu'il y a 13 valeur. Il y a alors 48 choix pour la cinquième carte. On a donc en tout $13 \times 48 = 624$ mains possibles.

Commentaire : L'exercice a été très bien traité dans l'ensemble. Quelques fautes récurrentes sont à noter cependant. Plusieurs élèves ont oublié de prendre en compte le choix de la couleur de la cinquième carte. D'autres se sont malheureusement trompés lors du décompte des valeurs présentes dans le jeu.
Solution de l'exercice 3



Appelons $\alpha = \widehat{ABD}$. Examinons les différents angles de la figure et essayons de la exprimer en fonction de α. Puisque la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$, on sait que

$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ et donc $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque $DB = DA$, le triangle ADB est isocèle au point D, ce qui se traduit par le fait que $\widehat{BAD} = \widehat{ABD}$ donc $\widehat{BAC} = \widehat{DAB} = \alpha$. Enfin, le triangle ABC est isocèle au point A, ce qui signifie que $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque la somme des angles dans le triangle ABC vaut $180°$, on trouve

$$180° = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 5\alpha$$

Ainsi, $\alpha = \frac{180°}{5} = 36°$. Cela signifie que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$ et $\widehat{BAC} = 36°$.

Commentaire : L'exercice a été dans l'ensemble bien résolu, avec des preuves et des rédactions particulièrement efficaces et soignées. Attention à ne pas confondre les différentes droites remarquables dans le triangle. On rappelle que la bissectrice d'un angle est la droite qui coupe cet angle en deux angles adjacents et de même mesure. Il ne faut pas la confondre avec la hauteur. La hauteur issue du sommet A est la droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point A. La médiane est la droite qui relie le milieu d'un côté au sommet opposé. Dans un triangle isocèle en A, seule la bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe le côté opposé perpendiculairement en son milieu. Ces confusions ont été la source de quelques erreurs.

Solution de l'exercice 4

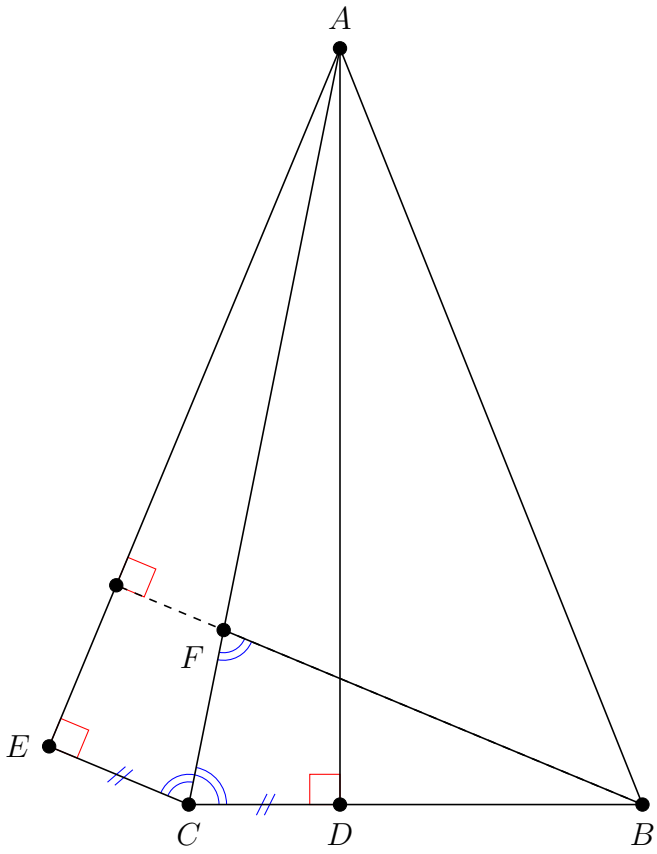
Commençons par regarder les premières valeurs affichées par l'ordinateur :

- Le premier nombre est 2.
- Le second nombre est $2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$
- Le troisième nombre est $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$
- Le quatrième nombre est $0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$
- Le cinquième nombre est $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$
- Le sixième nombre est $0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$
- Le septième nombre est $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

On voit que les nombres qui apparaissent sont dans l'ordre $2, 1, 0, 1, 0, 1, 0$. Comme après un 0 il y a forcément $0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$ et après un 1 il y a forcément $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, on va avoir une alternance de 0 et de 1. Comme 1 apparait en deuxième, tout les nombres apparaissant à un rang pair seront des 1 donc le 2020-ième nombre vaut 1.

Commentaire : Nous félicitons les élèves qui ont largement réussi cet exercice. Les quelques erreurs observées sont principalement des erreurs de calcul ou de décalage du rang des nombres affichés. Par exemple, certains élèves ont considéré que le rang du premier nombre à apparaître sur l'écran était le rang 0 alors qu'il s'agit du rang 1. Afin d'éviter de faire cette faute, certains élèves ont utilisé un tableau, ce qui a été grandement apprécié. Nous invitons les élèves à être vigilant sur ce genre d'erreur qui a parfois causé beaucoup de dégâts, et à ne pas passer trop vite sur les exercices, toujours en vérifiant le raisonnement utilisé.

Solution de l'exercice 5



Pour montrer que le triangle FBC est isocèle au point B, nous allons montrer que $\widehat{CFB} = \widehat{FCB}$

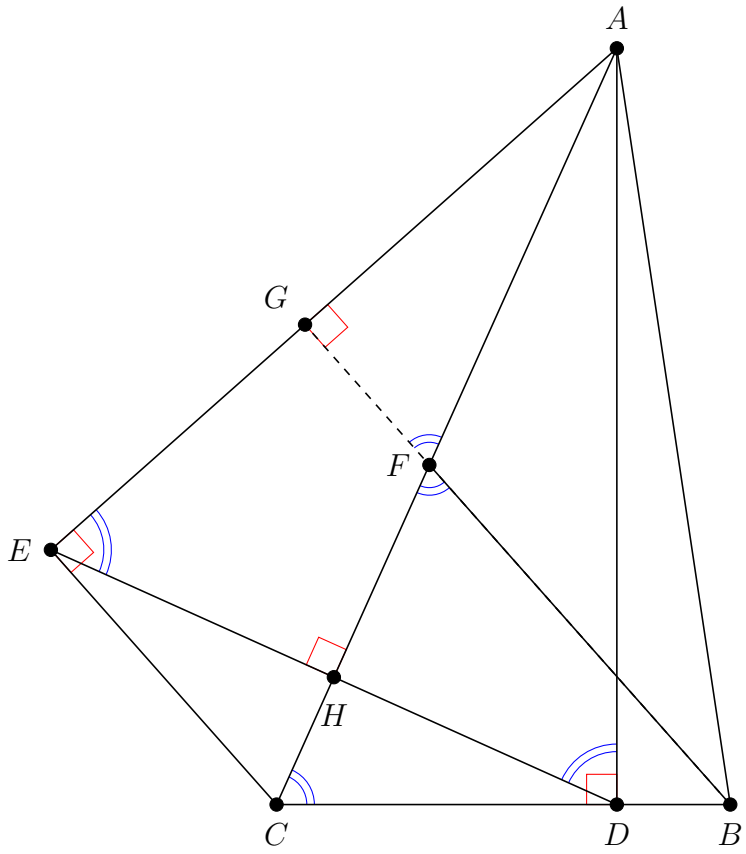
Le fait que le point E soit la symétrique du point D par rapport à la droite (AC) signifie que $\widehat{CEA} = 90°$ et que les droites (CE) et (AE) sont perpendiculaire. Or, la droite (BF) est également perpendiculaire à la droite (AE). Les droites (BF) et (CE) sont perpendiculaire à une même droite, elles sont donc parallèles.

Les angles $\widehat{CFB}$ et $\widehat{ECA}$ sont alternes-internes par rapport aux droites (EC) et (FB) donc ils sont égaux. Par ailleurs, puisque la symétrie axiale conserve les angles, $\widehat{DCA} = \widehat{ECA}$. Finalement :

$$\widehat{CFB} = \widehat{ECF} = \widehat{ECA} = \widehat{ACD} = \widehat{FCD} = \widehat{FCB}$$

donc le triangle FCB est bien isocèle au point B.

Solution alternative :



Comme dans la solution précédente, on va chercher à montrer que $\widehat{CFB} = \widehat{FCB}$. Pour cela on introduit H le point d'intersection des droites (DE) et (AC) et G le point d'intersection des droites (AE) et (BF). Puique'ils sont opposés par le sommet, les angles $\widehat{CFB}$ et $\widehat{AFG}$ sont égaux. Puisque la somme des angles du triangle AGF vaut $180°$ et que les droite (AE) et (BG) sont perpendiculaires, on a :

$$\widehat{CFB} = 180° - \widehat{AGF} - \widehat{GAF} = 180° - 90° - \widehat{EAH} = 90° - \widehat{GAF}$$

Les points D et E sont symétriques par rapoort à la droite (AH) donc les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires. Ainsi, $\widehat{EHA} = 90°$. Puisque la somme des angles dans le triangle AEH vaut $180°$, on a

$$\widehat{HEA} = 180° - \widehat{EHA} - \widehat{EAH} = 180° - 90° - \widehat{EAH} = 90° - \widehat{EAH}$$

Ainsi :

$$\widehat{CFB} = 90° - \widehat{GAF} = 90° - \widehat{EAH} = \widehat{HEA}$$

Puisque la symétrie axiale conserve les angles, $\widehat{HEA} = \widehat{HDA}$.

Concentrons-nous à présent sur les points A, D, C et H. Puisque les droites (AD) et (CD) sont perpendiculaires, $\widehat{HDA} = 90° - \widehat{CDH}$. Le triangle HCD est rectangle en H et la somme de ses angles fait $180°$. Ainsi :

$$\widehat{HCD} = 180° - \widehat{CHD} - \widehat{CDH} = 180° - 90° - \widehat{CDH} = 90° - \widehat{CDH}$$

En rassemblant toutes ces informations :

$$\widehat{CFB} = \widehat{HEA} = \widehat{HDA} = 90° - \widehat{CDH} = \widehat{HCD} = \widehat{FCB}$$

et on retrouve que le triangle FCB est isocèle au point B.

Commentaire : L'exercice a été bien réussi par les élèves qui l'ont traité. Certaines personnes ont trouvé des preuves remarquablement élégantes et rapides !

Solution de l'exercice 6

Dans ce problème, on cherche le plus petit entier k satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Il y aura alors deux parties dans la démonstration. D'une part il faut montrer que si un entier k satisfait la propriété, alors $k \geqslant c$, d'autre part il faut montrer que l'on peut effectivement trouver un coloriage des entiers avec c couleurs.

1) Tout d'abord, essayons de colorier les entiers au fur et à mesure de façon naïve :

— On colorie 2 de la première couleur

— On colorie 3 aussi de la première couleur (c'est possible car 2 ne divise pas 3).

— 4 est divisible par 2 donc on ne peut pas le colorier de la même couleur que 2, on le colorie donc d'une autre couleur (la deuxième couleur).

— On peut colorier 5 de la première couleur.

— 6 étant divisible par 2 et 3 on le colorie de la deuxième couleur.

— On peut colorier 7 de la première couleur.

— Par contre 8 est divisible par 2 et 4, il faut donc le colorier d'une troisième couleur.

On a donc obtenu un coloriage avec 3 couleurs des entiers de 2 à 8. Il faut maintenant vérifier qu'il faut forcément 3 couleurs dans un coloriage satisfaisant la propriété de l'énoncé. Dans la construction précédente, le problème était de colorier 8. En effet, 8 est un multiple de 4 et 2 et 4 est un multiple de 2. Ainsi 4 ne peut avoir la même couleur que 2 et 8 ne peut avoir la même couleur que 2 ou 4. Il faut donc au moins 3 couleurs différentes pour colorier $2, 4, 8$, donc le plus petit nombre de couleurs nécessaires est $k = 3$.

2) Ici inspirons nous de la première question. On a vu que $2, 4, 8$ étaient les nombres apportant une contrainte dans le coloriage. On remarque qu'il s'agit de puissances de 2. On peut donc conjecturer que les puissances de 2 jouent un rôle important dans le problème. Parmi les entiers de 2 à 32 il y a 5 puissances de 2 : $2, 4, 8$ et 16 Comme 2 divise $4, 8, 16$, 2 est forcément d'une couleur différente des 3 autres. Comme 4 divise $8, 16$, 4 est forcément d'une couleur différente des 2 autres. De même comme 8 divise 16 donc $2, 4, 8, 16$ ont forcément des couleurs différentes deux à deux. Il faut donc au moins 4 couleurs différentes.

Réciproquement, on cherche un coloriage des entiers de 2 à 32 utilisant exactement 4 couleurs. On peut en fait continuer le coloriage précédent en coloriant chaque entier au fur et à mesure avec la plus petite couleur possible. On obtient le coloriage suivant :

1. Les nombres coloriés avec la couleur 1 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$
2. Les nombres coloriés avec la couleur 2 sont $4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26$
3. Les nombres coloriés avec la couleur 3 sont $8, 12, 18, 20, 27, 28, 30$
4. Les nombres coloriés avec la couleur 4 sont $16, 24$

On a bien un coloriage correct avec 4 couleurs donc le nombre minimal de couleur est 4.

Solution alternative : On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici de généraliser le coloriage précédent : on construit un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à r, avec $r \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$, posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. On va colorier n avec la couleur $a_1 + \cdots + a_k$ (notons que comme $n \geqslant 2$, on a bien $a_1 + \cdots + a_k \geqslant 1$). Montrons que ce coloriage est correct : soit $m \neq n$ deux entiers tels que m divise n. Posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. m s'écrit nécessairement sous la forme $m = p_1^{b_1} \times \cdots \times p_k^{b_k}$ avec $b_1 \leqslant a_1, \dots b_k \leqslant a_k$. Comme $m \neq n$, il existe forcément i tel que $a_i \neq b_i$ donc $a_i > b_i$. Ainsi on a forcément $a_1 + \cdots + a_k > b_1 + \cdots + b_k$ donc m et n sont bien de couleur différente.

Si $n \leqslant 8$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^3 = 8 \geqslant n \geqslant 2^{a_1 + \cdots + a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 3$, le coloriage utilise au plus 3 couleurs pour les entiers de 2 à 8 donc pour la première question le k minimal vaut 3.

Si $n \leqslant 31$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^5 = 32 > n \geqslant 2^{a_1 + \cdots + a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k < 5$ et comme $a_1 + \cdots + a_k$ est entier, on a $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 4$, le coloriage utilise au plus 4 couleurs pour les entiers de 2 à 31 donc pour la deuxième question le k minimal vaut 4.

Solution alternative : On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici une généralisation de la construction d'un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à n, où n est un entier strictement positif quelconque supérieur à 2. Soit k le plus grand entier tel que $2^k \leqslant n$, on a donc $2^{k+1} > n$. Soit j un entier vérifiant $2 \leqslant j \leqslant n$. Notons l le plus grand entier tel que $2^l \leqslant j$ et de même $2^{l+1} > j$. Comme $2 \leqslant j \leqslant n < 2^{k+1}$, on a $1 \leqslant l < k + 1$, donc $1 \leqslant l \leqslant k$. On va colorier j de la couleur l.

Notons que comme $1 \leqslant l \leqslant k$, ce coloriage utilise au plus k couleurs. Comme $2 \leqslant 2 \leqslant 4 \leqslant \cdots \leqslant 2^k \leqslant n$, les 2^j pour $1 \leqslant j \leqslant k$ sont entre 2 et n, et comme 2^j est colorié de la couleur j, le coloriage utilise exactement j couleurs.

Ce coloriage vérifie de plus la propriété de l'énoncé : soit m, n tels que m divise n et $m \neq n$. Notons j la couleur de m, on a $m \geqslant 2^j$. Comme m divise n et $m \neq n$, $n \geqslant 2m \geqslant 2^{j+1}$ donc n ne peut être colorié avec la couleur j, car sinon on aurait $n < 2^{j+1}$.

En particulier pour $n = 8$, comme $2^3 = 8 < 2^4$, le coloriage proposé utilise 3 couleurs et pour $n = 31$, comme $2^4 \leqslant n < 2^5$, le coloriage utilise 4 couleurs. Ainsi pour la première question le k minimal vaut 3, pour la seconde il vaut 4

Commentaire : Dans cet exercice, chaque question contenait deux parties. Par exemple pour la question 2), il fallait d'une part montrer qu'on peut colorier les entiers avec 4 couleurs, d'autre part il faut montrer que, quelque soit le coloriage, il utilise toujours au moins 4 couleurs. Une grande majorité d'élèves a oublié de traiter l'une de ces deux parties. Ce n'est qu'en traitant séparément chaque point que l'on pouvait avoir le score maximal. Par ailleurs, une grande partie des élèves a bien avancé sur le problème et fournit un coloriage valide avec le bon nombre de couleurs.

Solution de l'exercice 7

1) Pour bien comprendre l'exercice, il est conseillé de regarder ce qu'il se passe pour des petites valeurs. Prenons donc une partie à deux joueurs où le joueur 1 inscrit 0 sur sa carte verte et 0 sur sa carte rouge et le joueur 2 inscrit 1 sur sa carte verte et 1 sur sa carte rouge.

	carte verte	carte rouge	somme
joueur 1	0	0	0
joueur 2	1	1	2

On a alors $M = 2$. Si l'on redistribue les cartes rouges, le joueur 1 reçoit la carte rouge avec un 1 inscrit et le joueur 2 reçoit la carte bleue avec un 0 inscrit.

	carte verte	nouvelle carte rouge	somme
joueur 1	0	1	1
joueur 2	1	0	1

On a alors $M' = 1$. Ici $M' < M$ donc on a construit une situation répondant positivement à la question, la réponse à la question $1)$ est donc **OUI**.

2) Une fois de plus, on teste l'énoncé sur des parties à 2 ou 3 joueurs pour deviner la réponse. On va montrer qu'on ne peut jamais avoir $M' > M$ quelle que soit la répartition des cartes.

Considérons une partie à n joueurs et notons v_j le numéro que le joueur numéro j inscrit sur sa carte verte. Quitte à renuméroter les joueurs, on peut supposer que $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_n$. On note également $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n$ les numéros des cartes rouges dans l'ordre croissant, de telle sorte que **lors de la redistribution**, le joueur j reçoive la carte rouge avec le numéro r_j. On note r_{i_j} le numéro que le joueur j inscrit sur sa carte rouge. Le nombre M correspond donc au plus grand nombre parmi les nombres $v_j + r_{i_j}$, pour j allant de 1 à n. Le nombre M' correspond au plus grand nombre parmi les nombres $v_j + r_j$. Voici ici une situation à 4 joueurs.

	carte verte	carte rouge inscrite par le joueur	carte rouge reçue après la redistribution
joueur 1	$v_1 = 0$	$r_{i_1} = 3 (= r_2)$	$r_1 = 4$
joueur 2	$v_2 = 1$	$r_{i_2} = 1 (= r_4)$	$r_2 = 3$
joueur 3	$v_3 = 2$	$r_{i_3} = 4 (= r_1)$	$r_3 = 2$
joueur 4	$v_4 = 3$	$r_{i_4} = 2 (= r_3)$	$r_4 = 1$

On note k un entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$ vérifiant $M' = v_k + r_k$. On suppose par l'absurde que $M < M'$.

Soit l un entier tel que $n \geqslant l \geqslant k$. Par hypothèse sur M, $v_l + r_{i_l} \leqslant M$. De plus, on sait que $M < M' = v_k + r_k$. D'autre part, puisque $l \geqslant k$, on sait que $v_k \leqslant v_l$. Ainsi

$$v_l + r_{i_l} \leqslant M' < M = v_k + r_k \leqslant v_l + r_k$$

On obtient que $r_k > r_{i_l}$. Ceci implique que $i_l > k$.

$$r_1, r_2, \ldots, r_k, \underbrace{r_{k+1}, \ldots, r_n}_{r_{i_l} \text{ appartient à}}$$

$$1, 2, \ldots, k, \underbrace{k+1, \ldots, n}_{i_l \text{ appartient à}}$$

L'inégalité étant vrai pour tout entier l tel que $n \geqslant l \geqslant k$, on a donc prouvé que $i_k, i_{k+1}, \ldots i_n$ appartiennent à $\{k+1, \ldots, n\}$.

$$1, 2, \ldots, k, \qquad \underbrace{k+1, \ldots, n}_{i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n \text{ appartiennent à}}$$

On a donc $n-k+1$ entiers distincts dans un ensemble de cardinal $n-k$, ce qui est une contradiction. En particulier, on ne peut pas avoir $M < M'$. La réponse à la question 2) est donc **NON**.

Commentaire : Cet exercice était difficile. La première partie a été correctement traitée par de très nombreux élèves, ce qui était fort satisfaisant. En revanche, dans le cadre du traitement de la deuxième partie, qui était nettement plus délicate, plusieurs erreurs ou axpproximations sont revenues fréquemment :

— démontrer que $M' \leqslant M$ sur un exemple précis : cela ne nous apprend a priori rien sur l'infinité d'exemples restants ;

— supposer que les sommes M et M' étaient nécessairement calculées par le joueur possédant la plus grande carte verte ; remarquer que les cartes vertes et rouges jouaient des rôles symétriques aurait sans doute permis à plusieurs candidats de ne pas faire cette erreur, puisque le même raisonnement sous-jacent aurait permis de « démontrer » que la somme M' était aussi calculée par le joueur possédant la plus grande carte rouge ;

— utiliser des arguments flous consistant à invoquer la notion de moyenne ou d'équilibrage ;

— affirmer (à tort) que, pour donner sa carte rouge à un autre joueur, il fallait avoir une carte verte plus grande que celui-ci : cette affirmation est fausse dès lors qu'un joueur possède les deux plus petites cartes, puisqu'il va bien donner l'une des deux ;

— mal traiter un exemple ; ce cas de figure est évidemment dommage, puisque les correcteurs ne doutent pas une seconde que les élèves concernés auraient pu éviter cette faute, voire qu'elle les a coupés dans leur élan en laissant croire que l'exercice était résolu.

Solution de l'exercice 8

Tout d'abord notons que les plus petits diviseurs strictement plus grands que 1 de m et n sont d_2 et d_2+1 qui sont donc forcément premiers. Or ces deux nombres étant consécutifs, l'un d'entre eux est pair donc vaut 2. Si $d_2+1=2$, $d_2=1$ ce qui contredit l'énoncé. On a donc $d_2=2$ et $d_2+1=3$.

Si $k=3$ le seul diviseur strict de m vaut 2 donc $m=4$, le seul diviseur strict de m valant 3 on a forcément $n=9$. Récirproquement, comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4,9,3)$ convient.

Supposons $k \geqslant 4$. Comme le plus petit diviseur strict de m vaut 3, m n'est pas divisible par 2, il est donc impair. On a donc forcément d_3+1 impair, donc d_3 est pair. Posons $d_3=2l$, comme $d_3 > d_2 = 2$, on a $l>1$ donc $l \geqslant 2$. Si $l \geqslant 4$ alors l divise d_3 donc l divise m et $l \neq m$ car $2l$ divise m. En particulier comme $l < 2l$ est un diviseur de m cela contredit l'énoncé. On a donc forcément $l=2$ donc $d_3=4$. On en déduit que $d_3+1=5$. Si $k=4$ les diviseurs stricts de m étant 2 et 4, on a $m=8$ et comme les diviseurs stricts de n sont 3 et 5 on a $n=15$. Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8,15,4)$ vérifie l'énoncé.

Si $k \geqslant 5$, comme 3 et 5 divisent n, 15 divise n. Comme $k \geqslant 3$ on ne peut pas avoir $n=15$ sinon n n'a que 2 diviseurs stricts. En particulier, 15 est un diviseur strict de n donc $15-1=14$

est un diviseur strict de m. En particulier, $7+1=8$ est un diviseur strict de n donc n est pair, on obtient une contradiction.

En particulier pour $k \geqslant 5$ il n'y a pas de solutions, les seules solutions sont donc $(4,9,3)$ et $(8,15,4)$

Solution alternative : De la même manière que dans la solution précédente, on obtient que $d_2 = 2$. Si m est divisible par un nombre impair l, celui-ci est un diviseur strict car m est divisible par 2 donc il est pair. En particulier $l+1$ est pair et divise n, donc 2 divise n ce qui contredit le fait que d_2+1 est le plus petit diviseur de n. En particulier m est forcément une puissance de 2. Si $m \geqslant 16$, alors 8 et 4 sont des diviseurs stricts de m. Ainsi 9 et 5 divisent n, donc 45 divise n. En particulier 15 est un facteur strict de n donc $15-1=14$ est un facteur strict de m. Ainsi m est divisible par 7, cela contedit le fait que m est une puissance de 2.

Ainsi, m est une puissance de 2 vérifiant $m<16$ et 2 est un facteur strict de m. On a donc $m=4$ ou $m=8$. Si $m=4$, le seul diviseur strict de 4 est 2 donc le seul diviseur strict de n est 3 donc $n=9$. Comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4,9,3)$ convient.

Si $m=8$, m a pour diviseurs stricts 2 et 4, n a pour diviseurs stricts 3 et 5 donc $n=15$.Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8,15,4)$ vérifie l'énoncé.

Les triplets solutions sont donc $(4,9,3)$ et $(8,15,4)$.

Commentaire : L'exercice était difficile, mais un bon nombre d'élèves a réussi à avancer de façon significative sur l'exercice. Attention quand on regarde les parités possibles pour m et n à bien traiter tous les cas. Aussi, il faut bien penser à vérifier les solutions obtenues !

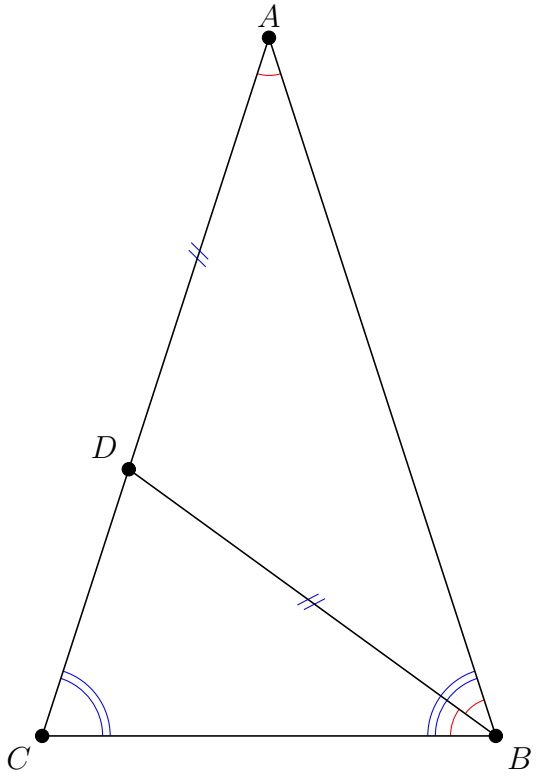
Exercices lycéens

Solution de l'exercice 9

Pour choisir un main de 5 cartes dont 4 cartes ont la même valeur, il faut d'abord choisir la valeur en question. Il y a pour cela 13 choix puisqu'il y a 13 valeur. Il y a alors 48 choix pour la cinquième carte. On a donc en tout $13 \times 48 = 624$ mains possibles.

Commentaire : L'exercice a été réussi par une majorité d'élèves. Les erreurs principales résident dans l'oubli de la couleur de la dernière carte (pour ceux qui trouvent 156), voire carrément l'oubli de la dernière carte (pour ceux qui trouvent 13). Certains ont mal compris l'énoncé, en cherchant à compter le nombre de mains possibles simultanément. Enfin, plusieurs se trompent dans le calcul final de 13×48, ce qui est dommage.

Solution de l'exercice 10



Appelons $\alpha = \widehat{ABD}$. Examinons les différents angles de la figure et essayons de la exprimer en fonction de α. Puisque la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$, on sait que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ et donc $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque $DB = DA$, le triangle ADB est isocèle au point D, ce qui se traduit par le fait que $\widehat{BAD} = \widehat{ABD}$ donc $\widehat{BAC} = \widehat{DAB} = \alpha$. Enfin, le triangle ABC est isocèle au point A, ce qui signifie que $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque la somme des angles dans le triangle ABC vaut $180°$, on trouve

$$180° = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 5\alpha$$

Ainsi, $\alpha = \frac{180°}{5} = 36°$. Cela signifie que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$ et $\widehat{BAC} = 36°$.

Commentaire : L'exercice reposait sur le fait que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux. Une très large majorité d'élèves a résolu complétement l'exercice. Malgré tout, un nombre non négligeable a commis des erreurs comme confondre bissectrice et hauteur, bissectrice et médiane ou encore se tromper de sommet de la bissectrice. On notera qu'un grand nombre d'élèves n'a pas rendu de figure avec l'exercice. Nous tenons à rappeler l'importance de la figure dans un problème de géométrie, il s'agit du principal support de travail ! Certains élèves auraient sans doute pu éviter quelques erreurs en faisant une figure propre.

Solution de l'exercice 11

Dans ce problème, on cherche le plus petit entier k satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Il y aura alors deux parties dans la démonstration. D'une part il faut montrer que si un entier k satisfait la propriété, alors $k \geqslant c$, d'autre part il faut montrer que l'on peut effectivement trouver un coloriage des entiers avec c couleurs.

1) Tout d'abord, essayons de colorier les entiers au fur et à mesure de façon naïve :

— On colorie 2 de la première couleur

— On colorie 3 aussi de la première couleur (c'est possible car 2 ne divise pas 3).

— 4 est divisible par 2 donc on ne peut pas le colorier de la même couleur que 2, on le colorie donc d'une autre couleur (la deuxième couleur).

— On peut colorier 5 de la première couleur.

— 6 étant divisible par 2 et 3 on le colorie de la deuxième couleur.

— On peut colorier 7 de la première couleur.

— Par contre 8 est divisible par 2 et 4, il faut donc le colorier d'une troisième couleur.

On a donc obtenu un coloriage avec 3 couleurs des entiers de 2 à 8. Il faut maintenant vérifier qu'il faut forcément 3 couleurs dans un coloriage satisfaisant la propriété de l'énoncé. Dans la construction précédente, le problème était de colorier 8. En effet, 8 est un multiple de 4 et 2 et 4 est un multiple de 2. Ainsi 4 ne peut avoir la même couleur que 2 et 8 ne peut avoir la même couleur que 2 ou 4. Il faut donc au moins 3 couleurs différentes pour colorier $2, 4, 8$, donc le plus petit nombre de couleurs nécessaires est $k = 3$.

2) Ici inspirons nous de la première question. On a vu que $2, 4, 8$ étaient les nombres apportant une contrainte dans le coloriage. On remarque qu'il s'agit de puissances de 2. On peut donc conjecturer que les puissances de 2 jouent un rôle important dans le problème. Parmi les entiers de 2 à 32 il y a 5 puissances de 2 : $2, 4, 8$ et 16 Comme 2 divise $4, 8, 16$, 2 est forcément d'une couleur différente des 3 autres. Comme 4 divise $8, 16$, 4 est forcément d'une couleur différente des 2 autres. De même comme 8 divise 16 donc $2, 4, 8, 16$ ont forcément des couleurs différentes deux à deux. Il faut donc au moins 4 couleurs différentes.

Réciproquement, on cherche un coloriage des entiers de 2 à 32 utilisant exactement 4 couleurs. On peut en fait continuer le coloriage précédent en coloriant chaque entier au fur et à mesure avec la plus petite couleur possible. On obtient le coloriage suivant :

1. Les nombres coloriés avec la couleur 1 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$
2. Les nombres coloriés avec la couleur 2 sont $4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26$
3. Les nombres coloriés avec la couleur 3 sont $8, 12, 18, 20, 27, 28, 30$
4. Les nombres coloriés avec la couleur 4 sont $16, 24$

On a bien un coloriage correct avec 4 couleurs donc le nombre minimal de couleur est 4.

Solution alternative : On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici de généraliser le coloriage précédent : on construit un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à r, avec $r \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$, posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. On va colorier n avec la couleur $a_1 + \cdots + a_k$ (notons que comme $n \geqslant 2$, on a bien $a_1 + \cdots + a_k \geqslant 1$). Montrons que ce coloriage est correct : soit $m \neq n$ deux entiers tels que m divise n. Posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. m s'écrit nécessairement sous la forme $m = p_1^{b_1} \times \cdots \times p_k^{b_k}$ avec $b_1 \leqslant a_1, \ldots b_k \leqslant a_k$. Comme $m \neq n$, il existe forcément i tel que $a_i \neq b_i$ donc $a_i > b_i$. Ainsi on a forcément $a_1 + \cdots + a_k > b_1 + \cdots + b_k$ donc m et n sont bien de couleur différente.

Si $n \leqslant 8$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^3 = 8 \geqslant n \geqslant 2^{a_1 + \cdots + a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 3$, le coloriage utilise au plus 3 couleurs pour les entiers de 2 à 8 donc pour la première question le k minimal vaut 3.

Si $n \leqslant 31$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^5 = 32 > n \geqslant 2^{a_1+\cdots+a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k < 5$ et comme $a_1 + \cdots + a_k$ est entier, on a $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 4$, le coloriage utilise au plus 4 couleurs pour les entiers de 2 à 31 donc pour la deuxième question le k minimal vaut 4.

Solution alternative : On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici une généralisation de la construction d'un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à n, où n est un entier strictement positif quelconque supérieur à 2. Soit k le plus grand entier tel que $2^k \leqslant n$, on a donc $2^{k+1} > n$. Soit j un entier vérifiant $2 \leqslant j \leqslant n$. Notons l le plus grand entier tel que $2^l \leqslant j$ et de même $2^{l+1} > j$. Comme $2 \leqslant j \leqslant n < 2^{k+1}$, on a $1 \leqslant l < k+1$, donc $1 \leqslant l \leqslant k$. On va colorier j de la couleur l.

Notons que comme $1 \leqslant l \leqslant k$, ce coloriage utilise au plus k couleurs. Comme $2 \leqslant 2 \leqslant 4 \leqslant \cdots \leqslant 2^k \leqslant n$, les 2^j pour $1 \leqslant j \leqslant k$ sont entre 2 et n, et comme 2^j est colorié de la couleur j, le coloriage utilise exactement j couleur.

Ce coloriage vérifie de plus la propriété de l'énoncé : soit m, n tels que m divise n et $m \neq n$. Notons j la couleur de m, on a $m \geqslant 2^j$. Comme m divise n et $m \neq n$, $n \geqslant 2m \geqslant 2^{j+1}$ donc n ne peut être colorié avec la couleur j, car sinon on aurait $n < 2^{j+1}$.

En particulier pour $n = 8$, comme $2^3 = 8 < 2^4$, le coloriage proposé utilise 3 couleurs et pour $n = 31$, comme $2^4 \leqslant n < 2^5$, le coloriage utilise 4 couleurs. Ainsi pour la première question le k minimal vaut 3, pour la seconde il vaut 4.

Commentaire : Dans cet exercice, chaque question contenait deux parties. Par exemple pour la question 2), il fallait d'une part montrer qu'on peut colorier les entiers avec 4 couleurs, d'autre part il faut montrer que, quelque soit le coloriage, il utilise toujours au moins 4 couleurs. Beaucoup d'élèves n'ont traité qu'une des deux parties et n'ont donc pas eu le score maximal. Néanmoins, la plupart des élèves ont bien trouvé un coloriage qui convient. Pour montrer qu'un coloriage des entiers contient au moins 3 (respectivement 4) couleurs, les explications ont parfois été très laborieuses.

Solution de l'exercice 12

1) Montrons d'abord que $G \geqslant P$: Soit j un entier tel que $P = x_j - y_j$. On a $P = x_j - y_j$ et $x_j \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ et $y_j \geqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i$. En particulier $P = x_j - y_j \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i = G$.

2) Montrons maintenant que $G \leqslant 2P$. Soit j un entier tel que $x_j = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ et k tel que $y_k = \min_{1\leqslant i\leqslant n} y_i$. Comme $y_j \leqslant x_k$, on a :

$$G = x_j - y_k = x_j - y_j + y_j - y_k \leqslant (x_j - y_j) + (x_k - y_k) \leqslant 2P$$

Commentaire : Pour résoudre ce problème il fallait procéder en deux étapes : montrer que $P \leqslant G$ puis montrer $G \leqslant 2P$: peu d'élèves ont résolu le problème dans sa globalité, et beaucoup ont juste montré que $P \leqslant G$. De nombreux raisonnement contenaient des erreurs, parmi lesquelles il y avait :

— Considérer que $\max(x_i - y_i) = \max x_i - \max y_i$ ou bien $\max(x_i - y_i) = \max x_i - \min y_i$.

— Considérer qu'on pouvait supposer les listes dans un certain ordre, ce qui n'est pas le cas puisqu'en réordonnant les listes on change la valeur de P.

Solution de l'exercice 13

Soit n un entier naturel et soit $a_d a_{d-1} \ldots a_1 a_0$ son écriture décimale, c'est-à-dire que a_0 est le chiffre des unités, a_1 le chiffre des dizaines etc...

Tout d'abord, si n n'a qu'un chiffre, alors $n = a_0 \leqslant 2a_0$ donc n est solution de l'exercice et les nombres $0, 1, 2, \ldots, 9$ sont solutions.

On suppose désormais que n a au moins deux chiffres.

Alors $n = a_d \cdot 10^d + a_{d-1} \cdot 10^{d-1} + \ldots a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ et $s(n) = a_d + \ldots + a_1 + a_0$. Si $d \geqslant 2$, alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant d-1$, $a_i \cdot 10^i \geqslant a_i \cdot 2$ et puisque a_d est non nul, $a_d \cdot 10^d = 2a_d + (10^d - 2) \cdot a_d \geqslant 2a_d + 10^d - 2 > 2a_d + a_0$ car $a_0 < 10$. Ainsi

$$n = a_d \cdot 10^d + a_{d-1} \cdot 10^{d-1} + \ldots a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 > 2a_d + a_0 + 2a_{d-1} + \ldots + 2a_1 + a_0 = 2s(n)$$

Donc si n a trois chiffres ou plus, n n'est pas solution.

On suppose que n possède deux chiffres. Si $a_1 \geqslant 2$, alors

$$n = a_1 \cdot 10 + a_0 = 2a_1 + a_0 + 8 \cdot a_1 \geqslant 2a_1 + a_0 + 8 \cdot 2 > 2a_1 + a_0 + a_0 = 2s(n)$$

donc n n'est pas solution du problème. On déduit que $a_1 = 1$. On peut alors aisément tester tous les nombres entre 10 et 19 pour voir lesquels vérifie le problème. Ou alors, on peut remarquer que l'inégalité $n \leqslant 2s(n)$ se réécrit $10 \cdot 1 + a_0 \leqslant 2(1 + a_0)$ soit $a_0 \geqslant 8$ donc les seuls entiers possibles à deux chiffres vérifiant l'énoncé sont 18 et 19. Réciproquement, on a bien $18 \leqslant 2(1 + 8)$ et $19 \leqslant 2(1 + 9)$.

Les solutions cherchées sont donc $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18, 19\}$

Commentaire : Le problème est bien compris, les élèves ont vite une intuition du résultat et du raisonnement à faire, mais il est plus difficile de le mettre en place rigoureusement. La majoration de $s(n)$ était une bonne idée. Il faut éviter de parachuter des résultats, même corrects, lorsqu'ils ne sont pas immédiats : en l'occurence, prouver pour tout $k \geqslant 3$, on a $18k < 10^{k-1}$ était une des difficultés principales de l'exercice, une preuve de ce résultat était donc attendue. Enfin, beaucoup d'élèves oublient que 0 est une solution.

Solution de l'exercice 14

Tout d'abord notons que les plus petits diviseurs strictement plus grands que 1 de m et n sont d_2 et $d_2 + 1$ qui sont donc forcément premiers. Or ces deux nombres étant consécutifs, l'un d'entre eux est pair donc vaut 2. Si $d_2 + 1 = 2$, $d_2 = 1$ ce qui contredit l'énoncé. On a donc $d_2 = 2$ et $d_2 + 1 = 3$.

Si $k = 3$ le seul diviseur strict de m vaut 2 donc $m = 4$, le seul diviseur strict de m valant 3 on a forcément $n = 9$. Récirproquement, comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4, 9, 3)$ convient.

Supposons $k \geqslant 4$. Comme le plus petit diviseur strict de m vaut 3, m n'est pas divisible par 2, il est donc impair. On a donc forcément $d_3 + 1$ impair, donc d_3 est pair. Posons $d_3 = 2l$, comme $d_3 > d_2 = 2$, on a $l > 1$ donc $l \geqslant 2$. Si $l \geqslant 4$ alors l divise d_3 donc l divise m et $l \neq m$ car $2l$ divise m. En particulier comme $l < 2l$ est un diviseur de m cela contredit l'énoncé. On a donc forcément $l = 2$ donc $d_3 = 4$. On en déduit que $d_3 + 1 = 5$. Si $k = 4$ les diviseurs stricts de m étant 2 et 4, on a $m = 8$ et comme les diviseurs stricts de n sont 3 et 5 on a $n = 15$. Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8, 15, 4)$ vérifie l'énoncé.

Si $k \geqslant 5$, comme 3 et 5 divisent n, 15 divise n. Comme $k \geqslant 3$ on ne peut pas avoir $n = 15$ sinon n n'a que 2 diviseurs stricts. En particulier, 15 est un diviseur strict de n donc $15 - 1 = 14$ est un diviseur strict de m. En particulier, $7 + 1 = 8$ est un diviseur strict de n donc n est pair, on obtient une contradiction.

En particulier pour $k \geqslant 5$ il n'y a pas de solutions, les seules solutions sont donc $(4, 9, 3)$ et $(8, 15, 4)$

Solution alternative : De la même manière que dans la solution précédente, on obtient que $d_2 = 2$. Si m est divisible par un nombre impair l, celui-ci est un diviseur strict car m est divisible par 2 donc il est pair. En particulier $l + 1$ est pair et divise n, donc 2 divise n ce qui contredit le fait que $d_2 + 1$ est le plus petit diviseur de n. En particulier m est forcément une puissance de 2. Si $m \geqslant 16$, alors 8 et 4 sont des diviseurs stricts de m. Ainsi 9 et 5 divisent n, donc 45 divise n. En particulier 15 est un facteur strict de n donc $15 - 1 = 14$ est un facteur strict de m. Ainsi m est divisible par 7, cela contedit le fait que m est une puissance de 2.

Ainsi, m est une puissance de 2 vérifiant $m < 16$ et 2 est un facteur strict de m. On a donc $m = 4$ ou $m = 8$. Si $m = 4$, le seul diviseur strict de 4 est 2 donc le seul diviseur strict de n est 3 donc $n = 9$. Comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4, 9, 3)$ convient.

Si $m = 8$, m a pour diviseurs stricts 2 et 4, n a pour diviseurs stricts 3 et 5 donc $n = 15$.Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8, 15, 4)$ vérifie l'énoncé.

Les triplets solutions sont donc $(4, 9, 3)$ et $(8, 15, 4)$.

Commentaire : Ce problème de théorie des nombres a été plutôt bien réussi, avec près d'un élève sur deux rendant une copie qui a obtenu 6 points ou plus. Il y avait de très nombreuses solutions : même si la plupart des élèves résolvant le problème utilisent l'une des solutions du corrigé, certains en ont trouvé d'autres plus originales. Par exemple, certains ont remarqué que si $k \geqslant 5$, on a $d_2 d_{k-1} = d_3 d_{k-2} = m$ et $d'_2 d'_{k-1} = d'_3 d'_{k-2} = n$ puis que cela impliquait comme $d'_2 = d_2 + 1$ et $d'_3 = d_3 + 1$, que $d_2 + d_{k-1} = d_3 + d_{k-2}$ donc en particulier $d_2 = d_3$, ce qui fournissait la contradiction. D'autres ont très justement remarqué que si $k \geqslant 4$, on a $d_2 = 2, d_3 = 4$, donc $d'_2 = 3$, $d'_3 = 5$, pour aboutir au système des deux équations $\frac{m}{2} + 1 = \frac{n}{3}$, et $\frac{m}{4} + 1 = \frac{n}{5}$ Nous attirons néanmoins l'attention des élèves sur les quelques points problématiques ou erreurs ci-dessous :

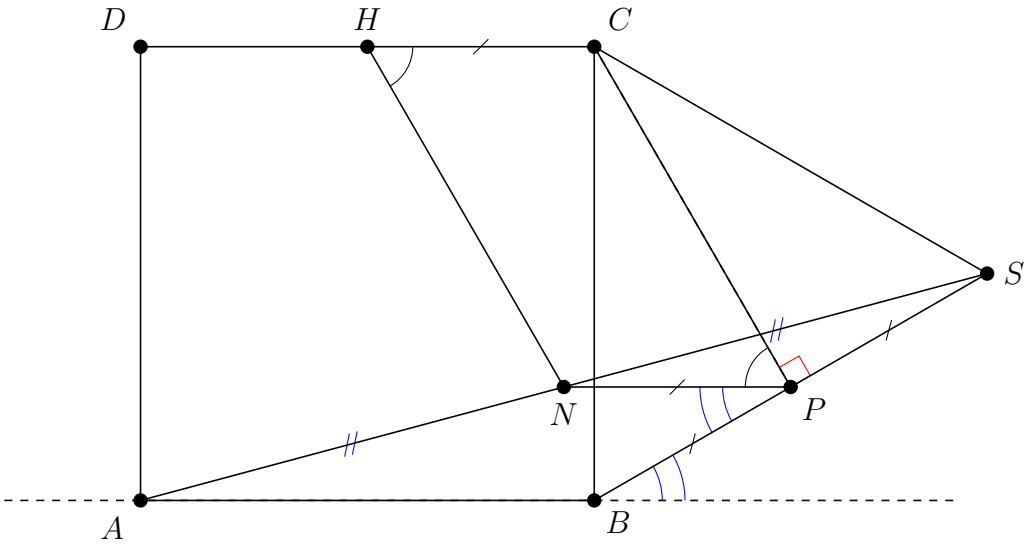
— Certains élèves ont des preuves quasi-complètes, mais oublient à la fin de vérifier si les triplets trouvés sont effectivement tous solutions, ce qui conduit parfois à l'obtention de quelques triplets supplémentaires. A contrario, d'autres oublient l'un des deux triplets solutions, en ne traitant pas ce qui se passe lorsque $k = 3$.

— Un grand nombre d'élèves ont des intuitions fondées (parfois même intuitent les deux seuls triplets solutions), mais ne justifient pas leurs affirmations. Nous rappelons que tout résultat énoncé dans les copies doit être au moins justifié par une phrase. Typiquement, même si l'explication de ce fait est très simple, seulement dire que n ne peut pas être pair n'est pas suffisant pour avoir les points correspondants. Ecrire une copie lisible et précise permet non seulement au correcteur de savoir que vous avez compris, mais cela vous permet aussi de vérifier et d'être vous-même convaincus de vos affirmations.

— Certaines disjonctions de cas pouvaient être nombreuses dans certaines solutions du problème et manquaient parfois de rigueur. Certains élèves affirment qu'un entier qui a 4 diviseurs est nécessairement le cube d'un nombre premier, mais en réalité il peut aussi être un produit de deux nombres premiers distincts. D'autre part, certains donnent un argument valable pour obtenir une contradiction dès que $k \geqslant 7$ (l'argument qui consiste à dire que 33 diviserait n mais 11 n'est pas dans la liste de ses diviseurs). Dans ce cas, il faut bien veiller à traiter explicitement les cas $k = 6$ et $k = 5$ séparément.

— Quelques remarques plus techniques. Effectivement l'énoncé implique que m ou n est impair. Mais on perd évidemment de la généralité en ne traitant que le cas où m est pair, puisque l'énoncé n'est pas symétrique en m et n. Par ailleurs, s'il est vrai que $d_2' = d_2 + 1$ et d_2 sont premiers et divisent respectivement n et m, il n'est pas correct de dire que si p premier divise m alors $p+1$ est aussi un nombre premier qui divise n. Enfin, la mauvaise utilisation des termes "multiples" et "diviseurs" rend certaines preuves confuses.

Solution de l'exercice 15



1) Puisque le point N est le milieu du segment $[AS]$ et que le point P est le milieu du segment $[BC]$, d'après le théorème de Thalès les droite (NP) et (AB) sont parallèles. On déduit que $\widehat{NPS} = \widehat{ABS}$. Puisque le quadrilatère $ABCD$ est un carré, $\widehat{ABC} = 90°$. Puisque le triangle SBC est équilatéral, $\widehat{SBC} = 60°$. Ainsi, $\widehat{ABS} = 90° + 60° = 150°$.

On déduit que

$$\widehat{BPN} = 180° - \widehat{NPS} = 180° - \widehat{ABS} = 180° - 150° = 30°$$

2) On utilise à nouveau le fait que les droites (NP) et (AB) sont parallèles. Puisque les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, les droites (NP) et (CD) sont également parallèles. De plus, d'après le théorème de Thalès, $NP = \frac{1}{2}AB$ et puisque le quadrilatère $ABCD$ est un carré, $AB = CD$. Ainsi, $NP = \frac{1}{2}CD = HC$ puisque le point H est le milieu du segment $[CD]$.

Le quadrilatère $HCPN$ à deux côtés opposés égaux et parallèles, il s'agit donc d'un parallélogramme. Ses angles opposés sont égaux, on a donc que $\widehat{NHC} = \widehat{NPC}$.

Puisque le point P est le milieu du segment $[BS]$ et que le triangle BCS est équilatéral, la droite (CP) est la hauteur issue du sommet C dans le triangle BCS. On a donc $\widehat{CPS} = 90°$. On a établi à la question précédente que $\widehat{NPS} = 150°$. Ainsi, $\widehat{NPC} = \widehat{NPS} - \widehat{CPS} = 150° - 90° = 60°$

On a donc $\widehat{NHC} = 60°$.

Commentaire : Le problème était composé de deux questions. La première question a été résolue par une large majorité d'élèves. La deuxième question, plus difficile, a tout de même été résolue entièrement par un nombre significatif d'élèves. Plusieurs approches étaient possibles. La plus élégante consistait à utiliser des résultats de géométrie élémentaire tels que le théorème de Thalès et d'identifier le quadrilatère $CPNH$ comme un parallélogramme. Plusieurs élèves ont tenté, avec un succès variable, une approche analytique. Cela a parfois amené à des réponses impliquant des cosinus ou des tangentes. De tels résultats, souvent facilement simplifiable, ne pouvaient pas rapporter la totalité des points. Enfin, quelques élèves ont malheureusement mal lu l'énoncé et ont mal placé le point S. Si la suite de leur raisonnement était souvent correcte par rapport à leur figure, ils ne pouvaient pas pour autant obtenir tous les points de l'exercice.

Solution de l'exercice 16

Notons déjà que s'il est possible de partitionner les entiers en deux groupes, chacun de somme au plus 70, la somme totale vaut au plus 140 : on a donc forcément $S \leqslant 140$. On peut ensuite essayer de tester quelques cas avec $S \leqslant 140$ et essayer de voir s'il est possible ou non de les partitionner en deux groupes. A priori les cas contraignants semblent être ceux avec des grands nombres : si les entiers valent tous 10 et qu'on en prend 14, on peut les diviser en deux groupes de 7, dont la somme vaudra 70, on ne gagne donc pas d'information. Par contre si on ne prend que des 9 et qu'on en prend 15, on a $S = 15 \times 9 = 135$. Si on sépare ces entiers en deux groupes, alors on aura forcément un groupe contenant 8 fois le nombre 9, donc de somme valant au moins 72. En particulier, on en déduit que $S = 135$ ne vérifie pas l'énoncé. De plus en rajoutant de 1 à 4 fois le nombre 1, on obtient les sommes entre 136 et 139 et l'argument précédent reste valable, donc ces valeurs ne conviennent pas non plus.

En fait, en considérant 14 fois le nombre 9 et 1 fois le nombre 8, la somme vaut $9 \times 14 + 8 = 134$. Si on sépare ces entiers en deux groupes, alors on aura forcément un groupe contenant 8 nombres, donc de somme valant au moins $7 \times 9 + 8 = 71$. En particulier, on en déduit que $S = 134$ ne vérifie pas l'énoncé.

Montrons que pour tout ensemble d'entiers naturels inférieurs à 10 de somme totale inférieure à 133, on peut répartir ces entiers dans deux groupes de somme inférieure à 70.

Pour cela, on considère un ensemble d'entiers naturels inférieurs à 10 dont la somme est inférieure ou égale à 133. On répartit arbitrairement certains entiers dans le premier groupe, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus ajouter d'entier à ce premier groupe sans que la somme des éléments dépasse 70. Après cette première opération, on dispose de deux ensembles A et B partitionnant les entiers dont on dispose, de telle sorte que la somme des éléments de A ne dépasse pas 70 et pour tout entier a de B, la somme des éléments de A ajoutée à a dépasse 70. Autrement dit, si on note S_A la somme des éléments de A, alors $61 \leqslant S_A \leqslant 70$ et pour tout a de B, $S_A + a \geqslant 71$.

Notons que si $S_A \geqslant 63$, alors les éléments de B ont une somme inférieure à $133 - 63 = 70$ donc on a obtenu une partition des entiers en deux groupes de somme inférieure à 70. On se place donc dans le cas où $61 \leqslant S_A \leqslant 62$. Posons $d = 62 - S_A$. Cela signifie que tout élément de B est supérieur ou égal à $9 + d$. Si on dispose de moins de 7 entiers dans le groupe B, alors leur somme est inférieure à 70 donc on peut les répartir dans un groupe de somme inférieure à 70.

Si l'on dispose de plus de 7 entiers dans B, comme chaque entier de B vaut au moins $9+d$,

la somme totale vaut

$$S = S_A + (S - S_A) \geqslant 62 - d + 8(9 + d) = 134 + 7d > 133$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On peut donc répartir les entiers en deux groupes de somme au plus 70.

Solution alternative : On montre de même que si $S \geqslant 135$, S ne vérifie pas l'énoncé.

On a donc obtenu $S \leqslant 134$, mais il faudrait trouver une procédure efficace pour des S plus petits pour répartir les entiers en deux groupes distincts de somme au plus 70. Si $S \leqslant 70$ il est assez clair que S vérifie l'énoncé car il suffit de mettre tous les entiers dans le même groupe. Sinon on aimerait bien répartir les entiers deux groupes A et B et pour avoir deux sommes valant au plus 70, on aimerait que le groupe A ait la plus grande somme possible valant au plus 70.

Notons donc $x_1, \dots x_n$ les entiers de somme S, on prend $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que la somme des x_i pour i dans I vaut au plus 70, et elle est maximale c'est-à-dire qu'on ne peut trouver $I' \subset \{1, \dots, n\}$ tel que la somme des x_i pour i dans I' vaut au plus 70 et soit strictement plus grand que celle des x_i pour i dans I.Posons S' la somme des x_i pour i dans I. Si $S > 70$, on a forcément $S' \geqslant 61$. En effet supposons $S' \leqslant 60$, comme $S > S'$ il existe j dans $\{1, \dots, n\}$ privé de I tel que $x_j \geqslant 0$. Comme $x_j \leqslant 10$ on a $S' + x_j \leqslant 6 + 10 = 70$, cela contredit la maximalité de I. En particulier on a donc $S' \geqslant 61$.

Posons S'' la somme des x_i pour i n'appartenant pas à I, on a donc $S'' + S' = S$ sont $S \geqslant 61 + S''$. En particulier $S'' \leqslant S - 61$. Ceci prouve que si $S \leqslant 131$, alors $S'' \leqslant 70$ on peut donc bien répartir les entiers en deux groupes de sommes au plus 70.

Il reste donc trois cas à traiter $S = 132, 133, 134$. On peut essayer de voir si on peut affiner le raisonnement précédent.

Supposons $S = 132$. Si $S' \geqslant 62$, alors $S'' = S - S' \leqslant 70$ et les entiers peuvent bien être répartis en deux groupes de somme au plus 70. Comme on a prouvé $S' \geqslant 61$, il reste à voir ce qu'il se passe si $S' = 61$. Dans ce cas intéressons nous aux x_j pour j pas dans I. Si $x_j \leqslant 9$, alors $S' + x_j \leqslant 70$ ce qui contredit la maximalité de S. En particulier tous les x_j restants valent 10. Il existe donc un entier positif k tel que $S'' = 10k$, on a donc $S = 61 + 10k$ donc $10k = 71$ ce qui est impossible car $10k$ est pair mais pas 71. En particulier $S = 132$ vérifie l'énoncé.

Supposons $S = 133$ et essayons d'adapter l'argument précédent. Si $S' \geqslant 63$, alors $S'' = S - S' \leqslant 70$ et les entiers peuvent bien être répartis en deux groupes de somme au plus 70. Comme on a prouvé $S' \geqslant 61$, il reste à voir ce qu'il se passe si $S' = 62$ ou 61. Dans ce cas intéressons nous aux x_j pour j pas dans I. Si $x_j \leqslant 8$, alors $S' + x_j \leqslant 70$ ce qui contredit la maximalité de S. En particulier tous les x_j restants valent 9 ou 10. De plus $S'' = S - S'$ vaut 71 ou 72. Or il existe k, l des entiers positifs tels que $9k + 10l = S''$. On a forcément $S'' < 80$ donc $l < 8$. En testant les différentes valeurs de l possibles, c'est-à-dire $1, \dots, 7$, on obtient que forcément $S'' = 72$, $l = 0$ et $k = 8$. Or comme il y a au moins 7 fois le nombre neuf et que $7 \times 9 = 63 > S'$ on a une contradiction. En particulier $S = 133$ vérifie l'énoncé.

Maintenant on peut essayer de faire de même avec 134. Si $S' \geqslant 64$, alors $S'' = S - S' \leqslant 70$ et les entiers peuvent bien être répartis en deux groupes de somme au plus 70. Comme on a prouvé $S' \geqslant 61$, il reste à voir ce qu'il se passe si $S' = 62$ ou 61 ou 63. Dans ce cas intéressons nous aux x_j pour j pas dans I. Si $x_j \leqslant 7$, alors $S' + x_j \leqslant 70$ ce qui contredit la maximalité de S. En particulier tous les x_j restants valent 8 9 ou 10. On a de même que précédemment forcément $S'' = 71, 72, 73$ et $S'' = 8k + 9l + 10m$ pour k, l, m des entiers positifs. On cherche donc les valeurs de k, l, m convenables. Après quelques calculs on peut remarquer que $l =$

$7, k = 1$ convient, dans ce cas $S'' = 73$ donc $S' = S - S'' = 63$. Comme $7 \times 9 = 63$, on peut donc regarder le cas où on a $7 + 7 = 14$ fois le nombre 9 et une fois le 8. Dans ce cas on a bien $S = 14 \times 9 + 8 = 134$. Supposons qu'on peut répartir ces éléments en deux groupes de sommes au plus 70 : dans ce cas on aura forcément 8 éléments parmi les 15 dans le même groupe, donc la somme de ses éléments vaudra au moins $9 \times 7 + 8 = 71$ contradiction. En particulier 134 ne convient pas.

Les valeurs de S vérifiant l'énoncé sont donc les entiers positifs inférieurs ou égaux à 133.

Commentaire : Le problème était vraiment difficile et peu sont ceux qui ont obtenus de réelles avancées. Certains ont constaté qu'il fallait $S \leqslant 140$ et que si $S \geqslant 70$ ou $S \leqslant 80$, S vérifiait l'énoncé. Même si cela ne valait pas de points, cela permettait de commencer à voir les cas un peu plus complexes se dessiner. Par contre en aucun cas cela permettait d'affirmer que tous les S inférieurs ou égaux à 140 conviennent. Certains ont affirmé sans justification qu'on ne pouvait pas répartir 14 fois 9 et une fois 8 en deux groupes de somme au plus 70 : certes c'est vrai, mais comme tout énoncé mathématique cela mérite une preuve ! Il n'est pas suffisant de dire que la répartition "optimale" consiste à mettre sept 9 d'un côté et le reste de l'autre : il faut le prouver. Attention aussi à l'énoncé : certains ont mal compris l'énoncé et ont cherché les valeurs de S pour lesquels il existe des nombres de somme S qu'on peut répartir en deux ensembles de somme au plus 70. D'autres ont cru qu'il fallait que ce soit le cas pour toute partition en deux et les énoncés devenaient beaucoup plus faciles et très différents de l'énoncé initial. Nous recommandons de bien lire et comprendre l'énoncé avant de se lancer tête baissée dans le problème.

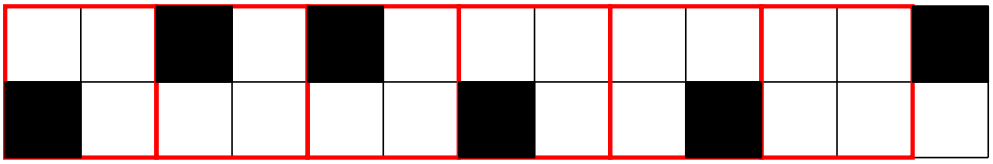
Solution de l'exercice 17

Dans ce problème, on cherche le plus petit entier n satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c'est bien le plus petit entier, on doit d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \geqslant c$ et on doit montrer d'autre part que l'on peut trouver un tableau $n \times n$ satisfaisant la propriété de l'énoncé.

Commençons par déterminer la valeur minimale que peut prendre l'entier n. Soit donc n un entier vérifiant la propriété de l'énoncé.

Considérons un carré quelconque de taille 2×2 à l'intérieur du tableau. Si un tel carré contenait 2 cases noires, ces deux cases auraient un côté ou un sommet en commun, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi, un quelconque carré de taille 2×2 contenu dans le tableau $n \times n$ ne peut contenir au plus qu'une case noire.

Regardons maintenant 2 lignes consécutives du tableau. On découpe ces deux lignes en carrés de tailles 2×2 en partant de la gauche (la colonne située à l'extrémité droite peut éventuellement n'appartenir à aucun carré 2×2 si n est un entier impair). Chaque carré contient au plus une case noire, et la rangée constituée de deux lignes consécutives doit contenir exactement $2k$ cases noires car chaque ligne contient exactement k cases noires. La colonne située à l'extrémité droite contient au plus 1 case noire, ce qui signifie qu'il y a au moins $2k - 1$ cases noires réparties dans les carrés de taille 2×2. Il y a donc au moins $2k - 1$ tels carrés de taille 2×2. Ainsi, la longueur n des deux lignes vérifie $n \geqslant 2(2k - 1) + 1 = 4k - 1$.

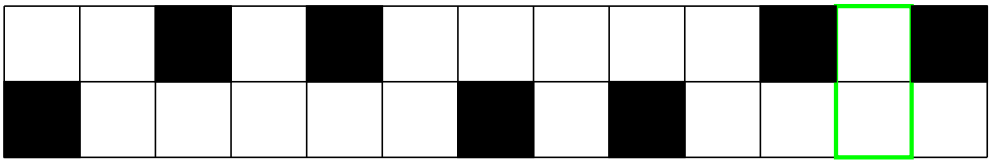


Nous avons démontré que n était forcément supérieur à un certaine expression dépendant de k. On est alors tenté de penser qu'il s'agit là de la valeur optimale et pour le montrer, on entreprend de construire un tableau $(4k-1)\times(4k-1)$ satisfaisant la propriété. Pour trouver un tel tableau dans le cas général, on commence d'abord par trouver un tableau fonctionnel pour les petites valeurs de k. Par exemple, on essaye de trouver un tableau 7×7 vérifiant la propriété pour $k=2$. Après plusieurs essais, on s'aperçoit qu'un tel tableau n'existe pas, signifiant que $4k-1$ n'est pas la valeur optimale désirée.

On entreprend désormais de démontrer qu'un entier n vérifiant la propriété vérifie $n \geqslant 4k$. Pour cela, il nous suffit de démontrer que n ne peut valoir $4k-1$.

Supposons par l'absurde qu'il soit possible de colorier certaines cases d'un tableau de taille $(4k-1)\times(4k-1)$ de telle sorte que chaque ligne et chaque colonne possède exactement k cases noires.

On a vu dans le raisonnement précédent que pour deux lignes consécutives, il y avait au plus $2k-1$ cases noires contenues dans les $4k-2$ première colonnes (les colonnes les plus à gauche). Donc la dernière colonne contient forcément exactement une case noire. Cela signifie que les deux cases de la deuxième colonne en partant de la droite sont toutes les deux blanches. Comme ce raisonnement est valable pour n'importe quelles deux lignes consécutives, cela signifie que la deuxième colonne en partant de la droite ne contient aucune case noire, ce qui est contraire à l'hypothèse.



On a donc montré que n ne pouvait valoir $4k-1$. Ainsi, $n \geqslant 4k$.

Réciproquement, on peut bien construire un tableau $4k\times 4k$ satisfaisant la propriété de l'énoncé. Pour trouver une telle construction, on essaye bien sûr de trouver une construction pour des petites valeurs de k. Voici un construction dans le cas général : on découpe le tableau $4k\times 4k$ en 4 carrés de côté $2k\times 2k$. Le carré $2k\times 2k$ du coin supérieur gauche est appelé SG, le carré $2k\times 2k$ du coin inférieur gauche est appelé SD, le carré $2k\times 2k$ du coin supérieur droit est appelé IG et le carré $2k\times 2k$ du coin inférieur droit est appelé ID.

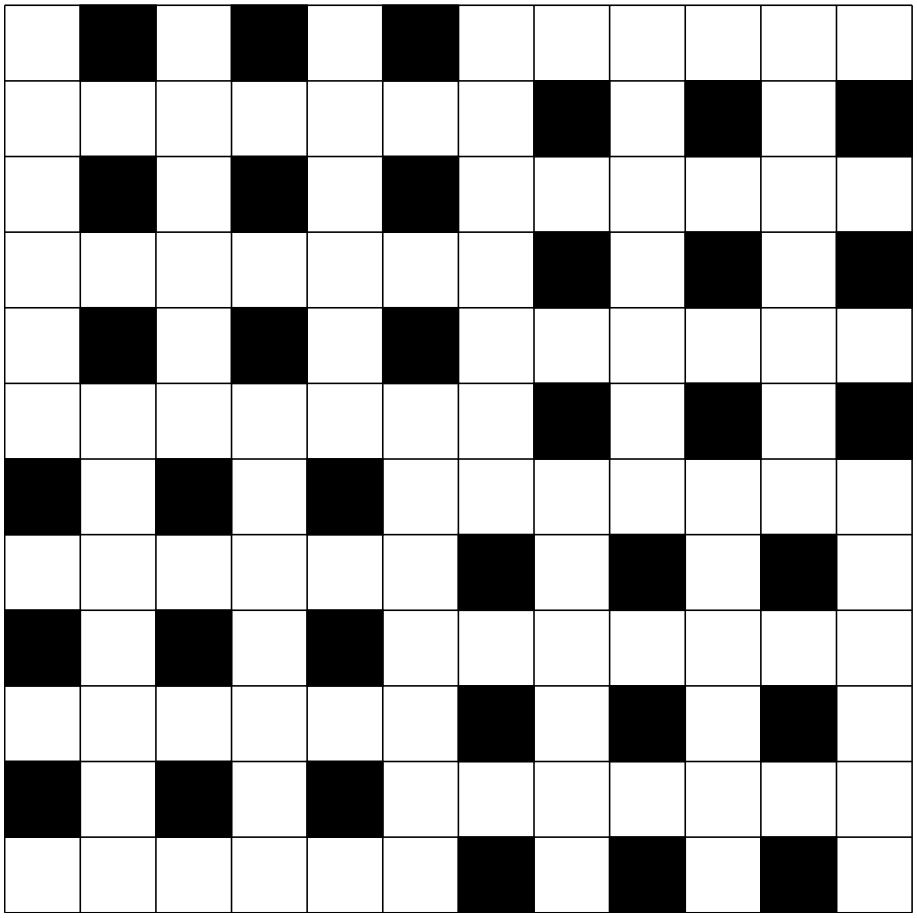
On quadrille le carré SG avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin supérieur droit.

On quadrille le carré SD avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin inférieur droit.

On quadrille le carré IG avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin supérieur gauche.

On quadrille le carré ID avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin inférieur gauche.

On a représenté ici un configuration vérifiant la propriété pour $k = 3$.



Commentaire : Ce problème était très difficile et très peu d'élèves ont réussi à trouver des résultats significatifs. Certains ont trouvé une construction pour $n = 5k$, mais rarement pour $n = 4k$. Une majorité d'élèves n'ont pas compris l'énoncé du problème, et croyaient qu'il fallait trouver une construction avec n minimal tel qu'il existe $k > 1$ pour que la construction fonctionne. Cependant, la plupart de ces élèves n'ont pas réussi à trouver la construction avec $n = 8$ et $k = 2$.

III. Groupe A

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre et Géométrie

1 Découverte des Mathématiques (Antoine)

Manipulations algébriques

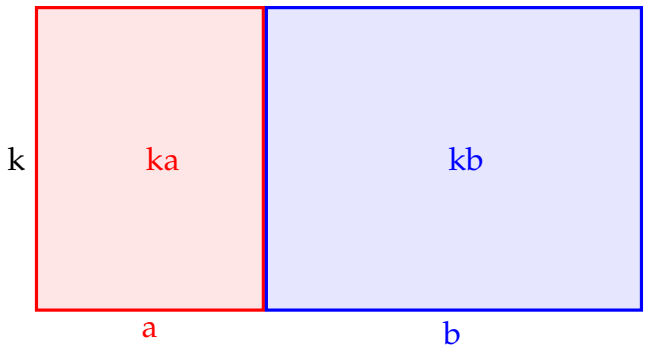
Dans beaucoup d'exercices, on nous donne une certaine expression, qu'il faut ensuite transformer pour qu'elle soit plus agréable et plus utile pour la résolution du problème.

Exemple 1.
Montrer que si $n \geqslant 2$, $4n^2 - 1$ n'est pas un nombre premier.
(On dit que p est un nombre premier si $p \neq 1$ est tel qu'on ne puisse pas l'écrire sous la forme $p = ab$ avec $1 < a, b < p$).

On veut donc montrer qu'on peut trouver a et b tels que $4n^2 - 1 = ab$ et $1 < a, b < 4n^2 - 1$, on dit qu'on cherche à *factoriser* $4n^2 - 1$.

Proposition 2 (Distributivité)**.**
On a l'égalité suivante, appelée distributivité, valable pour tous a, b, k : $k(a + b) = ka + kb$.
On dit que $k(a+b)$ est la forme factorisée puisque c'est un produit, et que $ka+kb$ est la forme développée, parce que l'opération "principale" est une somme et plus un produit.

Démonstration.
Une preuve géométrique marche très bien, et les identités remarquables que nous verrons juste après en ont une aussi, elles ont (normalement) été vues en classe.



□

Il est souvent plus intéressant d'avoir la forme factorisée, par exemple le fait que l'un des facteurs est nul si le produit est nul, ou encore des relations de divisibilité (que vous verrez plus tard dans la semaine).

Parfois on devra utiliser cette identité plusieurs fois pour obtenir un résultat totalement factorisé et utile.

Exemple 3.
$ab + a + b + 1 = a(b + 1) + b + 1 = (b + 1)(a + 1)$

Certaines identités sont à connaître et à savoir reconnaître n'importe où, elles sauvent des vies ! (on dit que ce sont des identités remarquables)

Proposition 4 (Identités remarquables)**.**

- $(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (c'est la précédente en remplaçant b par $-b$)
- $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

Revenons à notre exemple précédent avec $4n^2 - 1$: On a $4n^2 - 1 = (2n)^2 - 1^2 = (2n - 1)(2n + 1)$, et on a bien réussi à factoriser cette expression ! (Quand je dis qu'elles peuvent sauver des vies...)

Exercice 1
Factoriser le plus possible $a^4 - b^4$.

Solution de l'exercice 1
On a $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.
Remarquez que l'un des facteurs ici est $a - b$, rappelez-vous en pour la suite...

Exercice 2
Factoriser $a^4 + 4b^4$ (c'est l'identité de Sophie Germain)
Indice : on a $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$.

Solution de l'exercice 2
On reconnaît coup sur coup deux identités remarquables (à croire que c'était fait exprès) :
$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$.

On peut ici voir qu'il faut parfois faire "apparaître" les termes manquants pour qu'on puisse factoriser comme il se doit, et c'est là que réside toute la difficulté de tels problèmes. Un autre exemple pour la route :

Exemple 5.
$a^3 - b^3 = a^3 + a^2b + b^2a - a^2b - b^2a - b^3 = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Tiens d'ailleurs... On a $a^1 - b^1 = (a - b)(1)$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, il y aurait pas un paterne là ?
La réponse est oui (waw !) :

Proposition 6.
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} + b^{n-2}a + b^{n-1})$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de droite, tout se simplifie magiquement ! □
Pour montrer qu'elle est effectivement juste, il suffit de partir du membre de droite et de

développer, tout se simplifie magiquement !
Si maintenant on suppose en plus n impair, on peut remplacer b par $-b$ dans la formule précédente, pour avoir

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - b^{n-2}a + b^{n-1}).$$

Exercice 3
Calculer $x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n$, avec $x \neq 1$ et $m < n$.

Solution de l'exercice 3
On a $x^m + \ldots + x^{n-1} + x^n = x^m(1 + \ldots + x^{n-m-1} + x^{n-m}) = x^m(1^{n-m} + 1^{n-m-1}x + \ldots + 1 \times x^{n-m-1} + x^{n-m} = x^m\left(\frac{x^{n-m+1} - 1}{x-1}\right) = \frac{x^{n+1} - x^m}{x-1}$

Implication, équivalence, négation

Ce bout du cours regroupe des définitions importantes de logique qui sont surtout là pour poser les bases pour la partie d'après. Du moment que vous maîtrisez la partie suivante, ça ne sert à rien de connaître celle-là dans tous les détails.

Toutes les définitions ci-après possèdent une interprétation en termes d'inclusions d'ensembles, elles ont été vues en classe.

Définition 7 (Implication)**.**
Soient A et B deux phrases, pouvant être vraies ou fausses (qu'on appelle aussi propositions). On dit que A implique B (noté $A \implies B$) si dès que A est vérifiée, B l'est également.

Exemple 8. Si A est la phrase "J'ai tué Bob" et B est la phrase "Bob est mort", on a bien A implique B : si j'ai tué Bob, Bob est forcément mort.
Un exemple un peu plus mathématique peut-être : si $x \geqslant 1$, alors $x \geqslant 0$.

En général, on repère une implication (par exemple dans un énoncé) par la présence d'un "si", souvent suivi d'un "alors"

Exemple 9.
Soient $a, b > 0$. Montrer que si $a + b = 2$, alors $ab \leqslant 1$.

Définition 10 (Équivalence)**.**
On peut voir sur tous ces exemples qu'il peut arriver que B soit vérifiée sans que A ne soit vérifiée : ce n'est pas parce que Bob est mort que je l'ai tué !
Des fois on veut que A soit vérifié exactement quand B est vérifié : on veut que $A \implies B$ et que $B \implies A$. On appelle ça une équivalence, qu'on note $A \iff B$, on dit alors que A est équivalente à B, ou encore que A et B sont équivalentes, ou encore A si et seulement si B.

Exemple 11.
Si A est la phrase $x \geqslant 0$ et B est la phrase $x^3 \geqslant 0$, on a bien $A \iff B$.

(Oui le premier exemple est un exemple mathématique, essayez de trouver deux phrases équivalentes de la vie de tous les jours qui ne soient pas simplement une reformulation basique l'une de l'autre, vous verrez)
Nous verrons d'autres exemples un peu plus loin, ne vous en faites pas.

Définition 12 (Négation)**.**
Si on nous donne une proposition A (donc une phrase pouvant être ou vraie ou fausse), la négation de A est le contraire de A, noté $\neg A$.
Dit dans des termes plus compliqués, $\neg A$ est telle que "A est vraie" $\iff$ "$\neg A$ est fausse".

Exemple 13.
Si A est la proposition "Bob est mort", sa négation est "Bob est vivant".
Si A est "$x < 0$", alors sa négation est "$x \geqslant 0$", et enfin la négation de "Pour tout $x > 0, x^2 + 2x - 3 > 0$" est "Il existe $x > 0$ tel que $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$".

Ces définitions n'ont pas grand intérêt en elles-mêmes, mais elles permettent de résoudre beaucoup de problèmes si elles sont utilisées dans des raisonnements complexes et construits.

Raisonnements usuels

• Pour montrer que $A \implies B$, il est possible de juste supposer A et de montrer B par implications successives : en effet il est clair que si $A \implies B$ et $B \implies C$, alors $A \implies C$, il suffit d'appliquer la définition.

Exemple 14.
Trouvons les fonctions f telles que $f(x) - 2xf(\frac{1}{x}) = x$ pour $x \neq 0$.
Si on remplace x par $\frac{1}{x}$, on obtient $f(\frac{1}{x}) - \frac{2}{x}f(x) = \frac{1}{x}$, donc $f(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x}f(x) + \frac{1}{x}$.
En remplaçant dans l'équation de base on a $f(x) - 2x(\frac{2}{x}f(x) + \frac{1}{x}) = x$, soit $f(x) - 4f(x) - 2 = x$, et finalement $f(x) = -\frac{x+2}{3}$. On a raisonné par implications successives, donc on sait juste que si f vérifie l'équation de départ, alors $f(x) = -\frac{x+2}{3}$, on ne sait pas si $f(x) = -\frac{x+2}{3}$ vérifie l'équation de départ. Ceci se vérifie néanmoins aisément.

• Raisonnement par contraposée

Définition 15 (Contraposée)**.**
Si $A \implies B$ est vraie, alors sa contraposée définie par $\neg B \implies \neg A$ l'est également.
(Interprétation à l'aide d'inclusions d'ensembles vue en classe.)

Exemple 16.
Reprenons l'exemple de Bob, si Bob n'est pas mort, alors je ne l'ai pas tué !

Ainsi, il sera parfois plus simple de supposer $\neg B$ et de montrer $\neg A$ que de directement supposer A et montrer B.

Exemple 17.
Montrer que si n^2 est impair, alors n l'est aussi.
Étonnament on va raisonner par contraposée, supposons donc que n est pair, écrivons $n = 2k$.
Alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$, et n^2 est pair. Par contraposée, si n^2 est impair, n est bien également

impair.
On pourrait montrer exactement de la même manière que si n^2 est pair alors n est également pair, ça peut faire un bon exercice.

- Raisonnement par disjonction de cas

"Disjonction" ça ressemble à "distinguer" (c'est surtout un gros mot pour dire "ou" en logique) : on va distinguer les cas. L'idée est de séparer tous les cas possibles en plusieurs catégories, et résoudre chacune d'entre elles à part.
Dans certains problèmes où on vous demandera de trouver toutes les solutions entières à une certaine équation, vous arriverez à montrer qu'il n'est pas possible qu'il y ait des solutions pour $n > 42$, et vous devrez ensuite trouver toutes les solutions pour $n \leqslant 42$.

Exemple 18.
Un exemple gentil pour commencer : Montrer que pour x réel, $x^2 \geqslant 0$.
On distingue deux cas :

— $x \geqslant 0$. Alors $x \times x$ est un produit de deux nombres positifs, il est également positif.

— $x < 0$. Alors $x \times x$ est un produit de deux nombres négatifs, il est positif.

Dans tous les cas $x^2 \geqslant 0$, donc un carré est toujours positif.

Exercice 4
Trouver les valeurs de n pour lesquelles $n^2 + 6n + 1$ est un carré parfait, où n est un entier relatif.

Solution de l'exercice 4
On utilise une petite astuce, qui est qu'un nombre strictement compris entre deux carrés consécutifs ne peut pas être un carré parfait. Ici, on utilise nos identités remarquables adorées pour encadrer l'expression de l'énoncé :

— Pour $n > 2$, on a $n^2 + 4n + 4 < n^2 + 6n + 1 < n^2 + 6n + 9$,

— Pour $n < -8$, on a $n^2 + 8n + 16 < n^2 + 6n + 1 < n^2 + 6n + 9$.

On distingue donc les cas suivants :

— $n < -8$: Pas de solutions

— $n = -8$: Pas une solution

⋮

— $n = 1$: Pas une solution

— $n = 2$: Pas une solution

— $n > 2$: Pas de solutions

Dans les $\cdots$ se cachent deux nombres qui donnent une solution : -6 et 0, ce sont donc les seules.

Bien sûr la rédaction n'a pas à être aussi détaillée, dire qu'entre -8 et 2 il n'y a que -6 et 0 qui sont solutions suffit amplement, ici c'est pour montrer que c'est une disjonction de cas

qui se cache derrière.

• Raisonnement par l'absurde

Comme son nom l'indique, le raisonnement par l'absurde cherche à aboutir à une absurdité.
L'idée est de supposer $\neg A$ et d'aboutir à une contradiction, à quelque chose qui est toujours faux ($0 > 1$ par exemple). Cela signifie que $\neg A$ est forcément faux, donc que A est vrai.
Démonstration. On peut le montrer de deux façons différentes :

— Par disjonction de cas : On a A ou $\neg A$, et dans aucun cas on a $\neg A$, donc on a tout le temps A.

— Par contraposée : Si $\neg A \implies$ Faux, alors Vrai $\implies A$, donc A est vraie dès que Vrai est vraie, autrement dit tout le temps.

□

Exemple 19.
Montrons que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme un rapport de deux nombres entiers, on dit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, soient donc a, b des entiers tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On a alors $\frac{a^2}{b^2} = 2$, ou encore $a^2 = 2b^2$. À ce moment là, on remarque que a^2 est pair, donc a est pair, il s'écrit sous la forme $a = 2a'$.
On remplace notre nouvelle expression de a dans l'équation de départ, on trouve $b^2 = 2a'^2$. Ainsi, b^2 est pair, et on a donc $b = 2b'$. En remplaçant, on trouve $a'^2 = 2b'^2$. Cette solution ressemble beaucoup à la solution initiale, puisque on a également $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$. En plus, la solution est strictement plus petite qu'avant. Si on continue ainsi, on trouvera une solution de plus en plus petite tout en restant dans les entiers, ce qui n'est pas possible puisque $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, il y aura un moment où ce ne sera plus le cas.
On appelle un tel raisonnement une descente infinie.

Exercice 5
Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution de l'exercice 5
Si $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel, alors $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ également, et $\sqrt{6}$ est aussi rationnel. On raisonne alors de la même manière que précédemment, pour aboutir à une contradiction.

• Raisonnement par équivalence

Un raisonnement par équivalence consiste à faire des équivalences successives qui sont toutes assez simples à partir de ce qu'on veut montrer pour aboutir à quelque chose qui est toujours vrai, ce qui montre que la proposition de départ est également toujours vraie, du fait qu'on a équivalence entre la proposition de départ et la proposition d'arrivée.

Exercice 6
Montrer que si a, b sont des réels positifs, alors $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (on appelle ça l'inégalité arithmético-géométrique).

Solution de l'exercice 6
On a la succession d'équivalences suivantes :

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \iff a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \iff a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0 \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Or un carré est toujours positif, et comme on a raisonné par équivalence, on a bien $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

S'il reste du temps, d'autres exercices, peut-être introduction aux quantificateurs.

2 Chasse aux angles (Auguste)

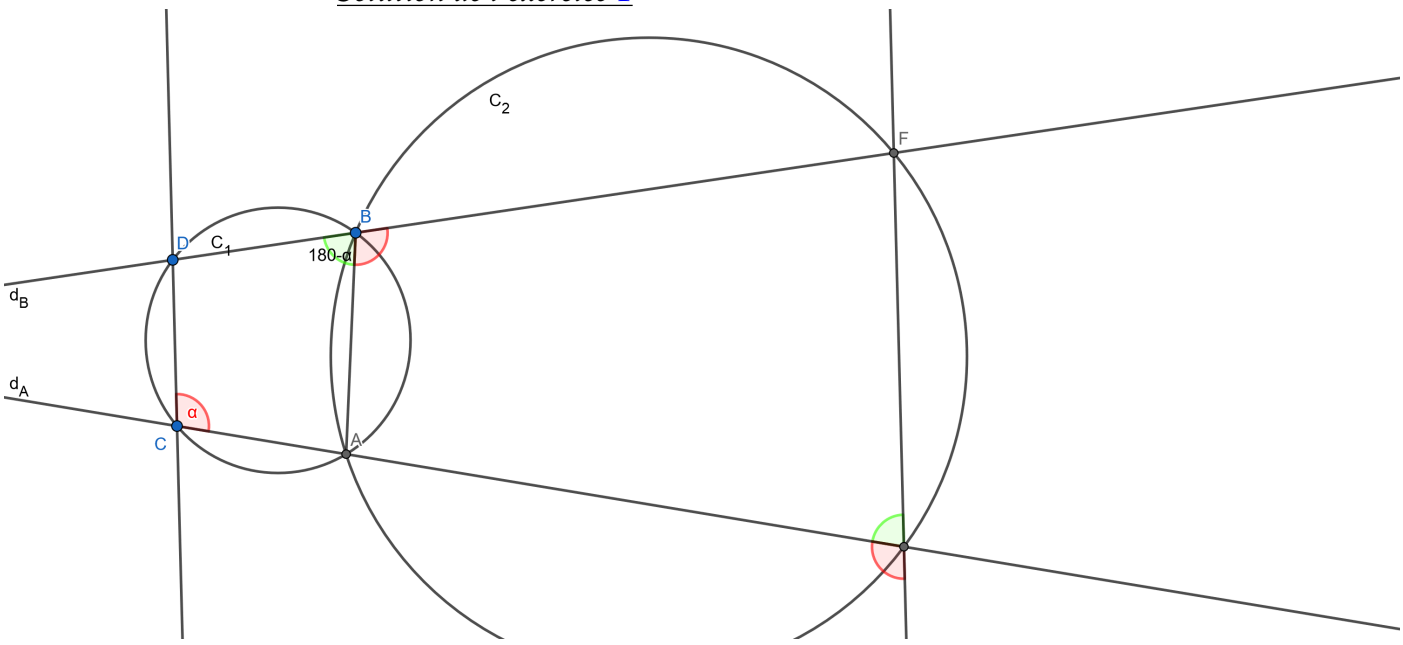
Conseils

-Tracer une grande figure faisant clairement apparaitre les éléments à démontrer.
-Ajouter autant d'éléments qu'il en est nécessaire pour votre démonstration.
-Mettre des couleurs ! Cela facilite la lisibilité.
-Définir toutes les notations utilisées.

Exercices

Exercice 1
Soient C_1, C_2 deux cercles ayant deux points d'intersection A et B. Soient d_A une droite passant par A et $d_B$une droite passant par B. On note C et E les points d'intersection de d_A avec C_1 et C_2 respectivement, et on définit de même D et F comme les points d'intersection de d_B avec C_1 et C_2 respectivement. Montrer que les droites CD et EF sont parallèles.

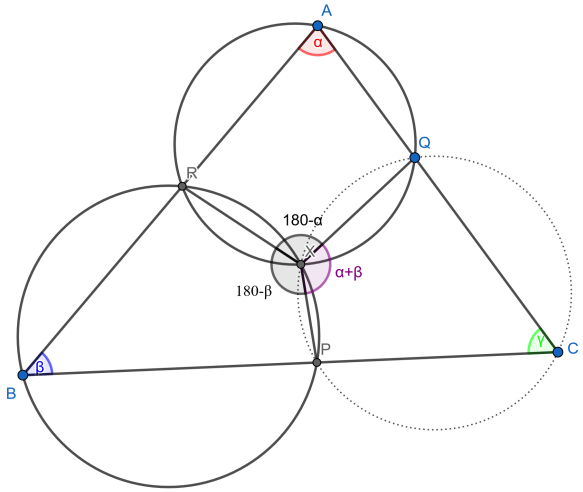
Solution de l'exercice 1



On note $\alpha = \widehat{ACD}$. Donc $\widehat{ABD} = 180 - \alpha$, or $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ABF}$ sont supplémentaires, il suit $\widehat{ABF} = \alpha$. Ainsi, $\widehat{AEF} = 180 - \alpha$. Donc, par angle alternes-internes, on a bien que $CD \parallel EF$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, P un point de BC ,Q un point de CA,R un point de AB. Les cercles circonscrits à AQR et à BRP ont pour second point d'intersection X.Montrer que X est aussi sur le cercle circonscrit à CPQ.

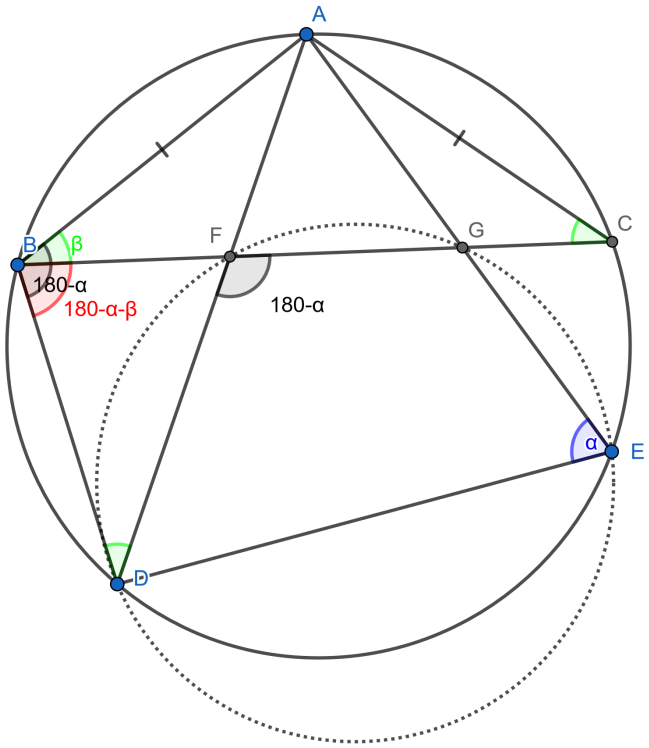
Solution de l'exercice 2



On note $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$. Comme B, R, X, P et A, R, X, Q sont cocycliques, on a $\widehat{RXP} = 180 - \beta$ et $\widehat{RXQ} = 180 - \alpha$. D'où $\widehat{PXQ} = \alpha + \beta$. Or, $\alpha + \beta + \gamma = 180$. Donc, P, C, Q, X sont cocycliques.

Exercice 3
Soit $\mathcal{C}$ un cercle et BC une corde de ce cercle. Soit A le milieu de l'arc BC. On considère deux cordes de $\mathcal{C}$ passant par A, notons-les AD et AE, et F et G les points d'intersection respectifs de ces cordes avec BC. Montrer que les points D, E, F, G sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3

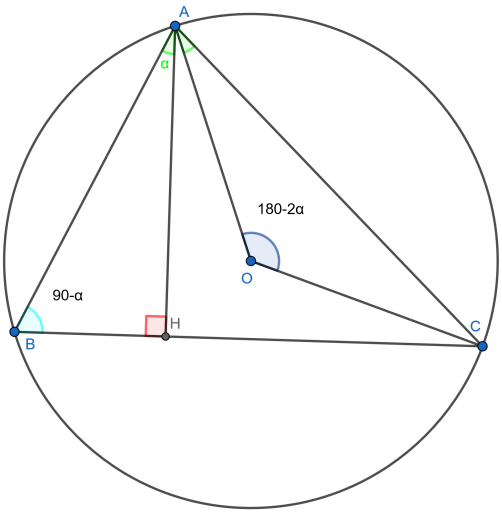


On note $\widehat{AED} = \alpha$ et $\widehat{ABC} = \beta$. Par cocyclicité, on a $\widehat{ABD} = 180 - \alpha$, et comme ABC est isocèle en A (car A milieu de l'arc BC), alors $\widehat{BCA} = \beta$. Il suit par angle inscrit $\widehat{ADB} = \beta$. Or, on a $\widehat{DFC} = \widehat{FDB} + \widehat{FBD}$, d'où $\widehat{DFC} = \beta + (180 - \alpha - \beta) = 180 - \alpha$. Donc, on a bien D, E, F, G cocyclique.

Exercice 4

Soit C_* un cercle de centre O. Soit A, B, C trois points distincts de C_*. Soit H le pied de la hauteur issu de A. Montrer que $\widehat{HAB} = \widehat{OAC}$.

Solution de l'exercice 4

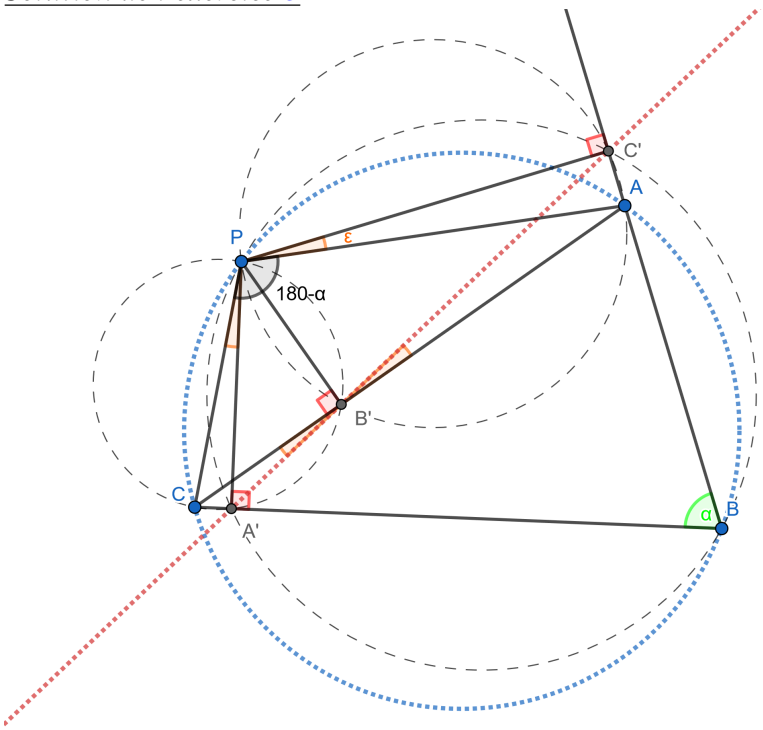


Soit $\alpha = \widehat{HAB}$. Donc, comme HAB est rectangle, $\widehat{ABH} = 90 - \alpha$. D'où, par angle au centre, $\widehat{AOC} = 180 - 2\alpha$. Or, AOC est isocèle en O, donc $\widehat{OAC} = \frac{180 - \widehat{AOC}}{2} = \alpha$. On a bien $\widehat{HAB} =$

$\widehat{OAC}$.

Exercice 5
(Droite de Simpson) Soit ABC un triangle, P un point et A', B', C' ses projetés orthogonaux sur les côtés $(BC), (CA), (AB)$ du triangle. Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si P est sur le cercle circonscrit à ABC.

Solution de l'exercice 5

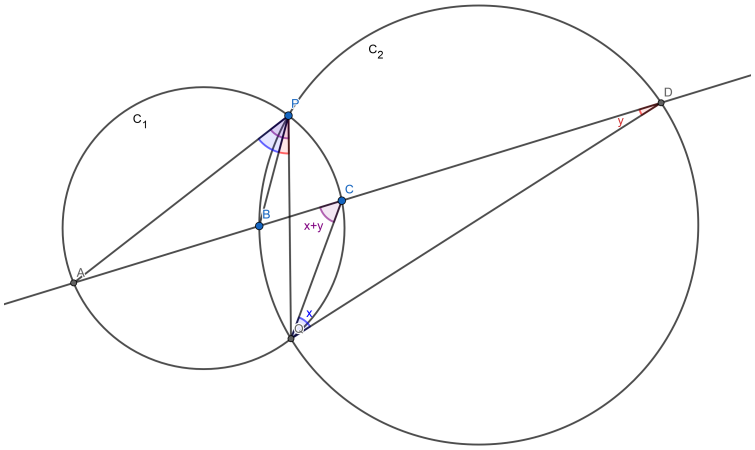


1^{er} sens : On suppose A', B', C' alignés. On suppose de plus, sans perdre de généralité (quitte à renommer A, B, C) que P est dans l'angle saillant $\widehat{ABC}$. Alors, en posant $\alpha = \widehat{ABC}$, on a, vu que $PC'BA'$ sont cocycliques (car $\widehat{PC'B} + \widehat{PA'B} = 90 + 90 = 180$), que $\widehat{C'PA'} = 180 - \alpha$. En posant $\epsilon = \widehat{C'PA}$, on a comme $PC'AB'$ cocycliques, par angle inscrit, $\widehat{AB'C'} = \epsilon$. Donc, comme A', B', C' sont alignés, par angle opposés par le sommet, $\widehat{CB'A'} = \epsilon$, donc, avec $PCA'B'$ cocycliques, par angle inscrit, on a $\widehat{CPA'} = \epsilon$. Ainsi, $\widehat{CPA} = 180 - \alpha$. D'où, $PABC$ sont cocycliques.

2^{eme} sens : On suppose P sur le cercle circonscrit à ABC. On garde les notations précédentes. On a ainsi que $\widehat{CPA} = 180 - \alpha = \widehat{A'PC'}$. D'où $\epsilon = \widehat{C'PA} = \widehat{CPA'}$. Il suit, par angle inscrit dans $PCA'B'$ et $PC'AB'$, $\widehat{CB'A'} = \epsilon = \widehat{C'B'A}$. Or, A, B', C sont alignés, donc $\widehat{CB'A'}$ et $\widehat{C'B'A}$ sont opposés par le sommet, ainsi, A', B', C' sont bien alignés.

Exercice 6
Soient C_1, C_2 deux cercles ayant deux points d'intersection P et Q. Soit d une droite coupant C_1 en A et C et C_2 en B et D, les points étant disposés dans l'ordre A, B, C, D sur d. Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Solution de l'exercice 6



On note $x = \widehat{CQD}$, et $y = \widehat{CDQ}$. On a, comme la somme des angles d'un triangle vaut 180, $\widehat{ACQ} = x + y$. De plus, par angle inscrit dans C_2, $\widehat{BPQ} = y$, et par angle inscrit dans C_1, $\widehat{APQ} = x + y$. Il suit $\widehat{APB} = \widehat{APQ} - \widehat{BPQ} = x = \widehat{CQD}$.

3 Introduction aux inégalités (Raphaël Ducatez)

Propriétés de base pour les inégalités

Vous connaissez très surement les inégalités et avez sans aucun doute déjà fait beaucoup d'exercices avec. Ci dessous je commence par rappeler les propriétés de bases et manipulations autorisées lorsqu'on joue avec des inégalités.

L'inégalité est une relation

1. "transitive", on a pour $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$x \leqslant y \quad \text{et} \quad y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant y.$$
2. stable par addition d'une constante pour tout $x, y, a \in \mathbb{R}$ on a
$$x \leqslant y \Leftrightarrow x + a \leqslant y + a,$$
3. stable par multiplication par une constante strictement positive pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$
$$x \leqslant y \Leftrightarrow \lambda x \leqslant \lambda y,$$
4. Change de sens par multiplication par une constante strictement négative pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda < 0$
$$x \leqslant y \Leftrightarrow \lambda x \geqslant \lambda y,$$
5. stable par addition
$$\begin{cases} x_1 \leqslant y_1 \\ x_2 \leqslant y_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2,$$
6. stable par multiplication si les termes sont positives pour tout $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1 \leqslant y_1 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \leqslant y_1 \cdot y_2,$$

Remarque 1.
La division par un scalaire fonctionne de la même manière que la multiplication il suffit de multiplier par $\frac{1}{\lambda}$, si $\lambda > 0$ $x \leqslant y \Leftrightarrow \frac{x}{\lambda} \geqslant \frac{y}{\lambda}$,.

Mentionnons également ce petit lemme qui a une saveur toute particulière dans les exercices de maths olympiques.

Lemme 2.
Un carré est toujours positif.

Exemple 3.
Voici quelques exs

1. Si $2\sqrt{2} \leqslant 3$ et $3 \leqslant \pi$, on peut alors déduire $2\sqrt{2} \leqslant \pi$,
2. Avec l'addition on a $4x + 3 \leqslant y - 1 \Leftrightarrow 4x + 6 \leqslant y + 2$,
3. $2ab \leqslant a^2 + b^2$. En effet $(a - b)^2 \geqslant 0$ donc $a^2 + b^2 + 2ab \geqslant 0$ et donc $2ab \leqslant a^2 + b^2$.

Remarque 4.
Faire très attention lorsqu'on cherche à simplifier l'expression en multipliant ou divisant par un terme au signe du terme en question. L'inégalité reste correcte uniquement si le terme est positif. Si cela n'est pas clair, il faut le prouver. Par ex j'ai le droit de simplifier $2y \leqslant 6$ par $y \leqslant 3$ mais pas $xy \leqslant 3x$ car je ne sais pas si x est positif ou négatif.

Exercice 1
Résoudre les inégalités suivantes

1. $3x + 1 \geqslant -2$
2. $y \geqslant 1$ et $-2y \geqslant -2$
3. $y^2(x^2 + 1) - 1 \leqslant x^2$

Solution de l'exercice 1
On corrige :

1. On a

$$\begin{aligned} & 3x + 1 \geqslant -2 \\ \Leftrightarrow & 3x \geqslant -3 \\ \Leftrightarrow & x \geqslant -1. \end{aligned}$$

2. On sait que $-2y \geqslant -2 \Leftrightarrow y \leqslant 1$ on a alors que $y \leqslant 1$ et $y \geqslant 1$ donc $y = 1$.
3. On a

$$\begin{aligned} & y(x^2 + 1) - 1 \leqslant x^2 \\ \Leftrightarrow & y(x^2 + 1) \leqslant x^2 + 1 \end{aligned}$$

On sait que $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ on peut donc diviser des deux côtes

$$\begin{aligned} & y(x^2 + 1) \leqslant x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow & y \leqslant 1 \end{aligned}$$

Remarque 5.
Il y a plusieurs manière de résoudre une inégalité. La première est de procéder par équivalence il s'agit de faire une suite d'affirmations qui commence par l'énoncé et termine par la solution qui sont toutes équivalents les uns après les autres .

$$\begin{aligned}&\text{énoncé}\\ &\Leftrightarrow (1)\\ &\Leftrightarrow (2)\\ &\Leftrightarrow \cdots\\ &\Leftrightarrow (n)\\ &\Leftrightarrow \text{solution}\end{aligned}$$

L'avantage ici est que l'on a terminé dès que l'on a obtenu la solution. On aura montré à la fois que cela convient et que ce sont les seules correctes. L'inconvenient est que l'on ne peut utiliser que des équivalence et pas d'implications. La deuxième manière est procéder par Analyse-Synthèse. Il s'agit d'optenir le plus d'information possible sur la solution en utilisant des implications. Cette étape s'appelle l'analyse.

$$\text{énoncé} \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (n) \Rightarrow \text{solution (?)}$$

Une fois qu'on pense avoir bien cerné la solution. Il faut vérifier qu'elle fonctionne : solution $\Rightarrow$ énoncé. C'est la synthèse.

Exercice 2
A-t-on les équivalences suivantes ? Si non l'une des implications est-elle vraie ? Donner alors des contre exemples.

1. $-1 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1$
2. $x \leqslant 2 \Leftrightarrow 4x + 1 \leqslant 10$
3. $x \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$

Fonctions croissantes

Les fonctions croissantes sont des outils absolument essentielles lorsqu'on manipules des inégalité. On note I un intervale c'est à dire $I = [a, b]$ (ie $a \leqslant x \leqslant b$) ou $I = [a, \infty)$ (ie $x \geqslant a$) $I = (-\infty, a]$ (ie $x \leqslant a$) ou $I = \mathbb{R}$ (pas de condition sur x).

Définition 6. (Croissante/Décroissante)

— On dit que f est (strictement) croissante sur un intevale I si pour tout $x, y \in I$ avec $x < y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$ ($f(x) < f(y)$).

— On dit que f est (strictement) décroissante sur un intevale I si pour tout $x, y \in I$ avec $x \leqslant y$ alors $f(x) \geqslant f(y)$ ($f(x) > f(y)$).

Usuellement on pourra ne pas préciser l'intervalle I si $I = \mathbb{R}$ et dire "f est croissante" signifie f est croissante tout le temps. Cependant en général une fonction peut n'être croissante que sur un petit domaine. Préciser l'intervalle est alors essentielle.

Voici quelques règles de constructions de fonctions croissantes

Proposition 7. On a

1. f est croissante sur $I \Leftrightarrow x \to f(x) + a$ est croissante sur I.
2. Soit $\lambda > 0$ alors f est croissante sur $I \Leftrightarrow x \to \lambda f(x)$ est croissante sur I.
3. Soit $\lambda < 0$ alors f est croissante sur $I \Leftrightarrow x \to \lambda f(x)$ est décroissante sur I.
4. Si f et g sont croissantes sur I, alors $x \to f(x) + g(x)$ est croissante sur I.
5. Si f et g sont croissantes et positives sur I ($\forall x \in I, f(x) \geqslant 0$), alors $x \to f(x)g(x)$ est croissante sur I.

Proposition 8. (La composition de fonction) Si f est croissante sur I et g croissante sur J et pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ alors $h(x) := g(f(x))$ est une fonction croissante sur J.

Démonstration. Soit $x, y \in I$ avec $x < y$. Alors puisque f est croissante $f(x) \leqslant f(y)$. De plus $f(x), f(y) \in J$ donc puisque g est croissante sur J on a $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$ □

Ça marche aussi si f et g sont toutes les deux décroissantes dans ce cas on encore que $h(x) = g(f(x))$ est croissante. Par contre si f est décroissante et g croissante ou inversement si f est croissante et g décroissante alors $h(x) = g(f(x))$ est décroissante.

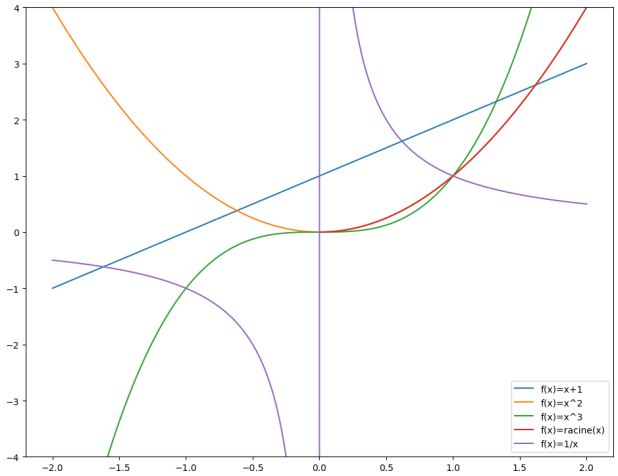
Exercice 3

Prouver ces cas ci.

Dans la suite on admettra la croissance ou décroissance des fonctions suivantes :

Proposition 9. (Liste de fonctions croissantes)

1. Si $f(x) = ax + b$ alors f est croissante si $a \geqslant 0$ et décroissante si $a \leqslant 0$.
2. Si $f(x) = x^2$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
3. Si $f(x) = x^n$ alors si n est impair f est croissante sur $\mathbb{R}$, si n est pair f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. (Attention : f n'est pas du tout décroissante sur $\mathbb{R}^*$)
5. Si $f(x) = \sqrt{x}$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
6. Si $f(x) =^n \sqrt{x}$ (la fonction qui inverse la puissance n : ${}^n\sqrt{x^n} = x$) alors f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
7. Si $f(x) = a^x$ avec $a > 0$ alors f est croissante si $a > 1$ et décroissante si $a < 1$.



À partir de ces fonctions de base et des règles de manipulations mentionnées au dessus on peut prouver la croissance ou la décroissance de plein d'autres fonctions.

Exercice 4
Donner le domaine de croissance ou décroisance des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x-4)^2 + 8$
2. $f(x) = \frac{1}{x^n}$
3. $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$

Exercice 5
Les fonctions suivantes sont-elles croissante ?

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $x \geqslant 1$.
2. $f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$ sur $x > 1$.
3. $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ sur $x \in \mathbb{R}$.

Polynomes du second degré

Nous considérons les polynomes du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et étudions les domaines sur lesquels $f(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$. La méthode est la même que pour trouver les racines d'un polynomes.

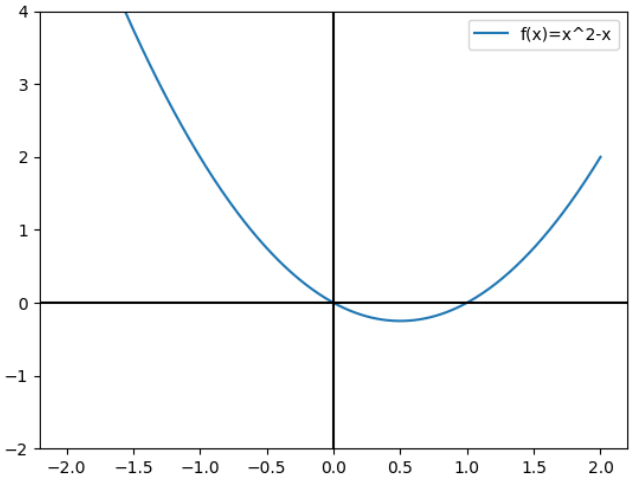
Théorème 10. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$. On note de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$ alors f admet 2 racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$f(x_1) = f(x_2) = 0$ et f est alors positive sur $x \leqslant x_1$, négative sur $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ et positive de nouveau sur $x \geqslant x_2$.

2. Si $\Delta = 0$ alors f admet une unique racine $x_1 = -\frac{b}{2a}$, on a alors $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors f admet aucune racine et on a alors $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.



Ce théorème est très visuelle lorsqu'on trace la courbe de f (une parabole). Ou bien la courbe traverse l'axe des abscisse et il y a deux points x_1, x_2 tel que $f(x_1) = f(x_2) = 0$ et f est négatif uniquement entre ces deux points. Ou bien la courbe touche juste l'axe des abscisse c'est le cas $\Delta = 0$ et la fonction est toujours positive et est nulle en un seul point. Ou bien la courbe reste bien au dessus de l'axe et c'est le cas $\Delta < 0$.

Exemple 11.
Voici quelques exs d'utilisation :

1. Soit $f(x) = 4x^2 - 4x$ (ici $a = 4$, $b = -4$ et $c = 0$) alors $\Delta = 4^2 - 4 \times 4 \times 0 = 16 > 0$. Donc
$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{16}}{2 \times 4} = 0 \text{ et } x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{16}}{2 \times 4} = 1$$
on en déduit alors que $f(x) \geqslant 0$ pour tous les $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ pour tous les $0 \leqslant x \leqslant 1$, et enfin $f(x) \geqslant 0$ pour tous les $x \geqslant 1$,
2. Soit $f(x) = x^2 + 2x + 2$ (ici $a = 1$, $b = 2$ et $c = 2$) alors $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$. Donc f n'admet aucune racine et $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On va commencer en supposant $a = 1$
$$f(x) = x^2 + bx + c$$
L'astuce est d'utiliser l'identité remarquable
$$(x + \frac{b}{2})^2 = x^2 + 2\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4} = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$$
et donc $x^2 + bx = (x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4}$. On a alors
$$f(x) = (x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

On peut ensuite résoudre $f(x) = 0$, c'est à dire

$$(x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$$

on note $\Delta = b^2 - 4c$. On cherche alors la solution à $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{\Delta}{4}$ On a alors

1. Soit $\Delta > 0$, dans ce cas $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{\Delta}{4}$ admet 2 solutions $x + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ ou $x + \frac{b}{2} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et donc $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$ ou $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$ que l'on notera $x_2$et x_1.
2. Soit $\Delta = 0$ dans ce cas $(x + \frac{b}{2})^2 = 0$ admet une unique solution $x = -\frac{b}{2}$.
3. Soit $\Delta < 0$ dans ce cas $(x + \frac{b}{2})^2 < 0$ n'admet aucune solution car un carré est toujours positif.

Passons maintenant aux inégalités, on a $f(x) \geqslant 0$ ssi $(x + \frac{b}{2})^2 \geqslant \frac{b^2}{4} - c$ c'est à dire $(x + \frac{b}{2})^2 \geqslant \frac{\Delta}{4}$.

1. Soit $\Delta > 0$, dans ce cas $(x + \frac{b}{2})^2 \geqslant \frac{\Delta}{4}$ c'est à dire $(x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2})^2 \geqslant 0$ et on peut alors utiliser une identité remarquable pour obtenir $(x + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2})(x + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}) \geqslant 0$. Il faut alors que les deux termes de la multiplications soient tout deux positifs ou tout deux négatifs. Ce qui donne $x \leqslant \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$ ou $x \geqslant \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$.
2. Soit $\Delta = 0$ dans ce cas $(x + \frac{b}{2})^2 \geqslant 0$ est toujours vrai car un carré est toujours positif,
3. Soit $\Delta < 0$ dans ce cas $(x + \frac{b}{2})^2 \geqslant \frac{\Delta}{4}$ est également toujours vrai pour la même raison.

□

4 Triangles semblables (Mathieu Barré)

À venir...

5 TD de géométrie (Martin et Pierre-Marie)

Exercices

Exercice 1
Soit A l'intersection de deux droites, et Γ un cercle tangent à ces deux droites en B, C. Montrer que ABC est isocèle en A.

Exercice 2
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercle tangents extérieurement en X. Soit (d) une droite tangente à ces deux cercles, en Y et Z.
Montrer que le triangle XYZ est rectangle en X.

Exercice 3
Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles s'intersectant en deux points distincts A et B. La tangente à $\mathcal{C}_1$ en A recoupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en C, et la tangente à $\mathcal{C}_2$ en B recoupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en D.
Montrer que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

Exercice 4
Soit ABC un triangle avec $AB < AC$, Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ au point A coupe la droite (BC) au point P. La bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$ coupe la droite (AB) au point R et la droite (AC) au point S. Montrer que le triangle ARS est isocèle en A.

Exercice 5
Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles s'intersectant en deux points distincts M et N. Une tangente commune à ces deux cercles coupe $\mathcal{C}_1$ en P et $\mathcal{C}_2$ en Q, la droite (PQ) étant plus proche du point M que du point N. La droite (PN) recoupe le cercle $\mathcal{C}_2$ au point R.
Montrer que la droite (MQ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PMR}$.

Exercice 6
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles tels que Γ_1 soit tangent intérieurement à Γ_2 en A. Soit P un point de Γ_2. Les tangentes à Γ_1 issues de P coupent Γ_1 en X et Y et Γ_2 en Q et R.
Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$

Exercice 7
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles tels que Γ_1 est tangent intérieurement à Γ_2 en A. Soit D un point de Γ_1. La tangente à Γ_1 en D coupe Γ_2 en M et N.
Montrer que (AD) est la bissectrice de $\widehat{MAN}$.

Exercice 8
Soit ABC un triangle, E le pied de la bissectrice issue de B, F le pied de la bissectrice issue de C et M le milieu du segment $[BC]$.
Montrer que (ME) est tangent au cercle circonscrit au triangle AEF.

Exercice 9
Théorème du pôle sud
Soit ABC un triangle. Montrer que le point d'intersection S de la bissectrice interne de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice de $[BC]$ se situe sur le cercle circonscrit à Γ.

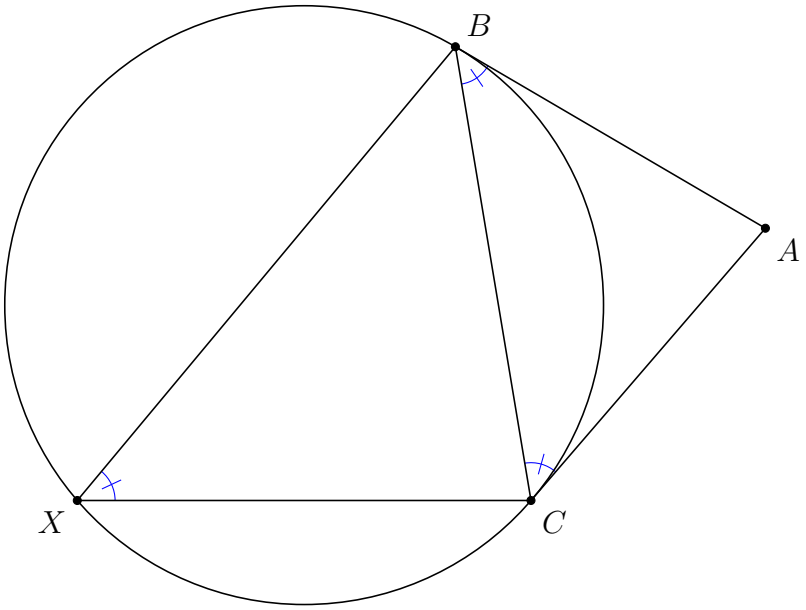
Exercice 10
Soit $ABCD$ un carré, dont les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O. Soit E un point au dessus de $[AB]$ tel que $\widehat{EAB} = 90$. Montrer que $\widehat{AEB} = \widehat{BEO}$.

Exercice 11
Soit A, B, C, D quatre points cocycliques dans cet ordre tels que (AC) est perpendiculaire à (BD) en N. Notons M le milieu du segment $[AB]$.
Montrer que (MN) est perpendiculaire à (CD).

Exercice 12
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Notons N l'intersection de la tangente à Γ en A avec (BC), M le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A, et D le point d'intersection des droites (BC) et (AM).
Montrer que $NA = ND$.

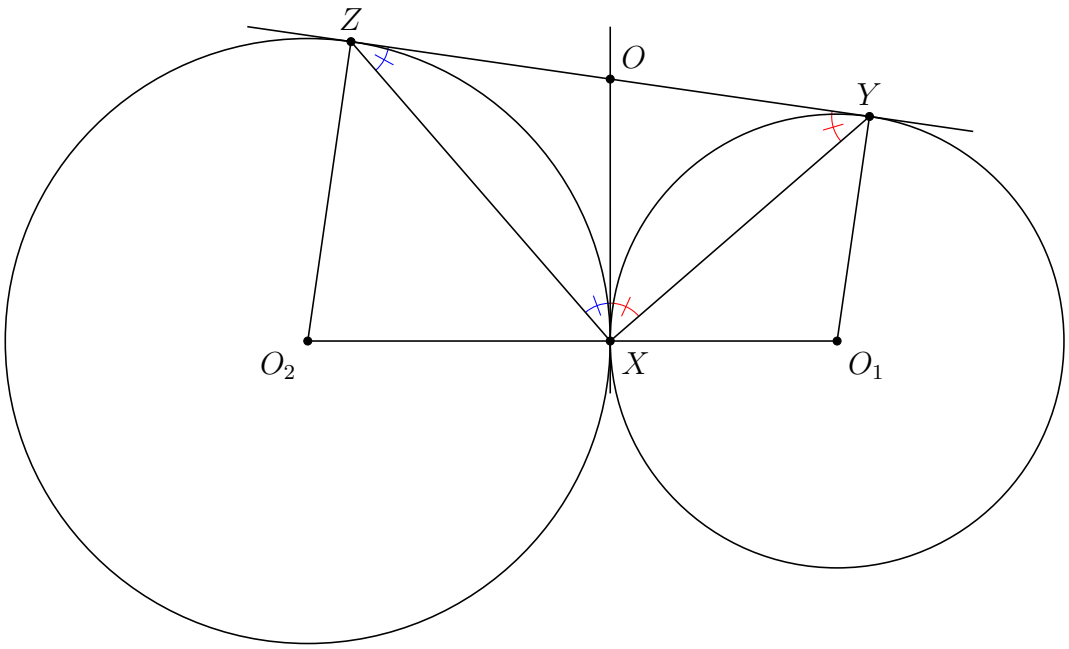
Solutions

Solution de l'exercice 1



D'après le théorème de l'angle tangent, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, donc le triangle ABC est isocèle en A.

Solution de l'exercice 2



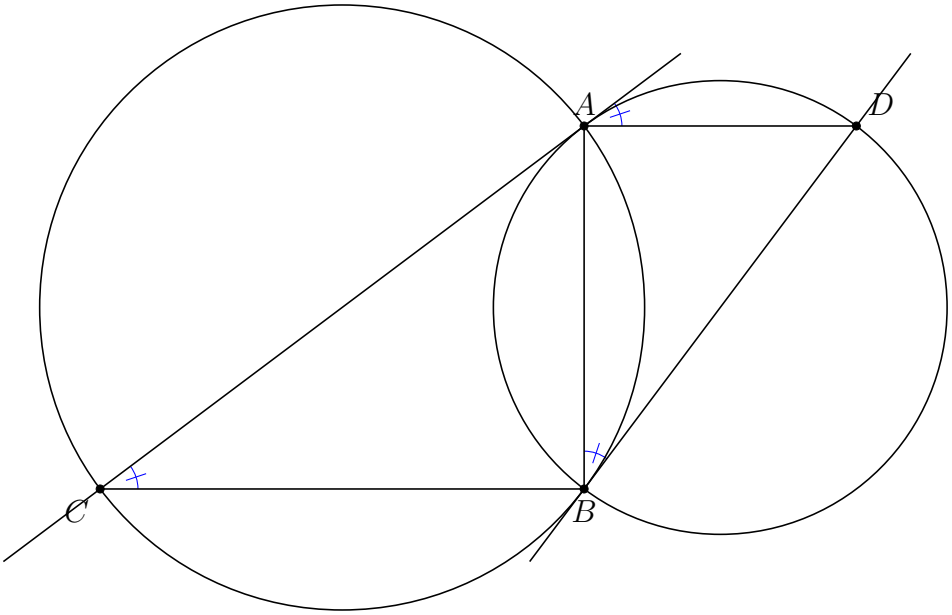
Il existe de nombreuses solutions, mais en voici une utilisant l'énoncé précédent. Introduisons la tangente commune aux deux cercles, qui coupe (YZ) en O.
Alors les triangles XYO et XZO sont isocèles en O. Ainsi

$$\widehat{YXZ} = \widehat{XZY} + \widehat{ZYX}$$

mais comme la somme des angles d'un triangle fait $180°$, nous en déduisons que $\widehat{YXZ} = 90°$.

Encore plus élégant car sans calculs : des deux triangles isocèles, nous aurions plu en déduire que O, milieu de $[YZ]$, était aussi le centre du cercle circonscrit à XYZ, donc qu'il s'agissait d'un triangle rectangle en X.

Solution de l'exercice 3

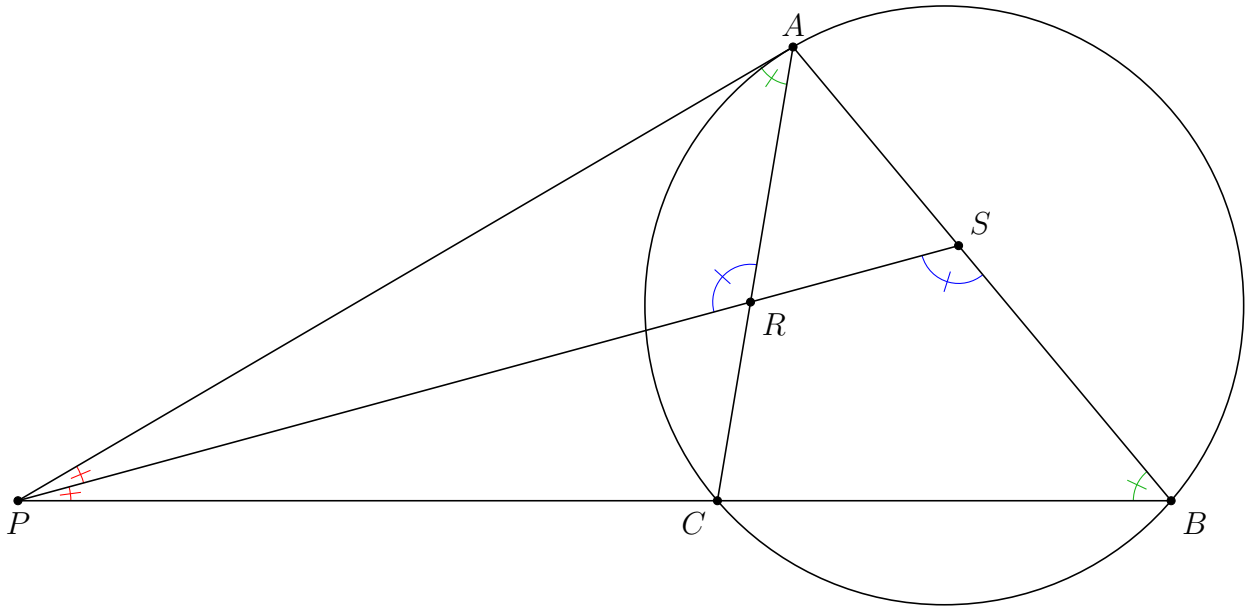


Là encore, on utilisera avec profit le théorème de l'angle tangent :

$$\widehat{BCA} = \widehat{DBA} = \widehat{DAt}$$

où t est la droite (CA). Ainsi, par théorème des angles correspondants, (CB) est parallèle à (AD).

Solution de l'exercice 4

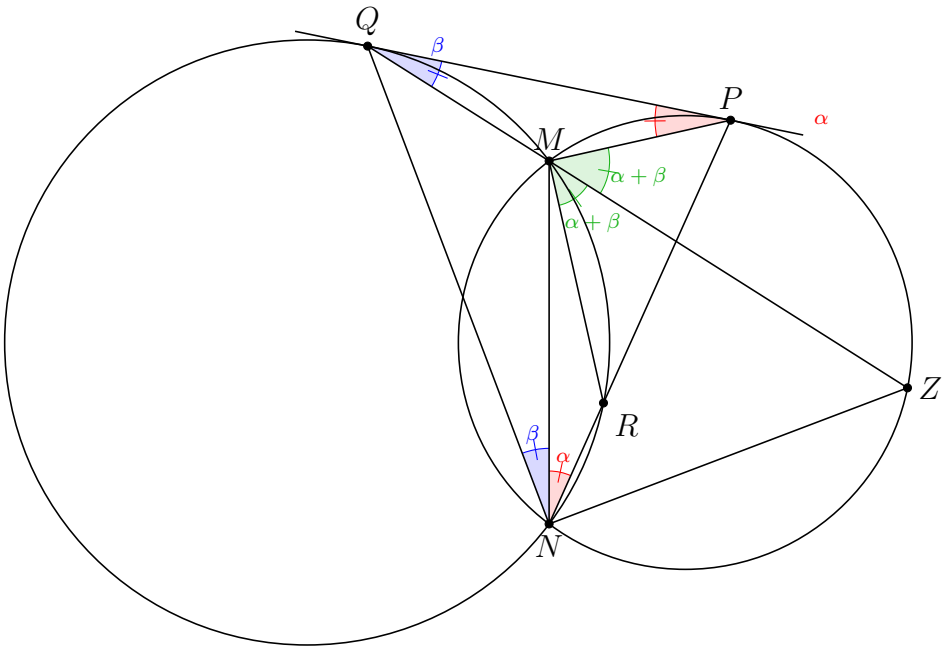


On montre que $\widehat{ARS} = \widehat{ASR}$, ce qui est équivalent à montrer que $180° - \widehat{ARS} = 180° - \widehat{ASR}$ donc que $\widehat{PRA} = \widehat{PSC}$. Or $\widehat{RPA} = \widehat{SPC}$ car la droite (RS) est bissectrice de l'angle $\widehat{APC}$. Aussi, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{PAR} = \widehat{BCA} = \widehat{PCS}$. On déduit

$$\widehat{PRA} = 180° - \widehat{PAR} - \widehat{RPA} = 180° - \widehat{SBP} - \widehat{BPS} = \widehat{PSC}$$

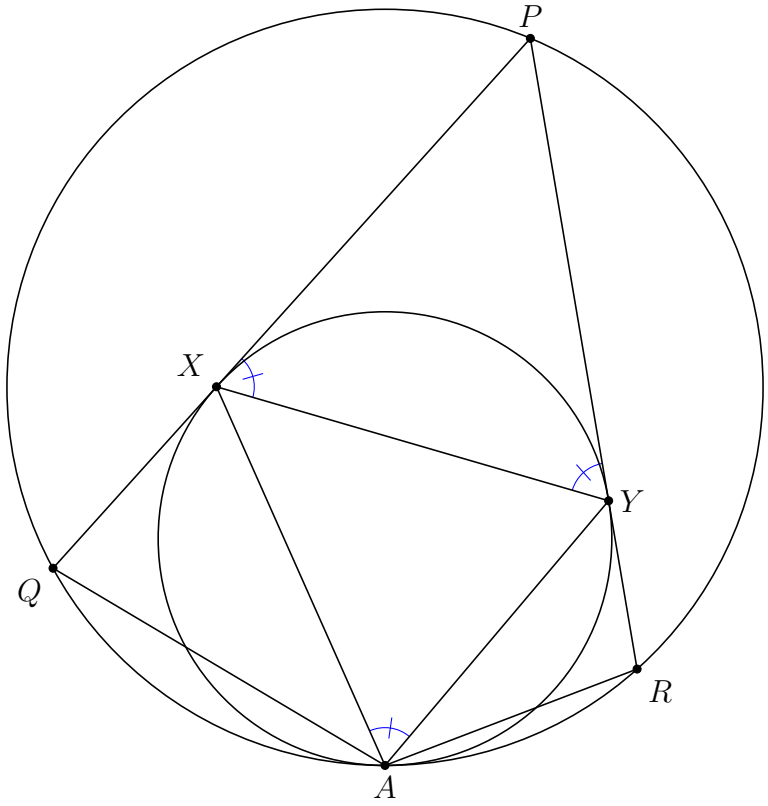
donc le triangle ARS est bien isocèle en A.

Solution de l'exercice 5



Nous avons, par théorème de l'angle tangent, que $\widehat{QPM} = \widehat{PNM}$ et $\widehat{MQP} = \widehat{MNQ}$, soit en appelant Z le point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et de (MQ), par propriété des quadrilatères inscriptibles, $\widehat{RMZ} = \alpha+\beta$. Dans le triangle PQM, on trouve aussi $\widehat{ZMP} = \alpha+\beta$, d'où (MQ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RMP}$.

Solution de l'exercice 6

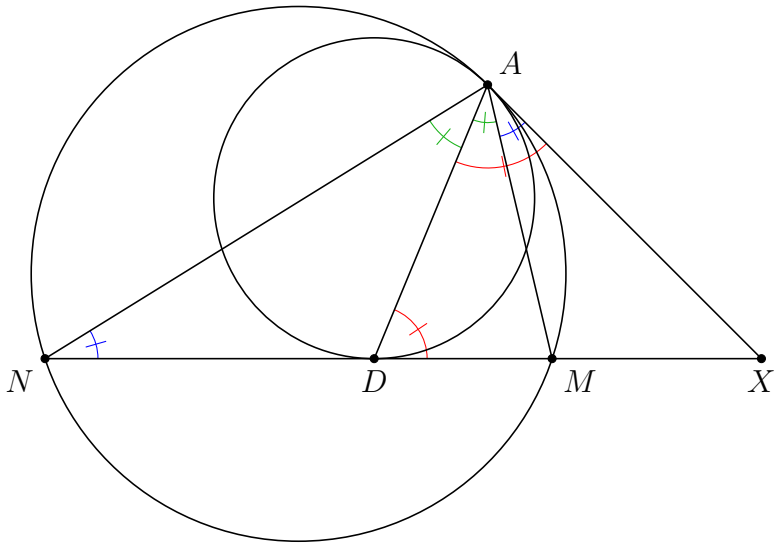


Puisque la droite (PX) est tangente au cercle ω_2 en X, $\widehat{XAY} = \widehat{YXP}$. de même on obtient $\widehat{XAY} = \widehat{XYP}$. La somme des angles du triangle XPY vaut 180, donc

$$\widehat{QPR} = \widehat{XPY} = 180 - \widehat{PXY} - \widehat{PYX} = 180 - 2\widehat{XAY}$$

D'autre part, les points P, R, A et Q sont cocycliques donc $\widehat{QPR} = 180 - \widehat{QAR}$. On déduit $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

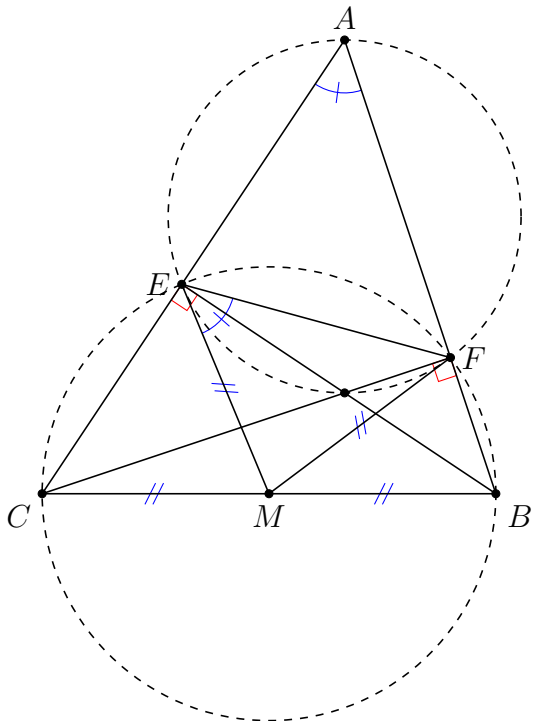
Solution de l'exercice 7



Si la droite (MN) est parallèle à la tangente commune aux cercles Γ et Γ', alors A et D sont alignés avec les centres de Γ et Γ' et M et N sont symétriques par rapport à a droite (AD) donc on a bien l'égalité d'angle voulue.

Sinon, on note X le point d'intersection de la tangente commune aux deux cercles avec la droite (MN) et on suppose quitte à échanger M et N que $XM < XN$. Puisque les tangentes à Γ' en D et X se coupent en X, le triangle AXD est isocèle en X, donc $\widehat{XDA} = \widehat{XAD}$. Puisque la somme des angles du triangle ADN vaut $180°$, on a $\widehat{XDA} = 180° - \widehat{ADN} = \widehat{DAN} + \widehat{DNA}$. Par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{DNA} = \widehat{MNA} = \widehat{XAM}$, on déduit que $\widehat{DAN} = \widehat{XDA} - \widehat{XAM}$. D'autre part, $\widehat{XAD} = \widehat{XAM} + \widehat{MAD}$ donc $\widehat{MAD} = \widehat{XAD} - \widehat{XAM}$. On retrouve bien, comme $\widehat{XAD} = \widehat{XDA}$, que $\widehat{MAD} = \widehat{NAD}$.

Solution de l'exercice 8



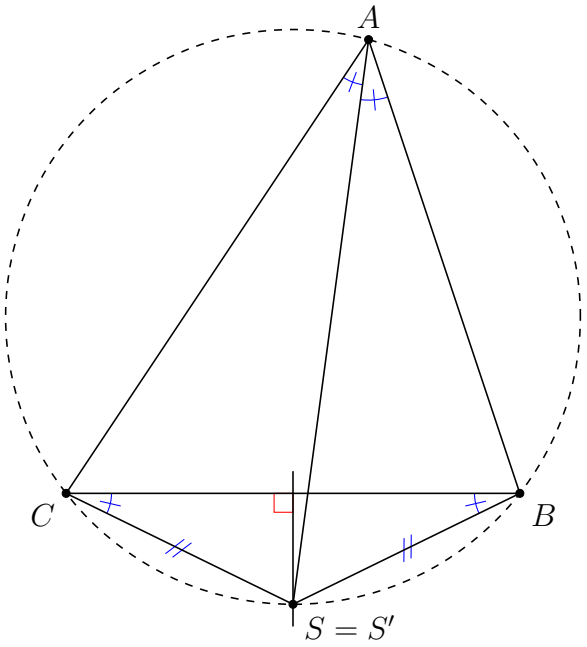
Puisque $\widehat{CEB} = \widehat{CFB} = 90°$, les points C, E, F et B sont cocycliques et le point M est le centre du cercle.

Le triangle MEF est donc isocèle en M. Ainsi, en utilisant que la somme des angles d'un triangle fait $180°$,

$$\widehat{MEF} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{EMF}$$

Or, $\widehat{EMF} = 2\widehat{EBF}$ d'après le théorème de l'angle au centre. Ainsi, $\widehat{MEF} = 90° - \widehat{EBF} = \widehat{EAF}$, donc d'après la réciproque du théorème de l'angle tangentiel, la droite (ME) est tangente au cercle circonscrit au triangle AEF.

Solution de l'exercice 9



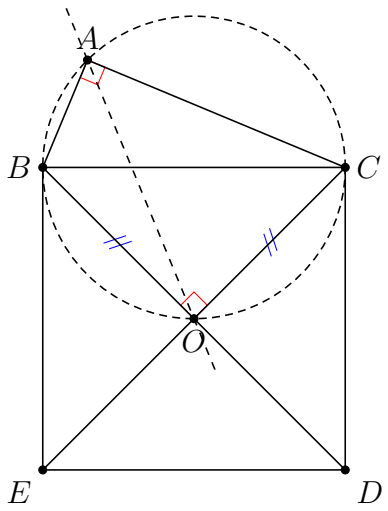
Le problème semble assez complexe sous cette forme : en effet, il est parfois nécessaire de reformuler le problème afin de le simplifier. Il faut savoir que définir un point comme l'intersection de deux droites apporte moins de libertés que de le définir comme l'intersection d'un cercle et d'une droite.
Ici, nous allons introduire le point S', intersection de Γ avec la bissectrice en A, et nous allons montrer que ce point est sur la médiatrice de $[BC]$. Ceci démontrera alors que $S = S'$, et nous aurons bien que le cercle Γ, la médiatrice de $[BC]$ et la bissectrice en A sont concourantes.

Nous avons par théorème de l'angle inscrit que

$$\widehat{S'BC} = \widehat{S'AC} \text{ et } \widehat{S'CB} = \widehat{S'AB}$$

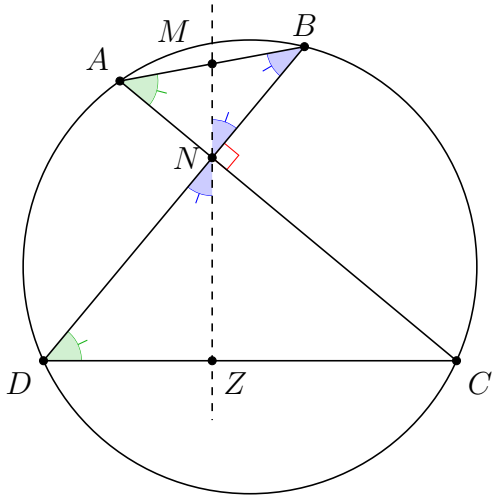
Nous en déduisons donc que le triangle SBC est isocèle en S, donc que S' est sur la médiatrice du segment $[BC]$, donc est un axe de symétrie pour la figure rouge. Donc $S = S'$.
On pourra remarquer que S est alors le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A, et c'est pour cela qu'il est appelé pôle sud de A.

Solution de l'exercice 10



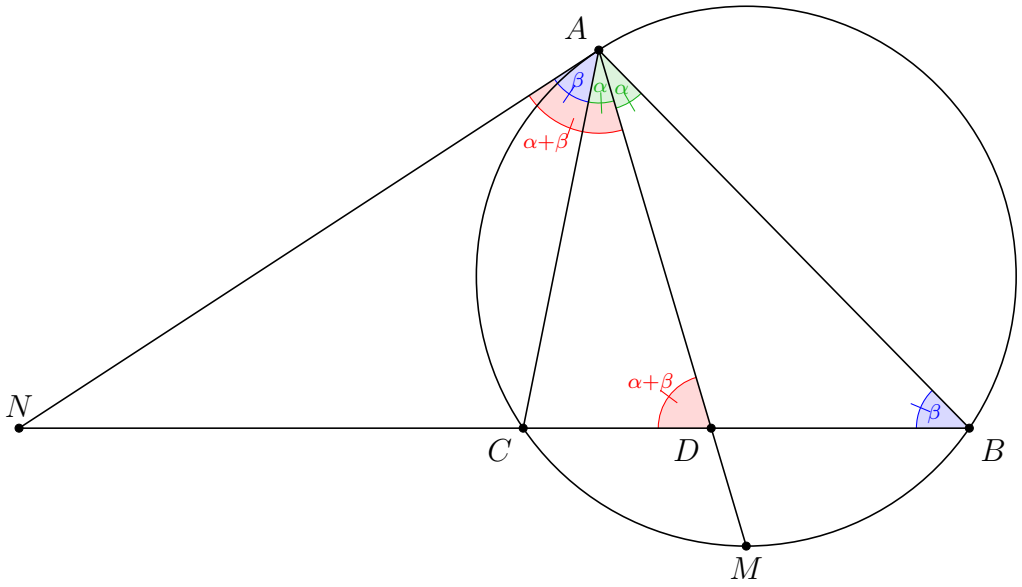
Puisque $\widehat{BAC} = 90° = \widehat{BOC}$, les points B, A, C et O sont cocycliques. Puisque le triangle BOC est isocèle en O, le point O est sur la médiatrice du segment $[BC]$, il s'agit donc du pôle Sud du point A dans le triangle ABC. Le point O appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution de l'exercice 11



Pour résoudre cet exercice, il faut se souvenir que le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le milieu de son hypothénuse.
Ainsi, le triangle MBN est isocèle en M, donc $\widehat{ABN} = \widehat{BNM} = \widehat{DNZ}$, où Z est l'intersection de (MN) et de (CD). Enfin, par théorème de l'angle inscrit, $\widehat{ZDN} = \widehat{NAB} = 90° - \widehat{ABN} = 90° - \widehat{DNZ}$, donc $\widehat{NZD} = 90°$.

Solution de l'exercice 12



Déjà, rappelons que M est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A, donc c'est le pole sud de A, et nous en déduisons que (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$.
Par théorème de l'angle tangent, et en adoptant les notations de la figure, $\beta = \widehat{NAC}$.
En effectuant la somme des angles d'un triangle, nous trouvons $\widehat{BDA} = \alpha + \beta$, donc nous avons bien $\widehat{ADN} = \widehat{NAD}$, soit que ADN est isocèle en N.

6 TD d'inégalités (Paul)

Exercices

Exercice 1
Soient $x, y \geq 0$. Montrer que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Exercice 2
Soit $x > 0$. Montrer que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Pour quels x a-t-on égalité ?

Exercice 3
Déterminer les x réels tels que

$$x^2 + 2x + 2 > 0.$$

Exercice 4
Déterminer les x réels tels que

$$x^2 + 3x + 2 > 0.$$

Exercice 5
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$? Montrer que

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots \frac{1}{x_n}}.$$

Exercice 6
Soient $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots y_n^2}.$$

Exercice 7
Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$3^n > n^2 - 2n + 91$$

Exercice 8
Montrer que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Exercice 9
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Montrer que

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Exercice 10
Soient $a, b, c \geq 0$. Montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Exercice 11
Trouver $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ tq $x_1 + \ldots x_n = 1$ et $x_1^1 x_2^2 x_3^3 \ldots x_n^n$ est maximal.

Corrigés

Solution de l'exercice 1
Cette inégalité est équivalente à

$$x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

Or, un carré est toujours positif. Le cas d'égalité est obtenu exactement pour $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, c.à.d. pour les valeurs $x = y$.

Solution de l'exercice 2
Cette inégalité est équivalente à $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$.

Donc, l'égalité est obtenue pour $x = \dfrac{1}{x}$, c.à.d. pour $x = 1$.

Solution de l'exercice 3
$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Solution de l'exercice 4
$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$.

Ce produit est strictement positif si et seulement si les deux facteurs ont le même signe, c.à.d., pour $x < -2$ et pour $x > -1$.

Solution de l'exercice 5
En utilisant l'inégalité de Exercice 2, on trouve :

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots \frac{1}{x_n}\right) \\
&\quad = \frac{x_1}{x_1} + \frac{x_2}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_n} \\
&\quad + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}\right) + \cdots + \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) + \cdots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) \\
&\quad \geq 1 + 1 + \cdots + 1 + 2 + 2 + \cdots + 2 \\
&\quad = 1 \cdot n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n + n^2 - n = n^2
\end{aligned}$$

Cas d'égalité : $\dfrac{x_i}{x_j} = 1$, $\forall i, j$, donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Solution de l'exercice 6

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots y_n^2) - (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0.$$

Cas d' égalité : Les vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ sont proportionnels.

Solution de l'exercice 7
Si l'inégalité est vraie, on a $3^n > (n-1)^2 + 90 \geq 90 > 81 = 3^4$, donc $n > 4$.

On peut montrer cette inégalité à partir de $n = 5$ par récurrence.

Solution de l'exercice 8
On peut montrer par récurrence que

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}.$$

Solution de l'exercice 9
Si l'inégalité est vraie pour n, elle est vraie pour $2n$

On applique le cas n deux fois aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et aux variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}$. Après, on applique le cas $n=2$, qu'on a deja montré dans l'exercice 1.

On obtient

$$\begin{aligned}\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(x_{n+1}+\ldots x_{2n})}{2n} &= \frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\\ &\geq \frac{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}+\sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}}{2}\\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}}\\ &= \sqrt[2n]{x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}\end{aligned}$$

Si l'inégalité est vraie pour $n\geq 2$, elle est vraie pour $n-1$
Conclusion

Solution de l'exercice 10
Cette inégalité est équivalente à

$$x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0.$$

Or, un carré est toujours positif. Le cas d'égalité est obtenu exactement pour $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$, c.à.d. lorsque $x=y$.

2 Entraînement de mi-parcours

Énoncés

Exercice 1
Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit t la tangente à $\mathcal{C}$ en A et P le point d'intersection des droites (BC) et t. Montrer que $PA^2 = PB \times PC$.

Exercice 2
Montrer que pour tous x, y réels positifs, on a :

$$2(x^2 + y^2) \geqslant (x + y)^2$$

Exercice 3
Montrer que pour tous x, y réels on a :

$$\left(\frac{xy - y^2}{x^2 + 4x + 5}\right)^3 \leqslant \left(\frac{x^2 - xy}{x^2 + 4x + 5}\right)^3$$

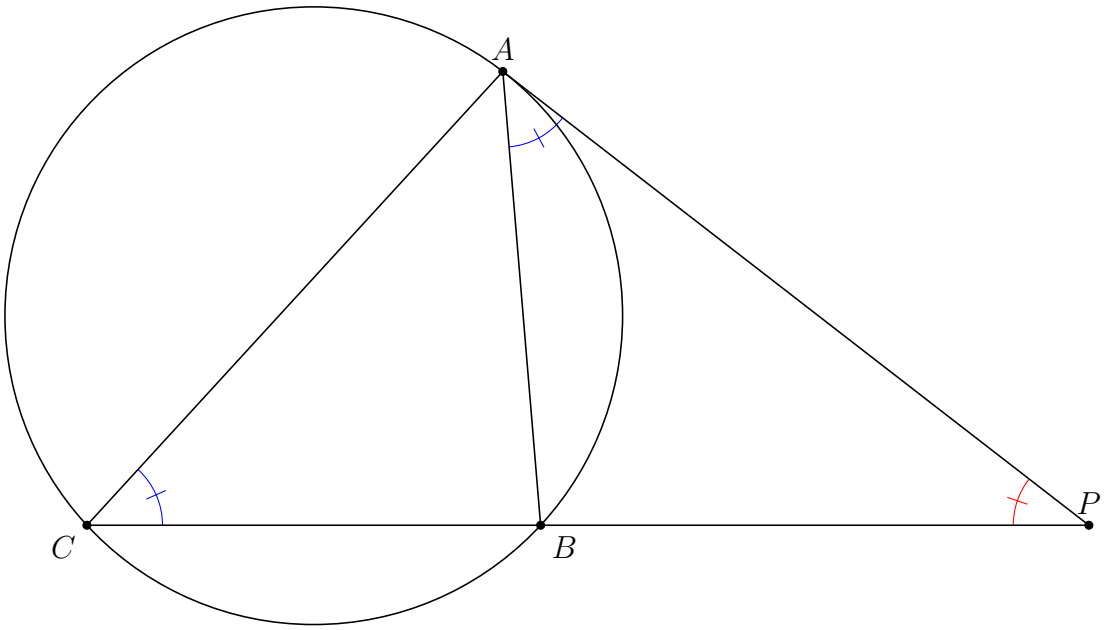
Exercice 4
Soit $ABCD$ un trapèze isocèle, c'est-à-dire un quadrilatère $ABCD$ tel que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, que $AB < CD$ et que $BC = AD$. Soit P le point d'intersection des droites (AC) et (BD). La droite (BC) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABP en un point X. La parallèle à la droite (BC) passant par le point D coupe la droite (AX) en un point Y.

1) Démontrer que les points Y, D, P et A sont cocycliques.

2) Démontrer que $\widehat{YDA} = 2 \cdot \widehat{YCA}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1



L'égalité $PA^2 = PB \cdot PC$ à démontrer peut se réécrire sous la forme

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PA}$$

Ainsi, pour démontrer cette égalité, il suffirait de démontrer que les triangles PAB et PCA sont semblables.

Or, on constate que d'après le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{BAP} = \widehat{BCA}$. D'autre part, $\widehat{APB} = \widehat{CPA}$. Les triangles PAB et PCA sont donc bien semblables, ce qui permet de conclure l'exercice.

Solution de l'exercice 2

En développant, l'inégalité devient $2x^2 + 2y^2 \geqslant x^2 + 2xy + y^2$, ce qui revient à montrer $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0$, ce qui est vrai car un carré est positif.

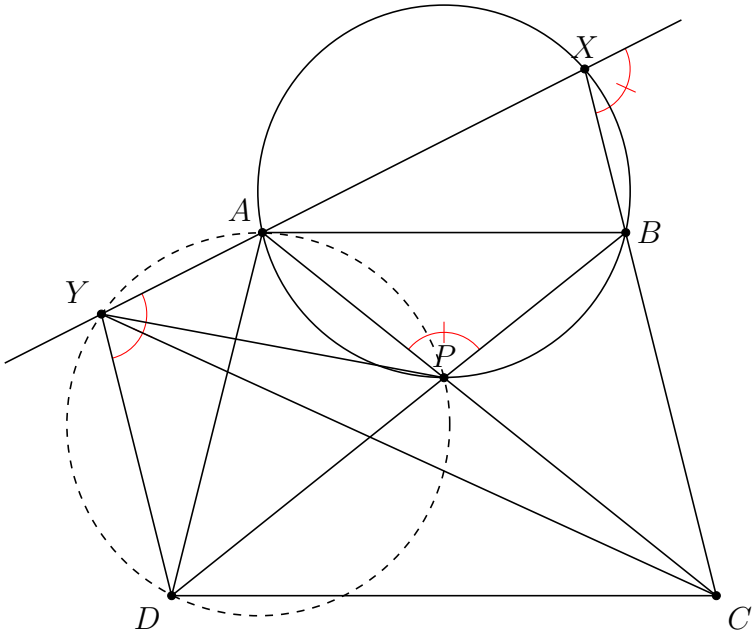
Solution de l'exercice 3

La fonction $X \mapsto X^3$ est croissante, donc il suffit de montrer : $\dfrac{xy - y^2}{x^2 + 4x + 5} \leqslant \dfrac{x^2 - xy}{x^2 + 4x + 5}$. On a ensuite que $x^2 + 4x + 5$ qui est un trinôme de discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 5 = -4 < 0$, ainsi il est toujours positif. Il nous reste donc à montrer $xy - y^2 \leqslant x^2 - xy$, soit $0 \leqslant x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$, ce qui est donc vrai, car un carré est positif.

Solution de l'exercice 4

1) Les points A, P, B et X sont cocycliques. Ainsi, $180° - \widehat{AXB} = \widehat{APB}$. D'autre part, les droites (YD) et (XC) sont parallèles donc $180° - \widehat{AXC} = \widehat{DYA}$.

On a donc $\widehat{AYD} = 180° - \widehat{APB}$, ce qui signifie bien que les points Y, A, P et D sont cocycliques.

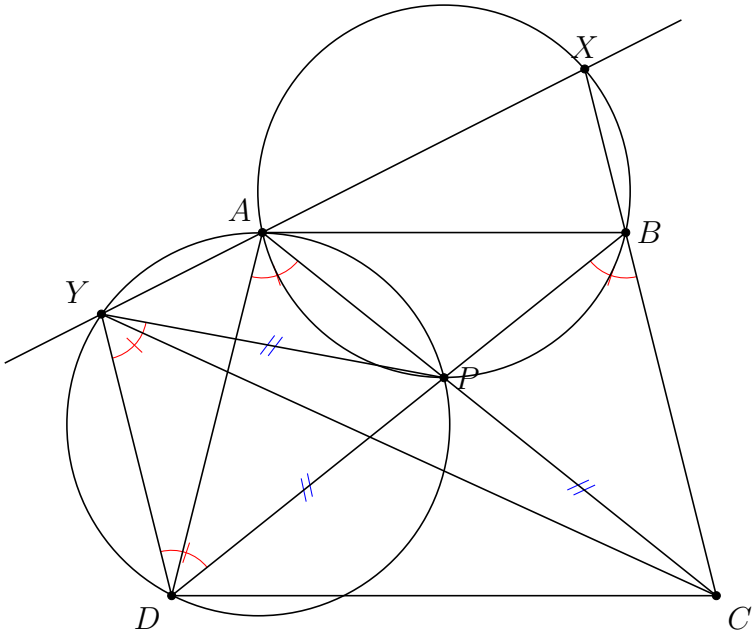


2) Puisque les points A, P, D et Y sont cocycliques, $\widehat{YDA} = \widehat{APY}$. Il s'agit donc de démontrer que $\widehat{YPA} = 2\widehat{YCA}$. Or, La somme des angles dans le triangle YPC vaut $180°$ donc $\widehat{YPA} = 180° - \widehat{YPC} = \widehat{PYC} + \widehat{PCY}$. Ainsi, il suffit de démontrer que les angles $\widehat{PYC}$ et $\widehat{PCY}$ sont égaux, c'est-à-dire que le triangle YPC est isocèle.

Puisque le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle, $PD = PC$ donc il suffit de montrer que $PY = PD$, ouo encore que $\widehat{PYD} = \widehat{PDY}$. Or, les droites (YD) et (BC) sont parallèles et les angles $\widehat{YDP}$ et $\widehat{PBC}$ sont alternes-internes donc ils sont égaux. D'autre part, les points Y, P, D et A sont cocycliques donc $\widehat{DYP} = \widehat{DAP}$. Puisque le trapèze $ABCD$ est isocèle, $\widehat{DAP} = \widehat{PBC}$. Ainsi

$$\widehat{PYD} = \widehat{PAD} = \widehat{PBC} = \widehat{YDP}$$

donc le triangle PYD est isocèle en P, ce qui conclut.


X
A
B
Y
P
D
C

3 Deuxième partie : Arithmétique et Combinatoire

1 Divisibilité et PGCD (Yohann)

Le cours proposé est directement issu du cours d'arithmétique de la POFM, chapitre 2 : http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_base.pdf On trouvera ci-dessous les exercices traités en cours. Ont été vues la notions de divisibilité, la définition de PGCD, l'algorithme d'Euclide pour calculer un PGCD et l'énoncé du théorème de Bézout.

Exercice 1
Montrer que si $a|b$ et $c|d$, alors $ac|bd$.

Solution de l'exercice 1
Puisque $a|b$, il existe un entier λ tel que $b = \lambda a$. De même, il existe un entier μ tel que $d = \mu c$. Alors $bd = (\lambda a)(\mu c) = (\lambda\mu)(ac)$, soit $ac|bd$.

Exercice 2
Quels sont les entiers n positifs tels que $n|n+7$?

Solution de l'exercice 2
Soit n un entier tel que $n|n+7$. Puisque $n|-n$, alors $n|(n+7)+(-n)$, ie. $n|7$. Or, les diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7.

On vérifie ensuite que $1|8$ et que $7|14$. Les solutions sont alors 1 et 7.

Exercice 3
Quels sont les entiers positifs n tels que $n^2+1|n$?

Solution de l'exercice 3
Si $n \geq 1$, alors $n^2+1 \geq n+1 > n$. Il est donc impossible d'avoir $n^2+1|n$.

La seule solution est alors $n = 0$, puisque $1|0$.

Exercice 4
Montrer que pour tout entier n, l'entier $n(n+1)$ est pair.

Solution de l'exercice 4
Soit n un entier.

Si n est pair, alors $2|n$ et donc $2|n(n+1)$.

Sinon, n est impair et donc $2|(n+1)$, soit $2|(n+1)n$.

Dans les deux cas, on a bien que $n(n+1)$ est pair.

Exercice 5
Montrer que pour tout entier n, l'entier $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

Solution de l'exercice 5
Soit n un entier positif.

On sait d'après l'exercice précédent que $n(n+1)$ est pair, donc $n(n+1)(n+2)$ l'est également.

On sait que soit n est un multiple de 3, soit $n+1$ est un multiple de 3, soit $n+2$ est un multiple de 3. Par une disjonction de cas analogue à l'exercice précédent, on obtient que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.

Or, les multiples de 3 qui sont pairs sont exactement les multiples de 6. $n(n+1)(n+2)$ est donc un multiple de 6.

Exercice 6
Soient a, b, c des entiers. Montrer que si n est un entier qui vérifie $an^2+bn+c=0$, alors $c|n$.

Solution de l'exercice 6
On a $n|n$ donc $n|(an)n$ et $n|bn$. Par somme, $n|an^2+bn$, ie. $n|-c$. D'où $n|c$.

Exercice 7
Déterminer les entiers n tels que $n^5-2n^4-7n^2-7n+3=0$.

Solution de l'exercice 7
Un raisonnement similaire à celui de l'exercice précédent donne $n|3$. Les solutions possibles sont alors -3, -1, 1 et 3.

Un rapide test montre que les solutions qui fonctionnent sont -1 et 3.

Exercice 8
Déterminer les entiers n tels que $\frac{1}{3}n^4-\frac{1}{21}n^3-n^2-\frac{11}{21}n+\frac{4}{42}=0$.

Solution de l'exercice 8
En multipliant les deux côtés de l'égalité par 21, on se retrouve avec l'équation $7n^4-n^3-n^2-11n+2=0$. Le même raisonnement que les exercices précédents indique qu'une solution n vérifie $n|2$. Les solutions de cette équation sont alors -1 et 2.

Exercice 9
Soient $a\geq 1$ et n des entiers tels que $a|n+2$ et $a|n^2+n+5$. Montrer que $a=1$ ou $a=7$.

Solution de l'exercice 9
Puisque $a|n+2$, alors $a|n(n+2)$, ie. $a|n^2+2n$. Puisque $a|n^2+n+5$ et $a|n^2+n$, alors $a|-n+5$. Puisque $a|-n+5$ et $a|n+2$, alors $a|7$, ie. $a=1$ ou $a=7$ puisque a est positif.

Exercice 10
Vérifier par l'algorithme d'Euclide que le PGCD de 364 et de 154 vaut 14.

Solution de l'exercice 10

$$\begin{aligned}364&=2\times 154+56\\154&=2\times 56+42\\56&=1\times 42+14\\42&=3\times 14+0\end{aligned}$$

Le dernier reste non nul vaut 14 : le PGCD de 364 et de 154 vaut bien 14.

Exercice 11
Combien 10^{100} et $10^{121}+10^{813}+10$ ont-ils de diviseurs positifs communs ?

Solution de l'exercice 11
Le nombre de diviseurs communs est égal au nombre de diviseurs du PGCD de ces deux nombres. En effet : un diviseur commun des deux nombres sera un diviseur du PGCD.

$$10^{813} + 10^{121} + 10 = (10^{713} + 10^{21}) \times 10^{100} + 10$$
$$10^{100} = 10^{99} \times 10 + 0$$

Le PGCD de ces deux nombres vaut alors 10, qui comporte 4 diviseurs positifs : 1, 2, 5 et 10.

Le nombre de diviseurs communs recherché est donc 4.

Exercice 12
Déterminer le PGCD de $1\,000\,000\,000$ et de $1\,000\,000,\,005$.

Solution de l'exercice 12

$$\begin{aligned} PGCD(1\,000\,000\,000, 1\,000\,000\,005) &= PGCD(1\,000\,000\,005, 1\,000\,000\,005 - 1\,000\,000\,000) \\ &= PGCD(1\,000\,000\,005, 5) \\ &= 5 \end{aligned}$$

car $5|1\,000\,005$.

Exercice 13
Calculer pour tout entier $n \geq 3$ le PGCD de $n^3 - 6n^2 + 11n - 6$ et de $n^2 - 4n + 4$.

Solution de l'exercice 13
On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} n^3 - 6n^2 + 11n - 6 &= n(n^2 - 4n + 4) - 2n^2 + 7n - 6 \\ -2n^2 + 7n - 6 &= -2(n^2 - 4n + 4) - n + 2 \\ n^2 - 4n + 4 &= (n - 2)(n - 2) + 0 \end{aligned}$$

Le PGCD de $n^3 - 6n^2 + 11n - 6$ et de $n^2 - 4n + 4$ est alors $n - 2$.

Exercice 14
Déterminer deux entiers u et v tels que $364u + 154v = 14$.

Solution de l'exercice 14
On remonte l'algorithme d'Euclide utilisé dans l'exercice 10 :

$$\begin{aligned} 14 &= 56 - 42 \\ &= 56 - (154 - 2 \times 56) \\ &= 3 \times 56 - 154 \\ &= 3 \times (364 - 2 \times 154) - 154 \\ &= 3 \times 364 - 7 \times 154 \end{aligned}$$

On a donc une solution avec $u = 3$ et $v = 7$.

Exercice 15
Soit a et b deux entiers non nuls, $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$. Trouver tous les entiers u et v tels que :

$$au + bv = d$$

Solution de l'exercice 15
Soit (u, v) et (u', v') deux couples solution.

Alors on a $au + bv = au' + bv' = d$, c'est-à-dire $a(u - u') + b(v - v') = 0$. Quitte à diviser a et b par d, supposons $d = 1$ et a et b premiers entre eux.

Alors, puisque $a|a(u - u')$, $a|b(v' - v)$. Or, a et b sont premiers entre eux, d'où $a|v' - v$. De même, on a $b|u - u'$. On a donc deux entiers k et l tels que $v' - v = ka$ et $u - u' = lb$. L'équation se réécrit alors $lab = kab$. ab étant non nul, cela impose $k = l$. On a donc $v' = v + ka$ et $u' = u - kb$.

En considérant (u_0, v_0) un couple solution donné par l'algorithme d'Euclide, les solutions de l'équation seront alors les couples de la forme $(u_0 - kb,\ v_0 + ka)$ où k est un entier relatif. Réciproquement, ces couples sont bien valides.

2 Principe des tiroirs (Théo)

À venir...

3 Nombres premiers (Jean)

Le cours est celui disponible dans les ressources de la POFM.

Exercice 1
Démontrer que 101 est premier.

Solution de l'exercice 1
Il suffit de vérifier que 101 n'est divisible par aucun nombre premier plus petit que $\sqrt{101} < 11$.

Comme les nombres premiers strictement inférieur à 11 sont $2, 3, 5$ et 7 on vérifie donc que

- $2 \nmid 101$ car 1 n'est pas pair,
- $3 \nmid 101$ car $1 + 0 + 1 = 2$ n'est pas divisible par 3,
- $5 \nmid 101$ car 1 est différent de 0 et 5,
- $7 \nmid 101$ car $101 = 14 \times 7 + 3$.

Donc

$$\boxed{101 \text{ est premier}}.$$

Exercice 2
Montrer que si un nombre premier p divise un produit de k entiers alor il divise au moins l'un des facteurs.

Solution de l'exercice 2
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des entiers.

Expliquons l'intuition de la preuve :

Si

$$p \mid a_1 \times (a_2 \times a_3 \times a_k)$$

alors comme p est premier, $p \mid a_1$ ou $p \mid a_2 \times a_3 \times a_k$.

Si $p \mid a_1$ alors on divise bien l'un des facteurs.

Si $p \mid a_2 \times a_3 \times a_k$ alors on se ramène à un produit de $k-1$ éléments et on continue comme précédemment.

Pour plus de rigueur il faut en fait procéder par récurrence sur k.

Exercice 3

Donner tous les nombres premiers inférieurs à 150.

Solution de l'exercice 3

Un crible d'Ératosthène, voir la figure 1 permet d'obtenir que les nombres premiers inférieurs à 150 sont

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150						

Le résultat du crible par l'exercice 3.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149.$$

Exercice 4

Donner la décomposition en facteurs premiers de 2020.

Donner la décomposition en facteurs premiers de 2021.

Solution de l'exercice 4

On a

$$2020 = 2^2 \times 5^1 \times 101^1.$$

On a

$$2021 = 43^1 \times 47^1.$$

Pour aider le calcul dans le second cas on pourra remarquer que $45^2 = 2025$.

Exercice 5
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 5
On commence par remarquer qu'un entier impair est soit de la forme $4k+3$ soit de la forme $4k+1$.

De plus on a pour k_1 et k_2 deux entiers

$$(4k_1+1)(4k_2+1) = 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1$$

donc le produits de entiers de la forme $4k+1$ est un entier de la forme $4k+1$.
(On peut reformuler plus simplement cela en regardant modulo 4.)
On en déduit :

Lemme 1.
Tout entier impair admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.

En effet si tous les facteurs de la décomposition en facteurs premiers étaient de la forme $4k+1$ alors leur produit aussi ce qui est absurde. Donc au moins l'un des facteurs es de la forme $4k+3$.

On s'inspire alors de la preuve d'Euclide ed l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre fini de nombres premiers de la forme $4k+3$ et noons les $3, p_1, p_2, \ldots, p_r$.

Avec

$$N = 4p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r + 3$$

on obtient alors

— N n'est pas divisible par $3, p_1, p_2, \ldots, p_r$,
— N ademet un diviseur premier de la forme $4k+3$.

Ce qui est absurde.
Donc

$$\boxed{\text{Il existe une infinité de nombres premiers de la forme } 4k+3}.$$

Exercice 6
Soit p un nombre premier et n un entier.

Montrer que si $p|n^2$ alors $p|n$.

Solution de l'exercice 6
Comme p est premier et que $p|n \times n$ on a donc $p|n$ ou $p|n$.

Dans tous les cas $\boxed{p|n}$.

Exercice 7
Soit p un nombre premier et n un entier.
Montrer que si $p|n^{2020}$ alors $p^{2020}|n^{2020}$.

Solution de l'exercice 7
Comme p est premier et p divise

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{\text{2020 fois}}$$

on a p divise l'un des facteurs, donc $p|n$.
donc $p^{2020}|n^{2020}$.

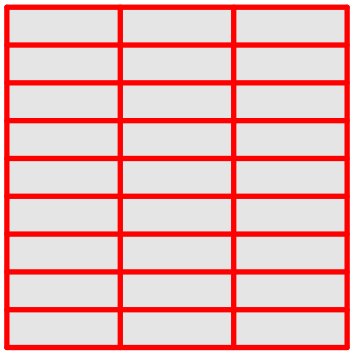
4 Invariants (Yohann)

Le cours est en grande partie inspirée du cours d'invariants et coloriages donné au stage de Cachan Junior en 2017 : http://igm.univ-mlv.fr/~juge/pofm/doc/Poly-CJ-17.pdf. Ci-dessous les exercices traités en cours avec leur corrigé.

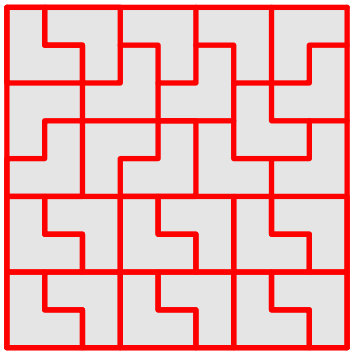
Exercice 1
a) Est-il possible de paver un échiquier de taille 9x9 uniquement avec des dominos de taille 2x1 ?
b) Qu'en est-il avec des triominos de taille 3x1 ?
c) Et avec des « *L-ominos* »comme celui ci-dessous ? (*Rotations autorisées*)

Solution de l'exercice 1
a) L'échiquier comporte 81 cases, qui est impair. En plaçant un domino, on recouvrira 2 cases et il restera alors toujours un nombre impair de cases. Ainsi, il est impossible d'arriver à 0 case qui est pair.

b) En prenant l'exemple ci-dessous, on montre qu'il est possible de paver l'échiquier. Cette solution n'est bien sûr pas unique.



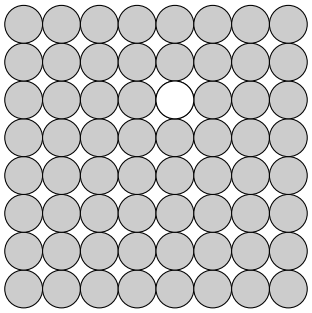
c) On peut utiliser cette solution (qui n'est pas unique) :



Exercice 2
Une feuille de papier est déchirée en 3 parties. Ensuite, l'une de ces parties est déchirée de nouveau en 3 parties, et ainsi de suite. Peut-on obtenir, à un moment donné, un total de 503 parties ? 2020 parties ?

Solution de l'exercice 2
On commence avec un nombre impair (1) de parties. À chaque opération, on divise une des parties en 3, ce qui a pour effet d'ajouter deux nouvelles parties, conservant le nombre de parties impair (notre invariant). Il est donc possible d'obtenir un total de 503 parties en répétant l'opération 251 fois. En revanche, puisque 2020 est pair, il n'est pas possible d'obtenir 2020 parties.

Exercice 3
Un plafond est quadrillé par une grille 8x8 où dans chaque case se trouve une ampoule. Sur le mur, des interrupteurs sont présents permettant d'inverser l'état[1] de chacune des ampoules d'une ligne ou d'une colonne. Au départ, elles sont toutes allumées. Est-il possible d'aboutir à une configuration où seule une ampoule est allumée ?



Solution de l'exercice 3
À chaque fois que l'on appuie sur un interrupteur, un nombre pair d'ampoules changent d'état, on a donc toujours un nombre pair d'ampoules allumées et un nombre pair d'ampoules éteintes. Il est donc impossible d'aboutir au fait que exactement 63 ampoules soient éteintes.

Exercice 4
On écrit au tableau tous les entiers entre 1 et 2020. Ensuite, on choisit deux de ces nombres

1. Éteindre l'ampoule si elle est allumée, l'allumer sinon.

a, b au hasard, on les efface et on écrit ensuite $|a-b|$ [2]. Puis on recommence suffisamment de fois jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul nombre au tableau.

Montrer que ce dernier est pair. [3]

Solution de l'exercice 4

Notons S_0 la somme de tous les termes affichés au tableau. À chaque opération, on ôte deux termes et on ajoute leur différence, ce qui fait que la parité de la somme de tous les éléments est conservée (notre invariant). Ainsi, la parité du dernier nombre est la même que $S_0 = \frac{2020 \times 2021}{2} = 1010 \times 2021$, dernier nombre qui est alors pair.

En solution alternative, on peut noter que la parité du nombre de nombres impairs présents sur le tableau ne varie pas, en distingant les différents cas possibles. Or, on a initialement 1010 nombres impairs entre 1 et 2020, ce qui fait qu'à la fin, on a au plus 1 nombre impair, et donc 0 puisque ce nombre doit être pair.

Exercice 5

Sur une île déserte vivent 34 caméléons. Au départ, 7 sont jaunes, 10 sont rouges et 17 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleur différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur, il ne se passe rien. Au bout d'un an, tous les caméléons sur l'île sont devenus de la même couleur. Laquelle ? (Il faut non seulement déterminer la couleur, mais aussi prouver que c'est la seule possible)

Solution de l'exercice 5

Posons j, r et v le nombre de caméléons jaunes, rouges et verts. Remarquons que les différences $r-j$, $j-v$, $v-r$ ne varient pas modulo 3 au cours d'un changement de couleur de deux caméléons. Par exemple, si $j=7$, $r=10$, $v=17$, on a initialement $r-j \equiv 0 \pmod 3$, $j-v \equiv 2 \pmod 3$, $v-r \equiv 1 \pmod 3$, mais si un caméléon rouge et un jaune deviennent verts, on obtient toujours $(r-1)-(j-1) \equiv 0 \pmod 3$, $(j-1)-(v+2) \equiv 2 \pmod 3$ et $(v+2)-(r-1) \equiv 1 \pmod 3$. Il en va de même avec un vert et un jaune qui deviennent rouges ou un vert et un rouge qui deviennent jaunes.

Si on veut conserver ces quantités, il faut nécessairement $(j,r,v)=(0,0,34)$. Donc tous les caméléons sont verts et il n'y a pas d'autre possibilité.

Notons que l'on a pas prouvé ici qu'il est possible que tous les caméléons deviennent verts. On a seulement prouvé que si tous les caméléons devenaient d'une seule couleur, alors cette couleur est le vert. L'énoncé nous disait que cela était possible.

Remarque 1.

Dès qu'il est question de somme de chiffres, il est intéressant de regarder modulo 3 ou modulo 9 (plutôt 9), puisque un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 3 et 9 [4]. Il peut être aussi parfois utile de regarder le nombre modulo 11, qui consiste à additionner les chiffres de rang pair et de soustraire les chiffres de rang impair (par exemple : $123\,456\,789 \equiv -1+2-3+4-5+6-7+8-9 \equiv -5 \pmod{11}$).

2. La différence entre a et b, sans le signe. $|8-4|=4$, $|2-42|=40$. On appelle ce nombre la « valeur absolue » de $a-b$.
3. *Indication :* la somme de tous les entiers de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.
4. C'est ce qui est, entre autres, à l'origine de la « preuve par 9 ».

Exercice 6
On écrit successivement tous les nombres de 1 à un million. Puis on remplace chaque nombre par la somme de ses chiffres. Puis on recommence, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des nombres à un chiffre. Quel chiffre apparaît le plus souvent ?

Solution de l'exercice 6
Parmi les entiers de 1 à 999 999, il y en a exactement 111 111 qui sont congrus à 1 modulo 9, 111 111 à 2, ..., 111 111 à 9. Puisqu'un entier est congru à la somme de ses chiffres modulo 9, on en conclut qu'il y aura 111 111 fois le chiffre 1 écrit, 111 111 fois le chiffre 2, ..., 111 111 fois le chiffre 9. Le nombre 1 000 000 quant à lui va s'écrire à la fin comme un 1 : il y aura alors 111 112 fois le chiffre 1 écrit, ce qui fait de lui le chiffre le plus fréquent.

Remarque 2.
L'invariance ne se résume pas à la divisibilité. On peut tout à fait imaginer qu'une somme ou une différence soit conservée, ou bien même qu'un point ne bouge pas à travers diverses transformations géométriques !

Exercice 7
On s'intéresse à l'ensemble des mots[5] pouvant s'écrire avec les lettres x, y et t. On s'autorise les transformations suivantes :

(*i*) $xy \mapsto yyx$ et $yyx \mapsto xy$

(*ii*) $xt \mapsto ttx$ et $ttx \mapsto xt$

(*iii*) $yt \mapsto ty$ et $ty \mapsto yt$

La première condition signifie par exemple que lorsque l'on a un mot dans lequel apparaît les deux lettres x et y juste à côté, alors on s'autorise à remplacer ceux deux lettres par les trois lettres y, y et x. On s'autorise également à revenir en arrière, c'est la deuxième condition du (i).

Dire si les mots suivants sont équivalents :

(*i*) $xxyy$ et $xyyyyx$;

(*ii*) $xytx$ et $txyt$;

(*iii*) xy et xt.

Solution de l'exercice 7

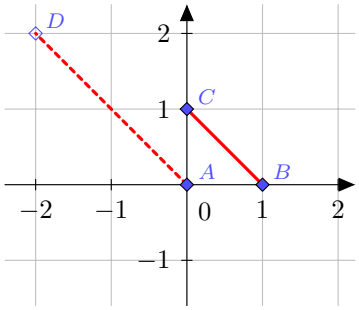
(i) $xxyy = x\ xy\ y \to x\ yyx\ y = xyy\ xy \to xyy\ yyx = xyyyyx$
Les mots $xxyy$ et $xyyyyx$ sont donc équivalents.

(ii) On remarque que les transformations (i), (ii) (iii) conservent le nombre de lettres x dans le mot. Ainsi, il est impossible de passer d'un mot comportant deux fois la lettre x à un mot ne comportant qu'une seule fois la lettre x.

(iii) Aucune transformation ne supprime totalement un y ou un t : les mots xy et xt ne sont donc pas équivalents.

5. Qui ont un sens ou non, qui n'ont en réalité surtout pas de sens

Exercice 8
Trois sauterelles se promènent sur les points à coordonnées entières du plan. Les sauterelles sautent les unes après les autres, mais pour que la sauterelle puisse partir de A pour aller en D alors que ses amies sont en B et C, il faut que (AD) soit parallèle à (BC). Les sauterelles sont initialement en $(1,\,0)$, $(0,\,0)$ et $(0,\,1)$. Peuvent-elles arriver à être sur les cases $(0,\,0)$, $(-1,\,-1)$ et $(1,\,1)$?



Solution de l'exercice 8
On voit facilement en remontant le temps que pour les sauterelles finissent toutes les trois alignées, il faut qu'elles soient précédemment alignées. Puisqu'elles ne le sont pas initialement, elles ne le seront jamais.

Exercice 9
À partir d'un n-*uplet* $(x_1, \ldots, x_n)$, on effectue les opérations suivantes :

— On choisit deux nombres du n-*uplet*, mettons x et y ;

— On remplace x par $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ et y par $\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ en laissant les autres nombres inchangés.

Est-il possible de transformer le quadruplet $\left(2, \sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ en $\left(1, 2\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

Solution de l'exercice 9

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{2} = x^2+y^2$$

La somme des carrés est donc conservée à chaque étape. Or, $2^2+\sqrt{2}^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(-\sqrt{2})^2 = 8+\frac{1}{2}$ et $1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 10+\frac{1}{2}+2\sqrt{2}$: il n'est donc pas possible de passer du premier quadruplet au second.

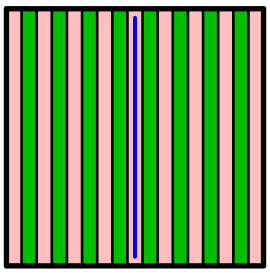
Remarque 3.
Parfois, les invariants sont difficiles à déterminer. Il peut alors être judicieux d'utiliser un coloriage adéquat qui permet de rendre la solution évidente.

Exercice 10
65 personnes sont alignées dans la colonne centrale d'une grille de 17 colonnes. À chaque étape, chaque personne effectue aléatoirement un pas soit vers la gauche, soit vers la droite (tous les pas sont de même amplitude).

Montrer qu'il y a toujours au moins une colonne qui contient au moins 8 personnes.

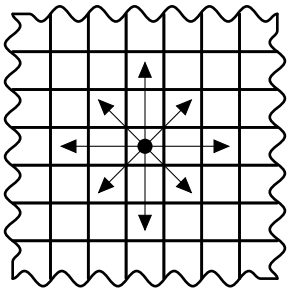
Solution de l'exercice 10

Colorions une colonne sur deux en rose, une colonne sur deux en vert, en commençant par le rose. Au départ, chacun se situe sur une colonne rose. Puis, à chaque opération, tout le monde change de couleur. Ainsi, tout le monde est toujours sur la même couleur à n'importe quel moment. Ainsi, soit toutes les colonnes roses sont vides, soit toutes les colonnes sont vides. Il y a alors toujours au moins 8 colonnes qui sont vides.



Les 65 personnes sont réparties en au plus 9 colonnes. En application du principe des tiroirs, au moins une colonne contient au moins $\lceil \frac{65}{9} \rceil = 8$ personnes.

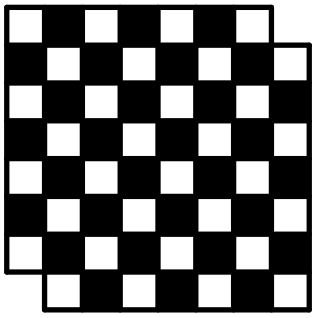
Exercice 11
Un loup-garou se déplace sur une grille de taille infinie. Il souhaite cette nuit se rendre dans un village située sur la case (42, 2017). Fou de joie, il ne peut que bondir en effectuant les mouvements suivants :



Sachant qu'il se situe initialement sur la case (26, 10), est-il possible qu'il atteigne son objectif ? Si oui : quel est le nombre de mouvements minimal ?

Solution de l'exercice 11
Colorions une case sur deux en noir ou en blanc tel un échiquier infini, en fixant la case (0, 0) en noir. Ainsi, les cases (x, y) avec $x \equiv y \pmod 2$ sont coloriées en noir et les autres en blanc. On remarque qu'à chaque fois que le loup se déplace, il reste une case de même couleur. Se situant initialement sur une case noire, il ne pourra alors jamais se rendre au village situé sur une case blanche, les villageois peuvent alors dormir sur leurs deux oreilles.

Exercice 12
(*Non traité en cours*) Considérons un échiquier classique de taille 8x8 auquel on a retiré deux coins. Est-il possible de payer l'échiquier avec des dominos de taille 2x1 ?



Solution de l'exercice 12
On a retiré 2 cases noires de l'échiquier. Il reste alors 32 cases blanches et 30 cases noires. Or, un domino recouvre exactement une case blanche et une case noire : il n'est donc pas possible de paver l'échiquier.

5 Principe de l'extrémum (Victor)

À venir...

6 Modulo et factorisation (Émile)

Factorisations

Théorème 1 (Factorisations usuelles)**.**
Soient a, b des réels. On a

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

et

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Soit n un entier. On a

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Si de plus n **est impair**, on peut écrire

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

En particulier, on retiendra

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Démonstration.

— On développe

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

— On développe

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}) = a^{n-1}(a-b)+a^{n-2}b(a-b)+\ldots b^{n-1}(a-b)$$
$$=(a^n-a^{n-1}b)+(a^{n-1}b-a^{n-2}b^2)+(a^{n-2}b^2-a^{n-3}b^3)+\ldots+(a^2b^{n-2}-ab^{n-1})+(ab^{n-1}-b^n)$$
$$=a^n-b^n.$$

— On a, car n est impair,

$$a^n+b^n = a^n-(-b)^n = (a-(-b))(a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+\ldots+(-b)^{n-1})$$
$$=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}).$$

□

Exercice 1
Calculer $1+3+3^2+\ldots+3^{2020}$.

Exercice 2
Pour quels entiers naturels n l'entier n^2+n+1 est-il un carré parfait ?

Exercice 3
Trouver tous les entiers naturels x, y, z tels que

$$x^2+y^2 = 9+z^2-2xy.$$

Exercice 4
Soit n un entier positif. Montrer que si 2^n+1 est premier, alors n est une puissance de 2.

Exercice 5
Soient a, n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si a^n-1 est premier, alors $a=2$ et n est premier.

Solution de l'exercice 1
On reconnait ici $1^{2020}+3\cdot 1^{2019}+3^2\cdot 1^{2018}+\ldots 3^{2020}$ qui est un facteur dans la factorisation de $3^{2021}-1^{2021}$. On a

$$3^{2021}-1^{2021} = (3-1)(1+3+3^2+\ldots+3^{2020})$$

donc

$$1+3+3^2+\ldots+3^{2020} = \frac{3^{2021}-1}{2}$$

Solution de l'exercice 2
Si $n=0$, on a $n^2+n+1=1$ qui est un carré parfait. Sinon, on a

$$n^2 < n^2+n+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

donc n^2+n+1 est compris strictement entre deux carrés consécutifs et ne peut pas en être un.

Solution de l'exercice 3
L'équation se réécrit

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 9$$

donc

$$(x+y)^2 - z^2 = 9$$

et

$$(x+y-z)(x+y+z) = 9.$$

$x+y+z$ est donc un diviseur positif de 9, et donc vaut $1, 3$ ou 9.

— Si $x+y+z = 9$, on a $x+y-z = 1$ et en sommant, $2(x+y) = 10$ donc $x+y = 5$, ainsi $z = 9-5 = 4$. On obtient les solutions $(0,5,4), (1,4,4), (2,3,4), (3,2,4), (4,1,4)$ et $(5,0,4)$, on vérifie qu'elles marchent.

— Si $x+y+z = 3$, on a $x+y-z = 3$ et en sommant, $2(x+y) = 6$ donc $x+y = 3$, ainsi $z = 3-3 = 0$. On obtient les solutions $(0,3,0), (1,2,0), (2,1,0)$ et $(3,0,0)$, on vérifie qu'elles marchent.

— Si $x+y+z = 1$, on a $x+y-z = 9$. Or, comme $z \geq 0$, $x+y+z \geq x+y-z$ donc c'est absurde.

Solution de l'exercice 4
Supposons par l'absurde que n ne soit pas une puissance de 2. Alors dans la décomposition en facteurs premiers de n, il y a nécessairement un nombre premier impair p. Dans ce cas, $m = \frac{n}{p}$ est entier et on peut écrire

$$2^n + 1 = (2^m)^p + 1^p$$

Comme p **est impair**, on a le droit d'écrire

$$2^n + 1 = (2^m + 1)(2^{m-1} - 2^{m-2} + \ldots - 2^1 + 1).$$

Ainsi, $2^m + 1$ est un diviseur de $2^n + 1$. Mais comme $m = \frac{n}{p} < n$, on a $1 < 2^m + 1 < 2^n + 1$, donc $2^n + 1$ n'est pas premier, c'est absurde. Nécessairement notre supposition de départ était fausse, n est donc une puissance de 2.

Solution de l'exercice 5
Montrons tout d'abord $a = 2$. En effet, on a $a \geq 2$ et $n \geq 2$ donc $a < a^2 \leq a^n$, donc $a-1 < a^n - 1$. Or, on a

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \ldots + 1)$$

Ainsi, $a-1 \mid a^n - 1$, donc comme $a^n - 1$ est premier, on a forcément $a-1 = a^n - 1$, impossible, ou $a - 1 = 1$, c'est-à-dire $a = 2$.

Montrons maintenant que n est premier. Soit d un diviseur de n qui ne vaut pas n. On a

$$a^n - 1 = 2^n - 1 = (2^d)^{\frac{n}{d}} - 1$$

qui est un nombre premier. Or, on a $2^d \geq 2$ et $\frac{n}{d} > 1$ donc $\frac{n}{d} \geq 2$. L'exercice est donc vrai en remplaçant a par 2^d et n par $\frac{n}{d}$. Ainsi, par la première partie de la preuve, $2^d = 2$ donc $d = 1$ et n est premier.

Modulos

Définition 2 (Modulos)**.**
Soient a, b deux entiers, et n un entier strictement positif. On dit que a et b sont congrus modulo n, et on note $a \equiv b \pmod{n}$ si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n, ou encore si n divise $a - b$.

Théorème 3 (Propriétés des modulos)**.**
Soient $n > 0$ un entier et a, a', b, b' des entiers vérifiant $a \equiv a' \pmod{n}$ et $b \equiv b' \pmod{n}$. Alors on a :

— $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$

— $ab \equiv a'b' \pmod{n}$

— Pour tout entier positif q, $a^q \equiv a'^q \pmod{n}$

Démonstration.

— On a $n \mid a - a'$ et $n \mid b - b'$ donc $n \mid a - a' + b - b'$, $n \mid (a + b) - (a' + b')$ et finalement $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$.

— On a

$$\begin{aligned} ab - a'b' &= (a' + (a - a'))(b' + (b - b')) - a'b' \\ &= a'b' + (a - a')b' + a'(b - b') + (a - a')(b - b') - a'b' \\ &= (a - a')b' + a'(b - b') + (a - a')(b - b') \end{aligned}$$

qui est divisible par n, donc $ab \equiv a'b' \pmod{n}$

— Raisonnons par récurrence sur q. Pour $q = 0$, la propriété devient $a^0 \equiv a'^0 \pmod{n}$, ou encore $1 \equiv 1 \pmod{n}$, ce qui est vrai.

Supposons la propriété vraie pour q. Alors on a $a^q \equiv a'^q \pmod{n}$. Or, comme $a \equiv a' \pmod{n}$, on a par la propriété précédente,

$$a^q \cdot a \equiv a'^q \cdot a' \pmod{n}$$

donc $a^{q+1} \equiv a'^{q+1} \pmod{n}$ et la propriété est vraie pour $q+1$,ce qui conclut la récurrence.

□

Remarque 4.
Attention cependant : si a, a', c sont des entiers tels que $a \equiv a' \pmod{n}$, on n'a pas $c^a \equiv c^{a'} \pmod{n}$ en général. Par exemple, $0 \equiv 2 \pmod{3}$ mais $2^0 \equiv 1 \not\equiv 2 \equiv 2^3 \pmod{3}$.

Exemple 5.
Il n'y a pas de carré parfait qui peut s'écrire de la forme $4k + 3$. En effet, soit n un entier. On a :

— Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{4}$

— Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{4}$

— Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{4}$

— Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, $n^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$

Donc dans tous les cas, $n^2 \not\equiv 3 \pmod{4}$ et $n \neq 4k + 3$.

Exercice 6

— Trouver le chiffre des unités de 31^{2020}.
— Trouver le chiffre des unités de 37^{2020}

Exercice 7
Montrer que le carré d'un nombre impair est congru à 1 modulo 8.

Exercice 8
Trouver tous les entiers a et b tels que $3a^2 = b^2 + 1$.

Exercice 9
Trouver tous les entiers naturels m, n tels que $m^2 - 8 = 3^n$.

Exercice 10
Trouver tous les entiers n strictement positifs tels que $n - 1 \mid n^3 + 4$.

Exercice 11
Montrer que pour tout n entier, on a $n - 1$ qui divise $n^{3n+1} - 3n^4 + 2$.

Exercice 12
Pour quels entiers naturels n existe-t-il des entiers a et b tels que $n + a^2 = b^2$?

Exercice 13 (JBMO 2011)
Trouvez tous les nombres premiers p tels qu'il existe des entiers strictement positifs x, y tels que

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p.$$

Solution de l'exercice 6

— Le chiffre des unités d'un nombre est son reste dans la division euclidienne par 10. L'exercice invite donc à regarder modulo 10. On a $31 \equiv 1 \pmod{10}$, donc $31^{2020} \equiv 1^{2020} \pmod{10}$. Or, ce dernier est facile à calculer et vaut 1. Le chiffre des unités de 31^{2020} est donc 1.
— On regarde de nouveau modulo 10. On étudie donc les puissances de 7 modulo 10. En remarquant que $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, on a $7^{2020} \equiv (7^4)^{505} \equiv 1 \pmod{10}$. Ainsi, le dernier chiffre de 37^{2020} est 1.

Solution de l'exercice 7
On propose deux façons de procéder :
— Un nombre impair vaut forcément $1, 3, 5$ ou 7 modulo 8. On peut faire un tableau des résidus modulo 8.

n	n^2
1	1
3	$9 \equiv 1 \pmod{8}$
5	$25 \equiv 1 \pmod{8}$
7	$49 \equiv 1 \pmod{8}$

— Une autre solution est de passer par des factorisations. Si n est un nombre impair, on a

$$n^2 = n^2 - 1 + 1 = (n-1)(n+1) + 1$$

Si $n \equiv 1 \pmod 4$, on a que $4 \mid n-1$ et $2 \mid n+1$ donc $8 \mid (n-1)(n+1)$. Si $n \equiv 3 \pmod 4$, on a que $2 \mid n-1$ et $4 \mid n+1$, donc de même $8 \mid (n-1)(n+1)$. Ainsi, $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Solution de l'exercice 8

De même, on propose deux solutions :

— La première est de regarder modulo 4. En effet, on a vu qu'un carré ne pouvait être congru qu'à 0 ou 1 modulo 4, et donc $3a^2$ ne peut être congru qu'à 0 ou 3 modulo 4. Mais de la même façon, b^2+1 ne peut être congru qu'à 1 ou 2 modulo 4, ainsi il ne peut pas y avoir égalité entre les deux membres, et l'équation n'a pas de solution.

— Une méthode plus courte est de passer directement modulo 3. En effet, l'équation devient $b^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Or, une vérification simple nous montre que b^2 ne peut valoir 0 ou 1 modulo 3, donc dans tous les cas on a $b^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod 3$ et l'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 9

Tout d'abord, supposons $n = 0$. On a donc $3^n = 1$ ce qui donne $m^2 = 9$ et donc $m = 3$ car m est positif. On trouve donc la solution $m = 3, n = 0$, on vérifie qu'elle fonctionne.

Supposons maintenant $n > 0$. On a donc 3 qui divise 3^n. En regardant modulo 3, on obtient $m^2 - 8 \equiv 0 \pmod 3$. Or, $8 \equiv 2 \pmod 3$ donc $m^2 \equiv 2 \pmod 3$. Un simple calcul des carrés modulo 3 nous montre que cette équation n'admet pas d'autre solution.

Solution de l'exercice 10

Remarquons que $n^3 + 4 = n^3 - 1 + 5$. Or, la factorisation de $n^3 - 1 = n^3 - 1^3$ nous donne que $n - 1 \mid n^3 - 1$. Ainsi, $n - 1 \mid n^3 + 4 - (n^3 - 1)$ c'est-à-dire $n - 1 \mid 5$.

On a $n - 1 \geq 0$.Les diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5, ce qui donne les solutions $n - 1 = 1$ et $n - 1 = 5$, ou encore $n = 2$ et $n = 6$. Réciproquement, on vérifie que ces valeurs de n sont bien solution.

Solution de l'exercice 11

Regardons l'expression $n^{3n+1} - 3n^4 + 2$ modulo $n - 1$. On a $n \equiv n - (n-1) \equiv 1 \pmod{n-1}$ donc

$$\begin{aligned} n^{3n+1} - 3n^4 + 2 &\equiv 1^{3n+1} - 3 \cdot 1^4 + 2 \pmod{n-1} \\ &\equiv 1 - 3 + 2 \pmod{n-1} \\ &\equiv 0 \pmod{n-1} \end{aligned}$$

donc $n - 1 \mid n^{3n+1} - 3n^4 + 2$.

Solution de l'exercice 12

L'équation se réécrit $n = b^2 - a^2$, ou encore $n = (a+b)(b-a)$. On a $(a+b) - (b-a) = 2a$ qui est pair, donc $a + b$ et $b - a$ sont de même parité. S'ils sont tous les deux impairs, n est impair. Sinon, ils sont tous les deux pairs et n est multiple de 4. Ainsi, si n vérifie l'équation, on a $n \not\equiv 2 \pmod 4$.

Réciproquement, supposons $n \not\equiv 2 \pmod 4$ et trouvons a et b. On traite deux cas séparément :

— Si n est impair, on veut $a+b$ et $b-a$ impairs. On cherche une solution simple, donc on peut par exemple faire en sorte que $b-a=1$. Ainsi, $b=a+1$ et $n=a+b=2a+1$. On veut donc prendre $a=\frac{n-1}{2}$ et $b=\frac{n+1}{2}$. On vérifie aisément que pour ces valeurs de a et b, l'équation est vérifiée.

— Si n est pair, on veut $a+b$ et $b-a$ pairs. De même qu'avant, on cherche une solution simple donc on peut essayer de prendre $b-a=2$. Ainsi, $b=a+2$ et $\frac{n}{2}=a+b=2a+2$. On veut donc prendre $a=\frac{n}{4}-1$ et donc $b=\frac{n}{4}+1$. On vérifie aisément que pour ces valeurs de a et b, l'équation est vérifiée.

Solution de l'exercice 13

On commence par réécrire l'équation $(x+y+5)p=xy(x+y)$. Par le lemme de Gauss, p divise un des facteurs de droite. Si p divise x, on pose $x=kp$ et on a $ky(x+y)=x+y+5$ donc $(ky-1)(x+y)=5$. On obtient $x+y=5, ky-1=1$. Alors on a soit $y=1,k=2$ qui donne la solution $(4,1)$ pour $p=2$, soit $y=2,k=1$ qui donne la solution $(3,2)$ pour $p=3$. Si p divise y, c'est pareil en échangeant x et y. Enfin, si p divise $x+y$, on pose $x+y=kp$ et on a $kp+5=kxy$ donc $k(xy-p)=5$. k est positif donc les deux facteurs de gauche sont positifs et on a donc deux cas : si $k=1$ on trouve $xy-p=5$ donc $xy-x-y=5$ et $(x-1)(y-1)=6$ ce qui donne les solutions $(2,7),(3,4),(4,3),(7,2)$. Comme $p=x+y$, on trouve donc $p=7$, on vérifie que $(3,4)$ marche pour $p=7$. Si $k=5$, on a $xy-p=1$ donc $25xy-5x-5y=25$ et $(5x-1)(5y-1)=26$. On vérifie facilement qu'aucun diviseur de 26 n'est congru à -1 modulo 5, ainsi il n'y a pas d'autre solution.

Les solutions pour p sont donc $2,3,7$.

4 Entraînement de fin de parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices et rapporteurs sont interdits.

Exercice 1
Montrer que si 7 nombres distincts sont choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ alors il en existe deux dont la somme vaut 13.

Exercice 2
Trouver tous les entiers positifs n tels que $n + 1$ divise $2n^2 + 5n$. On pensera à vérifier que les n trouvés sont solution.

Exercice 3
Trouver tous les entiers $k \geqslant 1$ tels qu'il existe un couple d'entiers (n, m) tels que $9n^6 = 2^k + 5m^2 + 2$.

Exercice 4
Les nombres de 1 à n sont écrits au tableau. Bob a le droit d'effectuer l'action suivante : tant que cela est possible, il efface trois nombres distincts a, b, c écrits tels que 3 divise $a + 2b$ et $a - c$ et écrit au tableau $a + b + c$. Peut-il arriver à n'avoir plus qu'un nombre écrit dans le cas où :

— $n = 28$?

— $n = 27$?

— $n = 29$?

Exemple : Si les nombres $1, 1, 7$ sont écrits, Bob peut effacer $(1, 1, 7)$ et réécrire $1+1+7 = 9$ car $1 + 2 =$ et $1 - 7 = -6$ sont divisibles par 3. Si les nombres $1, 2, 1$ sont écrits, il ne peut pas effacer $(1, 2, 1)$ car $1 + 2 \times 2 = 5$ n'est pas divisible par 3.

Solution de l'exercice 1
On va utiliser le principe des tiroirs : pour cela on souhaite partager l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 12\}$ en paires dont la somme vaut 13. On considère alors les ensembles $\{1, 12\}, \{2, 11\}, \{3, 10\}, \{4, 9\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}$. On dit que les 7 nombres distincts sont choisis dans l'ensemble sont alors nos chaussettes et les 6 sous ensembles les tiroirs. Comme $7 > 6$ il y a deux des nombres dans le même ensemble : ils ont donc une somme qui vaut 13.

Solution de l'exercice 2

— On factorise : $n+1$ divise $2n^2+5n = n(2n+5)$. Or $PGCD(n+1, n) = PGCD(n+1-n, n) = PGCD(1, n) = 1$, donc par le lemme de Gauss, comme $n + 1$ et n sont premiers entre eux, $n + 1$ divise $2n + 5 = 2(n + 1) + 3$ donc $n + 1$ divise 3. On a donc $n + 1 = 1$ ou 3 donc $n = 0$ ou 2.
Réciproquement $n = 0$ convient car 1 divise 0 et $n = 2$ convient car 3 divise $2\times4+5\times2 = 18$.

— On utilise le fait que $n+1$ divise $(n+1)(n-1) = n^2-1$. En particulier $n+1$ divise $2n^2+5n = 2(n^2-1)+2+5n$ donc $n+1$ divise $5n+2$. Ainsi $n+1$ divise $5(n+1)-5+2$ donc $n+1$ divise -3 donc $n+1$ divise 3. On a donc $n+1 = 1$ ou 3 donc $n = 0$ ou 2.
Réciproquement $n = 0$ convient car 1 divise 0 et $n = 2$ convient car 3 divise $2\times4+5\times2 = 18$.

Solution de l'exercice 3

Comme on a des carrés (n^6 et m^2), on regarde l'équation modulo 4. Pour regarder modulo 4, supposons $k \geqslant 2$, l'équation devient $n^6 \equiv m^2+2 \pmod 4$. Or comme un carré vaut 0 ou 1, le terme de gauche vaut 0 ou 1, celui de droite vaut 2 ou 3.

Reste à traiter le cas $k = 1$: pour $k = 0$, $(n,m) = (1,1)$ est solution. Le seul k qui convient est $k = 1$.

Solution de l'exercice 4

Regardons un peu le problème : notons que $a+2b = a-b+3b$, donc $a+2b$ est divisible par 3 si et seulement si $a-b$ l'est. Ainsi $a+b+c = a+(b-a)+a+(c-a)+a = 3a+(b-a)+(c-a)$ est divisible par 3.

On en déduit qu'on remplace trois nombres (a,b,c) tels que $a-b$ et $a-c$ sont divisibles par 3, i.e. tels que $a \equiv b \pmod 3$ et $a \equiv c \pmod 3$ par un nombre divisible par 3. Pour $n = 28$, comme à chaque tour le nombre d'entiers écrits diminue de 2, Bob aura à chaque tour un nombre pair d'entiers écrits, il ne pourra jamais en avoir pile 1.

Pour $n = 29$, il y a 10 nombres congrus à 1 modulo 3. A chaque étape ce nombre diminue soit de 0 soit de 3, il reste donc congru à 1 modulo 3. On a donc toujours au moins 1 nombre congru à 1 modulo 3. Mais il y a aussi 10 nombres congrus à 2 modulo 3, donc au moins un nombre congru à 2 modulo 3 à chaque étape, il y a donc forcément deux nombres écrits à chaque étape, il ne peut pas aboutir à un seul nombre écrit.

Pour $n = 27$, il y a 9 nombres congrus à 1 modulo 3, 9 congrus à 2 modulo 3. On groupe chacun par 3 avec même congruence et on les remplace par leur somme qui est divisible par 3 (ce qu'on peut faire car ils ont la même congruence modulo 3). On aboutit à $9+3+3 = 15$ nombres divisibles par 3 on peut donc à chaque fois prendre trois de ces nombres et les remplacer par leur somme : après 7 opérations on obtient 1 seul nombre.

5 Derniers cours

1 Homothéties (Baptiste)

Une petite définition

On définit l'homothétie de centre A et de rapport $r \geqslant 0$, la transformation du plan suivante. Un point X est envoyé sur un point X' de tel sorte que $X' \in [AX)$ et $\frac{AX'}{AX} = r$.

On peut également définir des homohéties avec des rapports négatifs, dans ce cas le point X' est de l'autre côté de X par rapport à A sur la droite (AX).

Quelques propriétés

Nous allons dans la suite de ce cours exhiber quelques propriétés géométriques invariantes par homothéties.

— Tout d'abord, il est clair que les points sont envoyés sur des points.

— Montrons que les droites sont conservées : Soit A un point et r un nombre réel. Soit un droite (XY) on veut montrer que l'homothétie de centre A et de rapport r envoie la droite (XY) sur une droite. On note X' et Y' les images des points X et Y par l'homthétie. Le théorème de Thalès nous permet d'affirmer que les droites (XY) et $(X'Y')$ sont parallèles. Cela conclut.

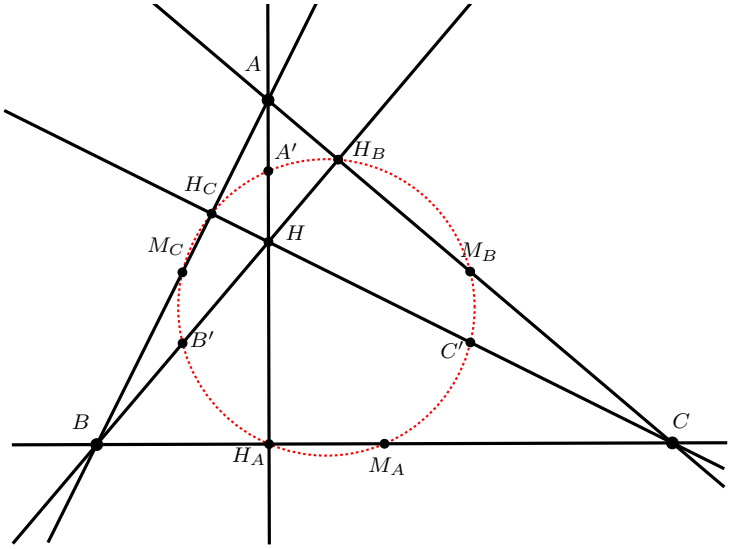
— La preuve précédente montre également la conservation des angles par l'homothétie.

— Montrons la conservation des cercles : Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique, alors on a $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (quitte à renommer les points). Par conservation des angles, l'homothetie envoie $ABCD$ sur un quadrilatère cyclique. Ainsi, les cercles sont bien conservés par homothetie.

Ses propriétés sont en fait très intuitives. L'homothétie agit comme un zoom ou un dezoom. Ce qui a toutes les chances de conserver les objets mathématiques nommés plus haut. De plus, toutes les longueurs vont être multipliées par $|r|$.

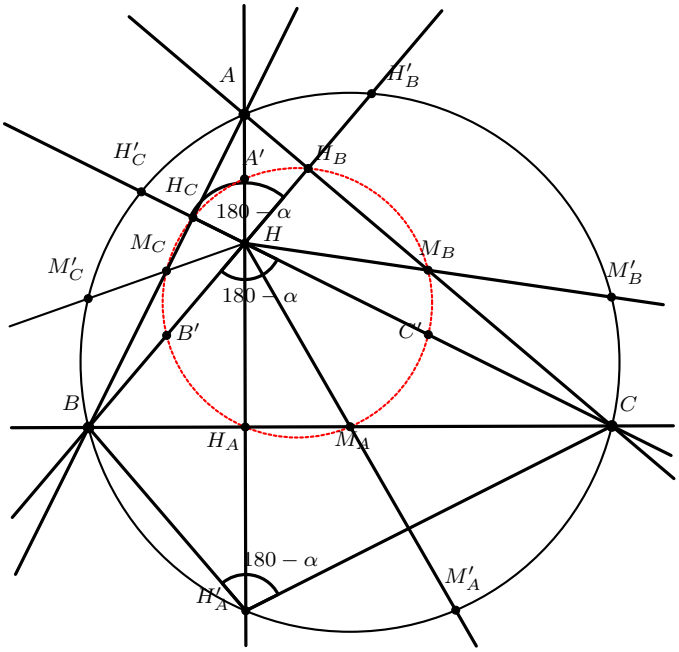
Un exemple spectaculaire : le cercle d'Euler

Exercice 1
Soit ABC un triangle. Soit H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C et H l'orthocentre. Soit M_A, M_B, M_C A', B' et C' les milieux des côtés de BC, CA, AB, AH, BH et CH. On montre alors que les neufs points H_A, H_B, H_C, M_A, M_B, M_C, A', B' et C' sont sur le même cercle.



Solution de l'exercice 1

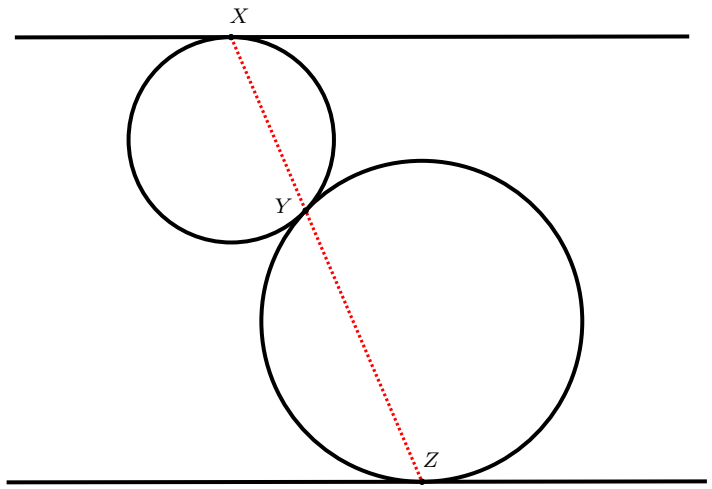
Soit A'' le symétrique de H par rapport à BC, on obtient, $\widehat{BA''C} = \widehat{BHC} = 180 - \widehat{BAC}$ Donc A'' est sur le cercle circonscrit de ABC. On montre de la même manière que le symétrique de H par rapport au milieu de $[BC]$ est sur le cercle circonscrit de ABC. Une homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$ conclut enfin.



Quelques résultats marrants

Exercice 2
Soit (d_1), (d_2) deux droites parallèles. On construit de plus deux cercles ω_1 et ω_2 de tel sorte que ω_1 et ω_2 soient tangents. et de tel sorte que pour $i \in \{1, 2\}$ ω_i est tangent à (d_i). Montrer que les trois points de tangence sont alignés.

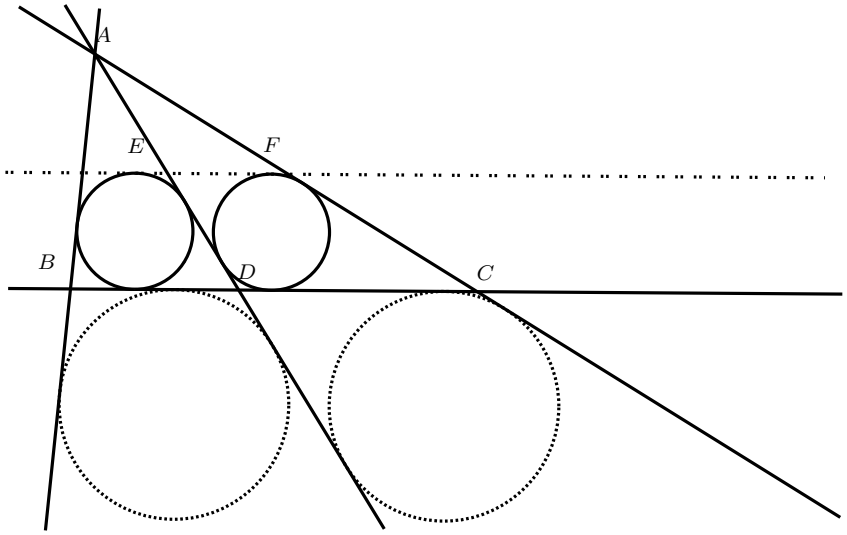
Solution de l'exercice 2



On montre qu'il existe une homothétie de centre Y et de rayon négatif qui envoie un cercle sur l'autre. On peut par exemple envoyer les centres les uns sur les autres puis regarder la taille des rayons. Alors le point X sera envoyé sur le point Z. Les tangentes seront envoyés l'une sur l'autre ce qui montre qu'elles sont alirs parallèles.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, et soit D un point sur le segment $[BC]$. On suppose que les cercles inscrits des triangles ABD et ACD sont de même rayon. Montrer qu'il en est de même pour les cercles A-exinscrits.

Solution de l'exercice 3



La clef pour résoudre cet exercice est de rajouter la droite EF parallèle à la droite (BC) comme les cercles inscrits sont de même rayon.

On remarque alors que la figure contenant le triangle formé par les droites (AB), (AC) et (EF) et les deux cercles inscrits est la même que celle avec le triangle ABC et les cercles exinscrits (on a donc bien une homothetie).

Mais alors les cercles exinscrits ont bien le même rayon.

2 Atelier tour de magie (Victor)

À venir…

IV. Groupe B

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique et Combinatoire

1 Récurrence (Paul)

Introduction

Dans ce cours, on découvre un nouvel outil, très utile pour démontrer un résultat dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. Cet outil s'appelle **le théorème de récurrence** et il provient directement de la théorie axiomatique des entiers naturels. cette dernière ayant donné lieu à de nombreuses constructions, nous nous contenterons de démontrer le théorème de récurrence pour l'une d'entre elles.

Théorie axiomatique des entiers naturels et théorème de récurrence

Nous abordons ici l'étude du théorème de récurrence via la théorie axiomatique des entiers naturels de **Peano**. Nous postulons l'existence d'un triplet $(0, \mathbb{N}, S)$, où $\mathbb{N}$ est un ensemble, 0 un élément de cet ensemble et $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application vérifiant :

Axiome 1.
S est injective

Axiome 2.
L'image de S est $\mathbb{N} - \{0\}$

Axiome 3.
Si A est une partie de $\mathbb{N}$, telle que $0 \in A$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in A) \Longrightarrow (S(n) \in A)$, alors $A = \mathbb{N}$

Ce troisième axiome est appelé axiome de récurrence, on appelle l'application S, l'application successeur. Avec cette théorie nous pouvons énoncer et démontrer le théorème dit de récurrence :

Théorème 4.
de récurrence

Soit $P(n)$, une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. Alors les relations $P(0)$ (ce qui veut dire que l'assertion est vraie pour $n = 0$) et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(S(n))$ impliquent $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ (ce qui veut dire que l'assertion est vraie pour tous les entiers naturels).

Démonstration. Soit A l'ensemble $\{n, n \in \mathbb{N} et P(n)\}$; A est non vide car $0 \in A$. Par hypothèse, $n \in A \Longrightarrow S(n) \in A$; d'après l'axiome 3, il s'ensuit $A = \mathbb{N}$ □

La deuxième hypothèse signifie que la l'assertion $P(n)$ est héréditaire. Ainsi le théorème de récurrence nous dit que si une assertion $P(n)$ est héréditaire et initialisé (c'est à dire vraie en 0), alors est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dégage ainsi une méthode pour démontrer une assertion de type $P(n)$:

1.Initialisation : On montre $P(0)$.

2.Hérédité : En prenant un n quelconque, on montre que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

3.Application du théorème : On a toutes les hypothèses du théorème, on peut donc l'appliquer et conclure.

Exercice 1
Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2,$$

Bonus : Soit alors $(u_k)_{k\geq 1}$, une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = (\sum_{k=1}^{n} u_k)^2$, montrer que pour tout $k \geq 1$, $x_k = k$.

Exercice 2
Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 3
Montrer par récurrence que pour tout entier n et tout réel $x > 0$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 4
Pour tout $k \leqslant n \in \mathbb{N}$ définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ de façon récurrente :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \text{ pour tous } k < n$$

1. Montrer que
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
2. Montrer que
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
3. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$$

Récurrence forte

Théorème 5.
récurrence forte

Soit $P(n)$, une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. Alors les relations $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \leq n \ \ P(k)) \implies P(n+1)$ impliquent $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Démonstration. Cela revient à montrer par récurrence simple la propriété $(\forall k \leq n \ P(k))$. □
Les étapes de preuves restent alors les mêmes avec une modification de l'étape d'hérédité.

Exercice 5
Montrer par récurrence forte que tout entier supérieur ou égal à deux admet une unique décomposition en facteur premier

Exercice 6
Démontrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ s'écrit de façon unique de la forme $2^p(2q+1)$, où p et q sont des entiers

Exercice 7
Démontrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Exercices

Exercice 8
Trouver une expression comparable à celle du binôme de Newton pour $(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n$.

Exercice 9
Soit k un entier naturel impair, montrer que 2^{n+2} divise $k^{2^n} - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 10
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, montrer que pour tout $a_1, ...a_n \in I$ et pour tout $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, montrer que

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i).$$

Corrections

Solution de l'exercice 1

Rappel 6.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vous pouvez vérifiez ce résultat par récurrence ou alors être bien plus malin...

Montrons donc par récurrence sur n que

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Pour $n = 1$, c'est vrai car
$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$
Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+1$. On a
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k^3) + (n+1)^3$$
par relation de Chasles, soit
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$
par hypothèse de récurrence, ainsi
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4},$$
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$
Ce qui clôt la récurrence.

Solution de l'exercice 2
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que
$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$$
Pour $n = 1$, c'est vrai car
$$2^{1-1} = 1 = 1! = 1^1$$
Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+1$. On a comme $n \geq 1$, $n+1 \geq 2$, d'où
$$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times n! \leq (n+1)!.$$
Ce qui clôt la récurrence pour l'inégalité de gauche, l'hypothèse de récurrence nous donne en multipliant par $n+1$
$$(n+1)! \leq (n+1)n^n \leq (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1}.$$
Ce qui termine l'exercice.

Solution de l'exercice 3
Montrons par récurrence que pour tout entier n et tout réel $x > 0$,
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$
Pour $n = 0$, c'est vrai car
$$(1+x)^0 = 1 \geq 1.$$

Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+1$. On a,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

Ce qui clôt la récurrence.

Solution de l'exercice 4
1. Montrons par récurrence sur n que, pour tout entier $k < n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pour $n = 0$, c'est vrai car

$$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!0!}.$$

Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+1$. Si $k = 0$ ou $k = n+1$, c'est vrai, car par exemple pour $k = 0$ on a

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!}.$$

Supposons donc k non nul. Alors,

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} && \text{par définition} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right] \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{n+1}{k(n-k+1)}\right] \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!},
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

2. Montrons ce résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$ c'est évident. Supposons le résul-

tat vrai au rang n, et montrons le au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1},
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{2k-1} + \binom{2n-1}{2k} \\
&= 2 + \sum_{i=1}^{2n-2}\binom{2n-1}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{i} \\
&= 2^{2n-1} \qquad \text{d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5

Théorème fondamental de l'arithmétique

Solution de l'exercice 6

Montrons par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ s'écrit de la forme $2^p(2q+1)$, où p et q sont des entiers.

Pour $n = 1$, c'est vrai en prenant $p = q = 0$.

Supposons maintenant que tout entier inférieur ou égal à $n-1$ vérifie cette assertion et montrons alors que l'entier n la vérifie. On a soit n pair, c'est à dire $n = 2k$ avec $1 \leq k \leq n-1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à k, qui nous assure donc l'existence de p et q tel que $k = 2^p(2q+1)$. Il s'ensuit $n = 2k = 2^{p+1}(2q+1)$, le couple d'entier $(p+1, q)$ convient alors et clôt la preuve de l'existence pour n pair.

Si n est impair, alors par définition il existe q tel que $n = 2q+1$. Dans ce cas là le couple $(0, q)$ convient et on a pas besoin de l'hypothèse de récurrence.

Montrons l'unicité d'une telle décomposition ; on suppose qu'il existe deux couples (p, q) et (u, v) tels que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n = 2^p(2q+1) = 2^u(2v+1),$$

alors sans perte de généralité, on peut supposer $p \geq u$, on a alors

$$2^{p-u}(2q+1) = 2v+1.$$

Comme le membre de droite est impair, on a directement $p = u$ et par suite $q = v$.

Solution de l'exercice 7
Montrons par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.
Pour $n = 1$, c'est vrai car $2^0 = 1$.
Supposons maintenant que tout entier inférieur ou égal à $n-1$ vérifie cette assertion et montrons alors que l'entier n la vérifie. On a soit n pair, c'est à dire $n = 2k$ avec $1 \leq k \leq n-1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à k, ce qui nous donne l'existence d'entiers $a_1, ..., a_j$ tous distincts tels que

$$k = 2^{a_1} + ... + 2^{a_j},$$

alors

$$n = 2^{a_1+1} + ... + 2^{a_j+1}$$

s'écrit bien comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.
Si n est impair alors $n - 1 = 2k$ avec $1 \leq k \leq n-1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à k, ce qui nous donne l'existence d'entiers $a_1, ..., a_j$ tous distincts tels que

$$k = 2^{a_1} + ... + 2^{a_j},$$

soit

$$n = 1 + 2^{a_1+1} + ... + 2^{a_j+1} = 2^0 + 2^{a_1+1} + ... + 2^{a_j+1}.$$

Ce qui clôt la récurrence.

Solution de l'exercice 8
Nous allons montrer par récurrence sur m que

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+...+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$$

avec

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!}$$

. Pour $m = 2$ on retrouve la formule du binôme de Newton. Supposons alors que la formule soit vraie pour m, on a donc :

$$(x_1 + ... + (x_m + x_{m+1}))^n = \sum_{k_1+k_2+...+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_{m-1}^{k_{m-1}} (x_m + x_{m+1})^K$$

avec la formule du binôme sur $(x_m + x_{m+1})^K$ on a :

$$= \sum_{k_1+k_2+...+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_{m-1}^{k_{m-1}} \sum_{k_m+k_{m+1}=K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

Et par définition des coefficients, on a

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., K}\binom{K}{k_m, k_{m+1}} = \frac{n!}{k_1!k_2!...K!}\frac{n!}{k_m!k_{m+1}!} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_{m+1}!} = \binom{n}{k_1, ..., k_m, k_{m+1}}$$

Enfin :

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m + x_{m+1})^n = \sum_{k_1+...+k_{m+1}=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m, k_{m+1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

Solution de l'exercice 9
Soit k un entier naturel impair, montrons par récurrence que 2^{n+2} divise $k^{2^n} - 1$ pour tout $n \geq 1$
Pour $n = 1$, c'est vrai car $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ est divisible par 8 étant donné que $k-1$ et $k+1$ sont deux nombres pairs dont l'un est divisible par 4. Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+1$. Il faut montrer que 2^{n+3} divise $k^{2^{n+1}} - 1$. On remarque que

$$k^{2^{n+1}} - 1 = (k^{2^n} - 1)(k^{2^n} + 1).$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$2^{n+2} | k^{2^n} - 1$$

et comme k est impair, $k^{2^n} + 1$ est divisible par 2. Ce qui clôt la récurrence.

Solution de l'exercice 10
Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes.

2 Divisibilité, PGCD et nombres premiers (Ilyès)

Cours

On s'appuie sur les résultats montrés dans le cours de Jean-Louis Tu, disponible sur ce lien Arithmétique niveau 1. On utilisera plus précisément les résultats concernant :

1. toute la partie "2-Divisibilité"
2. la partie "4.1-Identités remarquables" uniquement

Exercices

Exercice 1
Montrer que pour tout entier strictement positif n, la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 2
Trouver tous les entiers naturels n tels que : $n^5 - 2n^4 - 7n^2 - 7n + 3 = 0$

Exercice 3
Trouver tous les entiers strictement positifs n tels que pour tout entier a impair, si $a^2 \leqslant n$ alors $a \mid n$.

Exercice 4
Déterminer tous les entiers positifs n tels que :

$$5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 5^n + 3^n$$

Exercice 5
Trouver tous les entiers naturels a, b, c solution de l'équation diophantienne : $2^a 3^b + 9 = c^2$

Exercice 6
Montrer que si $pgcd(a, n) = pgcd(b, n) = 1$, alors $pgcd(ab, n) = 1$.

Exercice 7
Trouver tous les nombres premiers p et tous les entiers strictement positifs x, y t.q $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$.

Exercice 8
Trouver tous les nombres premiers p tel qu'il existe des entiers strictement positifs x, y t.q

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$$

Exercice 9
Soient x, y des entiers t.q $x, y > 1$ et $x + y - 1 \mid x^2 + y^2 - 1$. Montrer que $x + y - 1$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 10
Quels sont les entiers p tels que p, $p + 2$ et $p + 4$ sont tous premiers ?

Exercice 11
Soient a, b, m, n des entiers avec $pgcd(a, b) = 1$. Montrer la splendide relation suivante :

$$pgcd(a^m - b^m, a^n - b^n) = a^{pgcd(m,n)} - b^{pgcd(m,n)}$$

Exercice 12
Déterminer le $pgcd$ de tous les nombres de la forme $(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$ où a, b, c, d parcourent les entiers relatifs.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $d \in \mathbb{Z}$ un diviseur commun à $21n + 4$ et $14n + 3$. On a alors :

$$d \mid (21n + 4) - (14n + 3) = 7n + 1$$

$$d \mid (14n + 3) - 2(7n + 1) = 1$$

Donc $d \mid 1$ et $pgcd(21n+4, 14n+3) = 1$ i.e. la fraction est irréductible.

Solution de l'exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $n \mid n^5 - 2n^4 - 7n^2 - 7n = -3$ donc $n \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Seul 3 convient.

Solution de l'exercice 3
On a tout de suite l'intuition qu'un tel entier n possède "trop" de diviseurs et que donc seuls les petites valeurs de n vont fonctionner. Pour rendre ceci rigoureux, notons $k \in \mathbb{N}$ l'unique entier naturel vérifiant :

$$k^2 \leqslant n < (k+1)^2$$

On a alors :

$$k \leqslant \sqrt{n} < k+1$$

On considère 2 cas :
Cas 1 : k est impair
Si $k \geqslant 5$, alors : $k, k-2, k-4$ divisent n et donc $ppcm(k, k-2, k-4) \mid n$ i.e. $k(k-2)(k-4) \mid n$ car k est impair et si un nombre premier divise deux de ces facteurs, il divise alors 2 et donc c'est 2. On a donc : $k(k^2-6k+8) \leqslant n \leqslant (k+1)^2 - 1 = k(k+2)$ puis $k^2 - 7k + 6 \leqslant 0$ donc $(k - \frac{7}{2})^2 \leqslant \frac{25}{4}$ ie $-\frac{5}{2} \leqslant k - \frac{7}{2} \leqslant \frac{5}{2}$ puis $1 \leqslant k \leqslant 6$.
Cas 2 : k est pair
Si $k \geqslant 6$, alors : $k-1, k-3, k-5$ divisent n et donc $ppcm(k-1, k-3, k-5) \mid n$ i.e. $(k-1)(k-3)(k-5) \mid n$ car si $k-1$ est impair et si un nombre premier divise deux de ces facteurs, il divise alors 2 et donc c'est 2. On a donc de la même façon : $(k-1)(k^2-8k+15) \leqslant n \leqslant k(k+2)$ puis $k^3 - 10k^2 + 21k - 15 \leqslant 0$. Par récurrence on peut voir que seuls les $k \leqslant 7$ conviennent.

Ensuite on traite chacun des cas "à la main".

Solution de l'exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$5^{n-1} + 3^{n-1} \mid (5^n + 3^n) - 5(5^{n-1} + 3^{n-1})$$

Puis

$$5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 3^n - 5 \times 3^{n-1}$$

i.e.

$$5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 3^{n-1}(3-5)$$

. On a aussi $pgcd(5^{n-1} + 3^{n-1}, 3^n - 1) = 1$: soit d un diviseur commun à $5^{n-1} + 3^{n-1}$ et 3^{n-1}, on a $d \mid 3^{n-1}$ et $d \mid 5^{n-1}$ donc d est à la fois une puissance de 3 et de 5 i.e. $d = 1$.
Ensuite grâce au lemme de Gauss,

$$5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 2$$

et donc $5^{n-1} + 3^{n-1} = 2$ et $n = 1$.
Réciproquement, $n = 1$ convient.

Solution de l'exercice 5
Soit (a, b, c) un triplet solution. On factorise directement :

$$2^a 3^b = (c-3)(c+3)$$

donc $c-3 \mid 2^a 3^b$ et $c+3 \mid 2^a 3^b$ et donc il existe des entiers naturels w, x, y, z tels que :

$$c-3 = 2^w 3^x \text{ et } c+3 = 2^y 3^z$$

avec $a = w+y$ et $b = x+z$. On a alors :

$$6 = 2^y 3^z - 2^w 3^x$$

Si $a = 0$: seul $b = 3$ convient et donc $(0, 3, 6)$ convient.
Si $b = 0$: $(4, 0, 5)$.
Sinon, $w, x, y, z > 0$ et $y = 1$ ou $w = 1$ car $4 \nmid 6$; $x = 1$ ou $z = 1$ car $9 \nmid 6$:
Si $y = 1, x = 1$:

$$1 = 3^{z-1} - 2^{w-1}$$

donc $z = 2, w = 2$ ou $z = 3, w = 4$. Puis $(3, 3, 15)$ et $(5, 4, 51)$ conviennent.
Si $y = 1, z = 1$:

$$1 = 1 - 2^{w-1} 3^{x-1}$$

c'est absurde.
Si $w = 1, z = 1$:

$$1 = 2^{y-1} - 3^{x-1}$$

donc $y = 3, x = 2$. Puis $(4, 3, 12)$ convient.
Si $w = 1, x = 1$:

$$1 = 2^{y-1} 3^{z-1} - 1$$

c'est absurde.

Réciproquement, ces solutions conviennent.

Solution de l'exercice 6
Soit p un diviseur premier commun de ab et n. On a $p \mid a$ ou $p \mid b$ car p est un nombre premier.
Supposons qu'on ait $p \mid a$. On a donc $p \mid pgcd(n, a) = 1$: c'est absurde.
ab et n n'ont donc aucun diviseur premier commun : $pgcd(ab, n) = 1$.

Solution de l'exercice 7
On a :

$$p(y-x) = xy$$

On note : $x = da$ et $y = db$ avec $d = pgcd(x, y)$ et $pgcd(a, b) = 1$.
Il vient :

$$p(b-a) = dab$$

Donc $a \mid p(b-a)$ or a et $b-a$ sont premiers entre eux car $pgcd(a, b) = 1$ et donc par le lemme de Gauss, on obtient $a \mid p$ i.e. $a = 1$ ou $a = p$. De même, $b = 1$ ou $b = p$. On remarque que $a < b$ car $a, b > 0$ et donc $a = 1$ et $b = p$.
On obtient $d = p - 1$ et $(p-1, p(p-1))$ est solution pour tout premier p.

Solution de l'exercice 8
Quand on a des nombres premiers, on cherche toujours des divisibilités et donc on commence par factoriser.
On a :

$$(x+y)(xy-p) = 5p$$

et $x+y>0$ donc 4 cas :
Cas 1 : $x+y=1$ et $xy-p=5p$
$x,y \geqslant 1$ donc leur somme vaut au moins 2 : absurde.
Cas 2 : $x+y=5$ et $xy-p=p$
$xy=2p$ et $(x,y) \in \{(1,4);(2,3)\}$ donc $(1,4,2);(4,1,2);(2,3,3),(3,2,3)$ sont solutions.
Cas 3 : $x+y=p$ et $xy-p=5$
On a $xy-x-y+1=6$ et donc $(x-1)(y-1)=6$ puis $(x,y) \in \{(2,7);(3,4)\}$ donc $(3,4,7);(4,3,7)$ sont les seules solutions.
Cas 4 : $x+y=5p$ et $xy-p=1$
$x,y \leqslant xy=p+1$ donc $5p=x+y \leqslant 2p+2$ ce qui est absurde car $p \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 9
On raisonne par l'absurde. On suppose que $x+y-1$ soit un nombre premier. L'idée, qui doit être tout à fait naturelle, est d'utiliser le fait qu'on a le droit de faire des combinaisons linéaires dans les divisibilités pour faire apparaître un produit. On a :

$$x+y-1 \mid (x^2+y^2-1)-(x+1)(x+y-1)$$

et donc

$$x+y-1 \mid y^2-xy-y=y(y-x-1)$$

Or $x+y-1$ est premier donc divise l'un des deux facteurs. De plus $x+y-1>y$ et $y>1$ donc $x+y-1 \nmid y$ i.e.

$$x+y-1 \mid y-x-1$$

Puis

$$x+y-1 \mid (x+y-1)-(y-x-1)=2x$$

or $x+y-1 \nmid x$ comme précédemment donc $x+y-1 \mid 2$ et donc

$$x+y-1=2$$

On a alors : $x+y=3$ mais $x,y>1$ i.e. $x+y \geqslant 4$.
C'est absurde. et $x+y-1$ n'est pas premier.

Solution de l'exercice 10
On regarde modulo 3 :
Si $p \equiv 0 \pmod 3$: alors $p=3$.
Si $p \equiv 1 \pmod 3$: $p+2 \equiv 0 \pmod 3$ et donc $3 \mid p+2$ qui est premier i.e. $p+2=3$: impossible.
Si $p \equiv 2 \pmod 3$: $p+4 \equiv 0 \pmod 3$ et donc $3 \mid p+4$ qui est premier i.e. $p+4=3$: impossible.

Réciproquement, $p=3$ fonctionne : 3, 5 et 7 sont bien premiers.

Solution de l'exercice 11
On peut supposer que $m \geqslant n$. On écrit la division euclidienne de m par n : $m=nq+r$, $0 \leqslant r < n$. On a :

$$\begin{aligned} pgcd(a^m-b^m,a^n-b^n) &= pgcd(a^n-b^n,(a^m-b^m)-(a^n-b^n)a^{m-n}) \\ &= pgcd(a^n-b^n,b^n(a^{m-n}-b^{m-n})) \\ &= pgcd(a^n-b^n,a^{m-n}-b^{m-n}) \\ &\dots \\ &= pgcd(a^n-b^n,a^r-b^r) \end{aligned}$$

en utilisant le lemme de Gauss à chaque fois. Il y aurait évidemment un récurrence à écrire.
Ensuite, cela nous rappelle naturellement l'algorithme d'Euclide que nous écrivons ainsi ($r_n = pgcd(m,n)$) :

$$\begin{aligned} m = nq + r, m &= nq_0 + r_0 \\ n &= r_0 q_1 + r_1 \\ r_0 &= r_1 q_2 + r_2 \\ &\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 \end{aligned}$$

En utilisant la propriété initiale selon cet algorithme on a bien :

$$pgcd(a^m - b^m, a^n - b^n) = pgcd(a^n - b^n, a^r - b^r) = \dots = pgcd(a^{r_n} - b^{r_n}, a^0 - b^0) = a^{r_n} - b^{r_n}$$

Solution de l'exercice 12
On note $PGCD$ l'entier recherché.
On n'a que 4 nombres à disposition et donc aucune chance de pouvoir certifier qu'un nombre premier $p \geqslant 5$ divise toujours les entiers de cette forme : $\forall p \geqslant 5$, premier, $p \nmid PGCD$. Il faut donc s'en tenir aux facteurs 2 et 3 qui seraient présents dans tous ces entiers.
Concernant les facteurs 3, par le principe des tiroirs, nous avons toujours deux des quatre nombres qui sont congrus modulo 3 et donc un facteur 3 assuré : $3 \mid PGCD$. Nous ne pouvons cependant pas assuré de second facteur 3 : $9 \nmid PGCD$.
Maintenant, modulo 4, nous pouvons avoir chacun des 4 restes possibles et donc uniquement deux facteurs congrus à 2 modulo 4 : $4 \mid PGCD$ mais $8 \nmid PGCD$.
Pour toute autres possibilité modulo 4, les entiers obtenus sont au moins multiples de 4.

D'où :

$$PGCD = 12$$

3 Principes des tiroirs et de l'extrémum (Pierre-Marie)

Ce cours a principalement repris les exercices données au groupe B du stage d'été 2019.

Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs est un simple constat logique, mais malgré son apparente simplicité, il permet de résoudre des situations très complexes.

Proposition 1 (Principe des tiroirs simple)**.**
Soient n tiroirs et $n+1$ chaussettes rangées dans ces tiroirs. Il existe au moins un tiroir contenant au moins deux chaussettes.

Exemple 2.
Un tiroir contient 2019 paires de chaussettes distinctes. Quel est le nombre minimal de chaussettes à sortir si l'on veut être sûr d'avoir sorti au moins une paire de chaussettes identiques ? On précise que le tiroir est tellement en bazar qu'il n'est pas possible de fouiller l'intérieur.

Démonstration : Il s'agit de trouver un minimum, donc de montrer à la fois que le nombre proposé est solution, et que tout nombre inférieur n'est pas solution.
Par le principe des tiroirs, si l'on a sorti 2020 chaussettes, alors on est assuré d'avoir sorti deux chaussettes identiques. En revanche, il est possible de sortir 2019 chaussettes distinctes : le nombre recherché est 2020.

Notation.
On pose $\lceil x \rceil$ l'unique entier vérifiant $x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$. Ainsi, $\lceil 3 \rceil = 3$, $\lceil 1.7 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$ et $\lceil -2,7 \rceil = -2$.

Proposition 3 (Principe des tiroirs précis)**.**
Soient n tiroirs et l chaussettes rangées dans ces tiroirs. Il existe au moins un tiroir contenant au moins $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ chaussettes.

Exemple 4.
Paris compte deux millions d'habitants. Un être humain a, au plus, 600 000 cheveux sur la tête. Quel est le plus grand nombre de Parisiens que l'on peut espérer trouver qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête ?

Démonstration : Ici, les tiroirs sont les nombres de cheveux et les chaussettes seront les Parisiens. On a alors 2000000 chaussettes pour 600001 tiroirs (n'oubliez pas les Parisiens chauves, au risque d'avoir des ennuis avec la SPPC, la Société de Protection des Parisiens Chauves) : le principe des tiroirs nous assure qu'il est possible de trouver $\left\lceil \frac{2000000}{600001} \right\rceil = 4$ Parisiens qui ont exactement le même nombre de cheveux.

Proposition 5 (Principe des tiroirs infinis)**.**
Soient n tiroirs et une infinité de chaussettes. Alors il existe au moins un tiroir contenant une infinité de chaussettes.

Exemple 6.
Montrer qu'il existe une infinité de nombres composés uniquement de 0 et de 1 en base décimale divisibles par 2019.

Démonstration : Considérons l'ensemble des nombres entiers constitués uniquement du chiffre 1 en base décimale : $\{1, 11, 111, 1111, \ldots\}$. Par principe des tiroirs, puisque l'ensemble des restes possibles par la division euclidienne par 2019 est fini, il existe un entier $0 \leq r < 2019$ tel qu'il existe une infinité d'entiers ne s'écrivant que avec des 1 tels que le reste dans la division euclidienne par 2019 soit r. Mais alors la différence de deux de ces nombres sera composée entièrement de 0 et de 1 en base décimale et sera divisible par 2019. De plus, la considération du nombre de chiffres nous assure qu'on a bien une infinité de tels entiers. On aurait pu également simplement multiplier un tel nombre par une puissance de 10 pour en avoir une infinité.

Maintenant, il faut apprendre à reconnaître les tiroirs et les chaussettes...

Exercice 1
Combien d'enfants faut-il au minimum dans une école pour que l'on soit sûr que 3 d'entre eux

au moins aient leur anniversaire le même jour ? (Rappelons que certaines personnes naissent un 29 février.)

Exercice 2
Montrer que si 3 nombres réels sont dans l'intervalle $[0,\ 1[$, alors il existe parmi eux deux nombres a et b tels que $|b-a| < \frac{1}{2}$.

Exercice 3
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 20\}$ pour être sûr que cette sélection inclue deux entiers a et b tels que $a - b = 2$?

Exercice 4
Soit $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2019},\ x_{2020}$ des entiers. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_j - x_i$ soit divisible par 2019.

Exercice 5
Montrer que si 7 nombres distincts sont choisis dans l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$, alors il en existe deux dont la somme vaut 12.

Exercice 6
Chaque point d'un carré de taille 2x2 est colorié soit en rouge soit en bleu, sans logique précise. Montrer qu'il existe 2 points de la même couleur qui sont distant d'exactement 1.

Exercice 7 (USAMTS 2018)
Chaque point du plan est colorié soit en rouge, soit en vert, soit en bleu. Montrer qu'il existe un rectangle dont tous les sommets sont de la même couleur.

Exercice 8
Montrer que, parmi les stagiaires d'Animath de cette semaine, il en existe deux qui connaissent le même nombre d'autres stagiaires (on suppose la relation « se connaître » symétrique).

Exercice 9
Soit n un entier. On choisit $n+1$ nombres parmi $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$, montrer que l'on peut en trouver deux premiers entre eux. Montrer qu'on peut aussi en trouver deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 10
On choisit 10 entiers deux à deux distincts entre 1 et 100 $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{10}\}$. Montrer qu'on peut extraire deux sous-ensembles disjoints de même somme.

Exercice 11
(Bolzano-Weierstrass) On considère une suite infinie de réel dans l'intervalle $[0,\ 1[$ $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots$.

— Montrer que soit l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{2}\right[$ soit l'intervalle $\left[\frac{1}{2},\ 1\right[$ contient une infinité d'éléments de la suite.

— Soit $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe au moins un entier $\alpha \in [0, 1]$ tel qu'une infinité d'éléments de la suite se trouvent dans l'intervalle $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$

Solution de l'exercice 1
De la même manière, si on a 733 élèves, alors par le principe des tiroirs on est assuré d'avoir au moins trois élèves qui ont la même date d'anniversaire (il y a 366 dates possibles). Ce nombre est minimal car il existe une configuration à 732 élèves sans avoir trois élèves avec la même date d'anniversaire.

Solution de l'exercice 2
En partitionnant l'intervalle en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, On a par principe des tiroirs l'un des intervalles qui contient au moins 2 des 3 réels choisis, qui conviennent alors.

Solution de l'exercice 3
Considérons les tiroirs de la forme $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{6, 8\}$, $\{9, 11\}$, $\{10, 12\}$, $\{13, 15\}$, $\{14, 16\}$, $\{17, 19\}$, $\{18, 20\}$. En choisissant 11 entiers, par le principe des tiroirs, il en existera deux qui seront dans le même tiroir, et donc de différence 2. Cette quantité est bien minimale car l'ensemble $\{1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18\}$ est de taille 10 et ne contient pas de tels entiers a et b.

Solution de l'exercice 4
Lorsque l'on fait la division euclidienne d'un entier par 2019, le reste sera compris entre 0 et 2018, soit 2019 possibilités. En regroupant chaque entier selon son reste dans la division euclidienne par 2019, on obtient par principe des tiroirs deux entiers qui ont le même reste, et donc la différence des deux sera divisible par 2019.

Solution de l'exercice 5
Considérons les tiroirs $\{1, 11\}$, $\{2, 10\}$, $\{3, 9\}$, $\{4, 8\}$, $\{5, 7\}$, $\{6\}$. En choisissant 7 nombres, on va choisir par principe des tiroirs deux entiers qui seront dans le même tiroir, et leur somme fera nécessairement 12.

Solution de l'exercice 6
Traçons le triangle équilatéral défini par les sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Par principe des tiroirs, deux de ces sommets ont la même couleur et sont distants de 1.

Solution de l'exercice 7
Traçons le rectangle plein à coordonnées entières de taille 4×82 dont le sommet en bas à gauche est $(0, 0)$. Il y a $3^4 = 81$ façons de colorier une colonne de 4 points. Par principe des tiroirs, parmi les 82 colonnes, il en existe 2 identiques. Or, sur ces deux colonnes, parmi les 4 points, deux sont de la même couleur. Il suffit alors de sélectionner ces quatre sommets et de tracer le rectangle adéquat.

Solution de l'exercice 8
Soit n le nombre de stagiaires (on a $n = 80$ mais peu importe). Chaque stagiaire connaît entre 0 et $n - 1$ autres stagiaires. Si par l'absurde chacun connaît un nombre différent d'autres stagiaires, alors nécessairement il y a un stagiaire qui ne connaît personne, un qui connaît une personne, un qui connaît deux personnes, etc. Mais alors n stagiaire connaît $n - 1$ autres personnes, soit tout le monde, y compris celui qui ne connaît personne : absurde.

Solution de l'exercice 9
En considérant les n tiroirs de la forme $\{2k - 1, 2k\}$ où $1 \leq k \leq n$, on voit qu'on peut trouver deux entiers consécutifs qui seront forcément premiers entre eux.

Chaque entier peut s'écrire sous la forme $2^s(2t + 1)$. Or t varie entre 0 et $n - 1$, il existe alors deux entiers parmi les $n + 1$ choisis qui ont la même partie impaire et ne diffèrent que par la puissance de 2. Il est alors clair que l'un divise l'autre.

Solution de l'exercice 10
Pour chacun des entiers, on a le choix de le sélectionner ou non : il existe alors $2^{10} = 1024$ sous-ensembles possibles. Or la somme d'un sous-ensemble est nécessairement comprise entre 1 et 1000 (on peut en réalité raffiner l'intervalle) : on peut alors créer au plus 1000 sommes, qui représenteront nos tiroirs. Par le principe des tiroirs, il existe deux sous-ensembles distincts de même somme. Cependant, on est pas assuré qu'ils soient disjoints. Il suffit pour cela de supprimer les éventuels éléments en commun pour arriver au résultat souhaité.

Solution de l'exercice 11
Pour la première question, il s'agit d'une simple application du principe des tiroirs dans le cas où l'on a une infinité de chaussettes.
La seconde question se résout de la même façon : commençons par choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Prenons pour tiroirs les ensembles $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$,...,$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$,...,$\left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right]$. Par principe des tiroirs infinis, l'un de ces tiroirs contient une infinité d'éléments, et notons α son milieu. Cet intervalle est alors inclus dans $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, ce qui achève la démonstration.

Principe de l'extremum

Le principe de l'extrémum est très puissant pour réaliser des raisonnements par l'absurde notamment. La philosophie des extrêmes se résume en : « Regarde la limite ! » En effet, il arrive bien souvent qu'on suppose l'existence d'une configuration optimale, du minimum ou du maximum d'une quantité, et qu'on aboutisse à une absurdité !

Exemple 7.
Montrer que l'ensemble $]0, 1]$ n'admet pas de minimum.
On rappelle qu'un ensemble A admet m pour minimum si :

— $m \in A$

— $\forall\, x \in A,\ \ x \geqslant m$.

Démonstration : Supposons par l'absurde que m soit le minimum de $]0, 1]$.
Notons que $1 \geqslant m > 0$ donc $1 > \frac{1}{2} \geqslant \frac{m}{2} > 0$, et $\frac{m}{2} \in]0, 1]$. Ensuite, $m > \frac{m}{2}$, ce qui contredit la minimalité de m. Donc $]0, 1]$ n'admet par de minimum.

Exercice 12
Soit S un ensemble de points tel que tout point de S est milieu de deux autres points de S, montrer que S est infini.

Exercice 13
On considère un ensemble fini de points S tel que toute droite passant par deux points de S passe aussi par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés.

Exercice 14
On considère un ensemble T de $2n$ points du plan. Montrer qu'il est possible de relier les points par paire de sorte que deux segments ne se croisent pas.

Exercice 15
A chaque point à coordonnées entières du plan, on attribue un nombre entier strictement

positif, tel que chaque nombre est égal à la moyenne arithmétique de ses quatre voisins (en haut, en bas, à gauche et à droite). Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Exercice 16
Lors d'une soirée dansante, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Mq il existe deux garçons g, g' et deux filles f, f' tq g a dansé avec f mais pas avec f' , et g' a dansé avec f' mais pas avec f

Exercice 17
Sept amis ont ramassé en tout cent champignons, chacun en a ramassé un nombre différent. Montrer qu'il en existe trois parmi eux qui ont ramassé à eux trois au moins 50 champignons.

Solution de l'exercice 12
On considère le point de plus petite abscisse et plus petite ordonnée, il ne peut pas être milieu.

Solution de l'exercice 13
On considère le point le plus P proche d'une droite reliant des points de S, disons (d). Cette droite doit contenir trois points. Donc il en existe deux d'un côté de la projection orthogonale, disons A puis B. On montre que A est plus proche de PB que P de (d), absurde. Donc tous les points sont confondus.

Solution de l'exercice 14
Parmi toutes les configurations, on considère celle qui minimise les distances des segments. Si deux segments se croisent, on peut les décroiser et diminuer la somme des distances par inégalité triangulaire, absurde !

Solution de l'exercice 15
Il existe un minimum des entiers écrit sur l'un des points, ses quatre voisins sont supérieurs ou égaux à celui ci, ce qui n'arrive que si ils sont tous égaux à lui. Donc ses 4 voisins sont égaux au minimum, puis de proche en proche toutes les cases du plan doivent être égales.

Solution de l'exercice 16
On considère le garçon g ayant dansé avec le plus de fille. On considère une fille f' avec qui il n'a pas dansé. f' a dansé avec un garçon g'. g' n'a pas pu dansé avec toutes les même filles que g par hypothèse. Donc on peut trouver f qui n'a pas dansé avec g' mais avec g.

Solution de l'exercice 17
On ordonne les amis par nombre de champignon différent, disons $a_1 > a_2 > ... > a_7$. Si $a_4 \geq 15$, on a $a_3 + a_2 + a_1 \geq 16 + 17 + 18 = 51$, et c'est gagné. Donc $a_4 \leq 14$ et $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$, donc $a_1 + a_2 + a_3 \geq 50$, et on a gagné.

4 Modulo et théorème de Fermat (Antoine)

Ce cours est en grande partie inspiré du cours d'arithmétique débutant de la POFM (de 3.4), disponible ici : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_base.pdf

Congruences : Définition et propriétés de base

Définition 1 (Congruences)**.**
Soit n un entier non nul. On dit que a et b sont congrus modulo n si n divise $a-b$. On le note $a \equiv b[n]$,ou encore $a = b \pmod{n}$.

Lorsque l'on effectue une division euclidienne de a par n sous la forme $a = nq + r$, on a $a \equiv r[n]$. Une autre manière de définir la congruence modulo n est donc de dire que $a \equiv b \pmod{n}$ si et seulement si les restes des divisions euclidiennes de a et de b par n sont égaux.

Remarque 2.
Un nombre a est divisible par n si et seulement si $a \equiv 0 \pmod{n}$.

La congruence est une sorte d'égalité, dans le sens où la plupart des choses qu'on pouvait faire avec une égalité seront aussi possibles avec la congruence, comme nous allons le voir avec les quelques propositions qui vont suivre.

Proposition 3 (La congruence est une relation d'équivalence)**.**

Soient a, b, c des entiers et n un entier non nul. On a les propriétés suivantes :

- $a = a[n]$ (réflexivité).
- Si $a = b[n]$ alors $b = a[n]$.(symétrie)
- Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c \pmod{n}$ alors $a \equiv c[n]$.(transitivité)

Démonstration. $a - a = 0$ est divisible par n, d'où la réflexivité.
Si n divise $a-b$, alors n divise $-(a-b) = b-a$, d'où la symétrie.
Si n divise $a-b$ et n divise $b-c$, alors n divise $(a-b)+(b-c) = a-c$, d'où la transitivité. □

La congruence est également compatible avec l'addition et la multiplication :

Proposition 4.
Soient a, b, c, d des entiers et n un entier non nul. Supposons $a = b[n]$ et $c = d[n]$. Alors
$(i) a + c \equiv b + d \pmod{n}$;
$(ii) ac \equiv bd \pmod{n}$.

Démonstration. Par hypothèse, n divise $a-b$ et $c-d$.
(i) n divise $(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d)$ donc $a+c = b+d[n]$.
(ii) $ac - bd = a(c-d) + d(a-b)$, donc $ac \equiv bd[n]$. □

Le fait de raisonner modulo 10 est assez intuitif, car il correspond à regarder le dernier chiffre d'un entier. Par exemple, 857382237491 est congru à 1 modulo 10 car ils ont les mêmes restes par la division euclidienne par 10, à savoir le chiffre des unités.

Proposition 5 (Puissances)**.**
Si $a = b[n]$, alors pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $a^k = b^k[n]$.

Démonstration. On a $a \equiv b \pmod{n}$, donc $a \times a \equiv b \times b \pmod{n}$, puis $a \times a \times a \equiv b \times b \times b \pmod{n}$, et ainsi de suite. □

Exercice 1
Trouver tous les entiers a, b tels que $3a^2 = b^2 + 1$.

Exercice 2
Montrer que pour tout n entier, $n-1$ divise $n^{n^n+n^3+3^n} + 4n - n^3 + n^2 + 6$.

Solution de l'exercice 1
Si on regarde modulo 3, on se rend compte q'un carré ne peut être congru que à 0 ou 1, donc $b^2 + 1$ ne peut jamais être divisible par 3 : il n'y a pas de solutions.

Solution de l'exercice 2
On passe modulo $n-1$, et on utilise le fait que $n \equiv 1 \pmod{n-1}$.

Critères de divisibilité

Proposition 6 (critère de divisibilité par 3 et 9)**.**
Soit n un entier. On note $n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_k 10^k$ son écriture décimale.
Alors n est congru à $a_0 + \cdots + a_k$ modulo 9 et modulo 3. Par conséquent, n est divisible par 9 ou 3 si et seulement si $a_0 + \cdots + a_k$ l'est.

Démonstration. On a $10 \equiv 1[9]$, donc $10^j \equiv 1[9]$ pour tout j,donc $n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^k a_k \equiv a_0 + \cdots + a_k[9]$.
On raisonne de même pour 3, puisque $10 \equiv 1 \pmod 3$. □

Exercice 3
Trouver un critère similaire avec 11.

Solution de l'exercice 3

Comme précédemment, on passe modulo 11, et on utilise le fait que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, et on trouve que n est divisible par 11 si et seulement si $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \ldots$

Aussi,

— n est divisible par 2 ou 5 si et seulement si son dernier chiffre l'est.
— n est divisible par 4 ou 25 si et seulement si ses deux derniers chiffres le sont.
— n est divisible par 8 ou 125 si et seulement si ses trois derniers chiffres le sont.

Je pense que vous avez compris l'idée pour $16, 32, \ldots$, je vous laisse le montrer en exercice.□

Inverses modulo n

Définition 7 (Inverse modulo n)**.**
Un entier b est appelé inverse de a modulo n quand $ab = 1[n]$. On dit que a est inversible modulo n s'il possède un inverse modulo n.

Par exemple, 3 est inverse de 5 modulo 7 car $3 \times 5 \equiv 1 \pmod 7$. C'est également le cas de -4, ou encore 17.

Proposition 8.
a est inversible modulo n si et seulement si a et n sont premiers entre eux. L'inverse de a est alors unique modulo n, il est noté a^{-1}.

Démonstration. Si a est inversible modulo n, alors il existe u tel que $au \equiv 1[n]$. Ainsi, il existe v tel que $au - 1 = nv$, ou encore $au + n(-v) = 1$ et on reconnaît là une relation de Bézout, a et n sont premiers entre eux.
Réciproquement, si a et n sont premiers entre eux, on se donne une relation de Bézout $au + nv = 1$, donc $n \mid au - 1$ et u est inverse de a modulo n.

Si b et b' sont deux inverses de a modulo n, alors $b = b \times 1 = b(ab') = (ba)b' = 1 \times b' = b'[n]$, et b et b' sont congrus modulo n. □

On voit d'ailleurs dans la preuve un moyen de déterminer l'inverse d'un nombre modulo n : comme celui-ci vient d'une relation de Bézout, on peut le déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu.

L'idée derrière un nombre inversible est qu'on peut "simplifier" par a en multipliant par a^{-1}, comme pour les nombres normaux : on divise par a, ce qui revient à multiplier par l'inverse de a.

Proposition 9.
Si a est inversible modulo n, et si $ax \equiv ay[n]$, alors $x \equiv y[n]$.

Démonstration. On a $ax = ay \pmod n$, donc $a^{-1}ax = a^{-1}ay \pmod n$, et enfin $x = y \pmod n$. □
L'hypothèse que a est inversible modulo n est nécessaire, puisque $2 \times 3 \equiv 2 \times 8[10]$ bien que $3 \not\equiv 8[10]$.

Proposition 10.
$\left(a^{-1}\right)^{-1} \equiv a \pmod n$, et $(-a)^{-1} \equiv -(a^{-1})$.

Démonstration. On a $a \times a^{-1} \equiv 1 \pmod n$ et $-a \times (-(a^{-1}) = a \times a^{-1} \times -1 \times -1 \equiv 1 \pmod n$, on conclut par unicité de l'inverse. □

Proposition 11 (produit d'inversibles)**.**
Si a et b sont inversibles modulo n alors ab est inversible modulo n, d'inverse $b^{-1}a^{-1}$.

Démonstration. On a $a\underbrace{bb^{-1}}_{1}a^{-1} \equiv aa^{-1} \equiv 1 \pmod n$. □

Proposition 12.
Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p (donc premier avec p). Alors $a \equiv a^{-1} \pmod p$ si et seulement si $a \equiv 1[p]$ ou $a \equiv -1[p]$.

Démonstration. Si $a \equiv a^{-1}, a^2 \equiv 1, (a-1)(a+1) \equiv 0$.
Alors $p \mid (a-1)(a+1)$, et $p \mid a-1$ ou $p \mid a+1$ d'après le lemme d'Euclide. □

Exercice 4
Trouver les inversibles modulo 8, puis leurs inverses. Faire de même modulo 9.

Exercice 5
Trouver l'inverse de 42 modulo 43, puis modulo 59

Pour vérifier si besoin :

Solution de l'exercice 4
Modulo 8, les inversibles sont $1, 3, 5$ et 7, et sont leurs propres inverses.
Modulo 9, les inversibles sont $1, 2, 4, 5, 7$ et 8, 1 et 8 sont leurs propres inverses, $2^{-1} = 5$, et $4^{-1} = 7$.

Solution de l'exercice 5
$42 \equiv -1 \pmod{43}$, donc 42 est son propre inverse modulo 43.
En revanche il n'y a pas d'astuce rapide pour déterminer l'inverse de 42 modulo 59, il faut passer par l'algorithme d'Euclide étendu, et on trouve que l'inverse de 42 modulo 59 est 52.

Théorème 13.
Wilson PPour n entier on note $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$. (prononcée "factorielle n").
Si p est premier, alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 6
Montrer le théorème de Wilson.
Indice : Utiliser la dernière propriété.

Solution de l'exercice 6
Si $p = 2$, on a bien $1! = 1 = -1 \pmod{2}$.
Si $p > 2$, on considère donc le produit $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$. On met 1 et $p-1$ à part, tous les autres ont un inverse distinct d'eux-mêmes. On les regroupe alors par paires, et ils s'annulent donc tous entre eux. Seuls restent de cette grande bataille 1 et $p-1$ qu'on avait laissés de côté, donc on a bien $(p-1)! \equiv 1 \times (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$. □

Petit théorème de Fermat (et indicatrice d'Euler, théorème d'Euler-Fermat s'il y a le temps)

Théorème 14.
Petit Fermat SSoit p un nombre premier, et a premier avec p (donc $p \nmid a$).
Alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Démonstration.
"Les translations sont des bijections □".
On fixe a premier avec p, et un inverse a^{-1} modulo p. On note aussi A l'ensemble $[\![1, p-1]\!] = \{1, 2, \ldots p-1\}$, f la fonction de A dans A qui à un élément x associe le reste de la division euclidienne de $a \times x$ par p.
Pour tout élément x de A, il existe y tel que $f(y) = x$, il suffit de prendre pour y le reste de la division euclidienne de $a^{-1}x$ par p. Ainsi, si on note B l'ensemble des $f(x), x \in A$, on a $B \subset A$ par définition de f, et on vient de montrer qu'on a également $A \subset B$, donc $A = B$.

Deux ensembles égaux ont même produit de tous les éléments, donc $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \equiv a \times 1 \times a \times 2 \times \cdots \times a \times (p-1)$.
En simplifiant des deux côtés par $(p-1)!$, on obtient bien $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$. □

Exercice 7
Quels sont les nombres p premiers tels que $p \mid 29^p + 1$?

Exercice 8
Trouver tous les $p, q > 5$ premiers tels que $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

Solution de l'exercice 7
Modulo p on a $0 \equiv 29^p + 1 \equiv 30 \pmod{p}$, donc $p \mid 30$. Ainsi, les p fonctionnant sont les diviseurs premiers de 30, à savoir $2, 3, 5$.

Solution de l'exercice 8
Supposons que $p \mid 5^p - 2^p$. Alors $0 \equiv 5^p - 2^p \equiv 5 - 2 \equiv 3 \pmod{p}$. Ainsi $p = 3$, contradiction. On en déduit que $q \mid 5^p - 2^p$, et de la même manière que $p \mid 5^q - 2^q$.
Modulo p, cela se réécrit $0 \equiv 5^q - 2^q \pmod{p}$, soit $(5 \times 2^{-1})^q \equiv 1 \pmod{p}$. Or $(5 \times 2^{-1})^{p-1} \equiv 1$, si on note d le pgcd de q et $p-1$ (qui est un diviseur de q donc vaut 1 ou q), en utilisant une relation de Bézout, on trouve que $(5 \times 2^{-1})^d \equiv 1 \pmod{p}$. Si $d = 1$, on trouve que $5 \times 2^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$, donc $5 \equiv 2 \pmod{p}$, et $p = 3$, contradiction.
Ainsi, q est le pgcd de q et $p-1$, autrement dit $q \mid p-1$. On raisonne de manière similaire modulo q pour trouver que $p \mid q-1$, et on aboutit à une contradiction : il n'y a aucune solution.

Plus que le fait que $a^{p-1} = 1$, c'est le fait que $a^{n(p-1)} = 1$ pour tout n qui est intéressant. Cela permet d'évaluer des puissances très élevées modulo un certain nombre extrêmement facilement.

Exemple 15.
On a $2^{1000} \equiv (2^6)^{166} \times 2^4 \equiv 16 \equiv 2 \pmod{7}$.

Même si n n'est pas premier, la suite des $a^k \pmod{n}$ reste périodique dès que a est premier avec n (c'est une simple application du principe des tiroirs, je vous laisse le vérifier). Le petit théorème de Fermat donne simplement une information sur cette période : elle divise $p-1$.

Exemple 16.
Par exemple, la suite des puissances de 2 modulo 15 donne $1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, \ldots$.
Ainsi, $2^{12345} \equiv (2^4)^{3086} \times 2 \equiv 2 \pmod{15}$.

Exercice 9
Trouver le reste de la division euclidienne de $2018^{2019^{2020}}$ par 11.

Exercice 10
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ 5 divise-t-il $f(n) = 76n^5 + 115n^4 + 19n$?

Solution de l'exercice 9
On sait que $2018^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, on cherche donc à calculer la valeur de 2019^{2020} modulo

10. Comme $2019 \equiv -1 \pmod{10}$ et que 2020 est pair, on a $2019^{2020} \equiv 1 \pmod{10}$. Ainsi, $2018^{2019^{2020}} \equiv 2018^1 \equiv 5 \pmod{11}$.

Solution de l'exercice 10
Comme $n \mid f(n)$, si $5 \mid n$, et $5 \mid f(n)$.
Si maintenant $5 \nmid n$, on sait que $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$, donc $n^5 \equiv n \pmod{5}$ (au passage cette égalité est valable même quand $5 \mid n$, donc tout le temps).
Modulo 5 on a donc $f(n) = 76n^5 + 115n^4 + 19n = 95n + 115n = 0 \pmod{5}$.
Ainsi, $f(n)$ est toujours divisible par 5.

Complément fait en cours sous réserve de temps restant : Indicatrice d'Euler, théorème d'Euler-Fermat.
Voir https://www.mathraining.be/chapters/5 (vous n'avez pas besoin d'être inscrit pour avoir accès au cours).

5 Pavages, coloriages et invariants (Aline)

Principe de l'invariant

Le principe de l'invariant s'utilise dans des problèmes de la forme suivante : on a un état initial, certaines opérations autorisées, et on se demande quels sont les états auxquels il est possible d'arriver.

Exercice 1

On écrit les entiers de 1 à 100 sur un tableau, et à chaque étape, le Petit Nicolas efface deux nombres, les additionne, et écrit la somme des chiffres du résultat.

1. À la fin, le dernier nombre affiché est 24. Nicolas doit-il réviser son calcul mental ?
2. Ayant refait ses calculs sans erreur, il obtient un nombre entre 15 et 25. Quel est son résultat ?

Lorsque l'état final recherché est accessible, il n'y a souvent rien de mieux à faire qu'exhiber explicitement la construction qui convient. Lorsque l'on veut montrer en revanche qu'un état est inaccessible, le meilleur moyen pour le démontrer est de trouver une certaine quantité qui ne change pas au cours des modifications autorisées : on l'appelle *invariant*. Si à l'état final, elle doit être différente de son état initial, alors la construction demandée n'existe pas. Un invariant permet toujours d'obtenir une *condition nécessaire* mais rarement une condition suffisante.
Solution de l'exercice 1

Ici, l'invariant qui s'impose quand on parle de somme des chiffres est la congruence modulo 9 : en effet, on sait que n'importe quel nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 9. À chaque étape, s'il ne se trompe pas dans son calcul, le Petit Nicolas ne modifie donc pas la congruence modulo 9 de la somme de tous les nombres écrits au tableau.

1. Or

$$1 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050 \equiv 5 + 0 + 5 + 0 \equiv 1[9]$$

En particulier, $24 \not\equiv 5050[9]$, il y a donc bien eu une erreur quelque part.

2. Le seul nombre entre 15 et 25 qui est congru à 1 modulo 9 est 19, c'est donc le résultat affiché au tableau.

On va voir plusieurs types d'invariants et de problèmes qui en font usage, comme les pavages, les graphes, les stratégies de jeux. En effet, dans un jeu, la stratégie consiste souvent à maintenir un invariant qui caractérise une position gagnante ou une position perdante.

Invariants classiques

Beaucoup d'invariants s'obtiennent en **arithmétique modulaire** : une quantité qui semble varier peut en fait rester constante modulo un entier bien choisi. Un exemple est le classique jeu de Nim ci-dessous.

Exercice 2

On dispose d'un tas de 101 allumettes. Hélène et Pénélope jouent chacune leur tour, Hélène commence : un tour consiste à retirer 1, 2, 3 ou 4 allumettes du tas, et la personne qui perd est celle qui prend la dernière allumette. L'une d'elles dispose-t-elle d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 2

Ici, la joueuse qui perd est celle qui se retrouve devant une allumette seule à la fin. On peut alors caractériser une situation perdante par le fait d'avoir devant soi un nombre n d'allumettes tel que $n \equiv 1[5]$. Pourquoi prendre une telle caractérisation ? Parce que les opérations autorisées permettent au joueur qui le choisit de présenter toujours à son adversaire un nombre d'allumettes congru à k modulo 5 pour le $k \in [\![0, 4]\!]$ de son choix. k doit cependant être différent du reste modulo 5 du nombre d'allumettes devant le joueur au départ.

Hélène commence sur une situation perdante : quelle que soit sa stratégie, Pénélope dispose lors de son premier tour d'un nombre d'allumettes non congru à 1 modulo 5. C'est donc le deuxième joueur, ici Pénélope, qui peut s'assurer qu'Hélène a toujours devant elle un nombre d'allumettes congru à 1 modulo 5 lorsque vient son tour.

L'invariant de parité est l'exemple le plus simple de ces invariants modulaires, et le plus fréquent.

Exercice 3

On considère le tableau de signes suivant :

```
+ + + -
- + + -
+ + + -
+ - - -
```

Une opération consiste à inverser tous les signes d'une ligne ou d'une colonne. Peut-on arriver à n'avoir que des $+$ au bout d'une certaine séquence d'opérations ?

Solution de l'exercice 3

Soit m le nombre de $-$. Une opération de change pas la parité de m puisque si l'on retourne une ligne qui comporte $n \in [\![1, 4]\!]$ signes $-$, m devient $m - n + (4 - n) = m - 2n + 4 \equiv m[2]$. Comme m est impair, il n'est jamais nul.

Exercice 4

Peut-on répartir les nombres $1, 2, \ldots, 33$ en 11 groupes de 3 tels que dans chaque groupe, un des trois nombres soit la somme des deux autres ?

Solution de l'exercice 4

Dans un groupe $\{a, b, a + b\}$, la somme des trois nombres est paire. Si la répartition souhaitée était possible, on aurait donc 11 sommes paires, et la somme $1 + \cdots + 33$ serait paire. Mais $1 + \cdots + 33 = \frac{33\times34}{2} = 33 \times 17$ est impair. C'est donc impossible.

Il est fondamental avant tout de trouver la bonne quantité concernée par l'invariant. Il faut parfois la faire apparaître de façon un peu artificielle, en combinant plusieurs quantités plus naturelles par exemple.

Proposition 1 ((Formule d'Euler pour les graphes planaire))**.**

Un graphe connexe est dit planaire lorsque l'on peut (quitte à le déformer un peu) le représenter sur un plan sans que ses arêtes ne se croisent. Un tel graphe vérifie (condition nécessaire mais non suffisante) :

$$s + f = a + 2$$

où l'on note s le nombre des sommets, a celui des arêtes et f celui des faces (on compte la face extérieure).

Démonstration. On se donne un entier $s \in \mathbb{N}^*$, s sommets et on montre que le résultat est vrai pour tous les graphes connexes avec cet ensemble de sommets.

Pour un arbre (sans cycle), le résultat est vrai puisqu'il y a 1 face, et un sommet de plus que d'arêtes.

Chaque fois que l'on rajoute une arête, on coupe une face en deux, donc a et f augmentent simultanément de 1. Ainsi, $a - f$ est un invariant qui reste égal à sa valeur de départ, soit $s - 2$. Comme on peut obtenir toujours ramener un graphe à un arbre auquel on a rajouté des arêtes, on obtient le résultat pour tous les graphes à s sommets.

□

Exercice 5

Magellan aborde lors de son tour du monde une île où se trouve une population de caméléons : 155 sont rouges, 49 bleus et 96 verts. Chaque fois que deux caméléons de couleur différente se rencontrent, ils prennent la troisième couleur. Sinon, il ne se passe rien. Lorsque Robinson Crusoé est naufragé sur la même île quelques siècles plus tard, verra-t-il encore plusieurs couleurs de caméléons ?

Solution de l'exercice 5

Notons r, b, v les nombres de caméléons rouges, bleus et verts respectivement. Lorsque deux caméléons se rencontrent, la congruence modulo 3 des différences $r-b$, $r-v$, $b-v$ ne changent pas. Grâce à ces invariants, on sait que l'on a toujours $r-b \equiv 1[3]$, $b-v \equiv 1[3]$ et $r-v \equiv 2[3]$. Comme $r+b+v = 300 \equiv 0[3]$, on ne peut pas arriver à une situation dans laquelle une des couleurs compterait 300 caméléons et les autres 0.

Monovariants

On a vu qu'un invariant était une quantité qui restait inchangée au cours des opérations considérées dans un problème. Au contraire, un monovariant est une quantité qui varie, mais *toujours dans le même sens* : par exemple, elle ne fait que grandir ou que diminuer. On peut l'utiliser de deux façons :

— Comme pour un invariant, il peut servir à montrer qu'il est impossible de passer d'un état initial A à un état final B : si les opérations ne font qu'augmenter le monovariant et que sa valeur est plus faible en A qu'en B par exemple, il est facile de conclure.

— On en utilise beaucoup en informatique pour montrer qu'un algorithme aboutit bien à un résultat sans tourner en boucle indéfiniment. En effet, si le monovariant est à valeurs entières et qu'il est borné, on sait que l'on est bloqué au bout d'un nombre fini d'opérations.

Exemple 2.

Le tri à bulles est une méthode de tri : supposons que l'on ait un tableau de $n \in \mathbb{N}^*$ cases contenant les entiers de $[\![1, n]\!]$ dans le désordre. À chaque étape, on prend deux cases adjacentes dont les contenus ne sont pas bien ordonnés : le nombre de la case à gauche est plus grand que celui de la case à droite. On les échange donc, puis on cherche une nouvelle paire de cases à échanger.

Comment être sûr que cette méthode fonctionne ? On peut trouver un monovariant : posons k le nombre de couples $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i < j$ mais i est à droite de j dans le tableau (k est appelé "nombre d'inversions"). À chaque opération du tri, comment varie le nombre d'inversions ? Il diminue d'exactement 1 puisque l'on rétablit l'ordre dans une des paires (celle concernée par l'échange) et que l'on ne modifie pas l'ordre des autres paires.

Le nombre d'inversions est un entier positif, donc en exactement k étapes on arrive à un tableau trié.

Pavages

Faire un pavage consiste à recouvrir une figure dont on donne la forme et la taille (sol d'une pièce) par un certain nombre d'autres figures (carreaux de carrelage) dont on connaît aussi la forme et la taille, sans dépasser, laisser de trous, ni que les carreaux se recouvrent. On aura souvent recours à des invariants car le problème qui se pose est généralement "est-il possible de réaliser le pavage ?".

Dans le cas où la réponse est "non", la preuve repose fréquemment sur un argument arithmétique (la surface des carreaux n'est pas un diviseur de la surface de la salle) avec parfois aussi un argument de coloriage.

Dans le cas où la réponse est "oui", il y a rarement d'autre moyen que d'exhiber une technique de pavage.

Exercice 6

(CMC 2020) Soit n un entier. On appelle C_n la grille de côté n dont on a retiré une diagonale. Pour quels entiers $n \geqslant 2$ peut-on paver C_n par des tuiles constituées de trois cases adjacentes en forme de L (on peut retourner les tuiles dans n'importe quel sens, mais pas les faire ses chevaucher ou déborder en-dehors de C_n ou sur la diagonale).

Solution de l'exercice 6

Il faut déjà que le nombre de cases de C_n soit un multiple de 3, autrement dit $n(n-1)$ est divisible par 3. Pour cela, $\equiv 0[3]$ ou $n \equiv 1[3]$. Ensuite, on remarque que si l'on sait paver C_n, alors :

— on sait paver C_{n+6} si n est pair

— on sait paver C_{n+6} si n est impair

— on sait paver C_{n+2} si $n \equiv 1[3]$

Il reste à exhiber les pavages de C_3, C_7, C_10 et à montrer que C_4 et C_6 sont impossibles à paver. Les entiers n convenables sont donc 3 et tous ceux de la forme $6k+i$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1,3,4,6\}$.

Coloriage stratégique et problèmes de pavages

Lorsqu'un problème se passe sur une grille ou un graphe, colorier les points de façon astucieuse permet souvent de faire apparaître des propriétés utiles. Par exemple, aux échecs, un fou reste toujours sur la même couleur de case, tandis qu'un cavalier en change à chaque coup.

Les techniques de coloriage son utilisées pour résoudre certains problèmes de pavage, avec un coloriage bien choisi (en damier, en rayures, etc).

Exemple 3.

Considérons un échiquier $n \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On en retire les deux coins opposés. Peut-on le paver avec des dominos de taille 2×1 ?

Si n est impair, il est clair que la réponse est non.

Si n est pair, on constate que les deux cases retirées sont de la même couleur. Or un domino, quelque soit l'endroit et l'orientation qu'on lui donne, recouvre toujours une case noire et une case blanche. C'est donc impossible

On retire à présent deux coins adjacents. Cette fois, on peut exhiber une construction qui convient pour tout n pair.

Exercice 7

On dispose de pièces de puzzle de 4 cases en forme de L, T, I, Z, O. Peut-on paver un rectangle avec ces cinq pièces ?

Solution de l'exercice 7

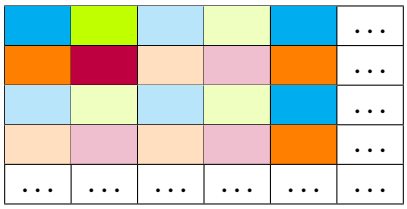
On regarde ce que donnerait un pavage en damier du rectangle : L, I, Z, O recouvrent chacune deux cases noires et deux cases blanches. Mais T recouvrent trois cases de la même couleur. Si on pouvait paver un rectangle, il serait de dimensions 1×20, 2×10 ou 4×5 mais dans tous les cas, il y aurait autant de cases noires que de cases blanches. Le pavage est donc impossible.

Exercice 8

Le carrelage du palais de Minos est recouvert de carreaux de taille 2×2 et 1×4. Malheureusement, une d'elle s'est cassé et il ne reste plus que des dalles de rechange de l'autre forme. Peut-il réorganiser les carreaux déjà placés pour effectuer sa réparation ?

Solution de l'exercice 8

On utilise un coloriage un peu astucieux, car il doit faire apparaître clairement la différence entre les deux formes de dalles. Pour cela, on colorie la première ligne en alternant le bleu et le vert, la deuxième en alternant le violet et le orange, puis à nouveau le bleu et le vert, etc.

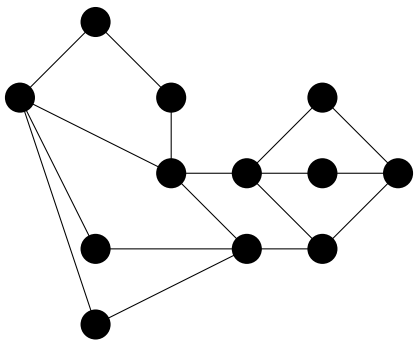


On constate qu'une dalle 2×2 recouvre exactement une case de chaque couleur, quelle que soit sa position, tandis qu'une dalle 4×1 ne recouvre que deux couleurs, deux cases dans chacune. Ainsi, par exemple le nombre de cases bleues a la même parité que le nombre de dalles carrées. On ne peut donc pas remplacer une dalle 2×2 par une dalle 4×1 ou vice-versa.

Coloriage stratégique et problèmes de graphes

Les coloriages de grilles sont un cas particulier des coloriages de graphes : pour résoudre un problème sur un graphe, il est souvent utile de trouver un coloriage de ses sommets qui permet de mettre certaines propriétés en évidence.

Exercice 9



Voici la carte du réseau intergalactique de l'empire Klingon.

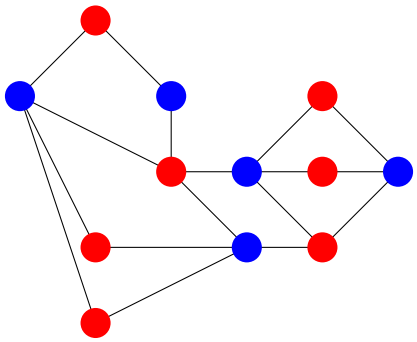
1. Le capitaine Kirk est en mission de reconnaissance. Il ne peut emprunter que ces routes et doit visiter chacune des galaxies, mais une fois seulement. Peut-il y arriver ?
2. Spock a une autre mission : il doit explorer chacune des routes, également en y passant une seule fois et en suivant le réseau. Est-ce possible ? Et s'il doit de plus revenir en un tel parcours à son sommet de départ ?

Solution de l'exercice 9

1. Ce graphe a une propriété intéressante : il n'a aucun cycle de longueur impaire. Plus visuellement, si on colorie un sommet en bleu, on peut colorier tous ses voisins en rouge, puis tous leurs voisins en bleu, puis les voisins de ces sommets bleus en rouge à nouveau, etc (voir le coloriage ci-dessous). On arrive en fait à colorier tous les sommets en bleu et rouge de façon à ce que deux sommets bleus ou deux sommets rouges ne soient jamais reliés entre eux. Une route telle que celle cherchée par Kirk alterne nécessairement entre un sommet bleu et un sommet rouge. Mais on vérifie que l'on obtient 5 sommets bleus et 7 rouges, il est donc impossible de tous les ordonner en alternant les couleurs.

   Remarque : un chemin qui visite exactement une fois chaque sommet d'un graphe est appelé un chemin Hamiltonien.
2. Cette question est plus simple. Lorsqu'il suit une telle route, Spock utilise à chaque passage par un sommet deux arêtes : une pour y arriver et une pour en sortir. On peut ensuite les retirer du graphe puisqu'il ne peut plus les emprunter. Si il arrive sur un sommet qui n'a plus qu'une arête pour le relier au graphe, il est bloqué. Ainsi, à part son sommet de départ et son sommet d'arrivée, tous les sommets doivent avoir un degré (un nombre d'arêtes incidentes) pair. Le graphe possède ici exactement deux sommets de degré impair, on vérifie que Spock peut y trouver une route convenable. En revanche, si on rajoute la contrainte de revenir à son point de départ, cela devient impossible puisqu'alors tous les sommets visités doivent être de degré pair.

   Remarque : un chemin qui visite exactement une fois chaque arête et revient à son sommet de départ est appelé chemin eulérien, il en existe un si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.



On appelle en général *coloriage d'un graphe* un coloriage des sommets tel qu'une arête ne relie jamais deux sommets de la même couleur. Le nombre minimal de couleurs qui permette

ceci est appelé le *nombre chromatique* du graphe (dans l'exercice précédent, le nombre chromatique vaut 2). Un célèbre théorème énonce que le nombre chromatique est toujours plus petit que 4, mais il est très difficile à démontrer. Avec des outils beaucoup plus simples en revanche, on peut démontrer que le nombre chromatique est majoré par 5.

Les techniques de coloriage ont encore d'autres applications : elles permettent de manière générale de faire apparaître élégamment les différentes catégories d'ensemble, et de repérer des invariants utiles.

Exercice 10

Agamemnon a égaré ses 1002 vaisseaux : chacun est sur l'une des 1002 îles d'un archipel circulaire. Tous les jours, deux vaisseaux se déplacent d'un même nombre d'îles dans le sens de leur choix. Arrivera-t-il à rassembler sa flotte au même endroit ?

Solution de l'exercice 10

Comme les navires se déplacent deux par deux, on peut penser à chercher un argument de parité : en effet, si l'on numérote les îles et que l'on colorie en noir celles dont le numéro est pair et en blanc celles dont le numéro est impair, alors il y a toujours un nombre impair de vaisseaux sur les îles noires et un nombre impair sur les îles blanches (1001). Ainsi, il y a toujours au moins un vaisseau sur une île noire et un sur une île blanche, et ils ne peuvent se retrouver au même endroit.

Exercices en bonus

Exercice 11

Dupond et Dupont doivent passer une épreuve pour obtenir leur diplôme d'agent secret de niveau 00 : on leur met chacun sur la tête un chapeau noir ou blanc, sans lui dire quelle couleur il porte. Ensuite, chacun regarde le chapeau de son collègue mais ne peut pas communiquer avec lui, et doit ensuite dire à son examinateur une couleur (que seul l'examinateur entend). Comment Dupond et Dupont doivent-ils s'y prendre pour être certain que l'un des deux donne la couleur de son chapeau ?

Solution de l'exercice 11

Ici, ce n'est pas vraiment un invariant qu'il s'agit de trouver mais plutôt de trouver quelque chose qui prend au plus deux valeurs pour toutes les situations possibles (blanc-blanc, noir-noir, blanc-noir, noir-blanc). En effet, on a 2 tentatives pour donner une bonne réponse.

L'idée est de résumer les 4 situations en deux sortes : soit les chapeaux sont de même couleur, soit ils sont de couleurs différentes. Il suffit donc que Dupond réponde toujours comme s'il pensait avoir la même couleur, et que Dupont réponde toujours comme s'il pensait avoir une couleur différente. De cette façon, l'un exactement donnera à coup sûr la bonne réponse. L'exercice suivant est une généralisation.

Exercice 12

Les 11 marins de l'équipage d'Ulysse ont été capturés par les pirates de Barbe-Noire, qui leur proposent une épreuve : on écrit sur le front de chacun un nombre entre 1 et 11, sans leur dire lequel (plusieurs peuvent avoir le même nombre). Ensuite, les 11 marins peuvent regarder les nombres attribués aux autres mais n'ont pas le droit de communiquer. Enfin, chacun doit dire en secret à Barbe-Noire un nombre, que seul lui entend.

Afin de retrouver leur liberté, il faut qu'au moins un des marins donne exactement le nombre écrit sur son front. Ils peuvent se concerter avant l'épreuve. Ont-il une stratégie qui leur permette d'être libérés à coup sûr ?

Solution de l'exercice 12

Ici encore il faut ramener toutes les situations possibles à 11 cas. Ce qui s'impose est une certaine quantité modulo 11, on peut prendre comme quantité la somme de tous les nombres écrits : dans tous les cas, elle est congrue à 0, 1, ...ou 10 modulo 11. Les marins se répartissent donc les classes d'équivalences : le premier parie que la somme sera congrue à 0 modulo 11, le deuxième à 1, etc. Ainsi, celui qui se voit attribuée la classe $k \in [\![0, 10]\!]$ fait sa somme s de tous les nombres devant lui, et donne à Barbe-Noire l'unique entier $n \in [\![1, 11]\!]$ tel que $s + n \equiv k[11]$. De cette façon, l'un d'eux exactement tombera sur le numéro qu'il porte sur le front.

Exercice 13

(EGMO 2017) Trouver le plus petit entier strictement positif k pour lequel il existe un coloriage à k couleurs des entiers strictement positifs et une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que

1. $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ de même couleur, $f(n + m) = f(n) + f(m)$
2. $\exists n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(n + m) \neq f(n) + f(m)$

Solution de l'exercice 13

Il faut évidemment au moins deux couleurs pour satisfaire le point (2). De plus, on remarque que 3 couleurs suffisent : on colorie en bleu les entiers congrus à 0 modulo 3, en rouge ceux congrus à 1 et en jaune ceux congrus à 2 modulo 3, et la fonction

$$f : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \equiv 0[3] \\ 2n & \text{sinon} \end{cases}$$

Il reste à montrer que deux couleurs ne suffisent pas. Pour cela, on suppose qu'il existe un coloriage à deux couleurs (noir et blanc) et une fonction f convenables. Soit n le plus petit entier tel que $f(n) \neq nf(1)$. n est impair, sinon $f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right)$; on suppose que n est en noir. Pour tout $i \in [\![1, \frac{n-1}{2}]\!]$, i et $n - i$ sont de couleurs différentes. Or si il existe un entier impair $j \in [\![1, n - 1]\!]$ noir, $f(n + j) = f(n) + f(j) \neq (n + j)f(1)$ et $f(n + j) = 2f\left[\frac{n+j}{2}\right] = (n + j)f(1)$, c'est impossible. Comme il n'y a que deux couleurs, tous les entiers pairs sont noirs et tous les les entiers impairs sont blancs. On a alors deux possibilités pour la couleur de $n + 1$ sachant que $f(n + 1) = f(2 + (n - 1)) = 2f(1) + (n - 1)f(1) = (n + 1)f(1)$:

— Si $n + 1$ est blanc comme $n - 1$, $f(2n) = f((n + 1) + (n - 1)) = f(n + 1) + f(n - 1) = (n + 1)f(1) + (n - 1)f(1) = 2nf(1)$. Mais on a aussi $f(2n) = 2f(n) \neq 2nf(1)$.

— Si $n+1$ est noir comme 1, $f(n+2) = f(n+1) + f(1) = (n+2)f(1)$. Mais on a aussi $f(n+2) = f(n) + f(2) \neq (n+2)f(1)$.

Ainsi, on ne peut colorier $n+1$ ni en blanc ni en noir, c'est absurde.
Le nombre minimum de couleurs possibles pour un coloriage satisfaisant est donc bien 3.

Exercice 14

On considère l'opération qui consiste à regarder une séquence constituée de 0 et de 1, et à soit y rajouter à un endroit, soit y supprimer, une séquence de la forme XXX où X est une séquence de 0 et de 1. Par exemple, si on part de 1110001, on peut supprimer les séquences 111 ou 000, ou rajouter les séquences 101010, 000, 110110110 où l'on veut. Si l'on part de 10, peut-on arriver à 01 ?

Solution de l'exercice 14

Considérons pour une séquence de longueur n notée $W = w_1 \dots w_n$ l'entier $P(W) = w_1 + 2w_2 + \dots + nw_n$. On constate que décaler la séquence W en y rajoutant un préfixe de longueur multiple de 3, noté XXX, ne change pas la congruence modulo 3 : $P(W) \equiv P(XXXW)[3]$. De plus, on remarque que pour toute séquence X, $P(XXX) \equiv 0[3]$. Ainsi, toutes les opérations possibles ne changent pas la congruence modulo 3 de la séquence. Comme $P(10) = 1 \not\equiv P(01) = 2[3]$, on ne pourra jamais obtenir 10 en partant de 01.

6 TD pot pourri (Matthieu Bouyer et Auguste)

Equations diophantiennes

Exercice 1
Existe-t-il $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a^2 = 3b^2 + 2$.

Solution de l'exercice 1
Il n'y a pas de solution car 2 n'est pas un carré modulo 3.

Exercice 2
Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que $7x - 3y = 2$

Solution de l'exercice 2
On a donc $x \equiv 2[3]$, donc $x = 3k + 2$. Il suit $3y = 7 \cdot (3k+2) - 2 = 21k + 12$, d'où $y = 7k + 4$.

Exercice 3
Montrer que $p^3 + p + 1$ n'est jamais un carré pour p premier.

Solution de l'exercice 3
Si p est impair, $p \equiv \pm 1[4]$ donc

$$p(p^2+1) + 1 \equiv p \cdot (1+1) + 1 \equiv \pm 1 \cdot 2 + 1 \equiv 3[4]$$

Comme les seuls carrés modulo 4 sont 0 et 1, $p^3 + p + 1$ n'en est pas un.
Si $p = 2$, alors $p^3 + p + 1 = 11$ qui n'est pas un carré parfait. Mais

Exercice 4
Résoudre en entiers $x^3 - y^3 = 24$

Solution de l'exercice 4
On a donc $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 2^3 \cdot 3$. Or, $x \equiv x^3 \equiv y^3 \equiv y[2]$. Si $x = 2a$, et $y = 2b$, alors on a $(a-b)(a^2+ab+b^2) = 3$. D'où, si $a - b = 3$ alors $a^2 + ab + b^2 = 1$, il suit $-3ab = 8$, ce qui est absurde. Donc, $a^2 + ab + b^2 = 3$ et $a - b = 1$, d'où $3ab = 2$:absurde. Ainsi, $x = 2a + 1$ et $y = 2b+1$. D'où x^2+xy+y^2 est impair, donc nécessairment $x^2+xy+y^2 = 3$ ou $x^2+xy+y^2 = 1$. Dans le premier cas, $-3ab = 61$: absurde. Dans le second cas, $-3ab = 575$, également absurde. Donc il n'y a pas de solutions entières.

Exercice 5
Trouver les entiers positifs n tels que $2^n + 1$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 5
On voit déjà que 3 est une solution : montrons que c'est la seule.

Soit n un tel entier : il existe $a \geq 0$ tel que $2^n + 1 = a^2$. Clairement $a \neq 0$. Mais alors $2^n = (a-1)(a+1)$ donc $a+1$ et $a-1$ sont des diviseurs positifs d'une puissance de 2 donc sont des puissances de 2. Comme elles diffèrent de 2, ce ne peut être que 2 et 4 (en effet, si $2^x + 2 = 2^y$, alors $y \geq 2$ car $2^y > 2$ et $x \leq 1$ car $2^y - 2^x \neq 0[4]$ et $x \neq 0$ d'où $x = 1$ et $y = 2$) donc $a = 3$ et $n = 3$.

Exercice 6
Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Solution de l'exercice 6
On suppose par l'absurde $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ avec a, b entiers premiers entre eux. On a donc $p \cdot b^2 = a^2$. Donc $p \mid a^2$, or p premier, donc $p \mid a$, il suit $a = p \cdot a'$. Ainsi : $b^2 = p \cdot a'^2$. Donc, $p \mid b^2$, d'où $p \mid b$: contradiction avec $a \wedge b = 1$. Donc $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Exercice 7
Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 - y! = 2001$.

Solution de l'exercice 7
On remarque que $3 \mid 2001$ mais $9 \nmid 2001$. Si $y \geqslant 6$, alors $9 \mid y!$, donc $3 \mid x^2$ et $9 \nmid x^2$, ainsi $3 \mid x$, d'où $9 \mid x^2$: absurde. Donc, $y < 6$. On traite les derniers cas manuellement, et on trouve l'unique solution : $(x, y) = (45, 4)$

Exercice 8
(modulo 5) Trouver tous les entiers n strictement positifs tels que

$$1! + 2! + \ldots + n!$$

soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 8
Si $n \geqslant 5$, alors $1!+2!+\ldots+n! \equiv 1+2+6+24 \equiv 3[5]$. Or, modulo 5, on a :

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

.
Ainsi, $n \leqslant 5$. En testant manuellement, on trouve que seuls $n = 1$ et $n = 3$ conviennent.

Exercice 9
Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 = y^5 + 7$ (Modulo un nombre premier à conjecturer avec petit Fermat)

Solution de l'exercice 9

On travaille modulo $2 * 3 + 1 = 11$. On a

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
x^5	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10

. Ainsi, il n'y a aucune solution possible.

Exercice 10

Trouver tous les entiers x, y tels que $y^2 = x^3 - 3x + 2$.

Solution de l'exercice 10

Soient x, y des entiers.

$$y^2 = x^3 - 3x + 2 \iff y^2 = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2)$$

Si $y^2 = x^3 - 3x + 2$, alors $x + 2$ est un carré parfait (si $x \neq 1$, alors $x + 2 \geq 0$ et tout facteur premier de la décomposition de $x+2$ apparaît avec un exposant pair (2 fois celui dans y moins 2 fois celui dans $x - 1$)). En posant $x = k^2 - 2$ pour $k \in \mathbb{N}$, $y = \pm k(k^2 - 3)$.

Réciproquement, on vérifie bien que les couples $(k^2 - 2, \pm k(k^2 - 3))$ avec $k \in \mathbb{N}$ conviennent :

$$(\pm k)^2(k^2-3)^2 = (k^2-2+2)(k^2-2-1)^2$$

Exercice 11

Trouver tous les entiers n tels que $n^3 - 3n^2 + n + 2$ soit une puissance de 5.

Solution de l'exercice 11

On a alors : $(n-2)(n^2-n-1) = 5^a$. Ainsi, on a : $n - 2 = 5^x$ et $n^2 - n - 1 = 5^y$. Il suit $5^y - 5^{2x} - 3 \cdot 5^x = 1$. Donc, si $x, y \geqslant 1$ alors $0 \equiv 1[5]$, ce qui est absurde. Donc $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$, alors $y = 1$, ce qui donne $n = 3$. Si $y = 0$, alors $5^{2x} + 3 \cdot 5^x = 0$, ce qui est absurde. La seule solution est ainsi $n = 3$.

Exercice 12

Trouver tous les triplets d'entiers naturels (x, y, z) tels que :

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$$

Solution de l'exercice 12

On suppose $z \geqslant 1$, comme $7 \mid 2016$, $x^2 + y^2 \equiv 0[7]$. Or, modulo 7, on a :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

. Ainsi, le seul cas possible est $x \equiv y \equiv 0[7]$. On a alors $x = 7a, y = 7b$. Il suit : $7(a^2+b^2) = 11+3\cdot 288 \cdot 2016^{z-1}$. Si, $z \geqslant 2$, alors la partie de droite ne serait pas divisible par 7. Donc, $z = 1$. On a alors : $7(a^2 + b^2) = 11 + 3 \cdot 288 = 875$, donc $a^2 + b^2 = 125$, donc nécessairement, $a, b < 12$. On trouve manuellement : $\{a, b\} \in \{\{11, 2\}, \{10, 5\}\}$. Ce qui donne $(x, y, z) \in \{(77, 14, 1), (14, 77, 1), (70, 35, 1), (35, 70, 1)\}$. Sinon, on a $z = 0$, et alors $x^2 + y^2 = 80$, donc $x, y < 9$. On teste manuellement et on obtient comme autres solutions : $(x, y, z) \in \{(8, 4, 0), (4, 8, 0)\}$.

Exercice 13

Trouver les entiers naturels n tels que $n2^{n+1} + 1$ est un carré.

Solution de l'exercice 13
On cherche donc les n tels qu'il existe a tel que $n2^{n+1}+1=a^2$. Donc, $n2^{n+1}=(a+1)(a-1)$. Donc, $2 \mid a+1$ et $2 \mid a-1$ (en effet, $a+1 \equiv a-1[2]$, et $n \geqslant 0$). On pose donc b tel que $a-1=2b$. On suppose maintenant $n \geqslant 1$, d'où $n2^{n-1}=b(b+1)$. Donc b et $b+1$ sont de parités différentes, en particulier un seul des deux est pair. On note $n=2^x \cdot y$, avec y impair. Il suit, si c'est b qui est pair : $b \geqslant 2^{n-1}$, et $b+1 \leqslant y \leqslant n$. Or, par un récurrence simple, on montre que pour $n \geqslant 1$, on a $2^{n-1} \geqslant n$. Ce qui entrainerait $b \geqslant b+1$: absurde. Ainsi, $b+1$ est pair. Donc, $b+1 \geqslant 2^{n-1}$, et $b \leqslant n$, d'où $n+1 \geqslant 2^{n-1}$. Or, pour $n \geqslant 4$, on a $2^{n-1} \geqslant n+1$. En testant les cas restants, on trouve que seul $n=3$ convient. Il reste $n=0$, qui est une autre solution.

Exercice 14
Trouver les entiers $n \geq 1$ et p premiers tels que $np+n^2$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 14
On distingue deux cas :

• Si $p \mid n$, alors on peut écrire $n=kp$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors que $kp(kp+p)=k(k+1)p^2$ est un carré parfait donc $k(k+1)$ est un carré parfait. Vu que k et $k+1$ sont premiers entre eux, chacun est un carré parfait. En écrivant $k=a^2$ et $k+1=b^2$ avec $a,b>0$, on a $1=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Comme $k \geq 1$, $a \geq 1$ et $b \geq 1$ donc 1 a un diviseur entier, impossible.

• Sinon, n et $n+p$ sont premiers entre eux, donc tous deux sont des carrés. On écrit $n=a^2$ et $n+p=b^2$ avec $a,b>0$. Alors $(b-a)(b+a)=b^2-a^2=p$. Comme p est premier et $b+a \geq 2$ divise p, $a+b=p$ et $b-a=1$ soit $b=\frac{p+1}{2}$ et $a=\frac{p-1}{2}$ donc $n=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ et p est impair.

Réciproquement, les couples $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^2,p\right)$ avec p premier impair conviennent car :

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+p\right)=\left(\frac{p^2-1}{2}\right)^2$$

Exercice 15
Trouver tous les entiers (x,y) tels que $x^2=2+6y^2+y^4$.

Solution de l'exercice 15
Comme $(y^2+1)^2=1+2y^2+y^4<2+6y^2+y^4<9+6y^2+y^4=(y^2+3)^2$, et $2+6y^2+y^4$ est un carré parfait, nécessairement $2+6y^2+y^4=(y^2+2)^2$. On en déduit que $2+6y^2+y^4=y^4+4y^2+4$ soit $y^2=1$ puis $y=\pm 1$ et $x=\pm(y^2+2)=\pm 3$.

Réciproquement, on vérifie que les couples $(\pm 3,\pm 1)$ conviennent.

Exercice 16
Trouver tous les entiers x tels que $x^4+x^3+x^2+x+1$ soit un carré parfait. (Encadrement)

Solution de l'exercice 16
On pose $A=x^4+x^3+x^2+x+1$. On a $x^2-x+1>0$ (trinome à discriminant strictement négatif) et par récurrence immédiate, pour $x \geqslant 2$, $x^3>x+1$. On a alors : $(x^2+x)^2=x^4+2x^3+x^2>A>x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$. Donc, il n'y a pas de solution pour $x \geqslant 2$. On remarque que $x=1$ ne convient pas et que $x=0$ convient.

Exercice 17
Trouver tous les rationnels x tels qu'il existe un entier $a \geq 1$ tel que $x^{\lfloor x \rfloor}=a/2$

Solution de l'exercice 17
On note $x = u + \frac{b}{c}$ où u, b, c sont des entiers tels que $b \wedge c = 1$ et $b \leqslant c$. On a donc : $2 \cdot (b + u \cdot c)^u = a \cdot c^u$. Donc $2 \mid a$ ou $2 \mid c$. Si $2 \mid a$, alors $c \mid b + u \cdot c$, donc $c \mid b$ ainsi x est entier, et donc $a = 2 \cdot x^x$. Sinon, $a \wedge 2 = 1$, ainsi, $2 \mid c^u$, d'où, $2 \mid c$, $c = 2d$. Donc $(b + uc)^u = a \cdot 2^{u-1} \cdot d^u$. Donc, $2^{u-1} \mid (b + 2ud)^u$, or $b \wedge 2d = 1$, donc $b \wedge 2 = 1$, donc, nécessairement $u = 1$. Ainsi : $b + 2d = ad$, d'où $d \mid b$. Ainsi $d \mid b \wedge c = 1$, soit $d = 1$. Ainsi, $b \leqslant 2$, donc $b = 0$ ou $b = 1$. Or, $a \wedge 2 = 1$, donc $b = 1$. Ce qui donne $x = \frac{3}{2}$. On vérifie aisément que les entiers et $\frac{3}{2}$ sont bien solutions.

Exercice 18
Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que $y^2 = x^3 + 16$ (Factorisation)

Solution de l'exercice 18
On a donc $(y-4)(y+4) = x^3$. On pose $y - 4 = a$. Si $2 \mid a$, alors $2 \mid x$, donc $8 \mid x^3 = a(a+8)$, d'où $a \equiv 0, 4[8]$. Si $a \equiv 4[8]$, $4 \mid a$, donc $4^3 \mid x^3 = a(a + 8)$, donc $a(a + 8) \equiv 0[64]$, mais $a = 4 + 8a'$, donc $a(a+8) = 64a'^2 + 64a + 16 + 32 + 64a' \equiv 48[64]$. Ce qui est absurde. D'où $8 \mid a$. Sinon, $2 \nmid a$. Ainsi, $a \wedge (a + 8) = a \wedge 8 = 8$ ou 1. On a donc, si $a = 8b$: alors il existe y tel que $x = 4y$, d'où $b(b + 1) = y^3$ or $b \wedge (b + 1) = 1$, donc b et $b + 1$ sont tous deux des cubes : nécessairement $b = 0$, donc $(x, y) = (0, 4)$. Si $a \wedge (a+8) = 1$: alors a et $a+8$ sont tous deux des cubes. Nécessairement $a = 0$, ce qui est absurde. La seule solution est donc $(x, y) = (0, 4)$.

Exercice 19
Trouver tous les couples d'entiers positifs (a, b) tels que $|3^a - 2^b| = 1$

Solution de l'exercice 19
On fait une disjonction de cas.

Premier cas : $3^a - 2^b = 1$. On a donc : $-(-1)^b \equiv 1[3]$, d'où $b \equiv 1[2]$. Ainsi, avec $b = 2c + 1$, $3^a - 2 \cdot 4^c = 1$. Si $c \geqslant 1$, alors $3^a \equiv 1[8]$, donc $a = 2d$. Il suit : $3^{2d} - 2^{2b+1} = 1$. Ainsi : $(3^d - 1)(3^d + 1) = 2^{2b+1}$. Il suit qu'il existe x, y tels que $x + y = 2b + 1$ et $3^d - 1 = 2^x$ et $3^d + 1 = 2^y$. Donc $2^x + 2 = 2^y$. Si $x \geqslant 2$, alors $2^y \equiv 2[4]$ mais $2^y \geqslant 4$, ce qui est absurde. D'où $x \in \{0, 1\}$. Un rapide calcul mène à $x = 1$ et $y = 2$, il suit $b = 1$ et $d = 1$ soit : $(a, b) = (2, 3)$. Sinon, $c = 0$, et alors, $3^a = 3$, d'où $a = 1$. Donc $(a, b) = (1, 1)$ est une autre solution.

Deuxième cas : $2^b - 3^a = 1$. On a donc, si $a \geqslant 1$, $(-1)^b \equiv 1[3]$, donc $b = 2c$, ainsi, $2^{2c} - 3^a = 1$. Donc $(2^c + 1)(2^c - 1) = 3^a$. Donc $2^c - 1 = 3^x$ et $2^c + 1 = 3^y$ avec $x + y = a$. Il suit, $3^x + 2 = 3^y$. Si $y \geqslant 1$, alors $x = 0$, donc $y = 1$. Sinon, $y = 0$, ce qui est impossible. Donc, on a $(a, b) = (1, 2)$. Dans le dernier cas, $a = 0$, et ainsi, $b = 1$: on a comme autre solution $(a, b) = (0, 1)$

Exercice 20
Trouver tous les entiers a, b, k tels que $2^b 3^a = k(k + 1)$

Solution de l'exercice 20
Les seuls diviseurs premiers de k et $k + 1$ sont 2 et 3. Comme ils sont premiers entre eux, l'un est une puissance (éventuellement multipliée par -1) de 2 et l'autre une puissance de 3 (éventuellement multipliée par -1). On est donc ramené exactement à l'exercice 19 qui fournit les solutions (a, b, k) : $(0, 1, 1), (0, 1, -2), (1, 1, 2), (1, 1, -3), (1, 2, 3), (1, 2, -4), (2, 3, 8), (2, 3, -9)$.

Exercice 21
(dur) Trouver tous les entiers positifs a, b, c tels que $2^a 3^b + 9 = c^2$

Solution de l'exercice 21
On a donc $2^a 3^b = (c+3)(c-3)$. D'où, il existe x, y, u, v tels que $x + u = a, y + v = b, c - 3 = 2^x 3^y$

et $c+3=2^u3^v$. Ainsi, $2^x3^y+6=2^u3^v$. Si $y\geqslant 2$, alors $2^u3^v\equiv 6[9]$, donc $v=1$. Si $x\geqslant 2$, alors $2^u3^v\equiv 2[4]$, donc $u=1$. Donc, si $x,y\geqslant 2$, alors $u=v=1$, d'où $2^x3^y=0$: absurde. Ainsi, on a nécessairement $y\leqslant 1$ ou $x\leqslant 1$. En testant les derniers cas restants (et en utilisant l'exercice 19), on trouve comme solutions : $(a,b,c)\in\{(4,0,5),(4,5,51),(3,3,15),(4,3,21),(3,2,9)\}$

Exercice 22
Si p est un nombre premier, montrer que $7p+3^p-4$ n'est pas un carré. (dur)

Solution de l'exercice 22
Ce n'est déjà pas le cas pour $p=2$. Supposons dorénavant p impair.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $a\in\mathbb{Z}$ tel que $7p+3^p-4=a^2$. Alors $a^2\equiv 0$ ou 1 modulo 4 et $7p+3^p-4\equiv -p+(-1)^p\equiv -p-1$. Comme p est impair, $p\equiv -1[4]$.

Mais alors en regardant modulo p par petit Fermat : $a^2\equiv 0+3-4\equiv -1[p]$. Donc avec le petit théorème de Fermat, comme clairement p ne divise pas a :

$$1\equiv a^{p-1}\equiv \left(a^2\right)^{\frac{p-1}{2}}\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1[p]$$

car $p-1$ est divisible par 2 mais pas par 4. C'est absurde.

Pot pourri

Exercice 23
Trouvers tous les entiers n tels que $3n+7\mid 5n+13$

Solution de l'exercice 23
On a $3n+7\mid 5n+13$, donc $3n+7\mid 15n+35-3(5n+13)=-4$. Ainsi, $3n+7\in\{1,2,4\}$. Ce qui donne $n\in\{-2,-1\}$.

Exercice 24
Trouver tous les n entiers tels que $n-2$ divise $n^2+3n+27$

Solution de l'exercice 24
On a $n-2\mid n^2+3n+27$, donc $n-2\mid n^2+3n+27-(n-2)^2-7(n-2)=37$. Ainsi $n\in\{3,39\}$.

Exercice 25
Soit $a\neq c$. Montrer que $a-c\mid ab+cd \iff a-c\mid ad+bc$.

Solution de l'exercice 25
On a si $a-c\mid ab+cd$, alors $a-c\mid ab+cd+(d-b)(a-c)=ad+bc$. Et si $a-c\mid ad+bc$, alors $a-c\mid ad+bc+(b-d)(a-c)=ab+cd$.

Exercice 26
Soit m,n deux entiers tels que $m\vee n+m\wedge n=m+n$. Monter que l'un des deux divise l'autre.

Solution de l'exercice 26
On note $d=m\wedge n$, et $m=ad$, $n=bd$ avec $a\wedge b=1$. Ainsi $d+abd=d(a+b)$, d'où $1+ab=a+b$, ainsi $(a-1)(b-1)=0$. Donc $a=1$, ou $b=1$. Il suit $n\mid m$, ou $m\mid n$.

Exercice 27
(factorisation) Trouver tous les entiers naturels n tels que n^4+4^n soit premier.

Solution de l'exercice 27
On a pour $n \geqslant 1$, $n^4+4^n = n^4+4\cdot(2^{n-1})^2 = (n^2-n2^n+2\cdot 4^{n-1})(n^2+n2^n+2\cdot 4^{n-1})$ Ainsi, comme $n^2+n2^n+2\cdot 4^{n-1} \geqslant 2$, si n^4+4^n est premier, alors $n^2+n2^n+2 = n^4+4^n$, et $n^2-n2^n+2\cdot 4^{n-1} = 1$. D'où $(n-2^{n-1})^2 + 4^{n-1} = 1$, or $(n-2^{n-1})^2 \geqslant 0$, donc comme $4^{n-1} \geqslant 1$, alors nécessairement $n = 1$. Et pour $n = 1$, on a bien $n^4 + 4^n = 5$ qui est bien premier. Et pour $n = 0$, $n^4 + 4^n = 1$ et n'est donc pas premier.

Exercice 28
Soit $n \geq 1$ un entier premier avec 10. Montrer qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1.

Solution de l'exercice 28
On considère les $1, 11, 111, ..., \underbrace{111...111}_{n+1}$, on a $n+1$ nombres qui peuvent prendre n valeurs modulo n. Donc par principe des tiroirs il existe $a, b \in [\![1, n]\!]$ tel que $\underbrace{111...111}_{a} \equiv \underbrace{111...111}_{b}[n]$ et $a > b$, donc $\underbrace{111...111}_{a-b}\underbrace{0...0}_{b} \equiv 0[n]$. Or, $n \wedge 10 = 1$, donc $n \mid \underbrace{1...1}_{a-b}$. Et $\underbrace{111...111}_{a-b}$ ne s'écrit qu'avec des 1.

Exercice 29
Trouver tous les p premiers tels que $p+7$ et $p+14$ sont également premiers.

Solution de l'exercice 29
On a $p+7 \equiv p+1[3]$ et $p+14 \equiv p+2[3]$. Or, ente $p, p+1$ et $p+2$, l'un est divisible par 3, donc entre $p, p+7$ et $p+14$ l'un vaut 3 car ils sont premiers. Si $p = 3$, alors $p+3 = 10$ n'est pas premier, et $p \geqslant 2$, donc $p+7 > 3$ et $p+14 > 3$, ainsi, il n'y a pas de tels nombres premiers.

Exercice 30
Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une suite de n entiers consécutifs tels qu'aucun d'eux soit premier.

Solution de l'exercice 30
Soit $n \geq 1$. Alors en considérant les $\{(n+1)! + k \mid k \in \{2, n+1\}\}$, on a n nombres consécutifs et pour $k \in \{2, n+1\}$, $k \mid (n+1)!+k$, donc $(n+1)!+k$ n'est pas premier. Donc les $\{(n+1)!+k \mid k \in \{2, n+1\}\}$ sont bien n nombres consécutifs non premiers.

Exercice 31
Montrer $(2^a-1) \wedge (2^b-1) = 2^{a\wedge b} - 1$ pour a, b entiers naturels.

Solution de l'exercice 31
On suppose sans perdre de généralité $a \geqslant b$. On note $d = a \wedge b$, et $a = xd$, $b = yd$ et $D = (2^a-1)\wedge(2^b-1)$. Donc $2^a-1 = (2^d-1)((2^d)^{x-1}+...+1)$ et $2^b-1 = (2^d-1)((2^d)^{y-1}+...+1)$. Ainsi $2^d-1 \mid 2^a-1, 2^b-1$ et $((2^d)^{x-1}+...+1)\wedge((2^d)^{y-1}+...+1) = ((2^d)^{(x-y)-1}+...+1)\wedge((2^d)^{y-1}+...+1) = ... = 1$, car $x \wedge y = 1$. D'ou $2^d - 1 = D$.

Exercice 32
Montrer que si $n \geq 2$ divise $2^n + 1$, alors n est un multiple de 3.

Solution de l'exercice 32
Comme $n \geq 2$, considérons un de ses diviseurs premiers p. Alors $2^n \equiv -1[p]$ donc $2^{2n} \equiv 1[p]$.

On en déduit que p divise $2^{2n}-1 \wedge 2^{p-1}-1$ par petit Fermat. L'exercice 32 garantit que p divise $2^{(2n)\wedge(p-1)}-1$. Supposons alors que p est le plus petit diviseur premier de n, de sorte que $p-1 \wedge n = 1$. Alors $p \mid 2^2-1=3$ d'où $p=3$.

Exercice 33
Trouver tous les entiers $n \geq 1$ tels que n divise 2^n-1.

Solution de l'exercice 33
On remarque que $n=1$ convient. Soit p un diviseur premier de n. Alors $2^n \equiv 1[p]$ et $2^{p-1} \equiv 1[p]$ par petit Fermat. Donc en considérant p minimal, $p \mid 2^{n\wedge(p-1)}-1 = 2-1 = 1$, absurde. La réponse est donc 1.

Exercice 34
Montrer que pour tout entier $s \geq 1$ il existe $n \geq 1$ tel que 2^n-1 admette au moins s diviseurs premiers distincts.

Solution de l'exercice 34
Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers. Le théorème de Fermat nous incite à considérer, pour $s \geq 1$, les nombres de la forme $2^{(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_s-1)}-1$ de sorte que par petit Fermat

$$2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdot(p_s-1)} \equiv \left(2^{(p_1-1)\ldots(p_{k-1}-1)(p_{k+1}-1)\ldots(p_s-1)}\right)^{p_k-1} \equiv 1[p_k]$$

Donc $p_1, \ldots, p_s$ sont s diviseurs premiers distincts de ce nombre.

Exercice 35
Montrer qu'il existe une infinité de n entiers tels que $2n$ est un carré, $3n$ est un cube et $5n$ une puissance cinquième.

Solution de l'exercice 35
On suppose que n est de la forme $n = 2^a3^b5^c$.* On doit donc avoir $2^{a+1}3^b5^c = A^2$, $2^a3^{b+1}5^c = B^3$ et $2^a3^b5^{c+1} = C^5$. On a donc :

$$\begin{aligned}
a+1 &\equiv 0[2] && \text{(IV.1)}\\
b &\equiv 0[2] && \text{(IV.2)}\\
c &\equiv 0[2] && \text{(IV.3)}\\
a &\equiv 0[3] && \text{(IV.4)}\\
b+1 &\equiv 0[3] && \text{(IV.5)}\\
c &\equiv 0[3] && \text{(IV.6)}\\
a &\equiv 0[5] && \text{(IV.7)}\\
b &\equiv 0[5] && \text{(IV.8)}\\
c+1 &\equiv 0[5] && \text{(IV.9)}\\
& && \text{(IV.10)}
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
a &\equiv 15[30] && \text{(IV.11)}\\
b &\equiv 20[30] && \text{(IV.12)}\\
c &\equiv 24[30] && \text{(IV.13)}\\
& && \text{(IV.14)}
\end{aligned}$$

Exercice 36
Montrer que l'équation : $x^3 + y^5 = z^2$ admet une infinité de solutions entières positives.

Solution de l'exercice 36
On remarque que $(2, 1, 3)$ est une solution. On remarque également que pour tout entier $k \geq 1$, si (x, y, z) est une solution, $(k^{10}x, k^6y, k^{15}z)$ en est aussi une. Il y a donc une infinité de solution.

Exercice 37
Déterminer trois nombres naturels à trois chiffres dont la représentation décimale emploie neuf chiffres différents (non nuls) tels que leur produit se termine par quatre zéros.

Solution de l'exercice 37
On peut vérifier que $625, 384, 971$.

Il faut que le produit soit divisible par 5^4 et 2^4, ce qui oblige à choisir 625 (en effet, il ne peut pas y avoir deux multiples de 5 parmi les 3 ni aucun multiple de $5^4 = 625$). On cherche ensuite un multiple de 16 sans chiffre en commun avec le précédent : 384. On peut choisir au hasard le dernier nombre.

Exercice 38
Soit n entier impair, montrer que $n \mid 2^{n!} - 1$.

Solution de l'exercice 38
On considère les résidus de $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n$ modulo n. Par le principe des tiroirs, deux d'entre eux ont le même reste : $2^b \equiv 2^a [p]$ pour $n \geq b > a \geq 0$. On a alors $n \mid 2^b - 2^a = 2^a\left(2^{b-a} - 1\right)$ puis par le théorème de Gauss, $n \mid 2^{b-a} - 1 \mid 2^{n!} - 1$ car $1 \leq b - a \leq n$.

Exercice 39
Soit $n_i n \mathbb{N}^*$. Montrer que

1. Si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
2. Si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

Solution de l'exercice 39
1. Si n est composé on écrit $n = d_1 d_2$ avec $d_1, d_2 \geq 2$. Alors $2^{d_1} - 1 \mid 2^n - 1$ est un diviseur stricte de $2^n - 1$ plus grand que 1 car $2 \leq d_1 < n$, absurde.

2. Si n admet un diviseur premier p impair, alors en écrivant $n = pm$ et $m \in N^*$, $2^m + 1 \mid \left(2^m\right)^p + 1$ et $1 < 2^m + 1 < 2^n + 1$, absurde.

Exercice 40
Soit n un entier strictement positif. Montrer que le nombre de couples d'entiers (x, y) tel que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

est congrus à 2 modulo 4.

Solution de l'exercice 40
On met tout au même dénominateur :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n} \iff ny + nx = xy \iff (x - n)(y - n) = n^2$$

Le nombre de solutions est donc exactement le nombre de diviseurs de n^2 ($x-n$ étant ce diviseur et $y-n$ nécessairement le diviseur associé).

Comme la fonction qui à $d>0$ diviseur de n^2 associe $\frac{n^2}{d}$ est involutive avec pour unique point fixe n, le nombre de diviseurs positifs de n^2 est impair, donc le nombre de diviseurs de n^2 (le double avec les négatifs) vaut 2 modulo 4.

Exercice 41

Soient $a_1,...,a_n \in \{-1,1\}$ tels que : $a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n+a_na_1=0$. Montrer que $4 \mid n$.

Solution de l'exercice 41

On pose $a_{n+1}=a_1$. En regardant modulo 2, on a

$$n \equiv a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n+a_na_1 \equiv 0[2]$$

On écrit $n=2m$. Alors exactement m des a_ia_{i+1} valent 1 et exactement m valent -1. Comme leur produit vaut le produit des a_i au carré (chacun étant présent deux fois) donc 1, on en déduit que $1=1^m\cdot(-1)^m$ donc m est pair donc $4 \mid n$.

Exercice 42

Trouver le pgcd des $n^{17}-n$ pour n entier relatif.

Solution de l'exercice 42

On voit déjà que ce $PGCD$ divise $2^{17}-2=2(2^8-1)(2^8+1)=2\cdot 255\cdot 257=2\cdot 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257$ (décomposition en facteurs premiers). Mais comme pour tout n entier, par petit Fermat :

- $n^2 \equiv n[2]$ donc $n^{17}\equiv n[2]$.
- $n^3 \equiv n[3]$ donc $n^{17}\equiv n[3]$ car $2 \mid 17-1$
- $n^5 \equiv n[5]$ donc $n^{17}\equiv n[3]$ car $4 \mid 17-1$
- $n^{17}\equiv n[17]$

ce $PGCD$ est déjà divisible par $2\cdot 3\cdot 5\cdot 17=510$.
En revanche, il ne l'est pas par 257 car $3^{16}\equiv(81\cdot 9\cdot 9)^2\equiv(-42\cdot 9)^2\equiv -378\neq 1[257]$.
Donc ce $PGCD$ vaut 510.

2 Entraînement de mi-parcours

Énoncés

Exercice 1
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on ait :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Exercice 2
Pour quels $n \geqslant 1$ peut-on paver une grille carrée de taille $n \times n$ avec des pièces de la forme :

sans qu'elles ne se recouvrent ni débordent ? (Les rotations sont autorisées.)

Exercice 3
Trouver tous les couples d'entiers naturels (x, y) vérifiant :

$$2^x - 3^y = 7.$$

Exercice 4
Les entiers naturels de 1 à 50 (inclus) sont écrits au tableau. Combien d'entiers au minimum faut-il supprimer pour s'assurer que pour tous entiers x et y restants, $x + y$ ne soit pas un nombre premier ?

Solutions

Solution de l'exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n la propriété : "$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$."

H_1 est vraie : $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que H_n est vraie. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \underset{H_n}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

H_n est initialisée et héréditaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Solution de l'exercice 2

Supposons que nous ayons réussi à recouvrir un e grille $n \times n$ ainsi. Une pièce recouvre 4 cases donc 4 divise n^2 et donc n est pair. On colorie la grille en noir et blanc de façon alternée, comme sur un échiquier. Maintenant, chaque pièce recouvre soit trois cases noires et une case blanche de la grille, soit l'inverse. Or, comme n est pair, il y a autant de cases noires que de cases blanches. Notons m le nombre de pièces recouvrant 3 cases noires, l le nombre de pièces recouvrant 3 cases blanches : on a donc $3m + l$ cases noires recouvertes et $3l + m$ cases blanches recouvertes. On a donc $3l + m = 3m + l$, donc $2m = 2l$, donc $l = m$. Il faut donc autant de pièces recouvrant trois cases noires que de pièces recouvrant trois cases blanches. Par conséquent, il y a un nombre pair de pièces, d'où 8 divise n^2. Donc, si l'on parvient à recouvrir une telle grille ainsi, on a : 4 divise n.
Réciproquement, si 4 divise n, on peut facilement recouvrir la grille avec des blocs 4×4 :

Solution de l'exercice 3

On a $2^x = 7 + 3^y \geqslant 8$ donc $x \geqslant 3$. On regarde modulo 8, on a $3^y \equiv 1 \pmod 8$. Or $3^{2k} \equiv 9^k \equiv 1 \pmod 8$ et $3^{2k+1} \equiv 3 \pmod 8$: on en déduit que y est pair. Si $y = 0$, on a la solution $(3, 0)$. Sinon, $y \geqslant 1$ et en regardant modulo 3 on a : $(-1)^x \equiv 1 \pmod 3$ et donc x est pair.
Ainsi, on peut réécrire l'équation initiale sous la forme $(2^a)^2 - (3^b)^2 = (2^a - 3^b)(2^a + 3^b) = 7$, avec $x = 2a, y = 2b$. En particulier $2^a + 3^b > 2^a - 3^b$ et $2^a + 3^b > 0$ et donc $2^a + 3^b = 7$ et $2^a - 3^b = 1$. Puis $2^a = \dfrac{7+1}{2} = 4$ i.e. $a = 2, b = 1$.
On trouve alors $(3, 0)$ et $(4, 2)$.

On vérifie réciproquement que ces deux couples conviennent car $2^3 - 3^0 = 8 - 1 = 7$ et $2^4 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

Solution de l'exercice 4

On note m le minimum recherché.
On commence par remarquer qu'en supprimant les 25 entiers impairs (ou pairs), toutes les sommes de deux entiers restants sont paires et $\geqslant 2$: ce ne sont donc pas des nombres premiers et la propriété est vérifiée.
On a donc $m \leqslant 25$
Maintenant, considérons des couples d'entiers ne pouvant pas rester présents ensemble :

— $\{46, 1\}, \{45, 2\}, \ldots, \{24, 23\}$ car tous de somme 47 qui est premier

— $\{50, 47\}, \{49, 48\}$ car $50 + 47 = 48 + 49 = 97$ qui est premier

Par principe des tiroirs, s'il était possible d'effacer strictement moins de 25 entiers, par principe des tiroirs deux entiers du même couple n'ont pas été effacés, mais leur somme est un nombre premier ce qui est contradictoire.
Il vient alors $m \geqslant 25$ et donc $\boxed{m = 25}$.

3 Deuxième partie : Algèbre et Géométrie

1 Comptage (Jean)

L'objectif de cette séance est de se concentrer sur les calculs liés au comptage et plus particulièrement aux coefficients binomiaux.

Produits, sommes et factorielles

On commence par rappeler très brièvement les premiers principes de comptage.

Le premier principe essentiel de la combinatoire est que pour effectuer des choix successifs et indépendants on *multiplie* le nombre de possibilités.

Exemple 1.
Dans un jeu de carte, si il y a 13 possibilités pour la valeur et 4 possibilités pour la couleur, alors il y a $13 \times 4 = 42$ cartes possibles.

Remarque 2. D'un point de vue des ensembles cela signifie que le cardinal d'un produit cartésien est le produit des cardinaux.

Si E et F sont de cardinaux finis alors

$$|E \times F| = |\{(e, f),\ e \in E, f \in F\}| = |E| \times |F|.$$

Le deuxième principe est que dans pour compter une disjonction en cas deux à deux disjoints, on effectue la somme des possibilités dans chaque cas.

Remarque 3. D'un point de vue des ensembles cela signifie que le cardinal d'une union disjointe est la somme des cardinaux.

Si A et B sont de cardinaux finis et $A \cap B = \emptyset$ alors

$$|A \bigsqcup B| = |A| + |B|.$$

Exemple 4.
Il y a 16 élèves dans le groupe B et 30 élèves dans le groupe C. De plus les deux groupes sont disjoints.

Pour choisir un·e élève dans le groupe B ou C on a $16 + 30 = 46$ possibilités.

Ces deux principes permettent déjà d'obtenir de nombreux résultats.

Exemple 5.
Soit r un entier et $p_1, \ldots, p_r$ des entiers plus grands que 2.

Soit N un entier.

On essaye de majorer le nombre d'entiers, inférieurs à n, s'écrivant

$$p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

où les α_i sont des entiers.

Une première remarque et que si $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \leqslant n$ alors pour tout i, par croissance de ln, $\alpha_i \ln(p_i) \leqslant \ln(n)$. Et donc on a la majoration

$$\alpha_i \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.$$

On a donc pour chaque α_i au plus $\frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 1$ possibilités.
Comme il y a r coefficients α_i à choisir on a donc, au plus,

$$\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 1\right)^r$$

tels entiers.
Que peut-on en déduire concernant l'ensemble des nombres premiers ?

On rappelle ensuite la définition de la factorielle, très utile en combinatoire.

Définition 6 (Factorielle)**.**
On définit la factorielle par

— $0! = 1$

— pour un entier n plus grand que 1

$$n! = n \times (n-1)!.$$

Exemple 7.
On a par exemple

$$\begin{aligned} 4! &= 4 \times (3!) = 4 \times 3 \times (2!) = 4 \times 3 \times 2 \times (1!) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 24. \end{aligned}$$

On peut aussi la définir de manière plus succincte en utilisant le symbole produit

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Exemple 8.
On a par exemple

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	$\cdots$

TABLE IV.1 – Les premières valeurs de la factorielle.

L'utilisation en combinatoire est la suivante :

Proposition 9 (Factorielle et ordonnement)**.**
Il y a $n!$ possibilités pour ordonner n éléments.

Remarque 10. D'un point de vue des ensembles si E est un ensemble à n éléments cela signifie qu'il y a $n!$ fonctions bijectives entre $\{1, 2, \ldots, n\}$ et E.

Démonstration.

L'intuition est la suivante :

— Pour ordonner n éléments on choisit d'abord le premier, donc n possibilités.

— Une fois le premier choisit, on choisit le second parmi les restants soit $n-1$ possibilités.

— Une fois le premier et le second choisis, on choisit le troisième parmi les restants soit $n-2$ possibilités.

— On continue ainsi, etc.

— Pour l'avant dernier il faut le choisir parmi les $n-(n-2)$ restants c'est à dire 2 possibités.

— Pour le dernier il n'y en a qu'un seul restant, donc 1 possibilité.

Au total on a donc

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

possibilités.

Une autre façon de procéder et d'effectuer une récurrence sur n.

Pour un entier naturel n soit $\mathcal{P}_n$ la proposition :

$$\mathcal{P}_n \ : \quad \text{il y a } n! \text{ possibilités pour ordonner } n \text{ éléments.}$$

Initialisation Pour $n = 0$ il y a bien une et unique possibilité pour ordonner zéro élément.

Hérédité Soit $n \geqslant 0$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire qu'il y a $n!$ possibilités pour ordonner n éléments.

Pour en ordonner $n+1$ on procède de la manière suivante :

— On choisit le premier, d'où $n+1$ possibilités.

— Une fois le premier choisi, il reste à ordonner les $(n+1)-1 = n$ éléments restants. Par hypothèse de récurrence il y a alors $n!$ possibilités.

Au total on a donc

$$(n+1) \times (n!)$$

c'est à dire

$$(n+1)!$$

possibilités.

Conclusion On a donc $\mathcal{P}_0$ vraie et pour tout n, si $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Donc, par récurrence, pour tout n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

□

Coefficients binomiaux

Définition 11.
Soient n et k deux entiers. On note

$$\binom{n}{k}$$

le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble de n éléments.

Remarque 12. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se prononce "k parmi n".

Exemple 13.
Soit n un entier.
Il y a n possibilités pour choisir 1 élément parmi n donc

$$\binom{n}{1} = 1.$$

Proposition 14.
Soient k et n deux entiers.
Si $0 \leqslant k \leqslant n$ on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration. On compte de deux manières différentes le nombre de possibilités pour obtenir un sous-ensemble *ordonné* de k éléments parmi n éléments.

Comptage 1 Afin d'obtenir un sous-ensemble de k éléments ordonné on commence par choisir le sous-ensemble sans ordre, soit $\binom{n}{k}$ possibilités.
Il reste à ordonner les k éléments choisis, c'est à dire $k!$ possibilités.
Au total on a donc

$$\binom{n}{k} k!$$

possibilités.

Comptage 2 On choisit le premier élément parmi les n, soit n possibilités. On choisit ensuite le second parmi les restants, soit $n-1$ possibilités, etc. On continue jusqu'au k-ème élément pour lequel il y a $n-(k-1)$ possibilités.
Au total on a donc

$$n \times (n-1) \times (n-(k-1))$$

possibilités.
Or

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times (n-(k-1)) &= n \times (n-1) \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-k) \times \cdots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Par double comptage on a donc

$$\binom{n}{k} k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

c'est à dire

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}.$$

□

Remarque 15. Cette formule explicite, si elle est parfois utile (elle entraîne par exemple que $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ est entier), est rarement le moyen le plus simple d'aborder un problème combinatoire.

1															
1	1														
1	2	1													
1	3	3	1												
1	4	6	4	1											
1	5	10	10	5	1										
1	6	15	20	15	6	1									
1	7	21	35	35	21	7	1								
1	8	28	56	70	56	28	8	1							
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

Le triangle de Pascal. À la n-ième ligne et k-ième colonne se trouve le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Proposition 16.
Soient n un entier et k un entier entre 0 et n.

Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Démonstration. Une preuve combinatoire est de remarquer que choisir k éléments parmi n revient à choisir les $n-k$ éléments "qu'on ne choisit pas".

Cela donne directement

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Une autre façon de procéder est d'utiliser la formule explicite :

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

□

Théorème 17 (Formule de Pascal)**.**
Soit n un entier et k un entier entre 1 et $n-1$.

Alors :

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}.$$

Démonstration. On va compter de deux manières différentes le nombre de possibilités pour choisir k éléments dans un ensemble à n éléments.

Comptage 1 Il y a, par définition,

$$\binom{n}{k}$$

possibilités pour choisir k éléments parmi n.

Comptage 2 On choisit un élément quelconque, que l'on note α, un élément que l'on particularise.
Il y a alors deux types de sous-ensembles à k éléments : ceux qui contiennent α et ceux qui ne le contiennent pas.

— Choisir k éléments sans contenir α revient à choisir k éléments parmi les $n-1$ qui ne sont pas α. D'où

$$\binom{n-1}{k}$$

possibilités.

— Choisir k éléments et contenir α revient à choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ qui ne sont pas α, puis à rajouter α. D'où

$$\binom{n-1}{k-1}$$

possibilités.

En sommant sur les deux cas on obtient donc

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

possibilités pour choisir k éléments parmi n.

Par double comptage on obtient donc

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

□

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Illustration de la formule de Pascal.

Remarque 18. Cette formule permet alors de construire de manière efficace le tableau de Pascal ligne par ligne.

Théorème 19 (Formule du binôme)**.**
Soit n un entier.

Soient a et b deux réels. Alors

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n et on utilise la formule de Pascal, cf le cours sur la récurrence. □

Pour les petits n on retrouve les identités remarquables bien connues :

— $(a+b)^0=1$

— $(a+b)^1 = a+b$
— $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
— $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
— $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
— etc.

En pratique la formule essentielle pour effectuer des comptages est la suivante :

Théorème 20 (Formule du binôme)**.**
Soit n un entier.
Alors

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}.$$

Remarque 21. Pour x réel les deux formules du binôme sont équivalentes : dans un sens on prend $a = 1, b = x$ et dans l'autre, si $b \neq 0$, on prend $x = \frac{a}{b}$.
La formulation

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

est en fait la plus pratique à utiliser. En effet on peut voir cela non seulement comme une égalité dans $\mathbb{R}$, mais aussi comme une égalité de fonctions ou de polynômes, permettant par exemple de la dériver ou de regarder des égalités en terme de coefficients.

Résumé

On a donc vu quatre

— La définition combinatoire.
— La formule explicite.
— La formule de Pascal.
— La formule du binôme.

En théorie les quatre formules sont toutes équivalentes. On peut choisir n'importe laquelle comme définition et l'utiliser pour démontrer les trois autres.

En pratique, comme on le verra en TD, pour résoudre un exercice on pourra selon l'énoncé et les préférences personnelles en utiliser une plutôt que l'autre.

Petit mémo

— Le coefficient binomial

$$\binom{n}{k}$$

est $\boxed{\text{le nombre de façons de choisir } k \text{ éléments parmi } n}$.
On utilise cette définition dans les preuves combinatoires et pour les doubles comptages.

— On a la formule explicite

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On l'utilise rarement en combinatoire.

— On a la formule de Pascal, très utile dans les récurrences

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}.$$

On l'utilise pour les récurrences, notamment pour les récurrences sur le n des $\binom{n}{k}$.
Il est très fortement conseillé de faire un schéma avec le triangle de Pascal.

— On a la formule du binôme

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}.$$

Il faut ensuite faire des produits, dérivées, des évaluations en des valeurs particulières de x, etc. afin d'obtenir des informations sur es coefficients binomiaux.

Exercices

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Solution de l'exercice 1
On propose ici trois démonstrations différentes.
Double comptage
On compte de deux manière différentes le nombre total de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

Comptage 1 Pour choisir un sous-ensemble on a pour chacun des n éléments 2 possibilités : le mettre dans le sous-ensemble ou non.
On a donc au total

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$$

possibilités.

Comptage 2 Pour un entier k entre 0 et n on a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles à k éléments. En sommant sur toutes les tailles de sous-ensembles possibles on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

On conclut donc que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}.$$

Formule du binôme

On a pour tout x réel, par la formule du binôme

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Avec $x = 1$ on obtient donc

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k$$

c'est à dire

$$\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}.$$

Récurrence

Procédons par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Pour n un entier posons $\mathcal{P}_n$ la proposition

$$\mathcal{P}_n \ : \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Initialisation Pour $n = 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité Soit un entier $n \geqslant 1$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1-1}{k-1} + \binom{n+1-1}{k}\right) \\
&= 2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right) \\
&= 2 + \left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right) \\
&= 2 + \left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right) \\
&= 2 + (2^n - 1) + (2^n - 1) \\
= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion On a donc $\mathcal{P}_1$ est vraie et pour tout $n \geqslant 1$ $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$.
Donc par récurrence pour tout n la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie i.e

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n}.$$

Exercice 2
Soient k et n deux entiers plus grands que 1.
Montrer que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Solution de l'exercice 2
Méthode combinatoire
Comptons de deux manière différente le nombre de possibilités de choisir dans une classe de n élèves un groupe de k élèves avec un·e chef·fe par groupe.

Comptage 1 — On choisit d'abord le groupe de k élèves parmi les n de la classe on a

$$\binom{n}{k}$$

possibilités.

— Une fois fixé le groupe il faut choisir un·e chef·fe parmi les k c'est à dire

$$k$$

possibilités.

On a donc au total

$$\binom{n}{k} \times k$$

possibilités au total.

Comptage 2 — On choisit d'abord un·e chef·fe parmi les n élèves. On a donc

$$n$$

possibilités.

— Une fois fixé le·a chef·fe il faut choisir les $k-1$ élèves parmi les $n-1$ élèves restants. Soit

$$\binom{n-1}{k-1}$$

possibilités.

On a donc

$$n \times \binom{n-1}{k-1}$$

possibilités.

Conclusion Par double comptage on a donc

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

Formule du binôme

Attention cette démonstration nécessite une certaine familiarité avec la notion de *polynôme* et n'est donc a priori pas accessible au groupe B.

La formule du binôme donne l'égalité polynomiale

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

En dérivant on obtient donc

$$n(1+X)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kX^{k-1}$$

c'est à dire par la formule du binôme de nouveau

$$n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kX^{k-1}$$

c'est à dire après une renumérotation

$$\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}kX^{k-1}.$$

Par égalité des coefficients on obtient donc que pour tout k

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

Expression explicite

On a

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k \times \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times (n-k)!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} \\ &= n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

Récurrence

Ici la récurrence est plus subtile étant donné qu'il y a deux variables n et k.

Comme on s'attend à utiliser la formule de Pascal on effectue une récurrence sur n. Et pour chaque n la proposition concernera tous les k.

Pour un entier n on pose $\mathcal{P}_n$ la proposition

$$\mathcal{P}_n \ : \quad \textbf{pour tout } k,\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Initialisation Pour $n = 1$ on a bien :

— Pour $k = 1$, $1\binom{1}{1} = 1 = 1\binom{0}{0}$.

— Pour $k > 1$, $k\binom{1}{k} = 0 = 1\binom{0}{k-1}$.

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité Soit $n \geqslant 1$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

Soit $k \geqslant 1$ quelconque.

Si $k = 1$ alors on a bien $1\binom{n}{1} = n = n\binom{n-1}{0}$.

Considérons désormais $k \geqslant 2$.

Alors par la **formule de Pascal**

$$\begin{aligned} k\binom{n+1}{k} &= k\left(\binom{n+1-1}{k-1} + \binom{n+1-1}{k}\right) \\ &= (k-1)\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} + k\binom{n}{k}. \end{aligned}$$

On utilise alors **l'hypothèse de récurrence** $\mathcal{P}_n$ pour obtenir

$$\begin{aligned}(k-1)\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k-1}+k\binom{n}{k} &= n\binom{n-1}{k-2}+\binom{n}{k-1}+n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\left(\binom{n-1}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}\right)+\binom{n}{k-1}.\end{aligned}$$

En appliquant de nouveau la **formule de Pascal**

$$\begin{aligned}n\left(\binom{n-1}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}\right)+\binom{n}{k-1} &= n\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k-1}\\ &= (n+1)\binom{n+1-1}{k-1}.\end{aligned}$$

Au final on obtient donc bien

$$k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n+1-1}{k-1}$$

et ce quel que soit k, c'est à dire $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion On a donc $\mathcal{P}_1$ est vraie et pour tout $n \geqslant 1$ $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$.

Donc par récurrence pour tout n la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie i.e pour tous k et n

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

Exercice 3

Soit n un entier.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Solution de l'exercice 3

Pour $n = 0$ on a bien $0 = 0$. Supposons désormais que $n \geqslant 1$.
On utilise les deux exercices précédents.
Par l'exercice 2 pour tout $k \geqslant 1$ on a

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

On utilise alors l'exercice 1

$$n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n2^{n-1}.$$

Et donc on a bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}}.$$

On peut aussi proposer des preuves qui ne font pas référence aux deux exercices précédents (même si les résultats des exercices 1 et 2 sont à connaître). Voici les idées générales :

Double comptage

On compte de deux manière différentes combien de groupes d'élèves avec un·e chef·fe peut-on former parmi n élèves.

D'un coté pour chaque taille de groupe k on choisit d'abord un groupe puis le ou la chef·fe dans le groupe qui donne au total $\binom{n}{k}\times k$. Puis on somme sur toutes les tailles possibles ce qui donne donc

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}.$$

De l'autre coté on choisit d'abord le ou la chef·fe soit n possibilités. Puis on rajoute un groupe quelconque parmi les $n-1$ restant·es soit 2^{n-1}. Au total on a donc

$$n2^{n-1}$$

possibilités.

Ce qui donne bien le résultat.

Par récurrence

Il s'agit d'une récurrence similaire aux exercices précédents.

Formule du binôme

On a **pour tout** x réel

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}x^k.$$

Comme les deux termes sont dérivables (car fonctions polynomiales) en *dérivant* par rapport à x on obtient que pour tout x réel

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{k}{n}x^{k-1}.$$

Ensuite, en évaluant en $x=1$ on obtient

$$n(1+1)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{k}{n}1^{k-1}$$

c'est à dire (comme $0\binom{n}{0}=0$)

$$\boxed{n2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}}.$$

Exercice 4
Soit n un entier.
Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Solution de l'exercice 4
Il est en fait plus facile de calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}.$$

Ensuite il reste à remarquer que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)+k) \binom{n}{k} \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}\right)\end{aligned}$$

la deuxième somme valant $n2^{n-1}$ par l'exercice précédent.
Pour calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ on procède de manière similaire à l'exercice 3.
En utilisant les exercices 1 et 2
On a pour tout k plus grand que 2

$$\begin{aligned}k(k-1) \binom{n}{k} &= (k-1) \left(k \binom{n}{k}\right) \\ &= (k-1) \left(n \binom{n-1}{k-1}\right) \\ &= n \left((k-1) \binom{n-1}{k-1}\right) \\ &= n \left((n-1) \binom{n-2}{k-2}\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \\ &= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} \\ &= n(n-1)2^{n-2}\end{aligned}$$

et donc on conclut que

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}}.$$

Formule du binôme

On a **pour tout** x réel, par la formule du binôme

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

et comme les deux membres sont dérivables, en dérivant par rapport à x on obtient que **pour tout** x réel

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}.$$

De même en dérivant de nouveau par rapport à x on obtient que pour tout x

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2}.$$

En évaluant en $x = 1$, comme $1 + 1 = 2$ on en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}}.$$

Double comptage

On compte de deux manières différentes le nombre de possibilités de former un groupe d'élève avec un·e chef·fe et un·e second·e dans une classe de n élèves.

Comptage 1 On choisit d'abord le ou la chef·fe, ce qui donne n possibilités.
Parmi les élèves restants on choisit le ou la second·e, ce qui donne $n-1$ possibilités.
Il reste ensuite à choisir un sous-ensemble quelconque parmi ler $n-2$ élèves restants, soit $n-2$ possibilités.
Au total on a donc

$$n(n-1)2^{n-2}$$

possibilités.

Comptage 2 Pour k fixé on regarde tout d'abord combien il existe de tels groupes de taille k.
On choisit d'abord les k élèves ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités.
On choisit ensuite un·e chef·fe dans le groupe donc k possibilités.
Puis on choisit un·e seconde parmi les membres lu groupe hors chef·fe, donc $k-1$ possibilités.
On obtient donc $k(k-1)\binom{n}{k}$ possibilités.
Et en sommant sur toutes les tailles possibles on a finalement

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}.$$

Et donc par double comptage

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}}.$$

Exercice 5

Soient k et N deux entiers.

Montrer que

$$\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}.$$

Solution de l'exercice 5

On **fixe** k et on procède par récurrence sur $N \geqslant k$ à l'aide de la formule de Pascal (il est très conseillé de faire un schéma).

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Illustration de l'exercice.

Initialisation Pour $N = k$ on a

$$\sum_{n=k}^{k} \binom{n}{k} = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

donc $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Hérédité Soit $N \geqslant k$, supposons $\mathcal{P}_k$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{N+1} \binom{n}{k} &= \left(\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}\right) + \binom{N+1}{k} \\ &= \binom{N+1}{k+1} + \binom{N+1}{k} \\ &= \binom{N+2}{k+2}\end{aligned}$$

Exercice 6
Soit n un entier.
Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Solution de l'exercice 6
On commence par réécrire la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Considérons un ensemble à $2n$ élément et comptons de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles à n éléments.

— On peut tout d'abord choisir simplement n éléments parmi $2n$ ce qui donne

$$\binom{2n}{n}.$$

— On sépare l'ensemble en n éléments bleus et n éléments rouges.
On compte pour k entre 0 et n le nombre de façons d'en choisir n dont k bleus.
Il faut d'abord en choisir k bleus c'est à dire $\binom{n}{k}$ possibilités puis $n-k$ rouges soit $\binom{n}{n-k}$ possibilités.
On a donc

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

possibilités.
Comme le nombre d'éléments bleus est en fait quelconque en sommant sur tous les k on obtient finalement

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

et donc par double comptage on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}}.$$

Exercice 7
Soit n un entier plus grand que 1.
Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Solution de l'exercice 7
On a par la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0^n = 0.$$

Exercice 8
On considère un ensemble à n éléments.
Combien existe-t-il de sous ensembles de cardinal impair ?

Solution de l'exercice 8
Notons I_n le nombre de sous-ensemble de cardinal impair et P_n le nombre de sous-ensembles de cardinal pair.
On sait déjà que

$$I_n + P_n = 2^n.$$

Montrons que $I_n = P_n$.
Méthode combinatoire
Attention cette preuve utilise un vocabulaire qui n'a pas encore été vu en groupe B.
Choisissons un élément a particulier et considérons l'application Φ qui à un sous-ensemble F de E associe

— $F \cup \{a\}$ si $a \notin F$,
— $F \backslash \{a\}$ si $a \in F$.

Alors Φ est une bjection des sous-ensemble de cardinal pair vers les sous-ensembles de cardinal impair.
Donc $I_n = P_n$.
Avec la formule du binôme
On a déjà vu que

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}$$

c'est à dire

$$0 = P_n - I_n.$$

Quelque soit la méthode on conclut donc que

$$\begin{cases} I_n + P_n &= 2^n \\ I_n - P_n &= 0 \end{cases}$$

et donc

$$\boxed{I_n = 2^{n-1}}.$$

Exercice 9
Combien y a t il de façons de distribuer $k+n$ polycopiés identiques à n élèves afin que chaque élève en reçoive au moins un ?

Solution de l'exercice 9
Notons n le nombre d'élèves et $k+n$ le nombre de polycopiés.

On commence par distribué un polycopié à chaque élève.
Il reste ensuite à en distribuer k de manière quelconque à n élève.
Notons les polycopié par des ronds et traçons $n-1$ traits.
Le nombre de ronds entre deux traits correspond alors à un élève.
[Faire schéma]
Il faut donc choisir $n-1$ bâtons parmi au total $k+(n-1)$ points ou bâtons.
On obtient finalement

$$\boxed{\binom{n+k-1}{n-1}}$$

possibilités.

Exercice 10
On considère un échiquier 8×8.

Combien y a t il de façons de placer 6 tours telle que deux tours ne soient jamais sur la même ligne ou même colonne ?

Solution de l'exercice 10
Notons n la taille de l'échiquier et k le nombre de tours.

Choisissons d'abord les k colonnes des tours. On a $\binom{n}{k}$ possibilités. On choisit ensuite les lignes des tours une à une ce qui donne $n \times (n-1) \times \cdot \times (n-k+1)$ possibilités.

Au total on a donc

$$\binom{n}{k} \times n \times (n-1) \times \cdot \times (n-k+1) = \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

ce qui peut se réécrire

$$\boxed{\binom{n}{k}^2 k!}.$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé on obtient donc

$$\binom{8}{6}^2 6! = (28)^2 \times 720 = 564\,480.$$

2 Chasse aux angles (Raphaël)

À venir…

3 Triangles semblables (Tristan)

Définition 1.
Triangles semblables Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits semblables si $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ et $\frac{CB}{AC} = \frac{C'B'}{A'C'}$. Ou de façon équivalente si $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$. On note alors $ABC \sim A'B'C'$.

Théorème 2.
Critère de similitude

$ABC \sim A'B'C'$ si et seulement si $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

On donne désormais quelques résultats classiques dont la preuve repose sur des triangles semblables.

Exercice 1
(Théorème de Pythagore) On se donne un triangle ABC rectangle en A. Montrer que $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Démonstration. On introduit H le pied de la hauteur issue de A. On remarque que comme $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90$ on a $\widehat{ACH} = \widehat{ABH}$ et $\widehat{CAH} = \widehat{ABC}$. De là, on a $ABC \sim HAC \sim HBA$, cela permet d'écrire

$$\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{CB} = \frac{AH}{AB}$$

et donc $AC^2 = CH \cdot CA$. De même, $AB^2 = BH \cdot BA$ et donc $AB^2 + AC^2 = BC \cdot (CH + HB) = BC^2$. □

Exercice 2
(Orthocentre) On se donne ABC un triangle et on se donne les trois hauteurs de notre triangle. Montrer qu'elles sont concourantes en un point H appelé orthocentre de ABC.

Démonstration. On trace les hauteurs de ABC issues de A et B qui se coupent en H. Montrons que (CH) est la hauteur issue de C. On note classiquement $\widehat{BAC} = \alpha$ et de même pour le reste. On note B_1, A_1 les pieds des hauteurs issues de A, B. On a HB_1A_1C cocycliques de même que pour AB_1A_1B et donc on a par angles inscrits $\widehat{HCB} = \widehat{BAA_1} = 90 - \beta$ ce qui donne $(CH) \perp (AB)$. □

Exercice 3
(O est le conjugué isogonal de H)
On se donne un triangle ABC et H son orthocentre. Montrer que $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Démonstration. On trace le cercle circonscrit et on note A' le points diamétralement opposé à A. On note D le pied de la hauteur issue de A. On va montrer que $ADH \sim AA'C$ ce qui suffira pour conclure. Par cocyclicité on peut écrire que $\widehat{ABC} = \widehat{AA'C} = \beta$ et donc $\widehat{A'AC} = 180 - \widehat{ACA'} - \widehat{CA'A} = 180 - 90 - \beta = 90 - \beta$ et donc $AA'C$ et ADH sont deux triangles rectangles ayant un angle égal à $90 - \beta$ et donc sont semblables. □

Exercice 4
(Puissance d'un point) On se donne un cercle Γ et un Point P. On se donne deux droites D_1 et D_2 passant par P et coupant Γ en A, B et C, D respectivement. Montrer que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ et cette quantité est appelée puissance de P par rapport à Γ.

Démonstration. On a par cocyclicité $PAC \sim PDB$ ce qui implique entre autre que $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PD}$ soit encore que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. □

Remarque 3. On utilise souvent la puissance d'un point dans le cas particulier où $A = B$ (c'est à dire que D_1 est une tangente à Γ). On a alors $PC \cdot PD = PA^2$ ce qui donne une expression souvent commode de la puissance de P par rapport à Γ). Une autre définition importante est celle de l'axe radical de deux cercles.

Lemme 4.
Soit P un point et Γ un cercle de centre O et de rayon R. Montrer que la puissance de P par rapport à Γ est $PO^2 - R^2$.

Démonstration. On trace (OP) et les intersections A, B avec Γ, la puissance de P est donc $PA \cdot PB = (PO + R)(PO - R) = PO^2 - R^2$. □

Définition 5.
(Axe radical) On se donne deux cercles Γ_1 et Γ_2. On définit leur axe radical comme le lieu des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles. Alors l'axe radical est une droite.

Démonstration. Revenons, au théorème, on se contente de montrer le résultat quand Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en A, B. On montre alors que l'axe radical est (AB). (La preuve générale nécessiterait des vecteurs qui ne sont pas l'objet de ce cours). Il est d'abord clair que (AB) appartient à l'axe radical car $A = C$ et $B = D$. Si on prend un point hors de (AB) disons à gauche. On note T, R les points d'intersection de (PA) avec Γ_1, Γ_2 et donc $T \neq R$. Il est clair ur une figure que $PT \neq PR$ et que donc $PA \cdot PR \neq PA \cdot PT$. □

Remarque 6. Encore une fois, un argument plus convainquant nécessiterait des outils plus complexes. On pourra néanmoins se contenter de retenir le résultat tel quel car il est central en géométrie olympique (mais sa preuve l'est beaucoup moins).

Théorème 7.
Concourances des axes radicaux
Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ trois cercles, alors leurs trois axes radicaux sont concourants.

Remarque 8. Les axes peuvent être parallèle, dans ce cas, on dit "qu'il se coupent à l'infini", c'est un cas particulier important.

Démonstration. On se donne A l'intersection des axes radicaux de Γ_1, Γ_2 et Γ_1, Γ_3 alors la puissance de A par rapport à Γ_1 est la même que par rapport à Γ_2 mais elle est aussi la même que par rapport à Γ_3 donc A est sur l'axe radical des deux derniers cercles. □

Remarque 9. On n'a pas traité le cas où A est à l'infini. On peut s'en sortir en disant que si deux axes sont parallèles, le troisième l'est aussi (car dans le cas contraire la preuve ci dessus montre que les axes sont concourants).

Exercice 5
On se donne deux cercles Γ_1, Γ_2 disjoints (et sans avoir un cercle contenu dans l'autre). Alors on trace les 4 tangentes communes aux deux cercles et on note $A_1, ..., A_4$ les milieux des tangentes. Montrer que les 4 points sont alignés.

DIAGRAM

Démonstration. Il suffit en fait de remarquer que tous nos points sont sur l'axe radical des deux cercles. □

Exercice 6
Soit Γ_1 tangent à Γ_2 intérieurement en A et D une tangente à Γ_1 en B intérieur à Γ_2 qui recoupe Γ_2 en C, D. Montrer que (AB) recoupe Γ_2 au milieu de l'arc CD.

Démonstration. On note S le milieu de l'arc CD, il s'agit du pôle sud de ACD. Notamment, on a que $\widehat{BAS} = \widehat{CAS}$. En effet, il est important de comprendre que la mesure d'un angle sur

un cercle ne dépend que de la longueur de l'arc qu'il intersecte (ou de manière équivalente de la corde). Pour s'en convaincre on introduit les angles aux centres. Ils valent le double de nos angles inscrits et sont égaux (on passe d'un angle à l'autre par une rotation) donc on a montré que (AS) est une bissectrice de $\widehat{DAC}$. De là, l'angle inscrit permet d'affirmer que

$$\widehat{DCS} = \widehat{DAS} = \widehat{SAD}$$

on remarque donc que la droite (SC) est tangente au cercle circonscrit à AXC avec $X = (DC) \cap (AS)$. On utilise donc la puissance de S pour écrire que $SC^2 = SX \cdot SA$.
On va maintenant montrer que $X = B$. Pour cela on note Y l'intersection de la tangente commune aux deux cercles et de (DC). On a YBA isocèle en Y et donc $\widehat{YAB} = \widehat{YBA}$ puis par angle inscrit on obtient $\widehat{YAB} = \widehat{ADC}$ et donc on en déduit que (SD) est tangente au cercle circonscrit de ADB. Bref, on a $X = B$ et on a ce que l'on veut. □

Exercice 7
L'hexagone $ABCDEF$ a ses côtés opposés de même longueur et parallèles. Montrer que ACE et BDF sont isométriques.

Démonstration. $ABDE$ est un parallélogramme donc $DB = AE$, de même, on montre que $AC = DF$ et $BF = CE$ ce qui montre que les triangles sont isométriques. □

Exercice 8
ABC un triangle et soient A', B', C' les milieux respectifs de $[BC], [AC], [AB]$. Montrer que le triangle de côtés AA', BB', CC' a une aire égale à $\frac{3}{4}$ de celle de ABC.

Démonstration. On trace la parallèle à $(C'C)$ passant par A et on note D le point de cette droite qui vérifie $ADCC'$ est un parallélogramme. Alors on a $AD = CC'$ et $A'B = BB'$ (car $BB'DA'$ est un parallélogramme). De là on découpe ABC en 8 sous triangles délimités par les médianes et les droites des milieux. Puis on reporte les petits triangles dans $AA'D$, par exemple l'aire de $AB'D$ est celle de $C'B'C$ qui vaut $\frac{1}{8} + 3\frac{1}{24} = \frac{1}{4}$ fois l'aire de ABC. On obtient alors une aire égale à $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de l'aire de ABC. □

On va maintenant s'intéresser au théorème de Miquel qui fait intervenir des triangles semblables.

Exercice 9
(Miquel) On se donne 4 droites D_1, D_2, D_3, D_4 avec $A = D_1 \cap D_2$ et $B = D_3 \cap D_4, D_1 \cap D_3 = E, D_1 \cap D_4 = G, D_2 \cap D_3 = F, D_2 \cap D_4 = H$. Montrer que les cercles circonscrits de AEF, AGH, BFH, BEG sont concourant en un point O appelé point de Miquel de notre quadrilatère.

Démonstration. On note O l'intersection des cercles circonscrits de AEF, BFH et on va montrer que $OAHG$ est cocyclique. En effet, par cocyclité de $AEOF$ on a $\widehat{EAO} = \widehat{OFB}$ mais par cocyclicité de $OBHF$ on a aussi $\widehat{OFB} = \widehat{OHB} =$ et donc $OAHG$ cocycliques. De même pour le dernier cercle. □

Remarque 10. Quel rapport avec les triangles semblables ? On remarque que $OAE \sim OHB$ et que l'on a des relations similaires pour d'autres triangles de la figure. L'explication est la suivante : deux triangles sont semblables si et seulement si il existe une similitude directe (c'est à dire la composition d'une rotation et d'une homothétie) qui envoie l'un des triangles

sur l'autre. Ici, on a montré que O était le centre de la similitude directe envoyant $A \to H, E \to B$. C'est aussi le centre d'autres similitudes qui correspondent aux autres couples de triangles semblables de la figure. Le point de vue des transformations du plan pour définir et étudier les triangles semblables est très important mais n'est pas l'objet de ce cours. Néanmoins, il faut être capable de reconnaître les points de Miquel d'une figure car cela donne directement des triangles semblables et donc des égalités d'angles dans une figure, cela peut donner la cocyclicité de certains points ou encore des alignements selon la version que l'on utilise.

Exercice 10
On se donne trois cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ concourants en un point X. On se donne $A \in \Gamma_1$ et on note B_i le point d'intersection de Γ_k, Γ_j où $j, k \neq i$. On note $B = \Gamma_2 \cap (AB_3)$ et $C = (AB_2) \cap \Gamma_3$. Montrer que B, C, B_1 sont alignés.

Démonstration. Par cocyclicité de CB_2B_1X de AB_3B_2X et celle de B_3XB_1B on peut écrire $\widehat{XB_1C} = \widehat{AB_2X} = 180 - \widehat{AB_3X} = 180 - \widehat{XB_1B}$. □

Exercice 11
Inégalité arithmético-géométrique On se donne un cercle de diamètre $[AB]$ et soit $C \in [AB]$ tel que $AC = a$ et $CB = b$. On trace D l'intersection de la perpendiculaire à $[AB]$ passant par C et du cercle. En calculant CD montrer que

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

Démonstration. On note $h = CD$ et comme $ACD \sim DCB$ on a $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$ et donc $h = \sqrt{ab}$ et comme $h \leqslant R$ le rayon du cercle qui est $\frac{a+b}{2}$. Soit encore $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. □

4 Équations fonctionnelles (Colin)

Quelques notions de cours

Ce cours et ces exercices proviennent directement de l'**excellent** cours sur les équations fonctionnelles, proposé en 2003 par Pierre Bornsztein et Moubinool Omarjee, et disponible sur le site de la POFM. On y trouvera les solutions de tous les exercices listés ci-dessous.

En pratique, voici les notions et idées clé relatives aux équations fonctionnelles :

— la notion de fonction **surjective**, **injective** et **bijective** ;
— la notion de fonction **monotone** ou **strictement monotone** ;
— la notion de fonction **paire**, **impaire** ou **périodique** ;
— la notion de fonction **bornée**, voire **constante** ;
— l'utilisation de la **récurrence** pour calculer des valeurs entières de notre fonction ;
— l'**équation de Cauchy** ;
— le fait que certaines variables jouent des rôles **symétriques** dans l'équation ou uniquement dans certains termes de l'équation ;
— plus généralement, le fait que certaines **transformations** sur les variables laissent un terme de l'équation inchangé (ou alors très peu) ;

— l'importance de la gestion des **petits cas** : prendre des variables égales à 0, 1 ou -1, ou encore égales entre elles, ...

— la recherche de **racines** ou de **points fixes**, c'est-à-dire de nombres x tels que $f(x) = 0$ ou $f(x) = x$;

— le fait de considérer un **antécédent** d'une valeur donnée, ou encore une variable dont l'image est **minimale** ou **maximale**, ...

Exercices

Exercice 1
Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Démontrer que, si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement monotone, alors elle est injective.

Exercice 2
Démontrer que, si $f : X \to \mathbb{R}$ est une bijection croissante, alors sa réciproque est elle aussi croissante.

Exercice 3
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes telles que $f(f(x)) = x$ pour tout x.

Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$f(2x) = f(\sin(\pi x/2+\pi y/2))+f(\sin(\pi x/2-\pi y/2))$ et $f(x^2-y^2) = (x+y)f(x-y)+(x-y)f(x+y)$.

Exercice 5
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Exercice 6
Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout x, on ait

$$f(x + a) = 1/2 + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Démontrer que f est périodique puis, en supposant que $a = 1$, donner un exemple d'une telle fonction.

Exercice 7
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à pente constante, c'est-à-dire pour lesquelles il existe un réel a tel que, pour tout x et tout y distinct de x, on ait :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a.$$

Exercice 8
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x+y) = f(x) + y.$$

Exercice 9
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 10
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones et telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 11
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 12
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x) - f(y) \leqslant (x-y)^2.$$

Exercice 13
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction surjective et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction injective telles que, pour tout n, on ait :

$$f(n) \geqslant g(n).$$

Démontrer que $f = g$.

Exercice 14
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. Démontrer qu'il existe un entier n tel que $f(f(n)) \neq n + 2019$.

5 TD pot pourri (Olivier)

Ce TD a pour but d'appliquer les notions introduites au cour précédent de géométrie, ainsi on a fait plusieurs exercices sur la chasse aux angles qui est primordiale dans la résolution des exercices d'Olympiades, puis sur la puissance d'un point.

Chasse aux angles

Exercice 1
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit.

Montrer que la bissectrice intérieure de BAC et la médiatrice de $[BC]$ s'intersectent sur le cercle Γ. On appelle ce point d'intersection S pôle Sud de A.

Solution de l'exercice 1
Soit S l'intersection du cercle et de la médiatrice, montrons que ce point appartient à la bissectrice. On a $\widehat{BAS} = \widehat{BCS}$ d'après les angles inscrits puis comme BSC est isocèle on a $\widehat{BCS} = \widehat{CBS}$.

Exercice 2
Montrer que les points B, C, I, I_A sont cocycliques, où I est le centre du cercle inscrit à ABC et I_A le centre du cercle exinscrit relatif à A.

Montrer que S est le centre du cercle passant par B, C, I, I_A. On appelle ce cercle cercle antarctique relatif à A.

Solution de l'exercice 2
On regarde autour du point B, le centre du cercle exinscrit en A se construit par la bissectrice extérieure, les deux bissectrices sont perpandiculaires donc on a $\widehat{IBI_A} = 90 = \widehat{ICI_A}$ d'après les propriétés du quadrilatère cocyclique on a $BCII_A$ est cocyclique.

Ensuite montrons que $SB = SI = SI_A$, dans un premier temps pour avoir la première égalité montrons que $\widehat{SBI} = \widehat{SIB}$. Par chasse aux angles on a $\widehat{BIS} = 180 - \widehat{BIA} = \widehat{BAI} + \widehat{ABI}$. Ensuite par les propriétés du pôle sud, vu à la question précédente on a les égalités d'angles $\widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ et comme (BI) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$ on a aussi $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$. Finalement $\widehat{IBS} = \widehat{IBC} + \widehat{CBS} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI} = \widehat{BIS}$ et donc IBS est un triangle rectangle et donc $IS = BS$. Plaçons nous dansle triangle rectangle IBI_A, par chasse aux angles $\widehat{SBI_A} = 90 - \widehat{IBS} = 90 - \widehat{BIS} = \widehat{SI_AB}$, on a bien $SI = SB = SI_A$ donc S est le centre du quadrilatère insrit dans IBI_A qui est bien le cercle passant par les points B, I, C, I_A.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, B' et C' les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Montrer que $BCB'C'$ est cocyclique.

Montrer que (AO) et $(B'C')$ sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 3
Comme C' et B' sont les pieds des hauteurs on a $\widehat{CC'B} = \widehat{BB'C} = 90^o$ ainsi $BC'B'C$ est cocyclique.

Par chasse aux angles montrons que $\widehat{OAC} + \widehat{AB'C'}$, $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ comme $BCB'C'$ est cocyclique et par l'angle au centre, ensuite comme AOC est un triangle isocèle on a $2 \cdot \widehat{OAC} = \widehat{OAC} + \widehat{ACO} = 180^o - \widehat{AOC} = 180^o - 2 \cdot \widehat{ABC} = 180^o - 2 \cdot \widehat{AB'C'}$, ensuite on divise par deux et on trouve le résultat voulu.

Exercice 4
Soit ABC un triangle rectangle en A, soit L un point appartenant à $[BC]$. Les cercles circonscrits à ABL et CAL recoupent (AC) et (AB) en M et N, respectivement.

Montrer que les points L, M, N sont alignés.

Solution de l'exercice 4
Montrons que $\widehat{BLM} = \widehat{BLN} = 90^o$. On se place dans le cas $AB < AC$. Comme $ABLM$ est un quadrilatère cocyclique, par les angles inscrits on a $\widehat{MAB} = \widehat{BLM} = 90^o$, sur le quadrilatère $ACLN$, on a $\widehat{NAB} + \widehat{NLB} = 180^o$ donc on a bien $\widehat{BLM} = \widehat{BLN} = 90^o$. Enfin L, M, N est bien aligné, il ne faut pas vérifer que M et N sont du même côté de L car les angles valent 90^o.

Exercice 5
Soit deux cercles $\Gamma 1$ et $\Gamma 2$, s'intersectant en deux points distincts A et B, soit $P \in \Gamma 1$ et $Q \in \Gamma 2$ tels que P, B, Q sont alignés dans cette ordre. Soit T l'intersection des tangentes à $\Gamma 2$ en P et à $\Gamma 2$ en Q.

Montrer que $AQTP$ est cocyclique.

Solution de l'exercice 5
Par chasse aux angles et relation avec la tangente, on a $\widehat{PTQ} = 180 - \widehat{TPQ} - \widehat{TQP} = 180 - \widehat{PAB} - \widehat{BAQ} = 180 - \widehat{PAQ}$, ainsi APTQ est cocyclique.

Exercice 6
Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} > 90$, soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, Soit T l'intersection du cercle circonscrit à OBC et à la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

Montrer que $T \in (AC)$.

Solution de l'exercice 6
Dans le quadrilatère cyclique $BCDT$, on a $\widehat{BCT} = \widehat{BOT}$, par la bissectrice on a $\widehat{BOT} = \widehat{BOA}/2$, puis par angles au centre $\widehat{BOA}/2 = \widehat{ACB}$, on peut tout mettre bout à bout et on obtient $\widehat{BCT} = \widehat{BCA}$ donc T, A, C sont alignés.

Puissance d'un point

Exercice 7
On considère K et L deux points d'un cercle Γ de centre O. Soit A un point de la droite (KL) en dehors du cercle. On note P et Q les points de contact des tangentes à Γ issues de A. Soit M le milieu de $[PQ]$.

Montrer que les angles $\widehat{MKO}$ et $\widehat{MLO}$ sont égaux.

Solution de l'exercice 7
O, M, P sont alignés car M et O appartiennent à la bissectrice de $\widehat{PAQ}$. Comme $\widehat{AMP} = \widehat{APO} = 90$, on a $AMP \sim APO$ et donc $AM \times AO = AP^2 = \mathcal{P}_A(\Gamma) = AK \times AL$, $KLOM$ est cocyclique et $\widehat{MKO} = \widehat{MLO}$.

Exercice 8
Soit un triangle ABC de centre de cercle inscrit I. Le cercle inscrit est tangent à BC, CA, AB en D, E, F respectivement. Soit P du même côté de EF que A tel que $\widehat{PEF} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{PFE} = \widehat{ACB}$.

Montrer que P, I, D sont alignés.

Solution de l'exercice 8
$PEF \sim ABC$ donc $APFE$ est cocyclique, I appartient à ce cercle car $\widehat{AFI} + \widehat{AEI} = 180$. Puis chasse aux angles, $\widehat{FIP} = \widehat{FEP} = \widehat{FBD} = 180 - \widehat{FID}$, ainsi P, I, D sont alignés.

Exercice 9
4 pièces de monnaies : Soit quatres cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ tangents extérieurement entre eux, $A = \Gamma_1 \cap \Gamma_2,\ B = \Gamma_2 \cap \Gamma_3, C = \Gamma_3 \cap \Gamma_4, D = \Gamma_4 \cap \Gamma_1$.

Montrer que $ABCD$ est cocyclique.

Solution de l'exercice 9
On regarde la seule information que l'on connait, c'est à dire les tangentes aux différentes cercles. Soit d_1, d_2, d_3, d_4, les tangentes en A, B, C, D respectivement. Soit α l'angle entre $[AB]$ et d_1 on a par les angles à la tangente que il est égale à l'angle entre $[AB]$ et d_2. Puis de même on prend β, l'angle entre $[CB]$ et d_2, γ, l'angle entre $[CD]$ et d_3, δ, l'angle entre $[DA]$ et d_4. Maintenant on peut calculer la somme des angles opposés dans le quadrilatère $ABCD$. $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, mais on a aussi $\widehat{BCD} + \widehat{DAB} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Finalement comme la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360 degré il vient $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 360/2$, donc $ABCD$ est cocyclique.

6 Inégalités (François)

Prouver une inégalité, c'est prouver que sous certaines conditions, elle est toujours vérifiée, à quoi s'ajoute, très souvent, la recherche des cas où l'inégalité devient une égalité.

Tout carré est positif

La première inégalité, c'est le fait que pour tout nombre réel x (positif ou négatif), son carré est toujours positif : $x^2 \geqslant 0$. Et il est nul si et seulement si $x = 0$ (c'est le seul cas d'égalité).

Il résulte de cette première inégalité que si a et b sont deux réels quelconques,

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$$

(car $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$), avec égalité si et seulement si $a - b = 0$, soit $a = b$. Et vous serez étonnés de constater combien d'inégalités on peut démontrer rien qu'à partir de cette inégalité de base ! Par exemple :

Exercice 1
Montrer que si a et b sont deux nombres réels quelconques (positifs ou négatifs), $a^2 + b^2 + 1 \geqslant a + b + ab$. Trouver les cas d'égalité.

Deux conséquences très classiques de l'inégalité de base $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$:

Exercice 2
Montrer que pour tout nombre réel strictement positif a, $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$

Exercice 3 (Lemme du tourniquet)
Montrer que si a, b et c sont trois nombres réels quelconques, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

Inégalité arithmético-géométrique

On peut définir plusieurs moyennes de deux nombres réels strictement positifs a et b, en particulier :

Leur moyenne arithmétique m, qui vaut $m = \dfrac{a+b}{2}$

Leur moyenne géométrique g, qui vaut : $g = \sqrt{ab}$

Leur moyenne harmonique h, qui vérifie : $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

Exercice 4
Vérifier que ces moyennes m, g et h sont toutes trois comprises entre a et b, et montrer que $h \leqslant g \leqslant m$. Dans quels cas deux de ces moyennes sont-elles égales ? Dans quels cas l'une d'entre elles est-elle égale à a ou b ?

L'inégalité arithmético-géométrique est une généralisation de ce résultat à un nombre quelconque de variables. Nous nous contenterons du cas simple de trois variables :

Exercice 5
Montrer que si x et y sont deux réels positifs, $x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$ et déterminer les cas d'égalité. En déduire que pour trois réels positifs a, b et c, $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$, et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 6
Dans le cas de trois variables a, b, c strictement positives, montrer que leur moyenne harmonique h telle que $\frac{1}{h} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique $m = \frac{1}{3}(a+b+c)$, de deux manières :

1. en utilisant la moyenne géométrique $g = \sqrt[3]{abc}$
2. sans utiliser la moyenne géométrique

Déterminer, avec les deux méthodes, les cas d'égalité.

Exercice 7
Montrer que si a, b et c sont trois réels positifs vérifiant $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$, alors : $a+b+c \geqslant 3$ et $abc \leqslant 1$.

Inégalité du réordonnement

Plusieurs des résultats ci-dessus résultent immédiatement d'un théorème général et assez intuitif appelé "inégalité du réordonnement". Intuitivement, cela répond à des questions du type : si les coefficients des épreuves de maths, physique et histoire sont 9, 6 et 3, vaut-il mieux avoir 19 en maths, 15 en physique et 14 en histoire, ou 19 en maths, 14 en physique et 15 en histoire, ou 14 en maths, 19 en physique et 15 en histoire, ou... ?

Tout d'abord, on dira que $(c_1,\ c_2,\ \cdots c_n)$ est une permutation des n nombres $(b_1,\ b_2,\ \cdots b_n)$ si ce sont les mêmes nombres dans un ordre différent. Par exemple, $(15, 19, 14)$ est une permutation de $(19, 15, 14)$. Réordonner les nombres, c'est les remettre dans l'ordre "optimal", au sens du théorème suivant :

Théorème 1 (Inégalité du réordonnement)**.**

Soit $n \geqslant 1$ un entier, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ des nombres réels (positifs ou négatifs), et $c_1,\ c_2,\ \cdots\ c_n$ une permutation des (b_k). Alors,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

En effet, lorsque $n = 2$, cela revient à prouver que $a_1b_1 + a_2b_2 \geqslant a_1b_2 + a_2b_1$, car il n'existe pas d'autre permutation de $b_1,\ b_2$. Cette inégalité équivaut à : $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geqslant 0$, qui est manifestement vérifiée puisque, par hypothèse, $a_1 \geqslant a_2$ et $b_1 \geqslant b_2$.

Pour n quelconque, dans le cas où les a_k sont tous distincts, on peut raisonner ainsi : on dira qu'une permutation $c'_1,\ c'_2,\ \cdots\ c'_n$ est "meilleure" qu'une permutation $c_1,\ c_2,\ \cdots\ c_n$ si : $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n < a_1c'_1 + a_2c'_2 + \cdots + a_nc'_n$. Il résulte du cas $n = 2$ que si, pour deux indices $i < j$ quelconques, $c_i < c_j$, alors la permutation $c'_1,\ c'_2,\ \cdots\ c'_n$ obtenue en échangeant c_i et c_j ($c'_i = c_j$, $c'_j = c_i$ et $c'_k = c_k$ pour tout k autre que i et j) est meilleure que la permutation $c_1,\ c_2,\ \cdots\ c_n$, car $a_ic_i + a_jc_j < a_ic_j + a_jc_i$ (même démonstration que dans le cas $n = 2$, mais avec des inégalités strictes). Or seule la permutation (b_k) vérifie : pour tout $i < j$, $b_i \geqslant b_j$, donc c'est la seule pour laquelle on ne puisse pas trouver de permutation meilleure.

Le résultat reste valable si les a_k ne sont pas tous distincts, mais cela nécessite une démonstration plus précautionneuse.

Il importe de remarquer que le résultat vaut quels que soient les signes des a_k et des b_k. En particulier, l'inégalité de droite : $a_1c_1 + ... + a_nc_n \geqslant a_1b_n + \cdots + a_nb_1$ équivaut à : $a_1(-b_n) + \cdots + a_n(-b_1) \geqslant a_1(-c_1) + \cdots + a_n(-c_n)$ et celle-ci est vérifiée car $-b_n \geqslant \cdots \geqslant -b_1$.

Exercice 8
Parmi les inégalités démontrées précédemment, lesquelles auraient pu être démontrées au moyen de l'inégalité du réordonnement ?

Remarque En général, l'inégalité du réordonnement permet difficilement d'étudier les cas d'égalité, mais elle est très utile s'il s'agit seulement de prouver une inégalité.

Exercice 9
Si a, b et c sont trois réels strictement positifs, montrer que $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Exercice 10
Soient $a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n$ n entiers strictement positifs distincts. Montrer que : $a_1 + \dfrac{a_2}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n} \geqslant n$.

Exercice 11 (Inégalité de Tchebychev)
Montrer que si $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$, alors :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

.

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Cette inégalité est une propriété fondamentale du produit scalaire utilisé en géométrie. Mais elle sert également indépendamment de la géométrie.

Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)**.**
Soit n un entier positif, $a_1, \cdots a_n$ et $b_1, \cdots b_n$ des nombres réels quelconques,

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_b)^2 \leqslant (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

et il y a égalité si et seulement si : soit tous les a_k sont nuls, soit il existe un réel λ tel que pour tout k, $b_k = \lambda a_k$.

Démonstration.

Quel que soit le réel λ, $(a_k\lambda - b_k)^2 = a_k^2\lambda^2 - 2a_kb_k\lambda + b_k^2 \geqslant 0$ pour tout k. Donc en additionnant : quel que soit λ, $(a_1\lambda - b_1)^2 + (a_2\lambda - b_2)^2 + \cdots + (a_n\lambda - b_n)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C \geqslant 0$.
avec $A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$; $B = -2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$ et $C = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$

Hormis dans le cas où tous les a_k sont nuls, nous avons là un trinôme du second degré en λ, toujours positif ou nul, et qui ne s'annule que si tous $a_k\lambda - b_k$ sont nuls. Donc son discriminant : $\Delta = B^2 - 4AC$ est négatif ou nul, et il est nul seulement dans le cas où il existe un λ tel que tous les $a_k\lambda - b_k$ soient nuls. Ne pas oublier de vérifier que, tant dans le cas où tous les a_k sont nuls que dans le cas où il existe un λ tel que, pour tout k, $b_k = a_k\lambda$, on a effectivement l'égalité : $(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 = (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$, ce qui équivaut à $B^2 - 4AC = 0$.

□

Nous nous contenterons d'une application, connue sous le nom d' "Inégalité des mauvais élèves".

Exercice 12
Soit n un entier strictement positif, $e_1, \cdots, e_n$ des réels quelconques et $f_1, \cdots, f_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{e_1^2}{f_1} + \cdots + \frac{e_n^2}{f_n} \geqslant \frac{(e_1 + \cdots + e_n)^2}{f_1 + \cdots + f_n}$$

Déterminer les cas d'égalité.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
D'après l'inégalité de base, $a^2 + 1 \geqslant 2a$, $b^2 + 1 \geqslant 2b$, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, donc en additionnant : $2(a^2 + b^2 + 1) \geqslant 2a + 2b + 2ab$.

Solution de l'exercice 2
De même, en appliquant l'inégalité de base à $\sqrt{a}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}$, on obtient l'inégalité cherchée :
$\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geqslant 2$

Solution de l'exercice 3
Comme dans l'exercice 1, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$ et $c^2 + a^2 \geqslant 2ac$, donc en additionnant : $2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2ab + 2bc + 2ca$

Solution de l'exercice 4
Supposons $a \geqslant b$; $m - a = \frac{b-a}{2} \leqslant 0$ et $m - b = \frac{a-b}{2} \geqslant 0$; $\frac{g}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}} \leqslant 1$ et $\frac{g}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} \geqslant 1$; $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, donc $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{h} \leqslant \frac{1}{b}$

$g \leqslant m$ car $\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 2\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\right)$; $h \leqslant g$ car $\frac{2}{h} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{ab}}\right) = \frac{2}{g}$

Comme l'inégalité de base $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ devient une égalité si et seulement si $a = b$, pour que deux des trois moyennes soient égales, il faut et il suffit que $a = b$. De même pour qu'une des moyennes soit égale à a ou b.

Solution de l'exercice 5

$(x^3 + y^3) - (x^2y + xy^2) = (x - y)(x^2 - y^2) = (x - y)^2(x + y) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = y$.

Donc $2(x^3+y^3+z^3) = (x^3+y^3)+(y^3+z^3)+(z^3+x^3) \geqslant (x^2y+xy^2)+(y^2z+yz^2)+(z^2x+zx^2) = x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) \geqslant 6xyz$, ce qui équivaut à l'inégalité que l'on doit prouver, si l'on pose : $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$.

Pour avoir l'égalité, il faut et il suffit que chacune des trois inégalités que nous avons additionnées soit une égalité, donc que $x = y = z$, soit $a = b = c$.

Remarques

— Il est très fréquent que le cas d'égalité soit précisément le cas où toutes les variables sont égales, mais il y a quelques exceptions qui sont souvent perçues comme des questions pièges.

— L'inégalité arithmético-géométrique dans le cas de quatre variables est encore plus simple à démontrer, car : $(a^4 + b^4) + (c^4 + d^4) \geqslant 2(a^2b^2 + c^2d^2) \geqslant 4abcd$. Le cas général est plus technique.

Solution de l'exercice 6

1. Nous avons vu (exercice 5) que, dans le cas de trois variables (comme dans le cas de deux variables, et cela se généralise à un nombre quelconque de variables), la moyenne géométrique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique : $g = \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{1}{3}(a+b+c)$. Or la moyenne harmonique h vérifie : $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$. Donc $\frac{1}{h} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{1}{g}$, ce qui équivaut à $h \leqslant g$. L'égalité étant vérifiée, une nouvelle fois, si et seulement si les trois variables sont égales.
2. La démonstration sans utiliser la moyenne géométrique revient à prouver directement que : $\frac{1}{h} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant \frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{m}$. Donc que : $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \geqslant 9$. Ce qui est vrai car : $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$ et pour tout $x > 0$: $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Là encore, l'unique cas d'égalité est $a = b = c$.

Solution de l'exercice 7

— La moyenne géométrique de $(a+1)$, $(b+1)$ et $(c+1)$ vaut : $\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} = 2$, et elle est inférieure à leur moyenne arithmétique : $\frac{1}{3}\left[(a+1) + (b+1) + (c+1)\right] = 1 + \frac{a+b+c}{3}$ d'où $a + b + c \geqslant 3$.

— Par ailleurs, $a+1 \geqslant 2\sqrt{a}$, $b+1 \geqslant 2\sqrt{b}$, $c+1 \geqslant 2\sqrt{c}$, donc $(a+1)(b+1)(c+1) = 8 \geqslant 8\sqrt{abc}$, d'où $abc \leqslant 1$.

Solution de l'exercice 8

— Déjà l'inégalité de base $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ dans la mesure où (b,a) est une permutation de (a,b), donc $(a\times a)+(b\times b)\geqslant (a\times b)+(b\times a)$.

— Egalement le lemme du tourniquet, et pour la même raison : (b,c,a) est une permutation de (a,b,c), donc $(a\times a)+(b\times b)+(c\times c)\geqslant (a\times b)+(b\times c)+(c\times a)$. En effet, les trois variables jouant des rôles symétriques, on peut supposer que $a\geqslant b\geqslant c$.

— C'est moins immédiat dans l'exercice 1. Et pourtant, cet exercice 1 n'est autre que le lemme du tourniquet dans le cas où $c=1$, donc là encore, il peut se démontrer par l'inégalité du réordonnement.

— Idem pour l'exercice 2, puisqu'il résulte de l'inégalité de base $a^2+b^2\geqslant 2ab$ en donnant des valeurs particulières à a et b.

— On peut aussi résoudre avec l'inégalité du réordonnement la première question de l'exercice 5 : $x^3+y^3\geqslant x^2y+xy^2$, dans la mesure où si $x\geqslant y$ et si x et y sont tous deux positifs, $x^2\geqslant y^2$, donc $(x^2\times x)+(y^2\times y)\geqslant (x^2\times y)+(y^2\times x)$.

Solution de l'exercice 9

— Cette inégalité elle aussi peut se démontrer avec l'inégalité de réordonnement, car on peut supposer que $a\geqslant b\geqslant c$ puisque les trois variables jouent des rôles symétriques, ce qui entraîne $b+c\leqslant a+c\leqslant a+b$, donc $\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{1}{a+b}$. Dès lors,
$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}+\dfrac{a}{a+b}$, mais également :
$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{c}{b+c}+\dfrac{a}{c+a}+\dfrac{b}{a+b}$, donc en additionnant ces deux inégalités,
$2\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)\geqslant\dfrac{b+c}{b+c}+\dfrac{c+a}{c+a}+\dfrac{a+b}{a+b}=3.$

— Mais on peut également utiliser le fait que la moyenne harmonique de $(b+c),\ (c+a),\ (a+b)$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique, ce qui peut s'écrire : $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)\geqslant\dfrac{3}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}$ (attention au sens de l'inégalité !), soit, en multipliant les deux membres par $6(a+b+c)$,
$2\left(\dfrac{a+(b+c)}{b+c}+\dfrac{b+(c+a)}{c+a}+\dfrac{c+(a+b)}{a+b}\right)\geqslant 9$ d'où le résultat cherché.

Solution de l'exercice 10
Réordonnons $a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n$ en $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$. Comme les a_i (donc les b_k) sont des entiers strictement positifs distincts, pour tout k, $b_{k+1}\geqslant b_k+1$ donc de proche en proche (par récurrence), $b_k\geqslant k$. Comme $a_1,\cdots a_n$ est une permutation (quelconque) des b_k, l'inégalité du réordonnement permet d'écrire : $\dfrac{a_1}{1}+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n}\geqslant\dfrac{b_1}{1}+\dfrac{b_2}{2}+\cdots+\dfrac{b_n}{n}\geqslant 1+1+\cdots+1=n$

Solution de l'exercice 11 (Inégalité de Tchebychev)
Parmi les permutations possibles de $(b_1,\ b_2,\ \cdots\ b_n)$, il y a les permutations circulaires : $(b_2,\ b_3,\ \cdots\ b_1),\ \ (b_3,\ b_4,\ \cdots\ b_2),\ \cdots\ (b_n,\ b_1,\ \cdots\ b_{n-1})$. Chacune d'elles permet d'écrire une inégalité du réordonnement :

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n\geqslant a_1b_2+a_2b_3+\cdots a_nb_1,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n\geqslant a_1b_3+a_2b_4+\cdots a_nb_2,$$

$\dots$

$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n \geqslant a_1b_n + a_2b_1 + \cdots a_nb_{n-1}$,

à quoi s'ajoute : $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n$.

En additionnant ces n inégalités, on obtient :
$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n) \geqslant a_1(b_1 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + \cdots + b_n) + \cdots + a_n(b_1 + \cdots + b_n)$, soit :
$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n) \geqslant (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)$.

Solution de l'exercice 12

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz à : $a_k = \dfrac{e_k}{\sqrt{f_k}}$ et $b_k = \sqrt{f_k}$.

$$\left(\frac{e_1}{\sqrt{f_1}}\sqrt{f_1} + \frac{e_2}{\sqrt{f_2}}\sqrt{f_2} + \cdots + \frac{e_n}{\sqrt{f_n}}\sqrt{f_n}\right)^2 \leqslant$$

$$\left[\left(\frac{e_1}{\sqrt{f_1}}\right)^2 + \left(\frac{e_2}{\sqrt{f_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{e_n}{\sqrt{f_n}}\right)^2\right] \times \left[\left(\sqrt{f_1}\right)^2 + \left(\sqrt{f_2}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{f_n}\right)^2\right]$$

soit :

$$(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)^2 \leqslant \left[\frac{e_1^2}{f_1} + \frac{e_2^2}{f_2} + \cdots + \frac{e_n^2}{f_n}\right] \times [f_1 + f_2 + \cdots + f_n]$$

ce qui est précisément l'inégalité cherchée. Quant aux cas d'égalité : puisque les $\sqrt{f_k}$ ne peuvent pas être nuls, l'égalité est vérifiée si et seulement si il existe un réel λ tel que pour tout k, $\dfrac{e_k}{\sqrt{f_k}} = \lambda\sqrt{f_k}$, c'est-à-dire tel que pour tout k : $e_k = \lambda f_k$.

Remarques finales

— La première erreur à éviter, c'est d'utiliser une inégalité dans le mauvais sens. Faites très attention au sens des inégalités, et attention également que si $A \geqslant B$ et $B \leqslant C$, cela ne permet pas de comparer A et C. Il faut notamment faire attention aux signes : la présence de nombres négatifs peut induire en erreur.

— Si on prouve qu'une condition est nécessaire pour qu'on ait l'égalité, il ne faut pas oublier également de prouver qu'elle est suffisante, donc qu'on a bien l'égalité lorsque la condition est remplie.

— Le fait que toutes les variables jouent un rôle symétrique est souvent très utile : cela permet par exemple de supposer qu'elles sont ordonnées de la plus grande à la plus petite, car permuter les variables ne change pas l'inégalité à démontrer. Dans la mesure du possible, il faut conserver dans les calculs intermédiaires le rôle symétrique joué par les variables, et ne pas utiliser l'une différemment des autres.

— Le chapitre "inégalités" est assez vaste, il fait l'objet à lui seul de publications et d'un entraînement intensif dans certains pays. Il n'est pas rare qu'un des problèmes d'une Olympiade Internationale soit une inégalité à démontrer. Une même inégalité peut souvent être démontrée de nombreuses manières différentes, et les plus élégantes ne sont pas les plus faciles à trouver : il arrive même qu'un candidat trouve une méthode simple et élégante à laquelle aucun des membres du jury international n'avait pensé.

Certaines méthodes calculatoires sont pénibles, mais plus sûres que d'autres plus élégantes car elles ont plus de chances d'aboutir : sur un problème d'Olympiade, vous obtenez la même note maximale dès lors que votre solution est mathématiquement correcte, qu'elle soit élégante ou affreusement calculatoire. Mais ce n'est pas une raison pour se lancer dans des calculs démesurés si vous n'avez pas au moins une idée de ce que vous espérez obtenir !

4 Entraînement de fin de parcours

Entraînement de fin de parcours, groupe B

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente.
N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice.
Les calculatrices et rapporteurs sont interdits.

Pour les exercices de géométrie, on attend de l'élève une figure propre, grande, où la propriété que l'on cherche à démontrer est apparente : s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
Le respect de la consigne rapporte un point.

Exercice 1

Trouver toutes les fonctions impaires $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2.$$

On rappelle qu'une fonction f est dite impaire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$.

Solution de l'exercice 1

Comme f est impaire, en particulier $f(0) = 0$.
Avec $x = y$ on obtient alors

$$f(2y)f(0) = f(y)^2 f(y)^2$$

c'est à dire

$$f(y)^4 = 0.$$

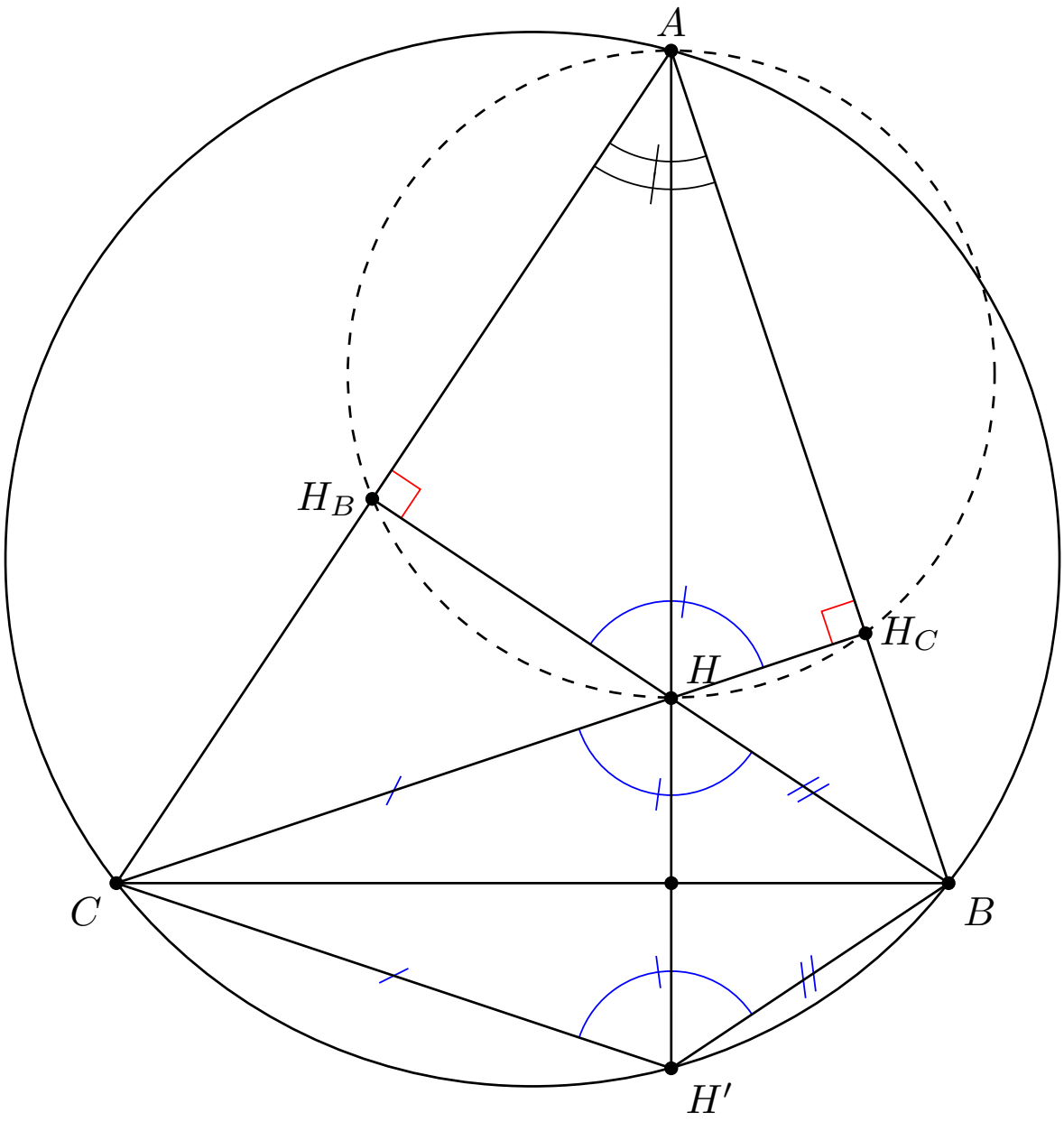
Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = 0$.
On vérifie que la fonction nulle est bien solution : $0 \times 0 = 0^2 \times 0^2$.
On conclut que l'une et unique solution est la fonction nulle.

Exercice 2

Soit ABC un triangle, soit H l'intersection de ses trois hauteurs.
Montrer que le symétrique de H par rapport à la droite (BC), que l'on notera H', appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
Montrer que le symétrique de H par rapport au milieu de $[BC]$, que l'on notera H'', appartient aussi au cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution de l'exercice 2

On commence par démontrer que le point H' appartient au cercle circonscrit du triangle ABC. Pour cela, on note H_B et H_C les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets B et C. Puisque $\widehat{HH_BA} = 90° = \widehat{HH_CA}$, les points A, H_B, H et H_C sont cocycliques.



Première question de l'exercice 2.

Par ailleurs, puisque le point H' est le symétrique du point H par rapport au côté $[BC]$ et que la symétrie conserve les angles, on a $\widehat{BH'C} = \widehat{BHC}$. Les angles $\widehat{BHC}$ et $\widehat{H_BHH_C}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux. Finalement, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le quadrilatère cyclique AH_BHH_C, on a $\widehat{H_BHH_C} = 180° - \widehat{H_BAH_C}$. En résumé :

$$\widehat{CH'B} = \widehat{CHB} = \widehat{H_BHH_C} = 180° - \widehat{H_BAH_C} = 180° - \widehat{BAC}$$

D'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, cela signifie que les points A, B, C et H' sont cocycliques, comme annoncé.

On note M le milieu du segment $[BC]$. Puisque le point H'' est le symétrique du point H par rapport au milieu du segment $[BC]$, on a $HM = H''M$. Les diagonales du quadrilatère $HBH''C$ se coupent en leur milieu, il s'agit donc d'un parallélogramme.

On déduit donc que $\widehat{CH''B} = \widehat{CHB}$. On a donc, de la même manière que précédemment :

$$\widehat{CH''B} = \widehat{CHB} = \widehat{H_CHH_B} = 180° - \widehat{H_BAH_C} = 180° - \widehat{BAC}$$

ce qui nous permet à nouveau de conclure par la réciproque du théorème de l'angle inscrit que le point H'' appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, comme annoncé.

Exercice 3

Soit n un entier et r un entier.
Montrer que

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}.$$

Solution de l'exercice 3

On fixe n.
On procède ensuite par récurrence sur r.
Pour un entier r soit $\mathcal{P}_r$ la proposition

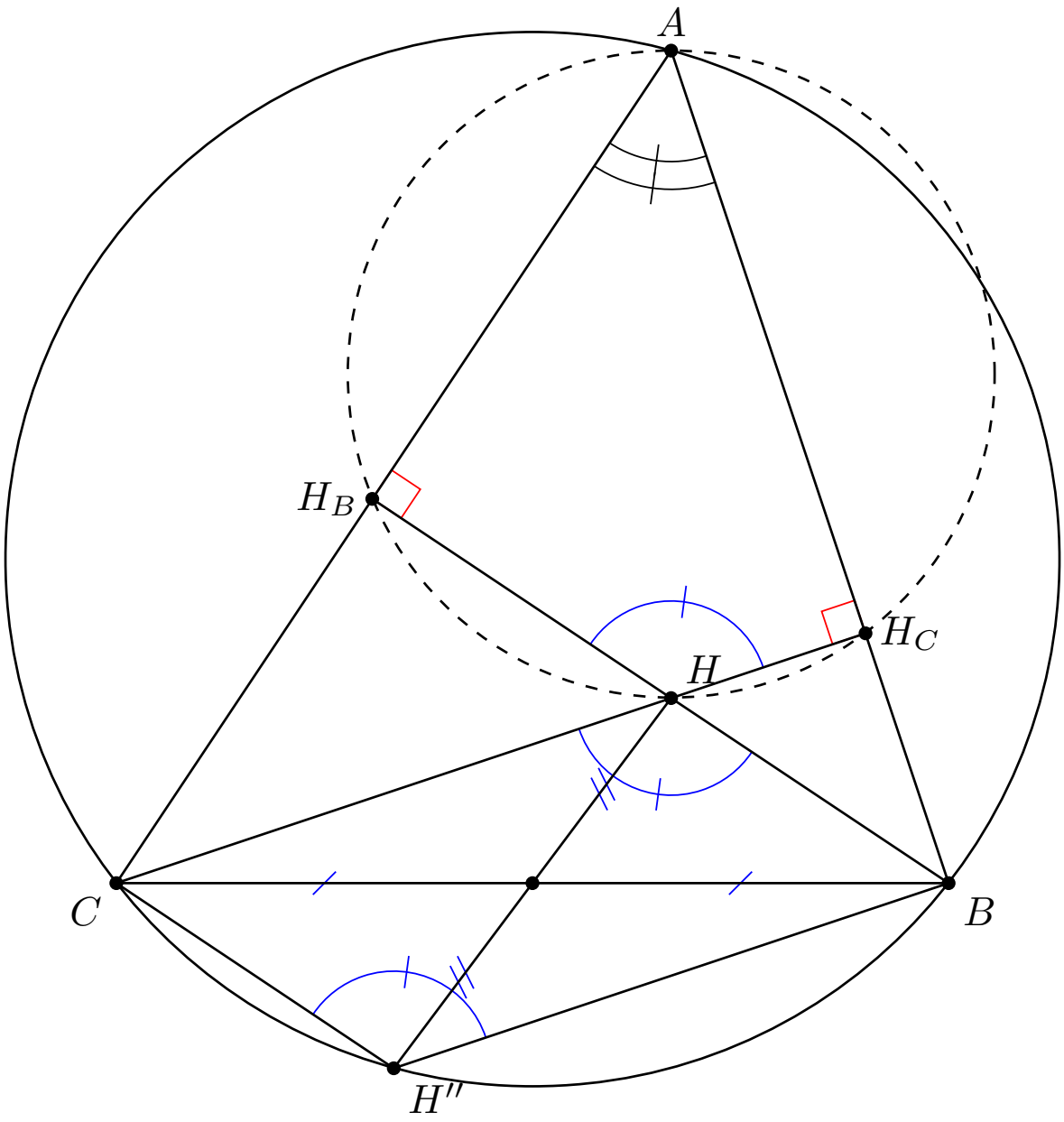
$$\mathcal{P}_r \ : \quad \sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}.$$

Initialisation Pour $r = 0$ on a

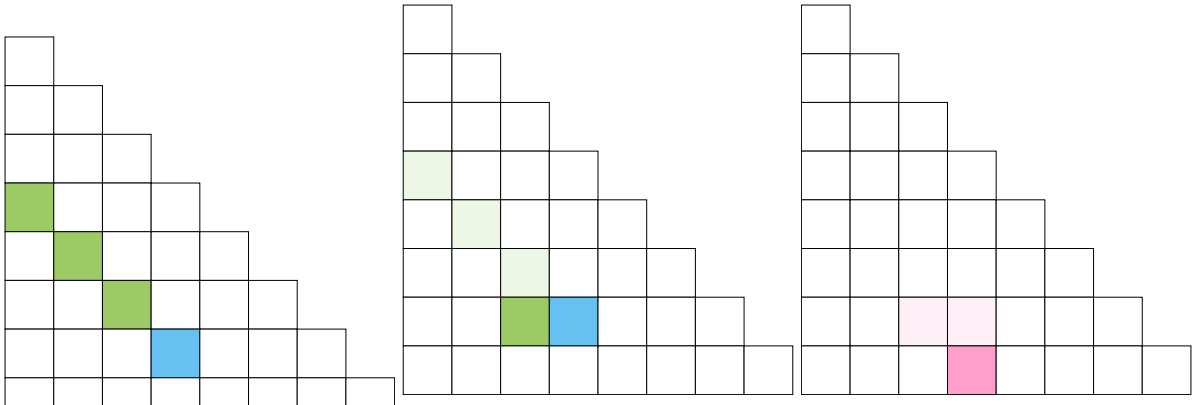
$$\sum_{i=0}^{0} \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}.$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité Soit $r \geqslant 0$ et supposons que $\mathcal{P}_r$ est vraie.



Seconde question de l'exercice 2.



(a) On découpe la somme. (b) On utilise l'hypothèse de récurrence. (c) On utilise la formule de Pascal.

Représentation graphique de l'hérédité.

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{r+1}\binom{n+i}{i} &= \sum_{i=0}^{r}\binom{n+i}{i} + \binom{n+r+1}{r+1}\\ &= \binom{n+r+1}{r} + \binom{n+r+1}{r+1}\\ &= \binom{n+(r+1)+1}{r+1}\end{aligned}$$

c'est à dire $\mathcal{P}_{r+1}$ est vraie.

Conclusion On a $\mathcal{P}_0$ vraie et pour tout r, $\mathcal{P}_r$ implique $\mathcal{P}_{r+1}$, donc par récurrence sur r, on a pour tout r

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}.$$

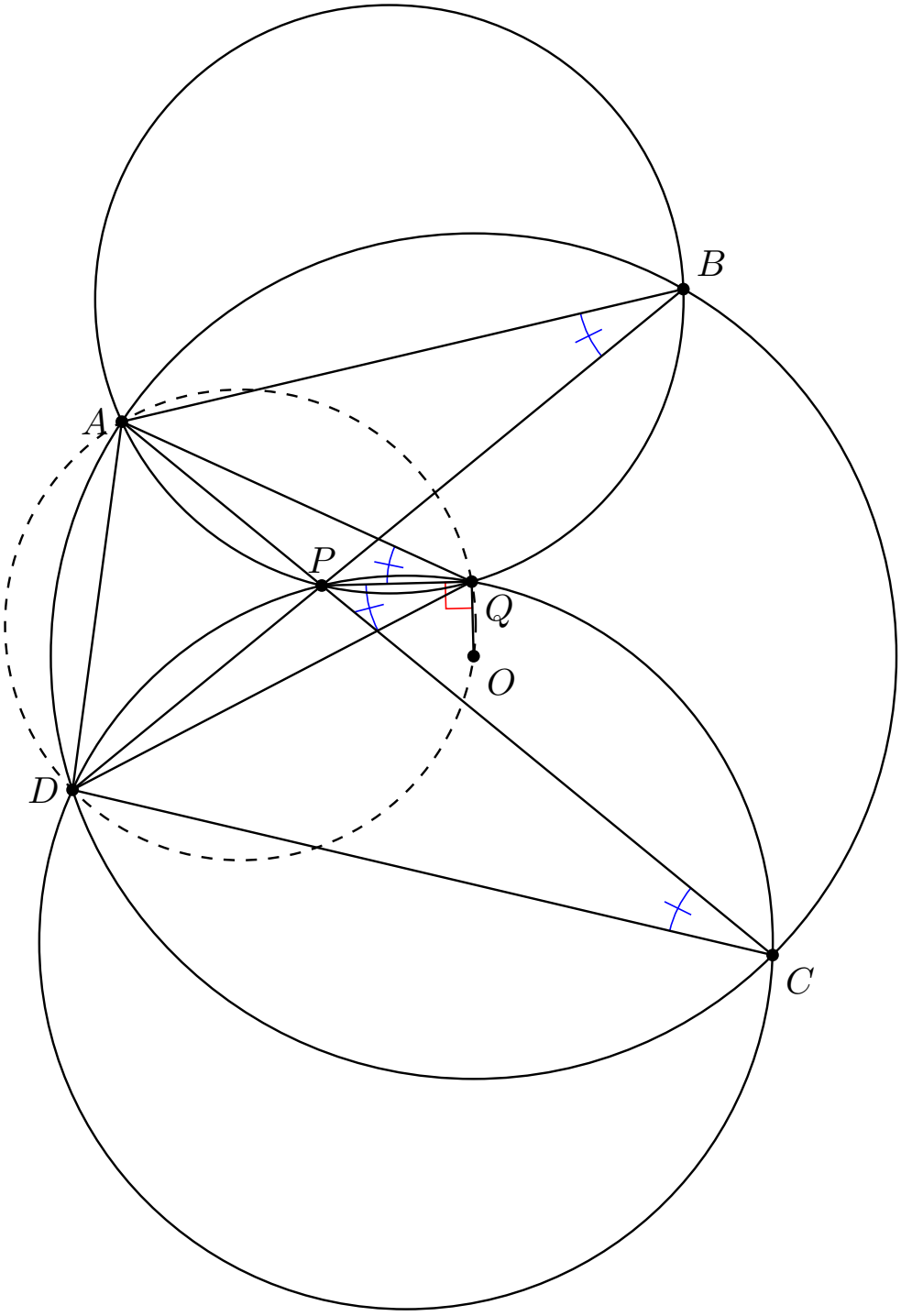
Exercice 4

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et $ABCD$ quatre points sur $\mathcal{C}$.
Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ s'intersectent en P.
Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP s'intersectent en Q.
Montrer que l'angle $\widehat{OQP}$ est droit.

Solution de l'exercice 4

On s'aperçoit que quelque soit la façon dont on essaie de décomposer $\widehat{OQP}$, il faut connaître un angle de la forme $\widehat{OQD}$.

De plus avec une figure bien tracé on peut conjecturer que $AOQD$ est un quadrilatère cocyclique.



Exercice 4.

Effectivement, en utilisant une fois le théorème de l'angle inscrit dans chacun des petits cercles puis le théorème de l'angle au centre dans le grand pour tout ramener en O, on obtient

$$\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{QPD} = \widehat{ABP} + \widehat{PCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOD}$$

, d'où cette cocyclicité.

Finalement,

$$\widehat{OQP} = \widehat{OQD} + \widehat{DQP} = \widehat{OAD} + \widehat{DCP} = \widehat{OAD} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = 90^\circ$$

.

5 Derniers cours

1 The Hardest Logic Puzzle Ever (Cécile)

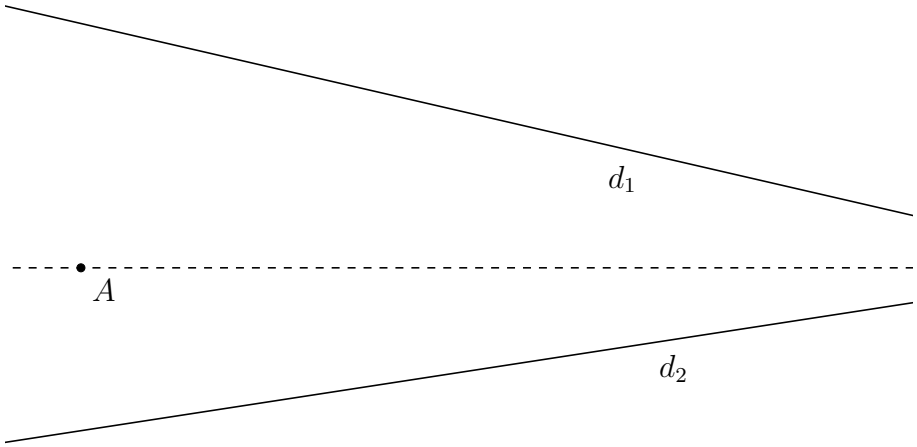
À venir…

2 Comment tracer un segment reliant deux points avec une règle trop courte ? (Martin)

L'objectif de ce cours est de résoudre les deux problèmes suivants :

Problème n°1 : Etant donné deux points A et B du plan, comment tracer le segment $[AB]$ avec une règle de longueur strictement plus courte que la longueur AB ?

Problème n°2 : On se donne un point A et deux droites d_1 et d_2 ne passant pas par le point A. On suppose que les deux droites d_1 et d_2 se coupent mais que le point d'intersection B est située en dehors de notre feuille de travail. Comment tracer la droite (AB) ?



On cherche bien sûr une résolution mathématique, et non une solution astucieuse comme "on prend une règle plus grande".

La résolution de ce problème sera l'occasion d'effectuer une introduction à la géométrie projective, à travers quelques théorèmes. La particularité de ces théorèmes est qu'ils ne concernent que des droites et des longueurs. Pas de cercles, pas d'angles.

Le théorème de Thalès

La première étape du voyage est bien sûr le premier théorème concernant juste des droites et des longueurs, le théorème de Thalès.

Exercice 1
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le milieu du segment $[CD]$. Les droites (AN) et (BD) se coupent en Q et les droites (AM) et (BD) se coupent en P. Montrer que $BP = PQ = QD$.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB < CD$ et les droites (AB) et (CD) parallèles. Soit P un point appartenant au segment $[CB]$. La parallèle à le droite (AP) passant par le point C coupe le segment $[AD]$ en le point R et la parallèle à la droite (DP) passant par le point B coupe le segment $[AD]$ en le point R'. Montrer que $R = R'$.

Exercice 3
Soit $ABCD$ un losange. Soit F un point du segment $[AD]$ et E un point du segment $[AB]$. Les droites (FC) et (BD) se coupent en L, les droites (EC) et (BD) se coupent en K. Les droites (FK) et (BC) se coupent en Q et les droites (EL) et (DC) se coupent en P. Montrer que $CP = CQ$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC le carré $BCDE$ et on construit à l'extérieur du triangle ABC le carré $ACGF$. On note M et N les milieux des segments $[FD]$ et $[GE]$. Calculer la longueur MN en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC.

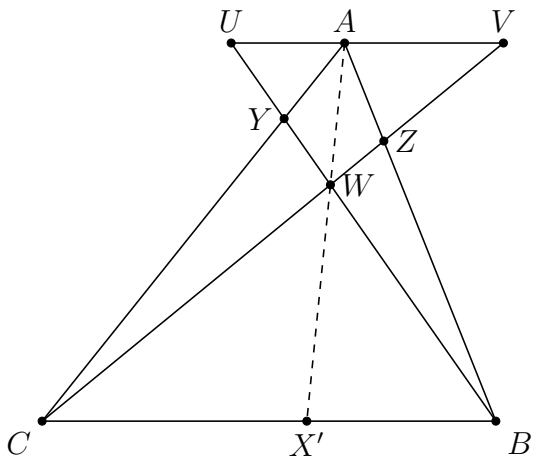
Le théorème de Céva

La deuxième étape, plus significative, vers la géométrie projective est le théorème suivant, appelé le théorème de Céva :

Théorème 1.
Soit ABC un triangle et X, Y et Z des points appartenant respectivement aux côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Alors les droites $(AX), (BY)$ et (CZ) sont concourantes si et seulement si

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Démonstration.



Soit W le point d'intersection des droites (CZ) et (BY) et soit X' le point d'intersection des droites (AW) et (BC). Il suffit de montrer que

$$\frac{X'C}{X'B} = \frac{YC}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}$$

en effet, les droites $(AX), (BY)$ et (CZ) sont concourantes si et seulement si $X = X'$.

On trace la droite parallèle d à la droite (BC) passant par le point A. On note U et V les points d'intersection respectifs des droites (BY) et (CZ) avec la droite d.

D'après le théorème de Thalès dans le "papillon" $AVWCX'$, $\frac{X'C}{AV} = \frac{X'W}{AW}$. De même dans le papillon $AUVWBX'$, $\frac{X'B}{AU} = \frac{X'W}{AW}$. On obtient en combinant que

$$\frac{X'C}{X'B} = \frac{AV}{AU}$$

D'autre part, le théorème de Thalès dans le papillon $AVZCB$ donne $\frac{AV}{CB} = \frac{AZ}{ZB}$. De même dans le papillon $AUYBC$, on trouve $\frac{AU}{CB} = \frac{AY}{YC}$. On combine ces deux égalités de rapport pour trouver :

$$\frac{X'C}{X'B} = \frac{AV}{AU} = \frac{AV}{BC} \cdot \frac{BC}{AU} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{CY}{AY}$$

ce qui donne le résultat souhaité.

□

Le théorème de Céva permet de montrer l'existence de nombreux points particuliers.

Exercice 5
Démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 6
Soit ABC un triangle et d une droite parallèle au côté $[BC]$ coupant le segment $[AB]$ au point E et le segment $[AC]$ au point F. Montrer que le point d'intersection des droites (EC) et (BF) appartient à la médiane issue du sommet A.

Exercice 7
Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 8
Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les droites $(AD), (BE)$ et (CF) sont concourantes. Le point de concours est appelé point de Gergonne.

Exercice 9
Soit ABC un triangle rectangle en C. On construit un carré $ACDE$ à l'estérieur du triangle ABC. On construit un carré $BCFG$ à l'extérieur du triangle ABC. Soit H le pied de la hautuer issue du sommet C dans le triangle ABC. Montrer que les droites $(CH), (AG)$ et (BE) sont concourantes.

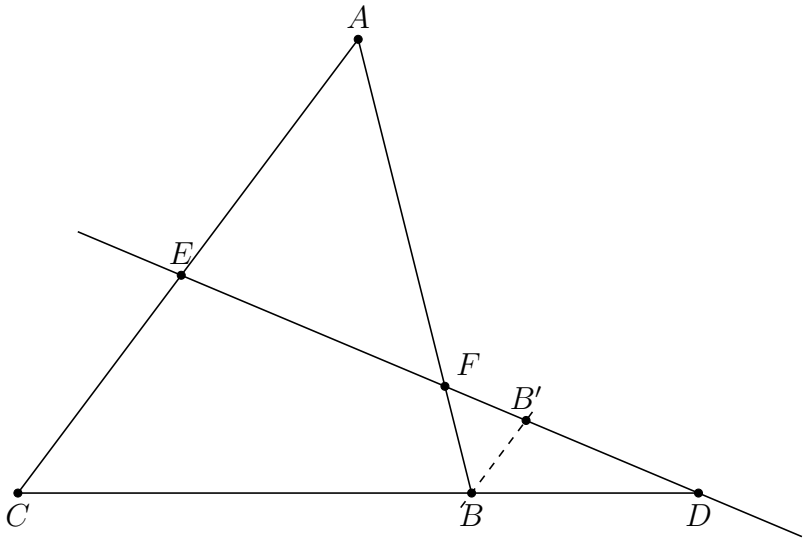
Le théorème de Ménélaüs

On peut obtenir un théorème dual de celui de Céva. Par dual, on entend que l'on a donné une condition pour que des droites soient concourantes, on cherche désormais une condition pour que des points soient alignés. Voici à cet effet le théorème de Ménélaüs.

Théorème 2.
Soit ABC un triangle. Soit D un point de la droite (BC), E un point de la droite (AC) et F un point de la droite (AC). Alors les points D, E et F sont alignés si et seulement si

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$

Démonstration.



Une fois de plus, on pose D' le point d'intersection des droites (EF) et (BC) et on montre que le point D' satisfait l'égalité de rapport ci-dessus. Comme les points D, E et F sont alignés si et seulement si $D = D'$, cela fera l'affaire.

On introduit B' le point de la droite (EF) tel que les droites (AC) et (BB') sont parallèles. Alors par le théorème de Thalès dans le papillon $B'BFAE$, on a

$$\frac{FA}{FB} = \frac{EA}{BB'}$$

Dans le triangle $D'BCEB'$, le théorème de Thalès donne

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{BB'}{EC}$$

On obtient donc en multipliant ces deux égalités que

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{D'B}{D'C} = \frac{EA}{BB'} \cdot \frac{BB'}{EC}$$

donc le point D' satisfait l'égalité de rapport.

□

Exercice 10
Soit ABC un triangle et soit G son centre de gravité. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que la longueur AG vaut $\frac{2}{3}$ de la longueur AM.

Exercice 11
Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soient X, Y, Z, T des points appartenant respectivement aux droites $(AD), (AB), (BC)$ et (CD). Montrer que si les points X, Y, Z et T sont alignés alors

$$\frac{DX}{AX} \cdot \frac{AY}{BY} \cdot \frac{BZ}{CZ} \cdot \frac{CT}{DT} = 1$$

Exercice 12
(Théorème de Pascal) Soit $ABCDEF$ un hexagone inscrit dans un cercle. Les droites (AB) et

(DE) se coupent en X, les droites (BC) et (EF) se coupent en Y et les droites (CD) et (FA) se coupent en Z. Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

Exercice 13
(Théorème de Pappus) Soit A, B et C des points alignés dans cet ordre sur une droite l_1 et D, E et F des points aligéns dans cet ordre sur une droite l_2. On note $X = (AE) \cap (DB)$, $Y = (AF) \cap (DC)$ et $Z = (BF) \cap (EC)$. Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

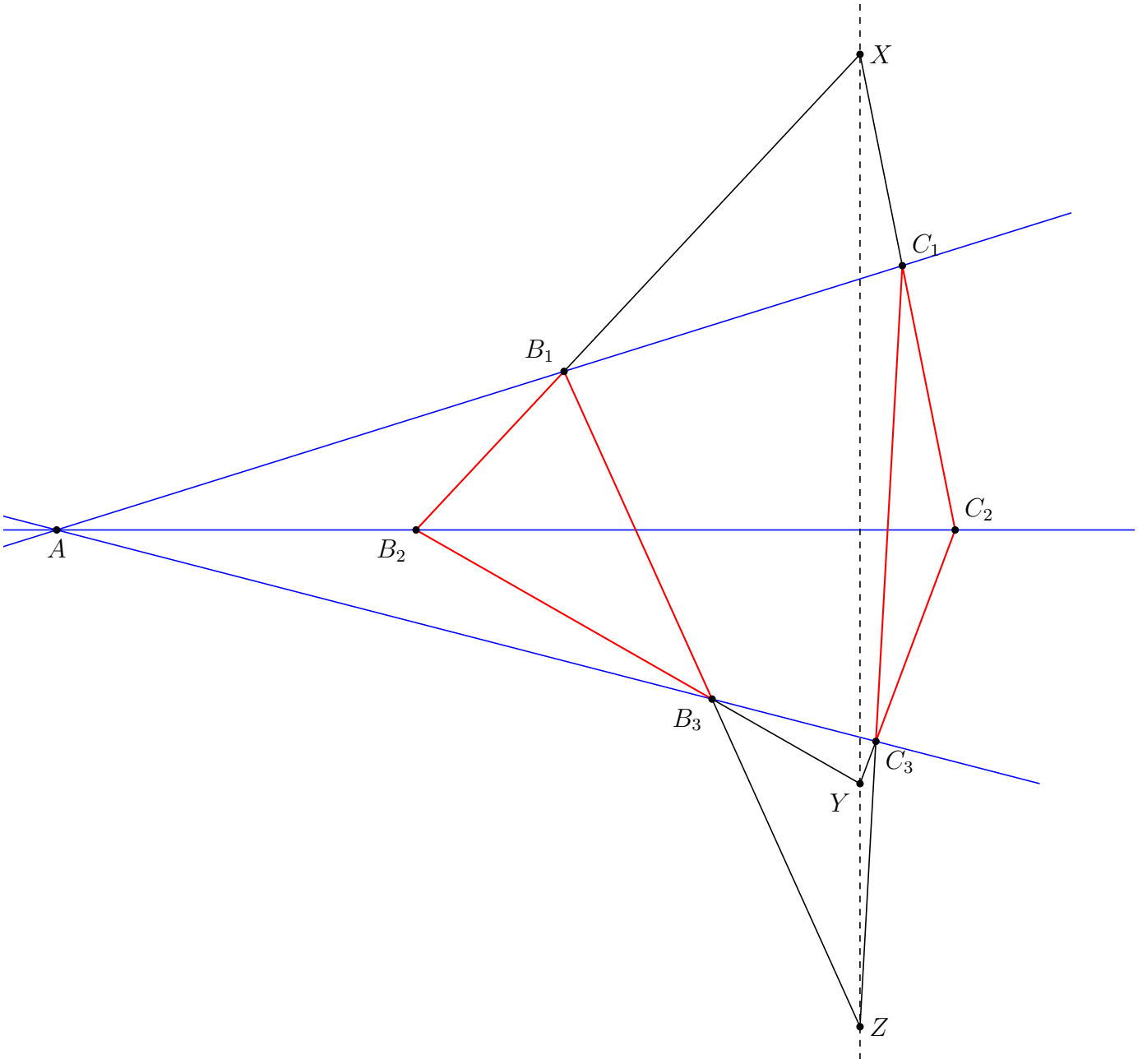
Le théorème de Desargues

Théorème 3.
Soit A un point et soient l_1, l_2 et l_3 trois droites passant par le point A. Soient B_1, C_1 deux points sur la droite l_1, B_2, C_2 deux points sur la droite l_2 et soient B_3, C_3 deux points sur la droite l_3. On pose $X = (B_1B_2) \cap (C_1C_2)$,$Y = (B_2B_3) \cap (C_2C_3)$ et $Z = (B_1B_3) \cap (C_1C_3)$. Alors les points X, Y et Z sont alignés.

La suprême beauté de ce théorème tient du fait que l'énoncé n'emploie que des droites. Pas d'angles, pas de cercles, même pas de longueurs, uniquement des droites.

Notons également qu'on peut imaginer le point A comme une source lumineuse et le triangle $C_1C_2C_3$ comme l'ombre du triangle $B_1B_2B_3$.

Démonstration.



Nous allons appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle $B_1B_2B_3$ et aux points X, Y et Z. Notre objectif est donc de démontrer que

$$\frac{XB_1}{XB_2} \cdot \frac{YB_2}{YB_3} \cdot \frac{ZB_3}{ZB_1} = 1$$

Pour cela, d'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle AB_1B_2 et pour les points C_1, C_2 et X, on a

$$\frac{XB_1}{XB_2} \cdot \frac{C_2B_2}{C_2A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B_1} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle AB_2B_3 et pour les points C_2, C_3 et Y, on a

$$\frac{YB_2}{YB_3}\cdot\frac{C_3B_3}{C_3A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B_2}=1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle AB_3B_1 et pour les points C_1, C_3 et Z, on a

$$\frac{ZB_3}{ZB_1}\cdot\frac{C_1B_1}{C_1A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B_3}=1$$

On multiplie toutes ces égalités pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{XB_1}{XB_2}\cdot\frac{YB_2}{YB_3}\cdot\frac{ZB_3}{ZB_1} &= \left(\frac{XB_1}{XB_2}\cdot\frac{C_2B_2}{C_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B_1}\right)\cdot\left(\frac{YB_2}{YB_3}\cdot\frac{C_3B_3}{C_3A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B_2}\right)\cdot\left(\frac{ZB_3}{ZB_1}\cdot\frac{C_1B_1}{C_1A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B_3}\right)\\ &= 1\cdot 1\cdot 1\\ &= 1\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Résolution du problème initial

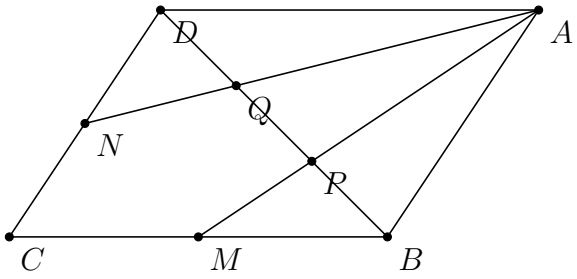
Exercice 14
Etant donné deux points A et B du plan, comment tracer le segment $[AB]$ avec une règle de longueur strictement plus courte que la longueur AB ?

Exercice 15
On se donne un point A et deux droites d_1 et d_2 ne passant pas par le point A. On suppose que les deux droites d_1 et d_2 se coupent mais que le point d'intersection B est située en dehors de notre feuille de travail. Comment tracer la droite (AB) ?

Solutions

Exercice 16
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le milieu du segment $[CD]$. Les droites (AN) et (BD) se coupent en Q et les droites (AM) et (BD) se coupent en P. Montrer que $BP = PQ = QD$.

Solution de l'exercice 1



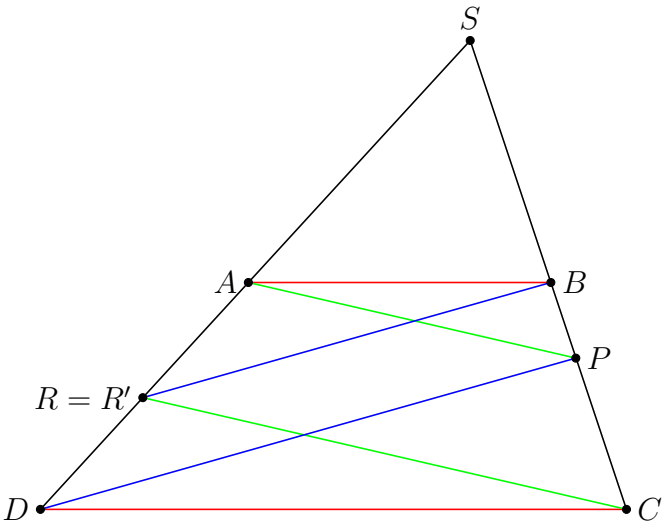
D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DNQAB$, $\frac{DQ}{QB} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$. Donc $QB = 2DQ$ et $DQ = \frac{1}{3}DB$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $BMPAD$, $\frac{PB}{PD} = \frac{MB}{AD} = \frac{1}{2}$ et donc $PB = \frac{1}{3}DB$.

En conséquence, on a aussi $QP = \frac{1}{3}DB$ donc on a les égalités de longueur voulues.

Exercice 17
Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB < CD$ et les droites (AB) et (CD) parallèles. Soit P un point appartenant au segment $[CB]$. La parallèle à le droite (AP) passant par le point C coupe le segment $[AD]$ en le point R et la parallèle à la droite (DP) passant par le point B coupe le segment $[AD]$ en le point R'. Montrer que $R = R'$.

Solution de l'exercice 2



Soit S le point d'intersection des droites (CB) et (AD). Comme les droites (AP) et (RC) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{AS}{RS} = \frac{PS}{CS}$$

soit $RS \cdot PS = AS \cdot CS$.
Comme les droites (DP) et (BR') sont parallèles, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{DS}{R'S} = \frac{PS}{BS}$$

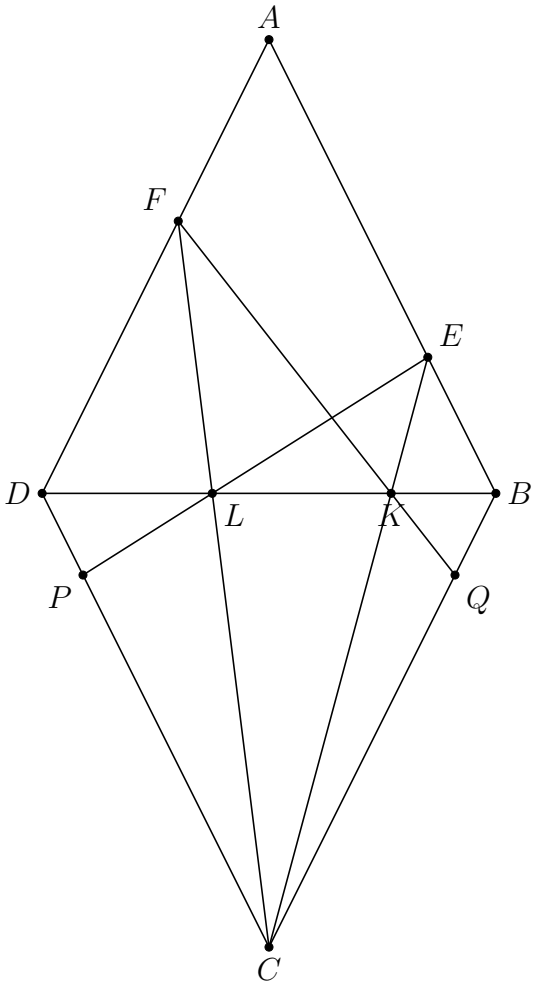
soit $DS \cdot BS = PS \cdot R'S$.
Enfin, les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AS}{DS} = \frac{BS}{CS}$$

soit $AS \cdot CS = BS \cdot DS$. On conclut que $PS \cdot RS = PS \cdot R'S$ donc $RS = R'S$ et comme les points S, R et R' sont sur la même droite, on trouve bien $R = R'$.

Exercice 18
Soit $ABCD$ un losange. Soit F un point du segment $[AD]$ et E un point du segment $[AB]$. Les droites (FC) et (BD) se coupent en L, les droites (EC) et (BD) se coupent en K. Les droites (FK) et (BC) se coupent en Q et les droites (EL) et (DC) se coupent en P. Montrer que $CP = CQ$.

Solution de l'exercice 3



On dispose de plusieurs papillons, on va donc les examiner chacun et tirer les informations utiles.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $QBKDF$, $\frac{QB}{DF} = \frac{BK}{DK}$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $EBKDC$, $\frac{EB}{DC} = \frac{BK}{DK}$ et ainsi, en combinant les deux égalités $QB = \frac{DF \cdot DF}{DC}$.

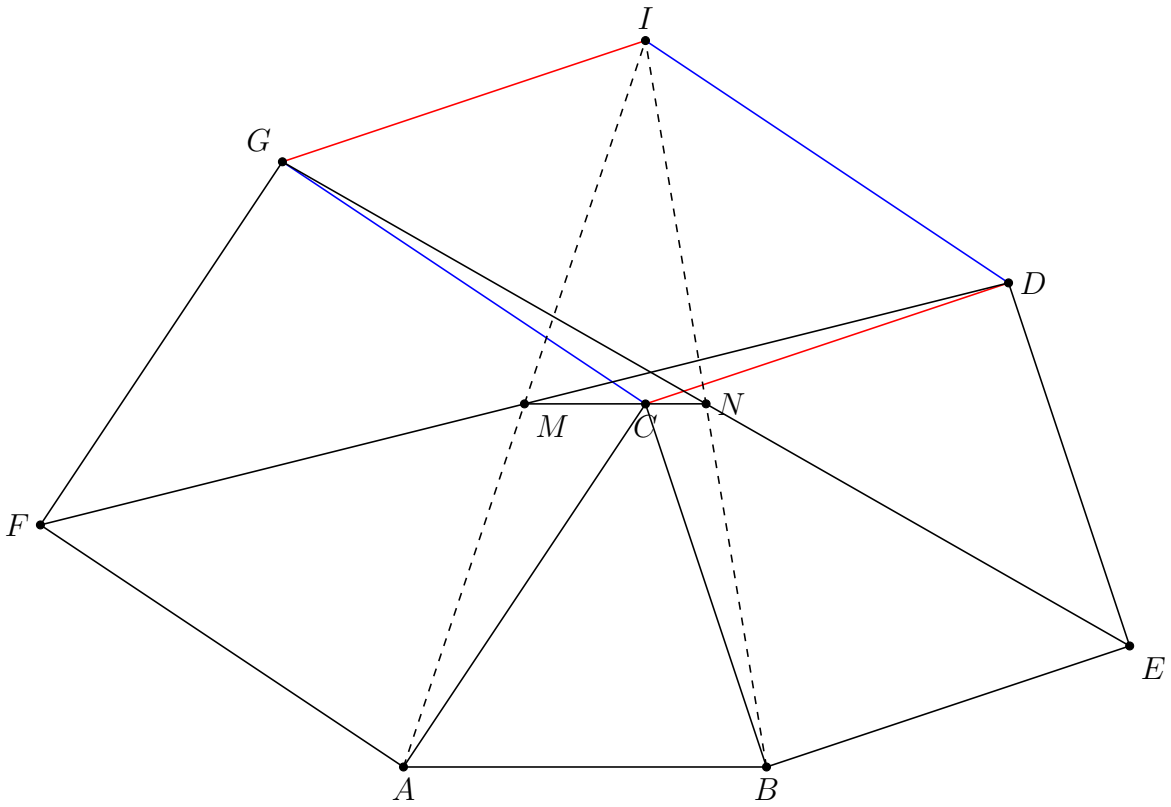
D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DPLEB$, $\frac{DP}{EB} = \frac{DL}{LB}$.

D'après le théorème de thalès dans le papillon $DFLCB$, $\frac{DF}{CB} = \frac{DL}{LB}$. Ainsi, en combinant les deux égalités, $DP = \frac{DF \cdot EB}{BC} = \frac{DF \cdot EC}{CD} = QB$.

On a donc bien $CP = CQ$.

Exercice 19
Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC le carré $BCDE$ et on construit à l'extérieur du triangle ABC le carré $ACGF$. On note M et N les milieux des segments $[FD]$ et $[GE]$. Calculer la longueur MN en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC.

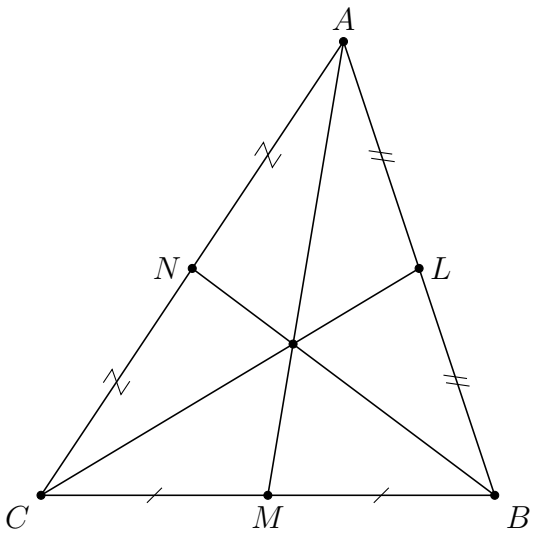
Solution de l'exercice 4



On introduit I le point tel que le quadrilatère $IDCG$ soit un parallélogramme. Alors les droites $(GI), (CD)$ et (BE) sont parallèles. Donc par angles alternes-internes, $\widehat{NEB} = \widehat{NGI}$ et $NE = NG$ et $BE = GI$. Donc les triangles NEB et NGI sont isométriques. Donc les points I, N et B sont alignés. De même on obtient que les points I, M et A sont alignés. On a de plus que les points M et N sont les milieux des segments $[AI]$ et $[BI]$. On a donc par le théorème de Thalès que $MN = \frac{1}{2}AB$.

Exercice 20
Démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Solution de l'exercice 5



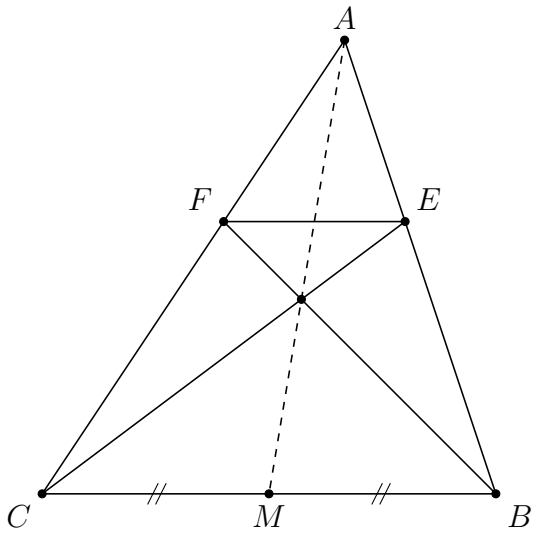
Notons M, L et N les milieux respectifs des segments $[BC], [AB]$ et $[AC]$. On a $AL = BL$, $BM = CM$ et $CN = AN$. Donc

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

donc d'après le théorème de Céva, les médianes sont concourantes.

Exercice 21
Soit ABC un triangle et d une droite parallèle au côté $[BC]$ coupant le segment $[AB]$ au point E et le segment $[AC]$ au point F. Montrer que le point d'intersection des droites (EC) et (BF) appartient à la médiane issue du sommet A.

Solution de l'exercice 6



Nous allons montrer avec le théorème de Céva que les droites $(AM), (CE)$ et (BF) sont concourantes.

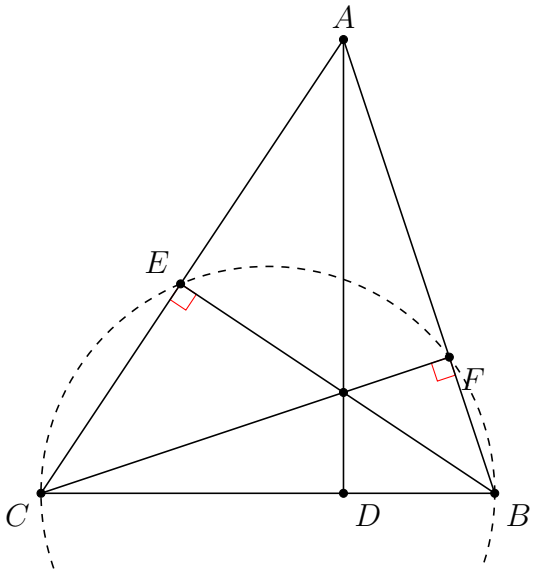
En effet, d'après le théorème de Thalès, on a $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB}$. Ainsi

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BF}{AF} = 1$$

et l'on peut conclure avec le théorème de Céva.

Exercice 22
Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Solution de l'exercice 7



On note D, E et F les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C.

Puisque $\widehat{CFB} = \widehat{CEB} = 90°$, les points E, F, B et C sont cocycliques. Par puissance du point A par rapport au cercle découvert, $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ donc $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$.

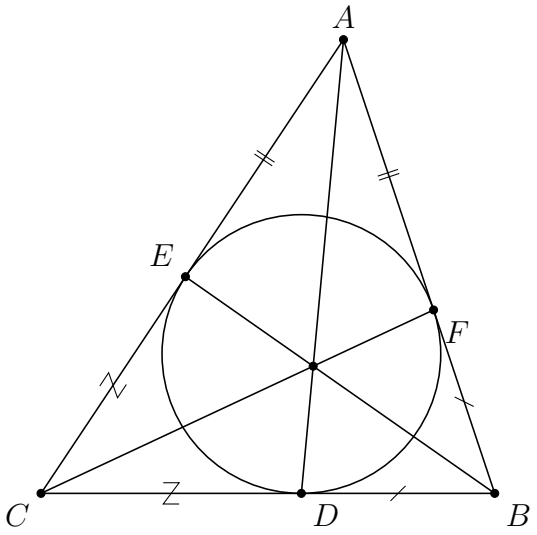
De même on obtient $\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BA}$ et $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$. Alors

$$\frac{AE}{CE} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{BF}{BD} \cdot \frac{CD}{CE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

donc d'après le théorème de Céva, les trois hauteurs sont concourantes.

Exercice 23
Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les droites $(AD), (BE)$ et (CF) sont concourantes. Le point de concours est appelé point de Gergonne.

Solution de l'exercice 8



Puisque les droites (AE) et (AF) sont tangentes au cercle inscrit aux points E et F, on a $AF = AE$. On a de même $BF = BD$ et $CD = CE$.

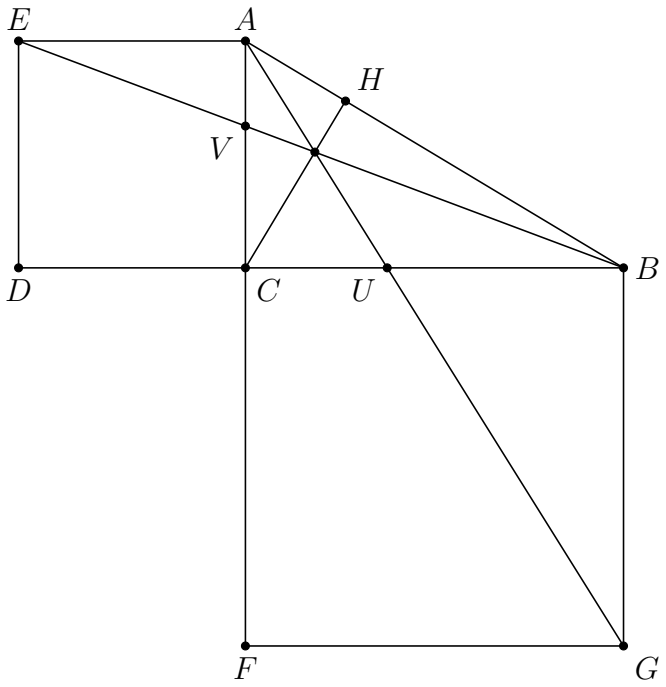
Ainsi :

$$\frac{AE}{CE} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{CD}{CE} \cdot \frac{BF}{BD} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

donc d'après le théorème de Céva, les droites $(AD), (BE)$ et (CF) sont concourantes.

Exercice 24
Soit ABC un triangle rectangle en C. On construit un carré $ACDE$ à l'estérieur du triangle ABC. On construit un carré $BCFG$ à l'extérieur du triangle ABC. Soit H le pied de la hautuer issue du sommet C dans le triangle ABC. Montrer que les droites $(CH), (AG)$ et (BE) sont concourantes.

Solution de l'exercice 9



On note U le point d'intersection des droites (BE) et (AC) et V le point d'intersection des droites (BC) et (AG).

D'une part, par le théorème de Thalès dans le papillon $EAVCB$ on a

$$\frac{AV}{VC} = \frac{AE}{BC} = \frac{AC}{BC}$$

D'autre part d'après le théorème de Thalès dans le papillon $ACUBG$ on a

$$\frac{CU}{BU} = \frac{AC}{BG} = \frac{AC}{BC}$$

Enfin, les triangles ACH, CBH et ABC sont semblables. On a donc

$$\frac{BH}{AH} = \frac{BH}{CH} \cdot \frac{CH}{AH} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BC}{AC}$$

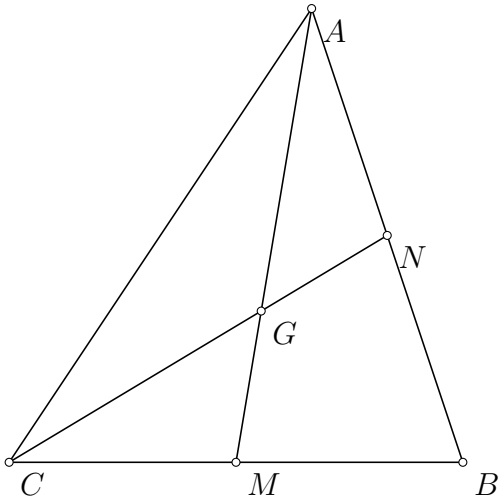
Ainsi

$$\frac{AV}{CV}\cdot\frac{UC}{UB}\cdot\frac{HB}{HA}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}\cdot\frac{BC}{AC}=1$$

donc d'après le théorème de Céva, les droites $(AU), (BV)$ et (CH) sont concourantes, ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 25
Soit ABC un triangle et soit G son centre de gravité. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que la longueur AG vaut $\frac{2}{3}$ de la longueur AM.

Solution de l'exercice 10



Soit N le milieu du segment $[AB]$.
D'après le théorème de Ménélaüs pour le triangle AMB et les points C, G et N :

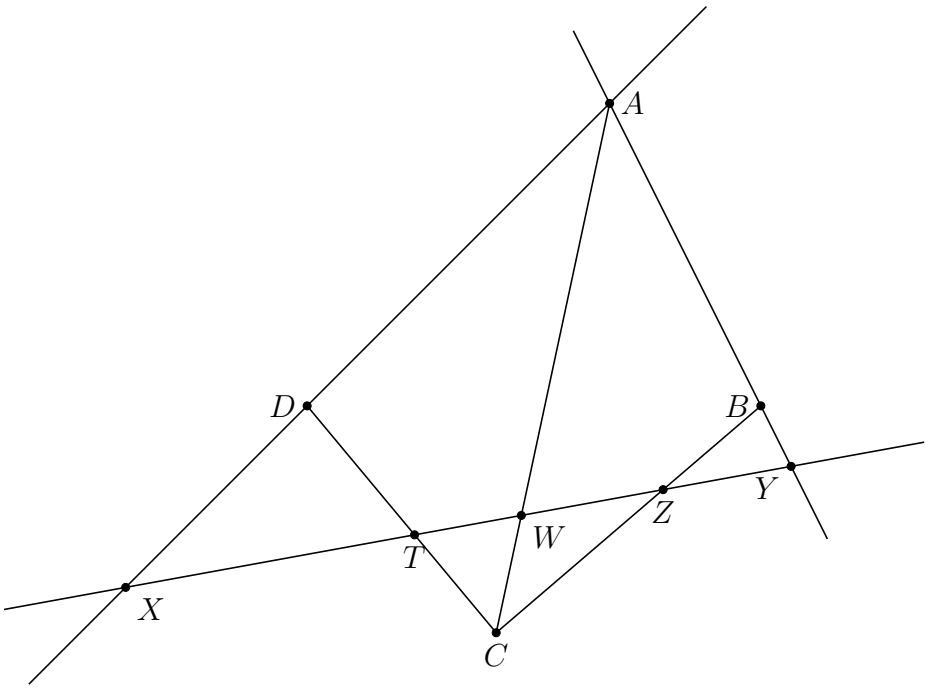
$$1 = \frac{GA}{GM} \cdot \frac{CM}{CB} \cdot \frac{NB}{NA} = \frac{GA}{GM} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

et donc $GA = 2GM$. On a donc bien $GA = \frac{2}{3}AM$.

Exercice 26
Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soient X, Y, Z, T des points appartenant respectivement aux droites $(AD), (AB), (BC)$ et (CD). Montrer que si les points X, Y, Z et T sont alignés alors

$$\frac{DX}{AX} \cdot \frac{AY}{BY} \cdot \frac{BZ}{CZ} \cdot \frac{CT}{DT} = 1$$

Solution de l'exercice 11



On introduit le point W d'intersection de la droite (XY) avec la droite (AC). D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle ADC et pour les points X, T et W :

$$\frac{DX}{XA} \cdot \frac{WA}{WC} \cdot \frac{TC}{TD} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle ABC et pour les points W, Z et Y :

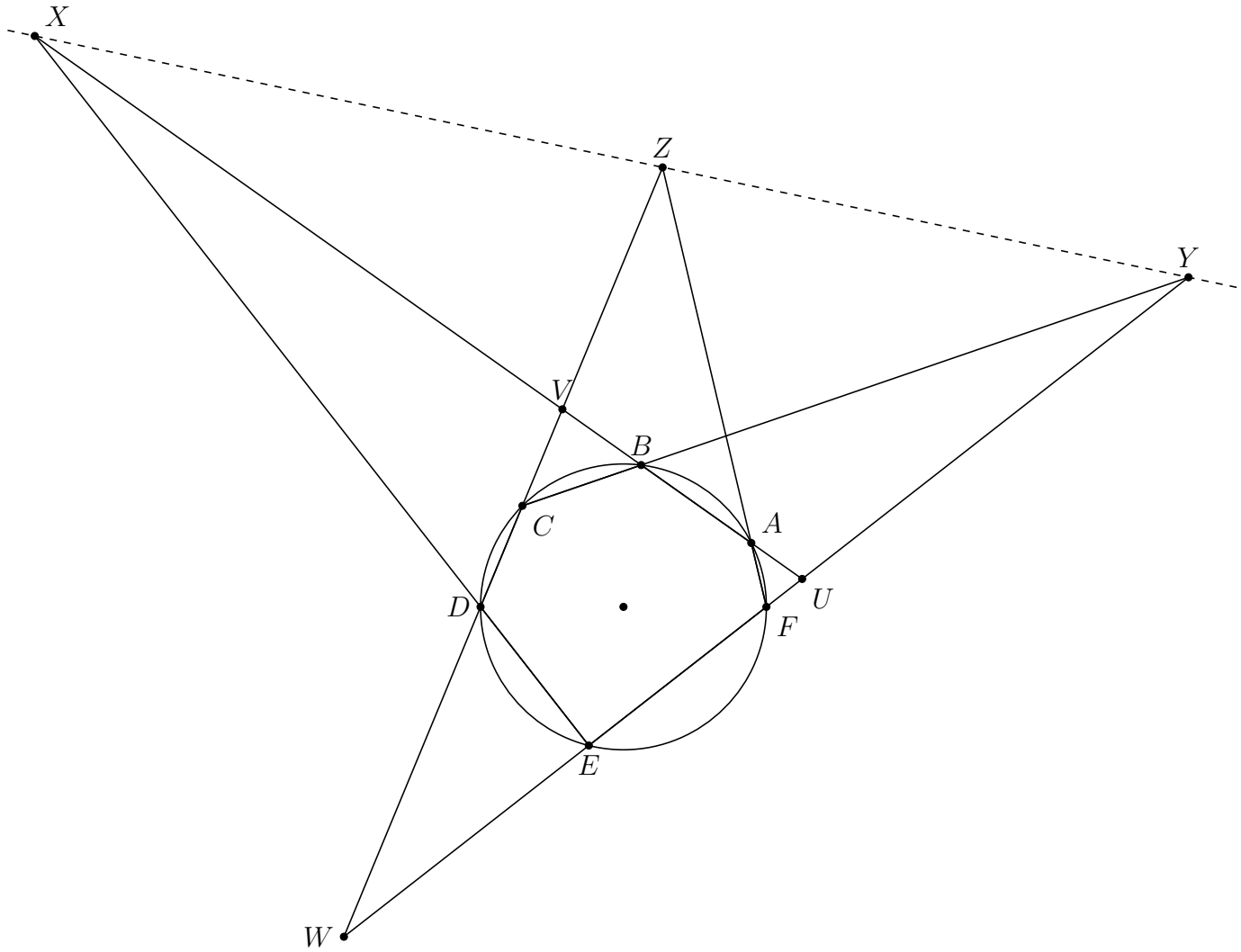
$$\frac{WC}{WA} \cdot \frac{ZC}{ZB} \cdot \frac{YB}{YA} = 1$$

On multiplie ces deux égalités pour obtenir :

$$\frac{DX}{AX} \cdot \frac{AY}{BY} \cdot \frac{BZ}{CZ} \cdot \frac{CT}{DT} = 1$$

Exercice 27
(Théorème de Pascal) Soit $ABCDEF$ un hexagone inscrit dans un cercle. Les droites (AB) et (DE) se coupent en X, les droites (BC) et (EF) se coupent en Y et les droites (CD) et (FA) se coupent en Z. Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

Solution de l'exercice 12



Soit U le point d'intersection des droites (AB) et (EF). Soit V le point d'intersection des droites (DC) et (AB). Soit W le point d'intersection (DC) et (EF). On va appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle UVW et aux points X, Y et Z.

Pour cela, on désire montrer que

$$\frac{XV}{XU} \cdot \frac{YU}{YW} \cdot \frac{ZW}{ZV} = 1$$

Pour cela, on va utiliser à volonté le théorème de Ménélaüs et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points E, D et X, on a

$$\frac{XV}{XU} \cdot \frac{EU}{EW} \cdot \frac{DW}{DV} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points F, A et Z, on a

$$\frac{ZW}{ZV} \cdot \frac{AV}{AU} \cdot \frac{FU}{FW} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points C, B et Y, on a

$$\frac{YU}{YW} \cdot \frac{CW}{CV} \cdot \frac{BV}{BU} = 1$$

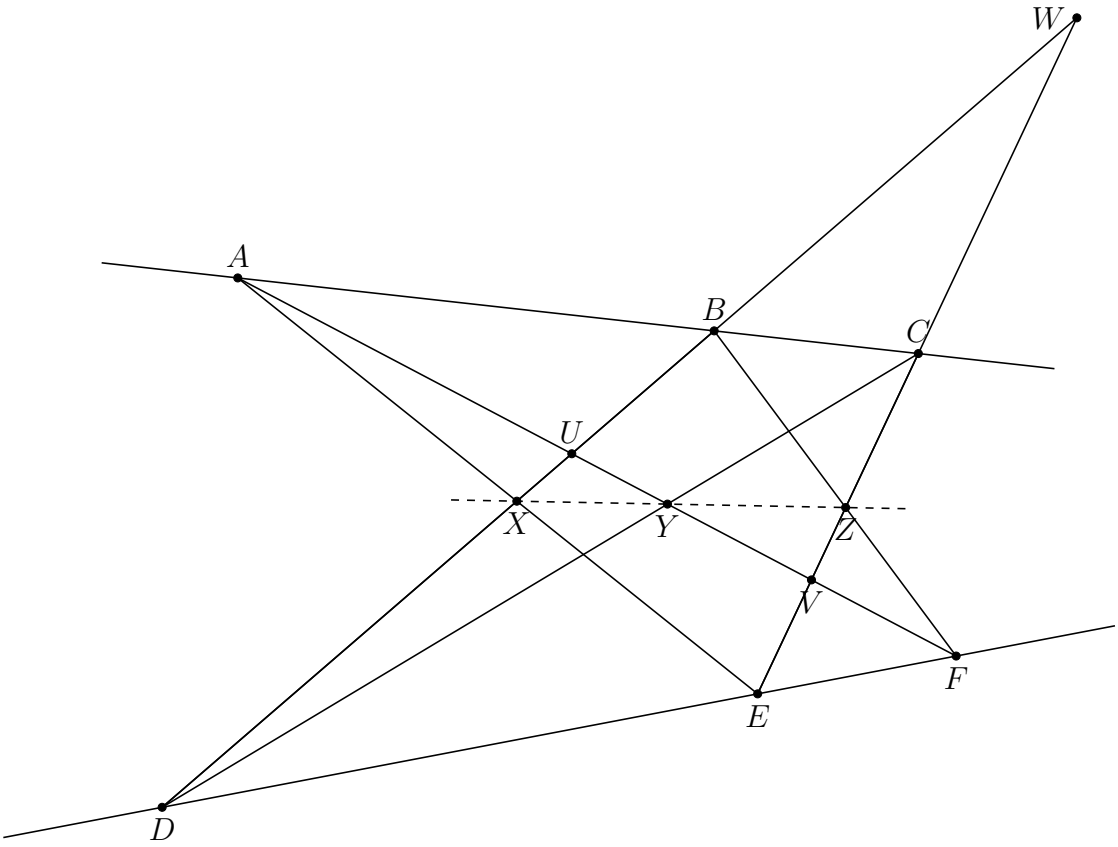
On calcule donc le produit des trois égalités en regroupant les termes

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\tfrac{XV}{XU} \cdot \tfrac{EU}{EW} \cdot \tfrac{DW}{DV}\right) \cdot \left(\tfrac{ZW}{ZV} \cdot \tfrac{AV}{AU} \cdot \tfrac{FU}{FW}\right) \cdot \left(\tfrac{YU}{YW} \cdot \tfrac{CW}{CV} \cdot \tfrac{BV}{BU}\right) \\ &= \left(\tfrac{XV}{XU} \cdot \tfrac{YU}{YW} \cdot \tfrac{ZW}{ZV}\right) \cdot \tfrac{EU \cdot FU}{AU \cdot BU} \cdot \tfrac{AV \cdot BV}{CV \cdot DV} \cdot \tfrac{CW \cdot DW}{EW \cdot FW} \\ &= \tfrac{XV}{XU} \cdot \tfrac{YU}{YW} \cdot \tfrac{ZW}{ZV} \end{aligned}$$

En effet les fractions $\frac{EU \cdot FU}{AU \cdot BU}$, $\frac{AV \cdot BV}{CV \cdot DV}$ et $\frac{CW \cdot DW}{EW \cdot FW}$ vaut 1 par puissance d'un point.
On a obtenu le résultat voulu.

Exercice 28
(Théorème de Pappus) Soit A, B et C des points alignés dans cet ordre sur une droite l_1 et D, E et F des points aligéns dans cet ordre sur une droite l_2. On note $X = (AE) \cap (DB)$, $Y = (AF) \cap (DC)$ et $Z = (BF) \cap (EC)$. Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

Solution de l'exercice 13



Soit U le point d'intersection des droites (AF) et (BD), V le point d'intersection des droites (AF) et (EC) et W le point d'intersection des droites (BD) et (EC).

Nous allons appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle UVW et aux trois points X, Y et Z.

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points A, B et C, on a

$$\frac{AV}{AU} \cdot \frac{BU}{BW} \cdot \frac{CW}{CV} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points D, E et F, on a

$$\frac{DU}{DW} \cdot \frac{EW}{EV} \cdot \frac{FV}{FU} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points B, Z et F, on a

$$\frac{ZV}{ZW} \cdot \frac{BW}{BU} \cdot \frac{FU}{FV} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points C, Y et D, on a

$$\frac{YU}{YV} \cdot \frac{CV}{CW} \cdot \frac{DW}{DU} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points A, X et E, on a

$$\frac{XW}{XU} \cdot \frac{EV}{EW} \cdot \frac{AU}{AV} = 1$$

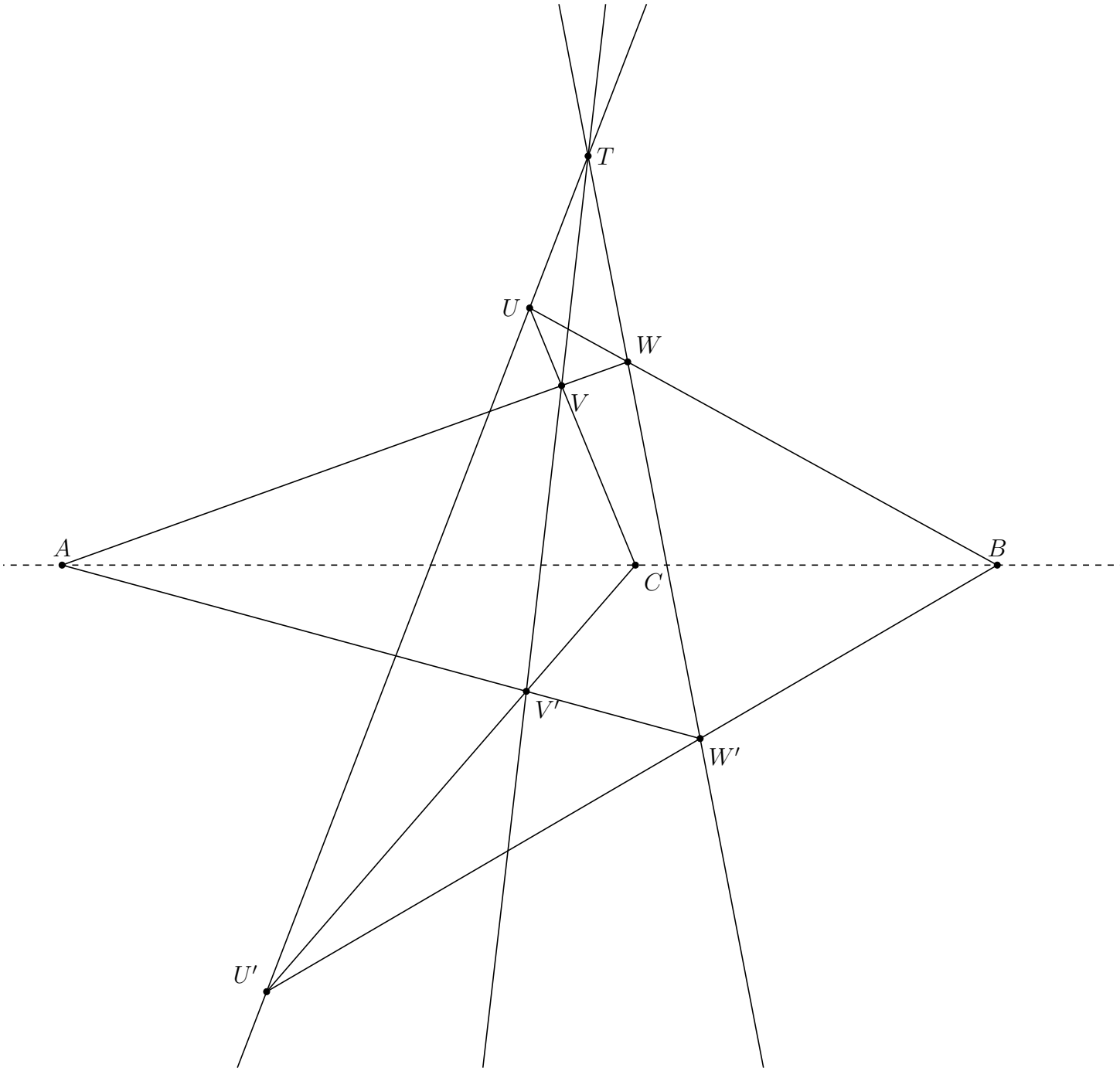
En multipliant ces 5 égalités, on obtient

$$\frac{ZV}{ZW} \cdot \frac{YW}{YU} \cdot \frac{XW}{XU} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs, cela signifie que les points X, Y et Z sont alignés.

Exercice 29
Etant donné deux points A et B du plan, comment tracer le segment $[AB]$ avec une règle de longueur strictement plus courte que la longueur AB ?

Solution de l'exercice 14



La solution peut se comprendre uniquement avec le dessin ci-dessus, en voici cependant une explication détaillée.

Quitte à réitérer le processus, on va supposer que notre règle est juste trop courte, c'est-à-dire qu'on ne peut pas tracer le segment $[AB]$ mais qu'on peut tracer tout segment de longueur strictement inférieure au segment $[AB]$.

L'idée est de créer un troisième point C aligné avec les points A et B et situé strictement entre les points A et B. On pourra alors tracer le segment $[AC]$ et le segment $[CB]$, ce qui conclura.

Pour tracer le point C, on va utiliser le théorème de Desargues, de telle sorte que les points A, B et C soient les points X, Y et Z dans l'énoncé du théorème.

On choisit donc un point T dans le plan, de préférence de telle sorte que sa projection sur la droite (AB) appartienne au segment $[AB]$.

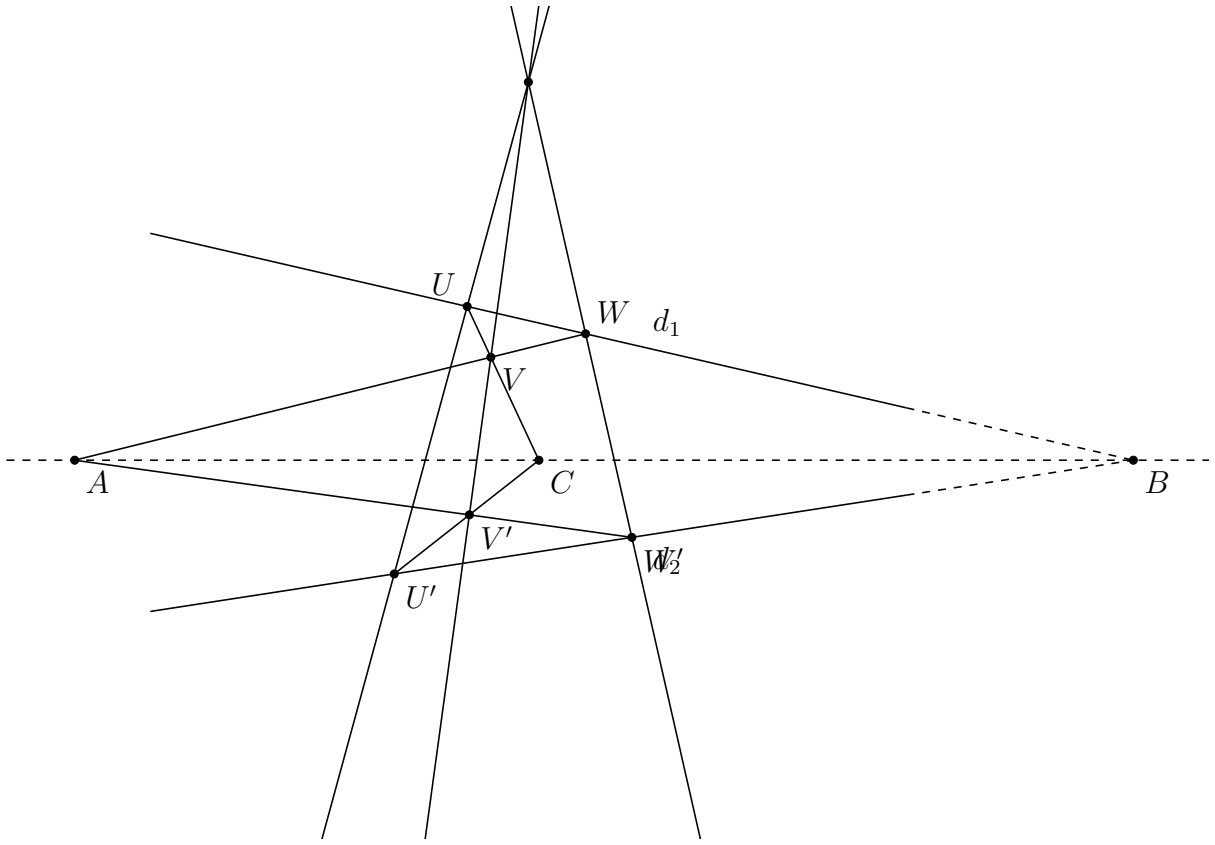
On trace trois droites issues du point T, que l'on note d_1, d_2 et d_3. Maintenant, on doit créer les deux triangles appartenant au faisceau. Pour cela on trace deux droites quelconques partant du point B et coupant la droite d_1 en deux points U et U' et la droite d_3 en deux points W et W'.

On trace alors les segments $[AW]$ et $[AW']$ qui recoupent la droite d_2 en V et V'. On a construit nos triangles UVW et $U'V'W'$.

On pose alors C le point d'intersection des droites (UV) et $(U'V')$. Les points A, B et C sont alignés par le théorème de Desargues et on peut tracer le segment $[AC]$ et le segment $[BC]$ et résoudre le problème.

Exercice 30
On se donne un point A et deux droites d_1 et d_2 ne passant pas par le point A. On suppose que les deux droites d_1 et d_2 se coupent mais que le point d'intersection B est située en dehors de notre feuille de travail. Comment tracer la droite (AB) ?

Solution de l'exercice 15



Comme dans la solution précédente, l'idée est de construire un point C appartenant à la droite (AB). On trace alors la droite (AC). (Evidemment, on s'arrange pour que le point C soit sur notre feuille de papier et non en dehors, sinon on recommence l'opération).

On va construire le point C à l'aide du théorème de Desargues.

On trace un faisceau de trois droites D_1, D_2 et D_3. Les points d'intersection des droites d_1 et d_2 avec les droites D_1 et D_3 sont notés U, U', W et W'.

Pour finir de construire les deux triangles en perspective, on note V et V' les points d'intersection des droites (AW) et (AW') avec la droite D_2. Alors par le théorème de Desargues, le point C d'intersection des droites (UV) et $(U'V')$ est aligné avec les points A et B, ce qui permet de tracer la droite (AB).

V. Groupe C

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre et Arithmétique

1 Polynômes (Matthieu Bouyer)

Introduction

On appelle fonction polynômiale une fonction P telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

pour tout réel x.

On notera alors simplement

$$P = P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Cette écriture est unique si on impose $a_n \neq 0$..

Si $a_n \neq 0$, on appelle n le degré de P, noté $\deg P$ (le degré du polynôme nul noté 0, tel que $P(x) = 0$ pour tout réel x, vaut par convention $-\infty$). a_n est alors appelé coefficient dominant de P.

On a alors pour tous polynômes P et Q :

- $\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg P; \deg Q\}$
- $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$
- $\deg(P \circ Q) = \deg P(Q) = \deg P \cdot \deg Q$ si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$.

On définit de la même manière les polynômes sur $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[X]$, celui des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}[X]$, etc...

Division euclidienne et racines

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (résultats aussi valables dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$). Si Q sont des polynômes tels que $\deg Q \geqslant 1$, alors il existe un unique couple de polynômes (U, R) tel que $P = QU + R$ et $\deg R < \deg U$.

U est appelé quotient et R reste de la division euclidienne.

Exercice 1

1. Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4 + 3X^2 + 2X + 1$ par $X^2 - 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le reste de la division euclidienne de $X^n - X + 1$ par $X^2 - 1$.

Solution de l'exercice 1

1. $X^4 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 - 2)(X^2 + 5) + 2X + 11$

2. On écrit la division euclidienne : $X^n - X + 1 = (X^2 - 1)U(X) + R(X)$ Alors $R(1) = 1$ et $R(-1) = 2 + (-1)^n$. En notant $R = aX + b$, $a + b = 1$ et $-a + b = 2 + (-1)^n$. Donc $R = aX + b$ avec $a = -\frac{1}{2}\big(1 + (-1)^n\big)$ et $b = \frac{1}{2}\big(3 + (-1)^n\big)$.

On appelle racine de P tout réel α tel que $P(\alpha) = 0$, ou de manière équivalente, tel que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ pour un polynôme Q.

Exemple 1.
1. Factoriser $X^5+4X^4-20X^3+10X^2+19X-14$. (Réponse : $(X-1)^2(X+1)(X-2)(X+7)$).
2. (Sophie-Germain) Factoriser X^4+4 (Réponse : $(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)$).

On appelle racine de multiplicité ou d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ tout réel α tel que $P(X) = (X-\alpha)^m Q(X)$ avec Q un polynôme tel que $Q(\alpha) \neq 0$.

Si $P \neq 0$, alors P a au plus $\deg P$ racines comptées avec multiplicité. Si P a exactement $\deg P$ racines comptées avec multiplicité, P est dit scindé.

Si P de degré $n \geqslant 1$ est scindé de coefficient dominant C et ses racines sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$, alors

$$P = C \cdot \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i}$$

et $\sum_{i=1}^r m_i = n$.

Deux polynômes de degrés au plus n qui coïncident en n points sont égaux.

Exercice 2
1. Supposons que P unitaire de degré ≤ 4 vérifie $P(1)=1, P(2)=4, P(3)=9, P(4)=16$. Trouver P.
2. Supposons que P est un polynôme tel que $P(X^3) = P(X)^3$ et $P(2)=2$. Trouver P.

Solution de l'exercice 2
1. On peut factoriser : $P - X^2 = C \cdot (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ avec C une constante.
Si $C \neq 0$, comme P est de degré 4 et unitaire, $C=1$.
D'où $P = X^2$ ou $P = X^2 + (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$.
2. On montre par récurrence que $P\left(2^{3^n}\right) = 2^{3^n}$ donc $P - X$ a une infinité de racines, d'où $P(X) = X$.

Polynôme dérivé et propriétés analytiques

Le polynôme dérivé est essentiellement calculable de 2 manières :
• Si $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, alors $P'(X) = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$
• Si $P(X) = C \cdot \prod_{i=1}^r (X-\alpha_i)^{m_i}$, alors $P'(X) = \sum_{i=1}^r m_i (X-\alpha_i)^{m_i-1} \prod_{j\neq i} (X-\alpha_j)^{m_i} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i P(X)}{X-\alpha_i}$

Le polynôme dérivé est particulièrement intéressant parce que dans le cadre des polynômes réels, c'est lui qui donne la pente de la droite tangente à la courbe représentative de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto P(x)$. En particulier, le signe du polynôme dérivé indique si la fonction est strictement croissante (> 0), ou strictement décroissante (< 0) sur un intervalle. Lorsque le polynôme atteint un maximum ou un minimum sur un intervalle, son polynôme dérivé s'annule. Le polynôme dérivé donne ainsi les variations de P.

Pour un polynôme P, on note P' son polynôme dérivé.

On peut alors définir par récurrence les dérivées successives de P par : $P^{(0)} = P$ et pour tout $m \geq 0$, $P^{(m+1)} = (P^{(m)})'$.

La dérivation a quelques propriétés : si P et Q sont des polynômes :
• $(P+Q)' = P' + Q'$

- $(P \cdot Q)' = P'Q + PQ'$
- $P' = 0 \iff P$ est constant.

On peut caractériser la multiplicité d'une racine α de P avec les dérivées successives de P : si $m \in \mathbb{N}^*, \alpha$ est racine de multiplicité m de P si, et seulement si, α est racine de $P, P', \ldots, P^{(m-1)}$ mais pas de $P^{(m)}$.

Exercice 3
Quelle est la multiplicité de la racine 1 de $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^n - X^2$ pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$?

Solution de l'exercice 3
1 est au moins racine de multiplicité 1. On dérive le polynôme et on obtient : $2nX^{2n-1} - n(n+1)X^n + n^2X^{n-1} - 2X$ 1 est racine si et seulement si $n = 2$. On dérive une fois de plus si $n = 2$: $12X^2 - 12X + 4$ dont 1 n'est pas racine. Donc 1 est toujours racine simple sauf si $n = 2$ et alors c'est une racine double.

Un autre moyen pour déterminer l'existence d'une racine d'un polynôme est d'utiliser la continuité : une fonction continue est une fonction telle que si x se rapproche de a, alors $f(x)$ sera proche e $f(a)$ pour tous x et a. Un polynôme vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : si $a_1 < a_2$ sont des réels et $P(a_1)$ et $P(a_2)$ sont de signes différents, alors P admet une racine dans $[a_1; a_2]$.

Supposons que P soit de degré d et de coefficient dominant a. Lorsque x tend vers $\pm\infty, P(x)$ aura le même comportement que $a \cdot x^d$ (le rapport de $P(x)$ et de $a \cdot x^d$ se rapproche indéfiniment de 1 quand $|x|$ devient très grand).

Exercice 4
1. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que pour tout réel x : $Q(2x) = Q(x)$. Montrer que Q est constant de 4 manières.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Montrer que P a au moins une racine réelle.

Solution de l'exercice 4
1.1 Si Q n'est pas constant, en comparant les coefficients domiants on obtient une absurdité.

1.2 Pour tout x et tout n,

$$Q(x) = Q\big(\frac{x}{2^n}\big) \to_{n\to+\infty} Q(0)$$

Donc Q est constant.

1.3 Si Q n'est pas constant, pour tout x réel, $Q(x) = Q(2x) = Q(4x) = \cdots = \lim_{n\to+\infty} |Q(2^n x)| = \lim_{y\to+\infty} |Q(y)| = +\infty$

1.4 Si Q n'est pas constant, vu comme un polynôme complexe, il a une racine a au moins. Comme $Q(x) = 0 \to Q(2x) = 0$, on a $Q(2^n a) = 0$ pour tout n, donc Q a une infinité de racines, absurde.

2. Sans perte de généralité, on suppose que le coefficient dominant de P est strictement positif. En regardant la limite en $+\infty$, P prend des valeurs positives. En regardant la limite en $-\infty$, P prend des valeurs négatives. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel a tel que $P(a) = 0$.

On en déduit que tout polynôme de degré impair est surjectif.

Relations de Viète, interpolation

Est-ce qu'un polynôme a toujours des racines ?

Dans $\mathbb{R}$, ce n'est pas le cas : par exemple un polynôme du second degré aX^2+bX+c a des racines si et seulement si $b^2-4ac\geq 0$. C'est pourquoi on construit $\mathbb{C}$, où tout polynôme est scindé. Pour démontrer de nombreux résultats, on utilise les propriétés de $\mathbb{C}$ pour ensuite repasser dans $\mathbb{R}$.

On a vu qu'un polynôme scindé avait deux écritures : existe-t-il un lien entre les coefficients et les racines ?

Soit $P(X)=C\cdot\prod_{k=1}^{d}(X-\alpha_i)$ un polynôme scindé avec $d\geqslant 1, C\neq 0$ et les α_i non nécessairement distincts.

Alors

$$P(X)=CX^d-C\cdot s_1X^{d-1}+C\cdot s_2X^{d-2}+\ldots+(-1)^k\cdot C\cdot s_kX^{d-k}+\ldots+(-1)^d\cdot C\cdot s_d$$

où pour tout $0\leq k\leq d$:

$$s_k=\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq d}\left(\prod_{a=1}^{k}\alpha_{i_a}\right)=\sum_{I\subset\{1;2;\ldots;d\}}\prod_{i\in I}\alpha_i$$

En particulier, $s_1=\sum_{k=1}^{d}\alpha_k$ et $s_d=\prod_{k=1}^{d}\alpha_k$.

Exercice 5

Soit $P=X^3-3X^2-1$. Calculer la somme des cubes des racines (réelles ou complexes) de P.

Solution de l'exercice 5

Notons r_1,r_2,r_3 ces racines. Alors par les relations de Viète :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}{r_i}^3 &= \sum_{i=1}^{3}(3r_i^2+1) && \text{(V.1)}\\
&= 3\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3}r_i^2\Big)+3 && \text{(V.2)}\\
&= 3\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3}r_i\Big)^2-2(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)+3 && \text{(V.3)}\\
&= 3\cdot 3^2-2\cdot 0+3=30 && \text{(V.4)}
\end{aligned}$$

Exercice 6

Soit $P=X^3-3X-1$. Calculer la somme des inverses des carrés des racines (réelles ou complexes) de P.

Solution de l'exercice 6

Notons r_1,r_2,r_3 ces racines. Alors par les relations de Viète :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2} &= \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1}\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{r_2r_3}\frac{1}{r_1r_2}\frac{1}{r_1r_3}\right) && \text{(V.5)}\\
&= \left(\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1r_2r_3}\right)^2-2\cdot\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}\right) && \text{(V.6)}\\
&= (-3)^2-2\cdot 0=9 && \text{(V.7)}
\end{aligned}$$

En revanche, il n'est pas possible d'exprimer simplement les racines à partir des coefficients dans le cas général (seulement pour les degrés $1, 2, 3, 4$, puis c'est impossible pour des degrés supérieurs à 5 (groupes de Galois)).

Le polynôme d'interpolation de Lagrange répond à la question : peut-on trouver un polynôme dont le graphe passe par certains points ?

Prenons n réels distincts $x_1, \dots, x_n$ et n réels $y_1, \dots, y_n$.

L'idée de départ est de commencer par résoudre un problème plus facile : trouver un polynôme L_k de degré $n-1$ qui s'annule en $n-1$ réels distincts $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ et vaut une certaine valeur y_k en x_k : $L_k = y_k \cdot \prod_{i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$ convient. Il suffit de sommer ces polynôme pour obtenir le résultat souhaité.

Le polynôme d'interpolation de degré $n-1$ est unique. Il en découle que les polynômes solutions sont exactement les

$$Q(X) \cdot \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) + \sum_{k=1}^{n} L_k(X)$$

avec $Q(X)$ un polynôme quelconque.

Tous ces résultats valent aussi pour les rationnels et les complexes.

Exercice 7
Si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Solution de l'exercice 7
Notons $d = \deg P$. Alors par unicité du polynôme interpolateur,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} P(k) \cdot \prod_{i \neq k} \frac{X - i}{k - i} \in \mathbb{Q}[X]$$

Arithmétique des polynômes

Soient P, Q des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$.

On dit que Q divise P si le reste de la division euclidienne de P par Q est nul.

On dit que P et Q sont premiers entre eux si tout diviseur commun aux deux est constant.

On définit le $PGCD$ de P et de Q comme l'unique polynôme (à multiplication par une constante près) de degré maximal qui divise à la fois P et Q. Cette définition se généralise à plusieurs polynômes.

P et Q sont premiers entre eux $\iff$ il existe U_1, U_2 tels que $PU_1 + QU_2$ est constant non nul.

$PGCD(P, Q) = V \iff$ Il existe U_1, U_2 tels que $PU_1 + QU_2$ est constant non nul.

Cette propriété est aussi valable pour le $PGCD$ plusieurs polynômes.

Si A est un polynôme tel que $P \mid AQ$ et P et Q sont premiers entre eux, alors $P \mid A$.

Si A est un polynôme, P et Q divisent A et P et Q sont premiers entre eux, alors PQ divise A.

Un polynôme est dit irréductible si ses seuls diviseurs autre que lui-même (et lui-même multiplié par une constante) sont constants. Ils sont intéressants car tout polynôme se décompose en produit de polynômes irréductibles.

Soit par l'algorithme d'Euclide avec des divisions euclidiennes successives comme dans $\mathbb{Z}$ (dernier reste non nul. Soit on prend le produit de tous les facteurs irréductibles en commun (avec multiplicité).

Dans $\mathbb{C}$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

Dans $\mathbb{R}$, ce sont les polynômes de degré 1 et de degré 2 de discriminant strictement négatif (démonstration grâce aux complexes).

Dans $\mathbb{Q}$ (ou dans $\mathbb{Z}$) c'est plus compliqué : mais il existe des critères qui permettent de déterminer si un polynôme est irréductible.

Dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ on peut utiliser des arguments d'arithmétique pour montrer certaines propriétés (notamment l'irréductibilité). Par exemple, si $a, b \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$, $a - b \mid P(a) - P(b)$.

Exercice 8
Soient $n \geq 10$ et $a_1, \ldots, a_n$ des entiers deux à deux distincts. Montrer que $P = (X - a_1) \ldots (X - a_n) + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Solution de l'exercice 8
On suppose par l'absurde que $P = QU$ avec $Q, U \in \mathbb{Z}[X]$ non constants.

Alors pour tout k : $Q(a_k)U(a_k) = 1$ donc comme ce sont des entiers, $Q(a_k) = U(a_k) = \pm 1$.

Comme Q et U coïncident en n valeurs (et sont de degré $< \deg P = n$), ils sont égaux. Puis n est pair : $n = 2m$. D'où $P - 1 = (Q - 1)(Q + 1)$ est scindé dans $\mathbb{Z}$. Sans perte de généralité, $Q - 1 = (X - a_1) \ldots (X - a_m)$ et $Q + 1 = (X - a_{m+1}) \ldots (X - a_n)$. Mais alors pour $k > m$ et $l \leq m$: $a_l - a_k \mid 1 - (-1) = 2$. Donc 2 a au moins m diviseurs distincts (les $a_k - a_1$ avec $k > m$), absurde.

Culture

Le théorème de *d'Alembert-Gauss* affirme que tout polynôme complexe est scindé.

Le théorème de *Weierstrass* affirme que toute fonction infiniment dérivable (la plupart des fonctions utilisées usuellement) peut être approximée par des polynômes.

Le théorème de *Gauss-Lucas* affirme que les racines du polynôme dérivé d'un polynôme complexe se situent dans l'enveloppe convexe (c'est-à-dire à l'intérieur) des racines du polynôme (dans le plan complexe).

Le *critère d'Eisentsein* permet de déterminer si un polynôme est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$: si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$ et qu'il existe p premier tel que $p \mid a_0, \ldots, a_{d-1}$ mais p^2 ne divise pas a_0 et p ne divise pas a_d, alors P est irréductible.

2 Ordre et théorème de Fermat (Théo)

À venir…

3 Arithmétique (Rémi)

Inégalités en arithmétique

La première partie de ce cours est reprise de la deuxième partie du cours d'Igor Kortchemski donné au groupe D en 2015, qui peut-être trouvé à l'adresse suivante : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/stage_ete_2015.pdf. Les exercices traités lors de ce cours sont les 9,10,14,15. Les deux exercices suivants ont été ajoutés :

Exercice 1
Montrer que 19^{19} ne peut pas s'écrire comme somme d'un cube et d'une puissance quatrième.

Solution de l'exercice 1
Comme vu pendant le cours, il peut-être intéressant de considérer un nombre premier congru à 1 modulo 3 ou à 1 modulo 4. L'astuce consiste à chercher un nombre premier qui vérifie ces deux conditions simultanément : c'est le cas de 13. Un peu de calcul avec l'aide du petit théorème de Fermat montre que $19^{19} \equiv 7[13]$.

Exercice 2
Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (a, b, c) tels que $6^a = 1 + 2^b + 3^c$

Solution de l'exercice 2
On remarque que 3 divise $2^b + 1$, donc b est impair. Si $b = 1$, $1 + 3^{c-1} = 2 \cdot 6^{a-1}$, donc $a = 1$. En effet, si $a > 1$, 3 divise $1 + 3^{c-1}$, absurde. Donc si $b = 1$, on a la solution $(1, 1, 1)$. Sinon $b \geqslant 3$, donc $a \geqslant 2$ (car $6 < 1 + 2^3$). Modulo 4, on obtient $1 + 3^c \equiv 0[4]$, donc c est impair. Modulo 8, on a alors $1 + 2^b + 3^c \equiv 4[8]$, donc $6^a \equiv 4[8]$, donc $a = 2$. Ainsi $2^b + 3^c = 35$, et une étude exhaustive donne les solutions $(2, 3, 3)$ et $(2, 5, 1)$.

Parfois quand on ne trouve pas de modulo ou de factorisation qui nous permette d'avancer sur un problème d'arithmétique, on peut faire appel à des inégalités. Cette méthode repose en partie sur la proposition suivante :

Proposition 1.
Si a et b sont des entiers tels que a divise b, alors $|a| \leqslant |b|$

Cette propriété certes évidente est néanmoins essentielle dans la résolution de nombreux exercices difficiles. En effet, il peut souvent être intéressant de combiner plusieurs inégalités de ce type pour obtenir un encadrement sur une variable ou une absurdité. Un point intéressant à noter dans cette optique est que l'on peut toujours affiner la propriété précédente : par exemple, si on sait que $a \neq \pm b$, alors $|a| \leqslant 2|b|$.
Un deuxième constat que l'on peut faire et qui paraît évident mais qui est tout aussi utile est le suivant : entre deux carrés consécutifs il n'existe pas d'autre carré. Il peut évidemment s'adapter avec des cubes etc. Sans plus attendre, voici quelques exercices d'application. Dans cette partie, les exercices $3, 4$ et 5 ont été traités.

Exercice 3
Trouver tous les couples d'entiers positifs (x, y) tels que $y^2 + y + 1 = x^2$

Solution de l'exercice 3
Première solution : On encadre directement $y^2 < y^2 + y + 1 \leqslant (y + 1)^2$, avec égalité si et

seulement si $y = 0$. On trouve l'unique solution $(1, 0)$.
Deuxième solution : On multiplie par 4 des deux côtés, pour se ramener à un carré parfait à droite et quelque chose qui en est presque un (à constante près) à gauche : $4y^2 + 4y + 4 = 4x^2$ se réécrit $(2y + 1)^2 + 3 = (2x)^2$. On se rappelle qu'entre deux carrés consécutifs il n'y a pas de carré. Or $(2y + 1)^2 < (2y + 1)^2 + 3 < (2y + 2)^2$ si $y > 0$, donc $y = 0$. On trouve alors $x^2 = 1$, donc la seule solution est $(1, 0)$.

Exercice 4
(JBMO 2018, 1) Trouver tous les couples d'entiers (m, n) tels que $m^5 - n^5 = 16mn$

Solution de l'exercice 4
Avant tout, commençons par diviser des deux côtés par ce que l'on peut. L'idée est de rendre m et n premiers entre eux. Soit d le pgcd de m et n, on écrit $m = dx$ et $n = dy$. L'équation se réécrit alors $d^3(x^5 - y^5) = 16xy$. On remarque alors que xy est premier avec $x^5 - y^5$. En effet si p premier divise xy, alors p divise x ou p divise y. Sans perte de généralité on peut supposer que p divise x. Dans ce cas, si p divise $x^5 - y^5$, alors p divise y^5 donc p divise y, absurde. On en déduit que $x^5 - y^5$ divise 16, donc $|x^5 - y^5| \leqslant 16$. Si $x \neq y$, alors l'écart entre deux puissances cinquièmes peut valoir 1 ou 2 si $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$. Sinon, il est supérieur à celui entre deux puissances consécutives, qui est minimal entre 1 et 32 (ou -1 et -32). Si x ou y vaut 0, on a la solution $(0, 0)$. Sinon $x \neq y$ (car $16xy \neq 0$), donc $x^5 - y^5 = 2$, donc $d^3 = 8$, soit $d = 3$, ce qui donne les solutions $(2, -2)$ et $(-2, 2)$.

Exercice 5
(JBMO 2013, 1) Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que $\frac{a^3b-1}{a+1}$ et $\frac{b^3a+1}{b-1}$ soient des entiers.

Solution de l'exercice 5
Il existe deux manières équivalentes d'aborder le problème : regarder $a^3b - 1$ modulo $a + 1$, et voir que $b + 1 \equiv 0[a + 1]$, ou faire des combinaisons linéaires, en constatant que $a + 1$ divise $a^3b - 1$ et aussi $a^3 + 1$, donc $b(a^3 + 1) - (b + 1)$. Dans les deux cas, $a + 1$ divise $b + 1$. En procédant de même avec l'autre fraction on obtient que $b - 1$ divise $a + 1$. En combinant ces deux résultats on obtient que $b - 1$ divise $b + 1$, donc $b - 1$ divise 2, donc $b \leqslant 3$. Comme $b - 1 \neq 0$, on sait que $b \neq 1$. Ainsi $b = 3$ ou $b = 2$. Si $b = 3$, on trouve les solutions $(1, 3)$ et $(3, 3)$. Si $b = 2$ on obtient la solution $(2, 2)$.

Exercice 6
(N2, 2015) Soient a et b des entiers strictement positifs tels que $a! + b!$ divise $a!b!$. Montrer que $3a \geq 2b + 2$.

Solution de l'exercice 6
(La preuve suivante a été rédigée par Paul Cahen). Remarquons que si a ou b est 1, $x! + 1 \mid x!$, ce qui est impossible étant donné que $x! > 0$ On en conclut que $a, b \geqslant 2$. Si $a \geqslant b$, alors $3a \geqslant 2a + 2 \geqslant 2b + 2$ avec égalité ssi $a = 2 = b$. Sinon $b > a$. On pose alors $c = b - a$ L'inégalité $3a \geqslant 2b + 2$ devient $a \geqslant 2c + 2$ On suppose par l'absurde que $a \leqslant 2c + 1$ On pose $M = \frac{(a+c)!}{a!}$, on a donc $M + 1 \mid a!$ Comme $M = c! \cdot C^a_{a+c}$, $c! \mid M$ et donc $c! \leqslant M < a!$, $c < a$ Comme $c! \mid M$, $\gcd(M + 1, c!) = 1$, et donc $M + 1 \mid \frac{a!}{c!}$. On distingue 2 cas selon si $2c \geq a$ ou si $2c + 1 = a$ 1) $\frac{a!}{c!} \leqslant a^{a-c} \leqslant a^c \leqslant \frac{(a+c)!}{a!} = M < M + 1$, une contradiction 2) $a + 1 = 2(c + 1)$, ce qui implique $c + 1 \mid a + 1 \mid M$, et donc $\gcd(M + 1, c + 1) = 1$ Toujours par le lemme de Gauss, $M + 1 \mid \frac{a!}{(c+1)!}$
On répète le raisonnement précédent (l'inégalité) pour conclure qu'il y a une contradiction

L'exercice suivant, plus technique et difficile, n'a pas pu être traité. Il regroupe à la fois les idées de congruence vues en début de cours et la notion d'inégalités en arithmétique.

Exercice 7
(N2 2010) Trouver tous les couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant $m^2+2\cdot 3^n = m(2^{n+1}-1)$.

Solution de l'exercice 7
On traite les petits cas pour n en remarquant que l'on se ramène à une équation du second degré en m. On trouve les solutions $(3,6),(3,9)$ et $(6,9),(6,54)$. Montrons que ce sont les seules. On suppose désormais $n \geq 6$.
On remarque que $m \mid 2\cdot 3^n$. Ainsi, il existe un entier $p \leq n$ tel que $m = 3^p$ ou $m = 2\cdot 3^p$. Posons $q = n-p$. Dans le premier cas, on obtient $2^{n+1}-1 = m + \frac{2\cdot 3^n}{m} = 3^p + 2\cdot 3^q$, et dans le second $2^{n+1}-1 = 2\cdot 3^p + 3^q$. Ces deux équations sont donc équivalentes, quitte à changer p en $n-p$, inutile de traiter deux cas. On ne s'intéresse donc qu'à la première.
Cherchons à encadrer p. On a $3^p < 2^{n+1} = 8^{\frac{n+1}{3}} < 9^{\frac{n+1}{3}} = 3^{\frac{2(n+1)}{3}}$, et de même $2\cdot 3^{n-p} < 2\cdot 3^{\frac{2(n+1)}{3}}$. Donc $\frac{n-2}{3} < p, q < \frac{2(n+1)}{3}$. Soit $h = \min(p,q)$. Alors $9 \mid 3^h \mid 3^p + 2\cdot 3^q$, donc $9 \mid 2^{n+1}-1$. Comme l'ordre de 2 modulo 9 vaut 6, on a $6 \mid n+1$, donc $n+1 = 6r$. Mais alors on a $2^{n+1}-1 = 4^{3r}-1 = (4^{2r}+4^r+1)(2^r+1)(2^r-1)$. On constate que $4^{2r}+4^r+1$ est toujours divisible par 3 mais jamais par 9, et 2^r-1 et 2^r+1 sont premiers entre eux, donc 3^{h-1} divise l'un des deux nombres 2^r-1 ou 2^r+1.
On revient alors à nos inégalités : $3^{h-1} \leq 2^r+1 \leq 3^r$. Ainsi, $\frac{n-2}{3} - 1 < h-1 \leq \frac{n+1}{6}$, soit $2(n-2)-6 < n+1$ ou encore $n < 11$, or on a supposé $n \geq 6$ et on a montré $n \equiv -1[6]$, donc $n \geq 11$, absurde. Il n'y a donc pas d'autres solutions que celles mentionnées au début.

4 Polynômes (Aline et Ilyès)

Exercices initiatiques

Exercice 1
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs. Montrer que P n'a pas de racine entière.

Indication : Regarder modulo 2.
Solution de l'exercice 1
Modulo 2, on vérifie que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$, $n^k \equiv n[2]$. On en déduit que $P(n) \equiv P(0)[2]$ si n est pair et $P(n) \equiv P(1)$ sinon. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ est impair et en particulier non nul.

Exercice 2
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ distincts tels que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Montrer qu'il n'existe pas d'entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P(k) = 8$.

Solution de l'exercice 2
Posons $Q = P - 5$. On sait que Q est divisible par $(X-a)(X_b)(X-c)(X-d)$. Comme ce sont des entiers deux à deux distincts, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|k-a|\cdot|k-b|\cdot|k-c|\cdot|k-d|$ est soit nul soit supérieur ou égal à $2\times 1\times|-1|\times|-2| = 4$; en particulier $|Q(k)| > 3$ si $Q(k) \neq 0$. Donc il n'existe pas d'entier k tel que $Q(k) = 3$, ie $P(k) = 8$.

Exercice 3
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x^7 et x^{12} sont rationnels. x est-il rationnel ? Même question si l'on suppose que x^9 et x^{12} sont rationnels.

Solution de l'exercice 3
Comme $12 \wedge 7 = 1$, $x^7 \in \mathbb{Q}$ et $x^{12} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$. En effet, on peut écrire $1 = 7 \times 7 - 4 \times 12$, donc (si $x \neq 0$, auquel cas $x \in \mathbb{Q}$) $x = \frac{(x^7)^7}{(x^{12})^4} \in Q$.

Si l'on suppose à présent $x^{12} \in \mathbb{Q}$ et $x^9 \in \mathbb{Q}$, on ne peut conclure mieux que $x^{9\wedge 12} = x^3 \in \mathbb{Q}$. Par exemple, si l'on prend $x = 2^{\frac{1}{3}}$ qui est irrationnel.

Exercice 4
Trouver tous les réels x et y tels que $x + y = 3$ et $x^5 + y^5 = 33$

Indication : Utiliser les relations coefficients-racines.
Solution de l'exercice 4
Il faut commencer par faire apparaître la quantité $x^5 + y^5$ à partir des polynômes symétriques élémentaires que sont $(x+y)$ et xy. Le plus naturel est d'utiliser le développement du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} 3^5 = (x+y)^5 &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ &= 33 + 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) \\ &= 33 + 5xy((x+y)^3 - xy(x+y)) \\ &= 33 + 5 \cdot 3^3(xy) - 5 \cdot 3(xy)^2 \end{aligned}$$

On peut à présent résoudre l'équation suivante en $z = xy$: $5 \cdot 3z^2 - 5 \cdot 3^3 z + 3(3^4 - 11) = 0$ ie $z^2 - 9z + 14 = 0$, dont les solutions sont $z = 7$ et $z = 2$. On a alors deux cas :

— x, y sont les racines de $X^2 - 3X + 7$, qui ne sont pas réelles puisque $3^2 - 4 \cdot 7 < 0$.
— x, y sont les racines de $X^2 - 3X + 2$, qui sont 1 et 2, donc $(x, y) = (1, 2)$ ou $(x, y) = (2, 1)$.

Il y a finalement deux couples solution, qui sont $(1, 2)$ et $(2, 1)$.

Exercice 5
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 2020 tel que $P(n) = n$ pour tout $n \in [\![0, 2019]\!]$. Calculer $P(2020)$.

Indication : Introduire le polynôme $Q = P - X$.
Solution de l'exercice 5
On sait que $Q = P - X$ est unitaire de degré 2020 et s'annule en k pour tout $k \in [\![0, 2019]\!]$. Ainsi, $Q = X(X-1) \cdot (X - 2019)$. On peut évaluer en 2020 l'identité $P = X(X-1) \cdot (X - 2019) + X$:

$$P(2020) = 2020! + 2020$$

Exercice 6
Trouver toutes les valeurs réelles que peut prendre le paramètre m sachant que les solutions de l'équation

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = m$$

sont toutes réelles.

Solution de l'exercice 6

$[-1, \frac{9}{16}]$

On trace la courbe d'équation $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Les paramètres m convenant sont ceux pour lesquels la courbe rencontre la droite d'équation $y = m$ en 4 points (en cas de tangeance, un point compte double). Il suffit de déterminer les extrema locaux, au-delà, il n'y aura pas assez de points de rencontre et donc des solutions complexes non-réelles à notre équation. Les voici :

— $\frac{9}{16}$: atteint en $\frac{3}{2}$

— -1 : atteint en $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

— -1 : atteint en $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 7

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P est pair si et seulement s'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $P(X) = Q(X^2)$.

Solution de l'exercice 7

Un des deux sens de l'équivalence est clair. Il reste à montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est pair, tous ses coefficients de degré impair sont nuls. Pour cela, on pose $R = P(-X)$. Si on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $R = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k X^k$. Comme $P = R$, les coefficients de même degré de chacun des polynômes sont égaux. Ainsi, si k est impair, $a_k = -a_k$ impose $a_k = 0$.

Il suffit à présent de poser pour Q le polynôme dont pour tout $k \in \mathbb{N}$, le coefficient de degré k est 'gal au coefficient de degré $2k$ dans P.

Exercice 8

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Indication : Écrire $P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + \big(P(X) - X\big)$.

Solution de l'exercice 8

Il suffit de montrer que $P(X) - X \mid P(P(X)) - P(X)$. Si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, alors :

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i P(X)^i - \sum_{i=0}^{n} X^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \big(P(X)^i - X^i\big)$$

Et pour tout $k \geq 1$:

$$P(X)^k - X^k = (P(X) - X)\big(P(X)^{k-1} + X \cdot P(X)^{k-2} + \cdots + X^{k-1}$$

Exercice 9

Soit P un polynôme à coefficients entiers tel que : $P(-1) = -4$, $P(-3) = -40$ et $P(-5) =$

-156.
Quel est le nombre maximal d'entiers x pour lesquels : $P(P(x)) = x^2$?

Solution de l'exercice 9
On a : $P(x) \equiv P(x \mod 3) \mod 3$ pour tout entier x. Pour chacun des cas $x \equiv 0, 1, 2 \mod 3$, on trouve $P(P(x)) \equiv 2 \mod 3$ or un carré est congru à 0 ou 1 $\mod 3$: il n'y en a donc pas.

Exercice 10
On considère le polynôme "à trous" :

$$T = \_X^2 + \_X + \_$$

Tic et Tac jouent au jeu suivant. En un coup, Tic choisit un nombre réel et Tac le met à la place d'un des 3 trous. En 3 coups, le jeu est terminé. Tic gagne si le polynôme obtenu possède 2 racines rationnelles différentes et c'est Tac qui gagne sinon.

Qui a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 10
C'est Tic.
Il peut choisir 3 nombres rationnels a, b, c deux à deux distincts pour lesquels $a + b + c = 0$. On a alors $T(1) = a + b + c = 0$ i.e. 1 est racine. La deuxième racine n'est autre que $\frac{C}{A} \neq 1$ par Viète où $\{A, B, C\}$ est une permutation de $\{a, b, c\}$.

Exercice 11
Soit P un polynôme à coefficients entiers. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On suppose que P prend des valeurs multiples de 3 en $n, n+1, n+2$. Montrer que $P(m)$ est un multiple de 3 pour tout entier m.

Solution de l'exercice 11
Soit $m \in \mathbb{Z}$. L'un des entiers $m-n, m-(n+1), m-(n+2)$ est divisible par 3, disons $m-(n+1)$. On a alors : $3 \mid m - (n+1) \mid P(m) - P(n+1)$ car $P \in \mathbb{Z}[X]$. Puis $3 \mid P(m)$.

Exercice 12
Soient $n, p, k \in \mathbb{N}$. Soit f un polynôme unitaire de degré n et à coefficients entiers. On suppose qu'aucun des entiers $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p)$ n'est divisible par $p+1$. Montrer que f n'a pas de racine rationnelle.

Solution de l'exercice 12
Si f a une racine rationnelle, celle-ci est en fait entière. On raisonne par contraposée. Supposons que f admette une racine entière m. Soit $g \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $f(X) = (X-m)g(X)$. Comme l'un des $p+1$ entiers consécutifs $k-m, k+1-m, \ldots, k+p-m$ est un multiple de $p+1$, l'un des entiers $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p)$ l'est aussi.

Exercice 13
Pour toute suite de nombres réels $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, on définit ΔA comme étant la suite $\{a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots\}$.
On suppose que tous les termes de la suite $\Delta(\Delta A)$ valent 1 et que $a_{19} = a_{92} = 0$.

Déterminer a_1.

Solution de l'exercice 13
On note d le premier terme de ΔA. On a donc : $\Delta A = \{d, d+1, d+2, \ldots\}$ où le n^e terme s'écrit $d+n-1$.
Il vient $A = \{a_1, a_1+d, a_1+d+(d+1), a_1+d+(d+1)+(d+2), \ldots\}$ où le n^e terme s'écrit $a_n = a_1 + (n-1)d + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
a_n est donc un polynôme du second degré en n de coefficient dominant $\dfrac{1}{2}$.
Comme $a_{19} = a_{92} = 0$, on a nécessairement :

$$a_n = \frac{1}{2}(n-19)(n-92)$$

D'où $a_1 = 819$.

Exercices moyens

Exercice 14
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(n)$ est premier pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que P est constant.

Indication : Regarder les $P(nP(0))$ pour $n \in \mathbb{Z}$
Solution de l'exercice 14
Notons $p = P(0)$ supposé premier. Si $n \in \mathbb{Z}$, on sait que $P(np)$ est un nombre premier q et que $np \mid P(np) - P(0)$. En particulier, $p \mid P(np) - p$, ie $P \mid P(np)$. Pour que $P(np)$ soit premier, il faut que $P(np) = p$. Mais alors, comme $p \neq 0$, il existe une infinité d'entiers en lesquels P prend la valeur p, ce qui impose que P est constant.

Exercice 15
Un entier *sympa* est de la forme $111...11$. Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ non constants tels que si $n \in \mathbb{N}$ est *sympa*, alors $P(n)$ est *sympa*.

Indication : Étudier le comportement en l'infini et utiliser la rigidité des polynômes.
Solution de l'exercice 15
Prenons un tel polynôme P, notons d son degré et a_d son coefficient dominant. Les entiers sympas sont exactement de la forme $\frac{10^n-1}{9}$ avec $n \geq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note alors $P(\frac{10^n-1}{9}) = \frac{10^{k_n}-1}{9}$.
Alors quand n tend vers l'infini,

$$\frac{a_d(10^n-1)^d \cdot 9}{9^d \cdot (10^{k_n}-1)}$$

tend vers 1.
Donc 10^{nd-k_n} converge. (en factorisant les puissances de 10 qui tendent vers l'infini). Donc $(nd-k_n)$ converge donc vu que c'est une suite d'entiers il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que pour n assez grand $k_n = nd + a$.
Donc à partir d'un certaine valeur de $n > 0$, on a

$$P(\frac{10^n-1}{9}) = \frac{10^{nd+a}-1}{9} = \frac{10^a}{9} \cdot (9 \cdot \frac{10^n-1}{9} + 1)^d - \frac{1}{9}$$

Comme l'ensemble des $\frac{10^n-1}{9}$ pour n assez grand est infini, $P(X) = \frac{10^a}{9} \cdot (9X+1)^d - \frac{1}{9}$.

On peut vérifier que ces polynômes sont bien des solutions pour $d \geq 1$ et $a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 16

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si on peut écrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \text{ avec } a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z}.$$

Solution de l'exercice 16

Pour $k \geq 0$ on note $Q_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$. Notons $n = \deg P$.

$\Rightarrow$: Montrons par récurrence sur n que P s'écrit comme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i Q_i$$

avec $a_0, \ldots, a_n$ des rationnels.

• Pour $n = 0$ c'est évident (P est constant égal à a_0).

• Supposons le résultat acquis jusqu'à $n-1$ pour $n \geq 1$. On écrit $P(X) = Q_n(X)U(X) + R(X)$ avec $U \in \mathbb{Q}[X]$. En comparant les degrés, nécessairement U est constant. On applique ensuite l'hypothèse de récurrence à $R(X)$: $R = \sum_{i=0}^{\deg R} a_i Q_i$ Puis on pose $a_n = U$ et $a_{\deg R+1}, \ldots, a_{n-1} = 0$.

Montrons par récurrence sur k que dans cette décomposition, les a_k sont entiers.

• $a_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$.

• Si $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$, alors

$$a_k = \binom{k}{k} a_k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \binom{k}{i} - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \binom{k}{i} = P(k) - sum_{i=0}^{k-1} a_i \binom{k}{i} \in \mathbb{Z}$$

Le résultat en découle.

$\Leftarrow$: On remarque qu'on peut réécrire la condition :

$$P(m) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{m}{k}$$

et

$$P(-m) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \binom{m+k-1}{k}$$

pour $m \in \mathbb{N}$.

Comme les coefficients a_i sont entiers et que les coefficients binômiaux sont entiers, $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 17

Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$ avec $P(0) = 0$.

Bonus (difficile) : Enlever la condition $P(0) = 0$.

Indication : Utiliser la rigidité. Pour le bonus utiliser la parité et la rigidité, puis raisonner sur le degré.

Solution de l'exercice 17

On donne la solution du bonus. Passer directement au second cas pour $P(0) = 0$.

Soit P un tel polynôme : on vérifie que P n'est pas constant. On a de plus $P(-X)^2 = P(X^2+1) - 1 = P(X)^2$ Donc $(P(X) - P(-X)) \cdot (P(X) + P(-X)) = 0$ L'un des deux facteurs a une infinité de racines donc est nul.

• Si $P(X) = P(-X)$, on peut écrire $P = Q_1(X^2)$ pour un certain Q_1 (en identifiant les coefficients des termes de degrés impairs, on obtient qu'ils sont tous nuls). En posant $P_1 = Q_1(X-1)$, on a $P(X) = P_1(X^2+1)$. Reprenons l'équation de départ : $P \circ (X^2+1) = (X^2+1) \circ P$ donc $P_1 \circ (X^2+1) \circ (X^2+1) = (X^2+1) \circ P_1 \circ (X^2+1)$.

Comme X^2+1 prend une infinité de valeurs quand X parcourt $\mathbb{R}$, les polynômes $P_1 \circ (X^2+1)$ et $(X^2+1) \circ P_1$ coïncident en une infinité de points donc sont égaux.

Cependant, $\deg P_1 < \deg P$ donc en réutilisant le même raisonnement sur P_1, on ne pourra ce retrouver dans cette première configuration que $\deg P$ fois au maximum (le degré du polynôme étant une suite strictement décroissante d'entiers strictement positifs). On finira donc par retomber sur le deuxième cas.

• Si $P(X) = -P(-X)$, alors $P(0) = 0$. Définissons la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(u_{n+1}) = P(u_n^2+1) = P(u_n)^2 + 1$ et $P(u_0) = 0$. Les suites (u_n) et $P(u_n))$ ont la même relation de récurrence et les mêmes premiers termes donc sont égales : $P(u_n) = u_n$ pour tout n. Mais (u_n) est strictement croissante ($u_{n+1} - u_n = (u_n - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ pour tout n) donc contient une infinité de termes.

On en déduit que $P - X$ a une infinité de racines donc est le polynôme nul.

En conclusion, si un polynôme P est solution, alors il s'écrit sous la forme :

$$(X^2+1) \circ (X^2+1) \circ \cdots \circ (X^2+1)$$

puisqu'on se ramène toujours au deuxième cas par des compositions par X^2+1.

Réciproquement, les itérations de X^2+1 sont effectivement solutions (ils commutent avec le polynôme X^2+1). La seule pour laquelle $P(0) = 0$ est X (car $(X^2+1)(\mathbb{R}) \subset [1; +\infty[$).

Exercice 18

Quels sont les $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que si $pgcd(a,b) = 1$ alors $pgcd(P(a), P(b)) = 1$?

Indication : Remarquer que $P(n) \mid P(n + P(n))$ pour tout entier n. Si $P(0) \neq 0$, regarder les $a \in \mathbb{N}$ tels que $pgcd(a, P(0)) = 1$.

Solution de l'exercice 18

Si P est un tel polynôme, on écrit $P(X) = X^a Q(X)$ avec $a \geq 0$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Il est alors clair que Q vérifie la propriété de l'énoncé.

Commençons par remarquer que si $n \in \mathbb{Z}$, alors $n + Q(n) - n \mid Q(n + Q(n)) - Q(n)$ d'où $Q(n) \mid Q(n + Q(n))$. Il serait donc intéressant de trouver des n tels que $pgcd(n, n + Q(n)) = 1$.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $pgcd(a, Q(0)) = 1$. Vu que $a - 0 \mid Q(a) - Q(0)$, on a par l'algorithme d'Euclide :

$$pgcd\big(a, Q(a)\big) = pgcd\left(a, Q(0) + a \cdot \frac{Q(a) - Q(0)}{a}\right) = 1$$

Donc $pgcd(a, a + Q(a)) = 1$ Les propriétés de Q assurent que $pgcd\big(Q(a), Q(a + Q(a))\big) = 1$. Grâce à la remarque, $|Q(a)| = pgcd\big(Q(a), Q(a + Q(a))\big) = 1$.

Il existe donc une infinité d'entiers $a > 0$ tels que $Q(a) = 1$ ou une infinité tels que $Q(a) = -1$ (ceux qui sont premiers avec $Q(0)$).

Le polynôme $Q - 1$ (ou $Q + 1$) a donc une infinité de racines, donc $Q = \pm 1$.

Les solutions sont donc les $\pm X^a$ pour $a \in \mathbb{N}$. (on vérifie sans difficultés qu'ils conviennent).

Exercice 19
Un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ vérifie :

$$\text{pour } k = 0, 1, \ldots, n,\ P(k) = \frac{k}{k+1}$$

Déterminer $P(n+1)$.

Indication : Penser à regarder $(X+1)P$.

Solution de l'exercice 19
Soit Q le polynôme défini par : $Q = (X+1)P(X) - X$. Q est de degré $n+1$ et possède $0, 1, \ldots n$ comme racines donc $Q = aX(X-1)\ldots(X-n)$ où $a \in \mathbb{R}$. Maintenant, $(n+2)P(n+1) - n - 1 = Q(n+1) = a \times (n+1)!$ alors $P(n+1) = \dfrac{(n+1)(1+a\times n!)}{n+2}$. Pour déterminer a, on a par exemple : $0+1 = Q(-1) = (-1)^{n+1}a(n+1)!$, i.e. $a = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $P(n+1) = \dfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2} =$ 1 ou $\dfrac{n}{n+2}$.

Exercices plus difficiles

Exercice 20
Soit P et Q deux polynômes unitaires vérifiant :

$$P(P(X)) = Q(Q(X))$$

Montrer que $P = Q$.

Solution de l'exercice 20
P, Q sont de même degré n. Supposons $P \neq Q$, ie $R = P - Q \neq 0$ et notons $0 < k \leqslant n-1$ le degré de R.
On peut écrire $0 = P(P(X)) - Q(Q(X)) = R(P(X)) + [Q(P(X)) - Q(Q(X))]$.
On s'intéresse aux degrés de ces termes. $R(P(X))$ est de degré kn.
On note $Q = X^n + \cdots + a_1X + a_0$, alors :

$$Q(P(X)) - Q(Q(X)) = [P(X)^n - Q(X)^n] + \cdots + a_1[P(X) - Q(X)]$$

A part le premier terme, les autres sont de degré au plus $n^2 - n$.
Le premier vaut $R(X)[P(X)^{n-1} + P(X)^{n-2}Q(X) + \cdots + Q(X)^{n-1}]$ et donc de degré $k + n^2 - n$ avec n pour coefficient dominant.
Or $kn < n^2 - n + k$ donc le tout, qui est le polynôme nul, est de degré $n^2 - n + k$: contradiction !
Il reste à traiter le cas $R = c = constant$: on trouve $R = 0$.

Exercice 21
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ positif sur $\mathbb{R}$. Montrer que P s'écrit comme somme de deux carrés de polynômes.

Indication : Raisonner par récurrence sur le degré en décomposant en polynômes irréductibles.
Indication : On pourra utiliser l'identité de Lagrange :

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AB + CD)^2$$

Solution de l'exercice 21
On remarque premièrement que toutes les racines réelles de P sont de multiplicité paire. On peut donc écrire $P = R^2Q$ avec $R, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que Q n'a pas de racine réelle. Q est encore positif sur $\mathbb{R}$ et si on le décompose en facteurs irréductibles, on constate que l'on peut les mettre chacun sous une forme canonique somme de deux carrés, puisque ce sont des polynômes irréductibles de degré 2.

Enfin, si $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$, on vérifie que :

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AB + CD)^2$$

Donc une réccurence immédiate permet de montrer que Q est aussi somme de deux carrés, écrivons $Q = A^2 + B^2$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Finalement, avec $U = SA$ et $V = SB$, $P = U^2 + V^2$.

Exercice 22
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P \mid P(X^2 + X + 1)$. Montrer que le degré de P est pair.

Indication : Montrer que P n'a pas de racine réelle.

Solution de l'exercice 22
Supposons que P ait une racine réelle α_0. Comme $P \mid P(X^2 + X + 1)$, les racines de P sont aussi racines de $P(X^2 + X + 1)$. En particulier, $P(\alpha_0^2 + \alpha_0 + 1) = 0$, et on a ainsi une nouvelle racine de P. Mais $\alpha_1 = \alpha_0^2 + \alpha_0 + 1 > \alpha_0$. En appliquant le même raisonnement à α_1, on obtient encore une racine de P que l'on peut appeler α_2 telle que $\alpha_2 > \alpha_1$. On construit ainsi une suite de racines $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et a fortiori injective, ce qui signifie que P est le polynôme nul : c'est absurde.

Ainsi, P n'a aucune racine réelle, son degré est donc pair.

Exercice 23
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(k^2) \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k^2) \in \mathbb{Z}$.

Indication : Introduire le polynôme $Q = P(X^2)$. On pourra commencer par montrer que $P((n + 1)^2) \in \mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 23
Posons $Q = P(X^2)$. On utilise les polynômes interpolateurs : on sait qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$Q = \sum_{j=0}^{n} a_j Q_j = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\prod_{i\neq j}(X^2 - i^2)}{\prod_{i\neq j}(j^2 - i^2)}$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrons que $Q_j(n + 1)$ est entier. Pour cela, on calcule

$$\begin{aligned}
Q_j(n+1) &= \frac{\prod_{i\neq j}((n+1)^2-i^2)}{\prod_{i\neq j}(j^2-i^2)} \\
&= \frac{\prod_{i\neq j}(n+1+i)(n+1-i)}{\prod_{i\neq j}(j-i)(j+i)} \\
&= \frac{\prod_{i=0}^{n}(n+1+i)\prod_{i=0}^{n}(n+1-i)}{(n+1-j)(n+1+j)}\frac{2j}{\prod_{i=0}^{n}(j-i)\prod_{i=0}^{n}(j+i)} \\
&= \frac{\prod_{i=n+1}^{2n+1} i\prod_{i=1}^{n+1} i}{(n+1-j)(n+1+j)}\frac{2j}{\prod_{i=1}^{j} i\prod_{i=1}^{n-j}(-i)\prod_{i=j}^{n+j} i} \\
&= \frac{(2n+1)!(n+1)!}{n!(n+1-j)(n+1+j)}\frac{2j(j-1)!}{j!(-1)^{n-j}(n-j)!(n+j)!} \\
&= (-1)^{n-j}\frac{2(2n+1)!(n+1)}{(n+1-j)(n+1+j)(n-j)!(n+j)!} \\
&= (-1)^{n-j}\frac{(2n+2)!}{(n+1-j)!(n+1+j)!} \\
&= (-1)^{n-j}\binom{2n+2}{n+1+j} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tous les entiers $k \in [\![1, n+1]\!]$, on en déduit que $Q(n+1) = P((n+1)^2) \in \mathbb{Z}$. On peut ensuite raisonner par récurrence. En effet, si on pose pour $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}_k$: "$P(k^2) \in \mathbb{Z}$", on sait d'après l'énoncé que $\mathcal{P}_k$ est vrai pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$ tel que P_k soit vrai. Comme le polynôme P est de degré inférieur ou égal à k, on sait que le polynôme $Q = P(X^2)$ peut s'écrire comme précédemment

$$Q = \sum_{j=0}^{k} a_j Q_j = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\prod_{i\neq j}(X^2-i^2)}{\prod_{i\neq j}(j^2-i^2)}$$

où $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Le calcul mené au début s'applique à chaque $Q_j(k+1)$ pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, donc $Q(k+1) \in \mathbb{Z}$, autrement dit $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie. Ceci donne l'hérédité et termine la récurrence.

Exercice 24

Soit $n > 1$ un entier naturel. Montrer que le polynôme $F(X) = X^n + 5X^{n-1} + 3$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 24

On procède par l'absurde. Supposons l'existence de deux polynômes à coefficients entiers G et H de degrés $\geqslant 1$ et tels que $F = GH$. On note :

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, G = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i, H = \sum_{i=0}^{n-m} c_i X^i$$

où $1 \leqslant m \leqslant n-1$. On suppose sans perte de généralité que $|b_0| = 3$ et donc que $|c_0| = 1$. Soit i le plus petit indice pour lequel b_i n'est pas divisible par 3 (i existe car les coefficients de F ne

sont pas tous divisible spar 3). On a alors :

$$a_i = b_i c_0 + (b_{i-1} c_1 + \dots)$$

or la parenthèse est divisible par 3 mais pas $b_i c_0$ donc pas a_i : c'est-à-dire que $i \geqslant n-1$. H est donc de degré 1 et $H = X \pm 1$. ± 1 ne sont pas racines de F : contradiction !

5 Équations fonctionnelles (Rémi)

Introduction aux équations fonctionnelles

Les équations fonctionnelles sont un des types de problèmes d'olympiades qui sont les plus éloignés des cours scolaires. Une équation fonctionnelle est une équation dans laquelle la solution recherchée n'est pas un entier ou un réel, mais une fonction. Pour illustrer ce concept, commençons par un exemple classique.

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution de l'exercice 1
L'astuce principale pour résoudre une équation fonctionnelle est la substitution. Si l'équation proposée est vraie pour tous entiers x et y, elle est vraie en particulier pour $x = 0$ et $y = 0$. Voyons à quoi cela nous mène...

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$$

Magnifique ! On connaît déjà la valeur de f en 0. Ensuite, une autre astuce est de deviner les solutions. Ici, après quelques essais, on semble remarquer que les seules solutions sont les fonctions linéaires, les fonctions du type $f(x) = cx$ où c est un entier positif. Pour tenter de le prouver, posons $f(1) = a$ et voyons ce que l'on peut en tirer.

En remplaçant y par 1 dans l'équation initiale, on a

$$f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x) + a$$

En particulier, $f(2) = f(1+1) = f(1) + a = 2a$, puis $f(3) = f(2+1) = f(2) + a = 3a$, etc... En raisonnant par récurrence sur x, on peut alors montrer que $f(x) = ax$. En effet , l'initialisation est faite, et si l'on suppose le résultat vrai à un certain rang, alors $f(x+1) = f(x) + a = ax + a = a(x+1)$

Finalement, on a montré que les seules solutions possibles étaient les fonctions linéaires, mais attention ! Cela ne permet pas encore de conclure. Face à une équation fonctionnelle, il faut toujours penser à vérifier les solutions une fois qu'on les a trouvées, parce que certaines sont peut-être impossibles.

Ici on voit bien que si $f(x) = ax$, alors $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$, donc toutes les fonctions linéaires sont solutions. Finalement, les solutions de cette équation fonctionnelle sont exactement les fonctions linéaires.

Passons à la suite : plus difficile, même énoncé, mais avec une légère modification : on cherche désormais les solutions non plus sur les entiers naturels, mais sur les rationnels.

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution de l'exercice 2
On peut évidemment commencer en s'appuyant sur l'exercice précédent, en affirmant qu'il existe un entier a tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an$. Déduisons-en quelques propriétés utiles : on peut par exemple montrer par récurrence sur n que, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $q \in \mathbb{Q}$,

$$f(nq) = nf(q)$$

La récurrence est immédiate, en posant $x = nq$ et $y = q$. Ce résultat est vrai pour tout q, donc en particulier pour $q = \frac{1}{n}$, auquel cas on obtient :

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \iff f\left(\frac{1}{n}\right) = a\frac{1}{n}$$

Maintenant, soient p et q des entiers strictement positfs. Alors :

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{p}{q}$$

On a presque fini, mais attention, on a travaillé seulement avec des nombres positifs ! Il reste à faire une dernière observation, en posant $y = -x$, si x est positif, on obtient

$$f(0) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x) = -ax = a(-x)$$

Donc les seules solutions envisageables sur les rationnels sont aussi les fonctions linéaires, et on vérifie comme pour l'exercice précédent qu'elles sont bien des solutions.

Remarque 1.
L'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ est l'exemple le plus classique d'équation fonctionnelle et s'appelle l'équation de Cauchy. On ne l'étudie pas sur $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, car les solutions ne sont pas forcément caractérisables : il s'agit, soit des fonctions linéaires, soit de fonctions horribles, discontinues en tout point. Un bon exercice est toutefois de montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation de Cauchy qui sont continues ou monotones sont seulement les fonctions linéaires.

Après cette introduction, passons à des équations fonctionnelles plus classiques...

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) - f(y)$$

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant $f(0) = 0$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad f(f(x) + f(y)) = x + y$$

Le problème suivant sert à présenter une astuce classique très pratique...

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad f(f(x)) = x + 1$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour un réel k donné,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(2x - 2y) + x = f(3x) - f(2y) + ky$$

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 3
Il suffit de poser $x = y$, et on obtient

$$f(2x) = f(x) - f(x) = 0$$

Pour $z = 2x$, z parcourt tout $\mathbb{R}$ et on a $f(z) = 0$. La seule solution est donc la fonction nulle, qui satisfait bien l'équation initiale

Solution de l'exercice 4
Si on prend $y = 0$, on obtient directement

$$f(f(x)) = x$$

Si on reprend l'équation initiale, on peut appliquer f aux deux membres, et on a

$$f(f(f(x) + f(y))) = f(x + y) \iff f(x) + f(y) = f(x + y)$$

Donc f satisfait l'équation de Cauchy, et comme $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, les seules solutions éventuelles sont les fonctions linéaires.

Attention ! C'est ici qu'il ne faut pas commettre l'erreur de conclure que les fonctions linéaires sont toutes solutions... En effet, supposons que $f(x) = ax$, alors dans l'équation initiale,

$$a(ax + ay) = x + y \iff a^2(x + y) = x + y$$

Donc $a^2 = 1 \iff a = \pm 1$. Finalement les seules solutions sont $f(x) = x$ et $f(x) = -x$

Solution de l'exercice 5

L'astuce est la suivante : calculer $f(f(f(x)))$ de deux manières distinctes.

Déjà, il est clair que

$$f(f(f(x))) = f(x+1)$$

En effet, il suffit juste d'appliquer f de chaque côté de l'équation initiale.

D'autre part, on peut écrire, pour $y = f(x)$,

$$f(f(y)) = f(y) + 1 \implies f(f(f(x))) = f(x) + 1$$

Cette astuce n'est pas facile à visualiser mais est très utile et doit être maîtrisée. D'après les deux résultats suivants, on obtient :

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

Par une récurrence immédiate, si on pose $f(0) = c$, on obtient $f(x) = x + c$. Mais de nouveau, il ne faut pas crier victoire ! En effet, si l'on remplace cela dans l'équation initiale, on obtient

$$x + 2c = x + 1 \implies f(0) = c = \frac{1}{2}$$

Ceci est impossible, puisque f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc il n'y a pas de solutions.

Solution de l'exercice 6

Une des idées principales dans une équation fonctionnelle à plusieurs termes est de faire en sorte que ce qui est à l'intérieur des parenthèses soit égal, grâce à une substitution intelligente, pour obtenir des simplifications. Par exemple, ici, trois substitutions sont envisageables, $2x - 2y = 3x$, $2x - 2y = 2y$ ou $3x = 2y$. Nous ne présenterons ici que la première, mais il est à noter que la troisième aboutit également rapidement (essayer !)

On cherche à avoir $2x - 2y = 3x$. C'est le cas si l'on pose $x = -2y$. voyons où cela nous mène :

$$f(-6y) - 2y = f(-6y) - f(2y) + ky \iff f(2y) = (k+2)y$$

En posant $z = 2y$, il vient $f(z) = \frac{1}{2}(k+2)z$

Testons cette solution :

$$\frac{1}{2}(k+2)(2x-2y) + x = \frac{1}{2}(k+2) \times 3x - \frac{1}{2}(k+2) \times 2y + ky$$

$$\iff (2k+6)x - (2k+4)y = (3k+6)x - (k+4)y$$

$$\implies \big(2k+6 = 3k+6 \text{ et } 2k+4 = k+4\big) \iff k = 0$$

Il n'existe donc des solutions que pour $k = 0$, auquel cas $\frac{1}{2}(k+2)x = x$, et la fonction $f(x) = x$ est bien solution.

Injectivité, surjectivité et bijectivité

On introduit désormais les notions essentielles de fonction **injective, surjective et bijective**. Ce sont des propriétés que l'on peut essayer de déduire de l'énoncé pour avoir des indices sur les solutions.

Définition 2.
Une fonction est dite injective si les images par f de deux éléments distincts sont distinctes. Autrement si a et b appartiennent au domaine de définition de f et $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$. Tout élément de l'ensemble d'arrivée admet donc un unique antécédent.

Définition 3.
Une fonction est dite surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent. Autrement dit, si $f : A \to B$, alors pour tout $y \in B$ il existe un $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Définition 4.
Une fonction est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Remarque 5.
Une fonction est donc bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent.

Remarque 6.
Pour montrer qu'une fonction est injective on utilise le plus souvent la contraposée : on montre que si deux éléments a et b vérifient $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Remarque 7.
Pour montrer qu'une fonction est surjective, on essaie généralement de se ramener à une équation du type $f(A) = B$, où A et B sont des expressions qui dépendent d'une variable x. Si B parcourt tout l'ensemble d'arrivée de f quand x parcourt ce même ensemble alors f est surjective.

Exercice 7
Parmi les équations fonctionnelles suivantes, déterminer lesquelles n'admettent que des solutions injectives, surjectives ou bijectives :

1. $f(x + f(y)) = 2f(x) + y$
2. $f(f(x)) = 0$
3. $f(f(x)) = \sin(x)$
4. $f(x + y) = f(x)f(y)$

Solution de l'exercice 7
1. En posant $x = 0$ on obtient $f(f(y)) = 2f(0) + y$. Si $f(a) = f(b)$, alors $f(f(a)) = f(f(b))$, donc $2f(0) + a = 2f(0) + b$, d'où $a = b$. Ainsi f est injective. De plus, l'expression $2f(0) + y$ parcourt $\mathbb{R}$ quand y parcourt $\mathbb{R}$, donc f est surjective. Finalement, f est bijective.
2. Supposons par l'absurde que f soit surjective. Alors, pour $y \in \mathbb{R}$, on dispose de x tel que $f(x) = y$. Ainsi $f(y) = f(f(x)) = 0$. Autrement dit, l'image de tout élément par f est 0, donc f n'est pas surjective, absurde. Supposons par l'absurde que f soit injective. Alors si $x \neq y$,

alors $f(x) \neq f(y)$. Mais alors $f(f(x)) = f(f(y)) = 0$, donc $f(x)$ et $f(y)$ ont la même image par f, absurde. Finalement, f n'est ni injective, ni surjective.
3. Si $f(0) = f(\pi)$, alors f n'est pas injective. Sinon, $f(f(0)) = \sin(0) = \sin(\pi) = f(f(\pi))$, donc f n'est pas injective. De plus $f \circ f$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, donc n'est pas surjective, mais si f était surjective alors $f \circ f$ le serait aussi, donc f n'est pas surjective.
4. La fonction nulle est solution, donc f n'est ni injective, ni surjective.

Exercices d'application

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous réels x, y :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$$

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$$

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout couple d'entiers (x, y),

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Solution des exercices

Solution de l'exercice 8
On remarque que si f est une solution, alors pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, $f + c$ est aussi une solution. Quitte à remplacer f par $g : x \mapsto f(x) - f(0)$, on peut donc supposer que $f(0) = 0$. En posant $y = 0$, on obtient alors $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$. L'équation initiale peut alors se réécrire $\frac{f(x+y)}{2} = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$, soit $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On retrouve l'équation de Cauchy, dont les solutions sont les fonctions linéaires. Finalement, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions affines, dont on vérifie réciproquement qu'elles conviennent bien.

Solution de l'exercice 9
Pour $x = y = 0$, on trouve $f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Ensuite, pour $x = y$, on obtient $f(x)^2 = f(0)$. Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle. Sinon $f(0) = 1$, auquel cas $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. Mais attention ! Cela ne suffit pas à dire que f est constante. En effet, il ne faut pas oublier de considérer les fonctions dites multigraphes, c'est-à-dire qui prennent la valeur 1 en certains points et -1 aux autres points. On pose alors $x = 0$, et on obtient $f(y) = f(-y)$, donc f est paire. Enfin, en posant $y = -x$, on aboutit à $f(x)f(-x) = f(2x)$,

soit $f(2x) = f(x)^2 = 1$ par parité de f. Finalement, comme $2x$ parcourt $\mathbb{R}$ quand x parcourt $\mathbb{R}$, la seule solution possible dans ce cas est la fonction constante égale à 1. Les solutions au problème sont donc $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$, dont on vérifie réciproquement qu'elles conviennent.

Solution de l'exercice 10
En prenant $x = 0$, on obtient $f(f(y)) = f(0) - y$, donc f est surjective. Soit a tel que $f(a) = 0$. En posant $y = a$, $f(x) = f(x) - a$, donc $a = 0$. Ainsi $f(f(y)) = -y$. Si $f(y) = z$, alors $f(z) = f(f(y)) = -y$, donc dans l'équation initiale on obtient $f(x + z) = f(x) + f(z)$. Comme f est surjective, cette équation est vraie pour tout x et pour tout z, donc f est linéaire. Mais en vérifiant avec $f(f(y)) = -y$, on constate qu'il n'y a aucune solution.

6 Arithmétique : Bézout, inverses et chinoiseries (Matthieu Piquerez)

Dans ce TD, nous avons revu le pgcd, le théorème de Bézout, l'algorithme d'Euclide étendu et les inverses modulo n. Puis nous avons vu le théorème chinois. Je ne remets ici que les exercices abordés vu que les ressources sur les notions précédentes abondent notamment sur https://maths-olympiques.fr/?page_id=11

PGCD

Exercice 1
Déterminer le pgcd de tous les nombres de la forme

$$(b-a)(c-b)(d-c)(d-a)(c-a)(d-b)$$

où a, b, c, d parcourent $\mathbb{Z}$.

Théorème de Bézout et algorithme d'Euclide

Exercice 2
Trouver toutes les solutions $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ pour chacune des équations suivantes

$$3a + 5b = 1, \qquad 3a + 5b = 4, \qquad 183 \cdot a + 117 \cdot b = 3.$$

Exercice 3 (IMO 59, 1)
Montrer que pour tout entier n, $\frac{14n+3}{21n+4}$ est une fraction irréductible.

Exercice 4
Pour quels entiers naturels n la fraction $\frac{n^3+n}{2n+1}$ est-elle irréductible ?

Exercice 5
Soient m, n, a des entiers strictement positifs avec $a \geqslant 2$. Montrer que $\text{pgcd}(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\text{pgcd}(m,n)} - 1$.

Exercice 6 (Bonus)
Montrer que si m et n sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tout nombre entier $k \geqslant N$ peut s'écrire sous la forme $k = am + bn$ avec a et b des entiers positifs. Déterminer la valeur minimale de N.

Inverse modulo n

Exercice 7
Soit a et n deux entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique entier b modulo n tel que $ab \equiv 1 \pmod{n}$.

Dans la suite, on note a^{-1} l'inverse de a modulo n (lorsque le modulo considéré est clair).

Exercice 8
Calculez tous les inverses modulo n pour n allant de 2 à 10.

Exercice 9
Soit p un nombre premier. Trouver un entier positif a tel que $k^a \equiv k^{-1} \pmod{p}$ pour tout entier k non divisible par p.

Exercice 10
Soit p un nombre premier. Quels sont les nombres a modulo p tels que $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$?

Exercice 11 (Théorème de Wilson)
Montrer que si p est premier, alors $(p-1)! \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 12
Trouver tous les entiers n tel qu'il existe un entier a tel que $n | 4a^2 - 1$.

Théorème des restes chinois

Exercice 13
Faire un tableau avec les nombres de 1 à 10 modulo 2 et modulo 5. Que constate-on ?

Exercice 14
Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{7}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6}, \\ x \equiv 3 \pmod{10}, \\ x \equiv 4 \pmod{7}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 10 \pmod{12}, \\ x \equiv 16 \pmod{21}. \end{cases}$$

Exercice 15
Un général chinois possède une armée d'au plus 10000 soldats. Ses soldats savent compter jusqu'à 20 et peuvent ainsi se mettre par rangée d'au plus 20 soldats (ce qui forme un rectangle sauf la dernière rangée qui est éventuellement non remplie). Le général est un bon mathématicien mais il ne voit que la dernière rangée. Comment peut-il compter le nombre de ses soldats ?

Exercice 16
Trouver les deux derniers chiffres de 1032^{1032}.

Exercice 17
En utilisant les inverses des nombres modulo n, trouver une formule générale pour résoudre les systèmes d'équations entrant dans le cadre du théorème chinois.

On rappelle que l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ vaut le nombre de nombres premiers avec n dans l'ensemble $\{0, \dots, n-1\}$.

Exercice 18
Montrez que si a et b sont premiers entre eux, alors

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

En déduire que

$$\varphi(n) = n\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_2}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big)$$

où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont les nombres premiers divisant n.

Exercice 19
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe k entiers positifs consécutifs qui ne sont pas des nombre premiers.

Exercice 20
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe k entiers positifs consécutifs qui ne sont pas des puissances de nombre premiers.

Exercice 21
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1, \dots, a_n$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 premiers entre eux deux à deux tels que $a_1 \cdots a_n - 1$ soit le produit de deux entiers consécutifs.

Exercice 22
Un point du plan de coordonnées entières (p, q) est dit *invisible* si $\text{pgcd}(p, q) > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un carré de côté n dans lequel tous les points à coordonnées entières sont invisibles.

Exercice 23
Soit $n \geqslant 2$. Dénombrer le nombre de x dans $\{1, \dots, n\}$ tels que $x^2 = x \pmod{n}$.

Exercice 24
Dénombrer le nombre de x dans $\{1, \dots, n\}$ tels que $x^2 = 1 \pmod{n}$.

Exercice 25
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que n divise $4a^2 + 9b^2 - 1$.

Solution de l'exercice 1
Notons D le pgcd de tous ces nombres.

Si l'on prend $a = 0, b = 1, c = 2$ et $d = 3$, le produit vaut

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$$

Donc, par définition du pgcd, $D|12$.

Vérifions maintenant que 12 divise tous les nombres de cette forme. Soit donc a, b, c, d quatre entiers, et n le produit correspondant. Par le principe des tiroirs, deux nombres parmi a, b, c et d sont congrus modulo 3. Donc leur différence est divisible par 3. Notamment $3|n$.

Maintenant, regardons modulo 2. Soit trois nombres parmi a, b, c et d ont la même parité, soit deux des nombres sont pairs et les deux autres sont impairs. Dans le premier, disons par exemple qu'il s'agit de a, b et c. Alors $b-a$ et $c-a$ sont divisibles par 2 donc $4|n$. Dans le second cas, on peut dire sans perdre de généralité que a et b sont pairs et que c et d sont impairs. Dans ce cas $b-a$ et $d-c$ sont divisibles par 2 donc $4|n$.

Dans tous les cas, $3|n$ et $4|n$. Comme 3 et 4 sont premiers entre eux, $12 = 3\cdot 4|n$. Finalement, 12 divise chacun des produits, et 12 est l'un des produits, donc $D = 12$.

Solution de l'exercice 2

D'abord, pour la première équation, $(a_0, b_0) = (2, -1)$ est une solution : $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$.

Si (a, b) est une autre solution, alors on peut écrire $a = a_0 + a'$ et $b = b_0 + b'$ pour obtenir

$$3(a_0 + a') + 5(b_0 + b') = 1,$$

donc en retirant $3a_0 + 5b_0 = 1$, on obtient

$$3a' + 5b' = 0.$$

Donc 3 divise b' (car 3 divise 0 et 3 et 5 sont premiers entre eux), i.e., $b' = 3k$ pour un certain entier k. Puis

$$3a' + 15k = 0 \quad \text{donc} \quad a' = -5k.$$

L'autre solution vaut donc $(a_0 - 5k, b_0 + 3k) = (2 - 5k, -1 + 3k)$.

On vérifie facilement que $(2-5k, -1+3k)$ est bien solution pour tout k. Donc les solutions sont tous les couples de cette forme.

Pour la second équation, comme $3a_0 + 5b_0 = 1$, on a

$$3 \cdot (4 \cdot a_0) + 5 \cdot (4 \cdot b_0) = 4 \cdot 1.$$

Donc $(8, -4)$ est une solution. On fait ensuite le même raisonnement que précédemment : si $(8 + a', -4 + b')$ est une autre solution, alors en simplifiant l'équation, on obtient que $b' = 3 \cdot k$ pour un certain entier k puis que $a' = -5 \cdot k$. Donc les solutions sont exactement les couples de la forme $(8 - 5k, -4 + 3k)$ pour k un entier.

Pour la troisième équation, on effectue l'algorithme d'Euclide étendu. Cf. le cours d'arithmétique pour débutant sur le site de la POFM, page 11 : ici. On trouve que $\text{pgcd}(183, 117) = 3$, et on trouve une solution : $(16, -25)$.

Pour trouver toutes les solutions, il est utile de remarquer que l'équation équivaut à

$$\frac{183}{3} \cdot a + \frac{117}{3} \cdot b = \frac{3}{3},$$

c'est-à-dire à

$$61 \cdot a + 39 \cdot b = 1,$$

que l'on peut résoudre comme précédemment pour trouver que les solutions sont les paires de la forme

$$(16 - 39 \cdot k, -25 + 61 \cdot k)$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 3
On doit montrer que $\text{pgcd}(14n+3, 21n+4) = 1$. On peut effectuer l'algorithme d'Euclide !

$$\begin{aligned} 21n+4 &= 14n+3 \quad + \quad 7n+1 \\ 14n+3 &= 2\times(7n+1) \quad + \quad 1. \end{aligned}$$

donc, quel que soit l'entier n,

$$\text{pgcd}(21n+4, 14n+3) = \text{pgcd}(14n+3, 7n+1) = \text{pgcd}(7n+1, 1) = 1.$$

Donc la fraction est bien irréductible.

Solution de l'exercice 4
Là on a un petit problème, on ne peut pas appliquer l'algorithme d'Euclide directement (essayez, vous verrez le problème). Donc on doit se débrouiller pour trouver des paires de nombres de plus en plus simples ayant le même pgcd que n^3+n et $2n+1$. Posons $D = \text{pgcd}(n^3+n, 2n+1)$.

D'abord, 2 est clairement premier avec $2n+1$. Donc

$$D = \text{pgcd}\big(2(n^3+n), 2n+1\big).$$

Or,

$$2n^3+2n = n^2\cdot(2n+1) \quad + \quad (-n^2+2n),$$

donc $D = \text{pgcd}(2n+1, n^2-2n) = \text{pgcd}(2n+1, 2n^2-4n)$. Maintenant on peut faire l'algorithme d'Euclide comme dans l'exercice précédent.

$$\begin{aligned} 2n^2-4n &= n\cdot(2n+1) \quad - \quad 5n \\ 5n &= 2\cdot(2n+1) \quad + \quad n-2 \\ 2n+1 &= 2\cdot(n-2) \quad + \quad 5. \end{aligned}$$

Finalement, $D = \text{pgcd}(n-2, 5)$. Comme 5 est premier, ce pgcd vaut 5 si $5|n-2$, et 1 sinon.

Donc, la fraction est irréductible si et seulement si

$$n \not\equiv 2 \pmod 5.$$

Solution de l'exercice 5
Cf. le TD d'arithmétique C du stage d'été 2019 par Théo LENOIR ici, exercice 7.

On peut en fait faire plus simplement par récurrence (sur $n+m$ par exemple), pour obtenir que

$$\text{pgcd}(a^n-1, a^m-1) = \text{pgcd}(a^m-1, a^{n-m}-1) = a^{\text{pgcd}(m,n-m)}-1 = a^{\text{pgcd}(n,m)}-1.$$

Solution de l'exercice 6
Cf. le TD d'arithmétique C du stage d'été 2019 par Théo LENOIR ici, exercice 6.

Solution de l'exercice 7
Cf. le cours d'arithmétique pour débutant sur le site de la POFM, page 22 : ici.

Solution de l'exercice 8
L'idée de cet exercice est surtout de montrer l'intérêt de travailler avec des nombres négatifs

modulo n. Par exemple, si l'on a calculé que l'inverse de 2 modulo 7 est 4, alors on a aussi l'inverse de 4 (c'est 2), mais aussi de $-2(\equiv 5 \pmod 7)$, qui est $-4(\equiv 3 \pmod 7)$, et de -4, qui est -2. C'est donc très rapide.

Solution de l'exercice 9
On peut prendre $a = p - 2$. En effet, par le théorème de Fermat, pour tout entier k,

$$k^{p-2} \cdot k \equiv k^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Donc on a bien $k^{p-2} \equiv k^{-1} \pmod p$.

Solution de l'exercice 10
Cf. le cours d'arithmétique pour débutant sur le site de la POFM, page 23 : ici.

Solution de l'exercice 11
Cf. le cours d'arithmétique pour débutant sur le site de la POFM, page 23 : ici.

Solution de l'exercice 12
Clairement, $4a^2 - 1$ est impair, donc n doit l'être aussi. Dans ce cas 2 est premier avec n. Soit a n'importe quel entier congru à 2^{-1} modulo n. On a donc

$$4a^2 - 1 \equiv 4 \cdot (2^{-1})^2 - 1 \equiv 0 \pmod n.$$

Donc $n|4a^2 - 1$. Les n vérifiant l'énoncé sont exactement les nombres impairs.

Solution de l'exercice 13
On remarque que tous les couples de nombres possibles apparaissent exactement une fois.

Solution de l'exercice 14
Pour le premier système, les nombres 5, 6, et 7 sont premiers entre eux. Pas de subtilité, on y va à tâtons pour trouver une solution. $x = 2 + 6k$ résout la première équation.

On teste les k pour tels que $2+6k$ résolve la seconde équation, c'est-à-dire tels que $2+k \equiv 3 \pmod 5$. Clairement, $k = 1$ fonctionne. Donc $x = 2 + 6 \cdot 1 = 8$ résout les deux premières équations. Par le théorème des restes chinois, les solutions des deux premières équations sont les nombres de la forme $8 + k \cdot 5 \cdot 6$.

Pour la dernière équation, comme $x = 8+30k \equiv 1+2k \pmod 7$, on veut résoudre $1+2k \equiv 4 \equiv -3 \pmod 7$. Ça fonctionne bien pour $k \equiv -2 \pmod 7$. Donc $8 + (-2) \cdot 30 = -52$ vérifie le système d'équation (vérifiez !). De plus, par le théorème chinois, c'est l'unique solution modulo $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

Les solutions du système sont donc les nombres de la forme $210k - 52$.

Pour le second système, cette fois-ci, 6 et 10 ne sont pas premiers entre eux. Si x vérifie le système, alors $x \equiv 2 \pmod 6$, donc $x \equiv 0 \pmod 2$. De plus, $x \equiv 3 \pmod{10}$, donc $x \equiv 1 \pmod 2$. On obtient une contradiction. Donc le système d'équations n'a pas de solution.

Pour le troisième système, la congruence $x \equiv 10 \pmod{12}$ implique $x \equiv 1 \pmod 3$ et $x \equiv 2 \pmod 4$. Or, 3 et 4 étant premiers entre eux, le théorème chinois nous dit que le système de congruences

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3, \\ x \equiv 2 \pmod 4, \end{cases}$$

est équivalent à une unique congruence modulo 12, c'est donc forcément $x \equiv 10 \pmod{12}$.

De la même façon, on montre que la congruence $x \equiv 16 \pmod{21}$ est équivalente au système

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3, \\ x \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3, \\ x \equiv 2 \pmod 4, \\ x \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

On résout comme avant en utilisant le théorème chinois. 2 fonctionne pour les deux dernières équations, on rajoute $4 \cdot 7 = 28$ deux fois pour obtenir en plus la première équation. On trouve $x = 58 + 84k$.

Solution de l'exercice 15
L'armée peut se mettre par rangées de 11 puis de 13 puis de 17 et enfin de 19. On peut donc connaître le nombre de soldats modulo 11, modulo 13, etc. Par le théorème des restes chinois, comme $11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 > 10000$, on peut en déduire le nombre de soldats.

Solution de l'exercice 16
$1032^{1032} \equiv 0 \pmod 4$ et $1032^{1032} \equiv 7^{1032} \equiv (7^2)^{516} \equiv (-1)^{516} \equiv 1 \pmod{25}$. Par le théorème chinois, comme $76 \equiv 0 \pmod 4$ et $76 \equiv 1 \pmod{25}$, $1032^{1032} \equiv 76 \pmod{100}$. Les deux derniers chiffres sont 76.

Solution de l'exercice 17
Les solutions du système d'équations $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ pour i allant de 1 à r, sont exactement les nombres x congrus au nombre suivant modulo $m_1 m_2 \cdots m_r$:

$$a_1 i_1 (m_2 m_3 \cdots m_r) + a_2 i_2 (m_1 m_3 m_4 \cdots m_r) + \cdots + a_r i_r (m_1 m_2 \cdots m_{r-1}),$$

où i_k est un représentant dans $\mathbb{Z}$ de l'inverse de $m_1 m_2 \cdots m_{k-1} m_{k+1} \cdots m_r$ modulo m_k.

En effet, modulo m_1 par exemple, dans la somme précédente tous les termes disparaissent sauf $a_1 i_1 (m_2 m_3 \ldots m_r) \equiv a_1 \pmod{m_1}$ par définition de i_1. Et de même pour m_2, m_3, etc.

Solution de l'exercice 18
C'est un résultat classique qui peut se faire via le théorème des restes chinois.

Notons $\Phi(a)$ l'ensemble des nombres de $\{0, \ldots, a-1\}$ qui sont premiers avec a (qui a donc pour cardinal $\varphi(a)$). Un nombre k est premier avec a si et seulement si le reste de k modulo a (ici, par « modulo a », je veux dire « par la division euclidienne par a ») est dans $\Phi(a)$. Dans la phrase précédente, on peut remplacer a par b ou encore par ab. Un nombre k est premier avec ab si et seulement si k est premier avec a et k est premier avec b.

Si l'on prend deux nombres $a' \in \Phi(a)$ et $b' \in \Phi(b)$, par le théorème des restes chinois, on peut trouver un unique nombre k dans $\{0, \ldots, ab-1\}$ congru à a' modulo a et à b' modulo b. Par ce qu'on a dit ci-dessus, on obtient que $k \in \Phi(ab)$. Ça marche aussi dans l'autre sens : si $k \in \Phi(ab)$, alors le reste de k modulo a est dans $\Phi(a)$, et son reste modulo b est dans $\Phi(b)$.

Au final, on a construit une bijection entre les pairs de nombres (a, b) avec $a \in \Phi(a)$ et $b \in \Phi(b)$ et l'ensemble $\Phi(ab)$. Donc en regardant leurs cardinaux, on obtient bien que $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$.

Pour la fin de la preuve, voir par exemple https://www.mathraining.be/chapters/5?type=1&which=24.

Solution de l'exercice 19
Soient $p_0, \dots, p_{k-1}$ des nombres premiers distincts. Soit n une solution dans $\mathbb{Z}$ du système

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{p_0^2}, \\ n \equiv -1 \pmod{p_1^2}, \\ n \equiv -2 \pmod{p_2^2}, \\ \quad \vdots \\ n \equiv -(k-1) \pmod{p_{k-2}^2}. \end{cases}$$

Alors n est divisible par p_0^2, $n+1$ est divisible par p_1^2, etc. Donc n fournit un exemple.

(On peut aussi prendre $n = (k+1)! + 2$.)

Solution de l'exercice 20
Cf. le TD d'arithmétique C du stage d'été 2019 par Théo LENOIR ici, exercice 11.

Solution de l'exercice 21
Cf. le TD d'arithmétique C du stage d'été 2019 par Théo LENOIR ici, exercice 12.

Solution de l'exercice 22
Cf. le TD d'arithmétique B du stage d'été 2019 par Éva PHILIPPE et Rémi LESBATS ici, exercice 15.

Solution de l'exercice 23
Cf. le TD d'arithmétique C du stage d'été 2019 par Théo LENOIR ici, exercice 8.

Solution de l'exercice 24
Cf. le TD d'arithmétique C du stage d'été 2019 par Théo LENOIR ici, exercice 9.

Solution de l'exercice 25
Cf. le TD d'arithmétique C du stage d'été 2019 par Théo LENOIR ici, exercice 10.

2 Entraînement de mi-parcours

Énoncés

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple (x, y) de réels,

$$f(x + y) = x + f(f(y))$$

Exercice 2
Trouver tous les couples (k, n) d'entiers strictement positifs tels que n et $k - 1$ sont premiers entre eux, et n divise $k^n - 1$.

Exercice 3
Trouver tous les triplets (x, y, z) d'entiers positifs tels que $x^2 + y^2 = 3 \times 2016^z + 77$

Exercice 4
Trouver tous les couples (P, Q) de polynômes à coefficients entiers tels que pour tout couple (n, m) d'entiers,

$$P(n + Q(m)) = Q(n + P(m))$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

— Testons des valeurs particulières : pour $y = 0$, on a $f(x) = x + f(f(0))$ donc f est de la forme $f(x) = x + C$. Il suffit alors de réinjecter dans l'équation initiale : on a $f(x + y) = x + y + C = x + f(f(y)) = x + y + 2C$. En particulier pour $x = y = 0$, on a $C = 0$ donc f est la fonction identité.
Réciproquement la fonction identité convient car $f(x+y) = x+y = x+f(y) = x+f(f(y))$

— Testons des valeurs particulières : pour $x = 0$ on obtient $f(y) = f(f(y))$. Pour $y = 0$ on obtient $f(x) = x + f(f(0))$.
Montrons que f est injective : si $f(a) = f(b)$ pour a et b deux rationnels, on a $a+f(f(0)) = b + f(f(0))$ donc $a = b$.
En particulier comme $f(f(y)) = f(y)$ pour tout y rationnel, on en déduit que $f(y) = y$ par injectivité.
Réciproquement la fonction identité convient car $f(x+y) = x+y = x+f(y) = x+f(f(y))$

Solution de l'exercice 2
Pour $n = 1$, toute valeur de k convient. Supposons $n \geqslant 2$. Soit q le plus petit facteur premier de n. On sait que q divise $k^n - 1$, ainsi $k^n \equiv 1 \pmod{q}$. On sait donc que k est premier avec q, et son ordre (noté w) divise n. Par le théorème de Fermat, l'ordre divise $q-1$. Comme w divise n et $q - 1$, ses facteurs premiers sont plus petits que ceux de $q - 1$ donc strictement inférieurs

à q. De plus, ils sont aussi des facteurs premiers de n donc ils sont supérieurs ou égaux à q. En particulier, w n'a aucun facteur premier donc $w = 1$. On en déduit par définition de l'ordre que q divise $k^1 - 1 = k - 1$ et q divise n, ce qui contredit le fait que $k - 1$ et n sont premiers entre eux.

En particulier tous les couples solution sont les $(1, n)$ pour n entier strictement positif.

Solution de l'exercice 3

Regardons les facteurs premiers de 2016 : $2016 = 4 \times 504 = 16 \times 126 = 2^5 \times 63 = 2^4 \times 7 \times 9$. Ainsi il semble naturel de regarder l'équation modulo une puissance de 2 (par exemple 8), modulo 9 ou modulo 7 dans le cas où $z \geqslant 1$. Modulo 8 l'équation devient $x^2 + y^2 \equiv 5$. Pas de chance 4 et 1 sont des carrés. Modulo 9 l'équation devient $x^2 + y^2 \equiv 5$. Pas de chance 4 et 1 sont des carrés.

Regardons alors modulo 7 : si $z \geqslant 1$ l'équation devient $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 7$. Les carrés modulo 7 sont $0, 1, 4, 2$. Ainsi on a forcément $x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \pmod 7$, donc 7 divise x et y. En particulier 7^2 divise $x^2 + y^2$. Ainsi si $z \geqslant 2$, 7^2 divise 3×2016^z, donc 7^2 divise $77 = 7 \times 11$, contradiction.

Ainsi il reste à traiter les cas où $z \leqslant 1$. Si $z = 1$, on a montré que 7 divisait x et y. Posons $x = 7k$ et $y = 7l$ avec k et l des entiers positifs. On a alors $7^2(k^2 + l^2) = 7 \times (3 \times 288 + 11) = 7 \times 875 = 7^2 \times 125$ donc $k^2 + l^2 = 125$. Par symétrie on peut supposer $k \leqslant l$, on a alors $2k^2 \leqslant 125$ donc $k^2 \leqslant 62$ donc $k \leqslant 7$. Il reste ensuite à tester les différentes valeurs possibles de k : pour k entre 0 et 7, on obtient $l^2 = 125, 124, 121 = 11^2, 116, 109, 100 = 10^2, 89, 76$. Seuls 121 et 100 sont des carrés, donc les seuls triplets solutions sont $(14, 77, 1), (77, 14, 1), (35, 70, 1), (70, 35, 1)$. Réciproquement on vérifie que ceux-ci conviennent car $14^2 + 77^2 = 49 \times (4 + 121) = 49 \times 125 = 3 \times 2016 + 77$ et car $35^2 + 70^2 = 49 \times (25 + 100) = 49 \times 125 = 3 \times 2016 + 77$

Il ne reste plus qu'à traiter le cas où $z = 0$: on a $x^2 + y^2 = 80$. Modulo 4, $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 4$ donc comme un carré modulo 4 vaut 0 ou 1, x et y sont forcément pairs. En posant $x = 2k$ et $y = 2l$ avec k et l des entiers positifs, on obtient $k^2 + l^2 = \frac{80}{4} = 20$. De même k et l sont pairs, on pose donc $k = 2a$, $l = 2b$ avec a et b des entiers positifs, on obtient $a^2 + b^2 = 5$. En particulier on a $0 \leqslant a \leqslant 2$ et idem pour b. En testant toutes les possibilités on obtient $(a, b) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$, donc $(x, y, z) = (4, 8, 0)$ ou $(8, 4, 0)$ qui convient car $8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 3 + 77$.

Ainsi les triplets solutions sont $(4, 8, 0), (8, 4, 0), (14, 77, 1), (77, 14, 1), (35, 70, 1), (70, 35, 1)$.

Solution de l'exercice 4

— Première solution : testons des valeurs particulières de n : idéalement on aimerait trouver un n pertinent. Regarder $n = -Q(m)$ semble intéressant : on obtient $P(0) = Q(P(m) - Q(m))$ pour tout entier m. Deux cas se présentent à nous : soit le polynôme $P - Q$ n'est pas constant et dans ce cas il prend une infinité de valeurs. En particulier il existe une infinité d'entiers t pour lesquels $Q(t) = P(0)$. Ainsi par rigidité Q est constant et vaut $P(0)$. On a donc $P(n + P(0)) = P(0)$ pour tout entier x, donc en évaluant en $n - P(0)$, on obtient que $P(n) = P(0)$ pour tout entier n. On a donc $P = Q$.

Sinon $P - Q$ est constant et vaut C. Si $C = 0$ on a $P = Q$. Sinon, en réinjectant dans l'équation initiale, on obtient $Q(n + Q(m)) + C = Q(n + Q(m) + C)$. En évaluant en $n - Q(m)$, on obtient $Q(x) + C = Q(x + C)$. En particulier, pour tout entier k positif on a $Q(kC) = Q(0) + kC$, ce qui se prouve par récurrence : l'initialisation est immédiate, et si l'hypothèse est vraie au rang k, alors $Q((k + 1)C) = Q(kC + C) = Q(kC) + C = Q(0) + kC + C = Q(0) + (k + 1)C$.

On en déduit, comme $C \neq 0$, que pour une infinité de valeurs x on a $Q(x) = Q(0) + x$, donc Q est une fonction affine de coefficient directeur 1. Comme $P = Q + C$, P est aussi une fonction affine de coefficient directeur 1.

Vérifions les solutions trouvées : les couples de la forme (P, P) sont clairement solutions et les couples de la forme $(X + a, X + b)$ avec a et b entiers le sont car $P(n + Q(m)) = n + Q(m) + a = n + m + a + b$ et $Q(n + P(m)) = n + P(m) + b = n + m + a + b$ pour tout entier a, b.

— Soit n un entier, en appliquant l'équation initiale à $(n - Q(m), m)$, on a $P(n) = Q(n + P(m) - Q(m))$. Or $P(m) - Q(m)$ divise $Q(n + P(m) - Q(m)) - Q(n)$ qui vaut $P(n) - Q(n)$. On a donc que pour tout couple d'entiers (n, m), $P(n) - Q(n)$ divise $P(m) - Q(m)$. En particulier, on en déduit que $|P(n) - Q(n)|$ est constant sur $\mathbb{Z}$. Comme $P(n) - Q(n)$ prend au plus 2 valeurs, il en prend une une infinité de fois, le polynôme $P - Q$ est donc constant. On conclut alors de la même façon que dans la solution précédente.

3 Deuxième partie : Combinatoire et Géométrie

1 Axes radicaux (Mathieu Barré)

À venir…

2 Double comptage (Victor)

À venir…

3 Géométrie combinatoire (Olivier et Baptiste)

Exercice 1
On considère n points du plan, trois quelconques jamais alignés, tels que quatre quelconques soient toujours les sommets d'un quadrilatère convexe. Prouver que ces n points sont les sommets d'un n-gone convexe.

Exercice 2
On donne 2020 points dans le plan, trois quelconques jamais alignés. Démontrer que l'on peut construire 505 quadrilatères deux à deux disjoints, non nécessairement convexes, et dont les sommets sont les points données.

Exercice 3
On considère 2020 droites du plan, deux à deux non parallèles et trois à trois non concourantes. On appelle E l'ensemble de leurs points d'intersection.

On veut attribuer une couleur à chacun des points de E de sorte que deux quelconques de ces points qui appartiennent à une même droite et dont le segment qui les relient ne contient aucun autre point de E, soient de couleurs différentes.

Combien faut-il au minimum de couleurs pour pouvoir réaliser une telle coloration ?

Exercice 4
Soit P un polygone convexe à n côtés. Montrer qu'il existe un ensemble S de $n-2$ points tels que tout triangle dont les sommets sont des sommets de P contient exactement un point de S.

Exercice 5
Soit $n \geqslant 1$: on place dans le plan $2n$ points, trois quelconques non alignés. On en colorie n en bleu et n en rouge. Montrer qu'il est possible de tracer n segments qui ne se croisent pas, chaque segment reliant un point bleu à un point rouge, de telle manière que chaque point soit utilisé une seule fois.

Exercice 6
Soient 2020 droites dans le plan telles qu'il n'en existe pas trois s'intersectant en un même point. Turbo l'escargot se trouve sur un point n'appartenant qu'à une seule droite. Il se déplace le long des droites de la façon suivante. Il se meut sur une droite donnée jusqu'à ce qu'il arrive à une intersection. À chaque fois qu'il rencontre une intersection, il continue son

parcours sur l'autre droite, tournant à gauche ou à droite, alternant son choix à chaque intersection rencontrée. Aucun demi-tour n'est permis. Est-il possible qu'il parcoure un même segment de droite dans deux sens opposés durant son parcours ?

Exercice 7
Dans le plan, on considère un ensemble A de $n \geqslant 3$ points, trois quelconques jamais alignés. Prouver qu'il existe un ensemble S de $2n - 5$ points du plan tel que tout triangle dont les sommets sont des points de A contienne intérieurement au moins un point de S.

Exercice 8
(OIM 2013). Une configuration de 4027 points du plan est appelée colombienne si elle est constituée de 2013 points de couleur rouge et de 2014 points de couleur bleue, et si trois quelconques de ces points ne sont pas alignés. En traçant des droites, le plan est divisé en régions.

Un tracé de droites est appelé bon pour une configuration colombienne si les deux conditions suivantes sont vérifiées : • aucune droite tracée ne passe par un point de la configuration ; • aucune région ne contient des points de couleurs différentes.

Trouver la plus petite valeur de k telle que, pour chaque configuration colombienne de 4027 points, il existe un bon tracé de k droites.

Ceci est une reprise d'une partie du cours de Thomas Budzinski lors du stage d'été de 2016 et du cours de Pierre Bornsztein au stage junior de 2013.

Idées utiles :

Tester des petits cas (comme dans tous les problèmes de combinatoire)

Penser à la récurrence

Ordonner les points par abscisse croissante

Considérer l'enveloppe convexe

Trianguler les polygones

Exercice 9
On considère n points du plan, trois quelconques jamais alignés, tels que quatre quelconques soient toujours les sommets d'un quadrilatère convexe. Prouver que ces n points sont les sommets d'un n-gone convexe.

Solution de l'exercice 1
Soit C l'enveloppe convexe des n points. Par l'absurde : supposons que C ne soit pas un n-gone. Sans perte de généralité, on peut alors supposer que A_1 est un sommet de C et que A_n n'en est pas un. Alors, A_n est à l'intérieur de C (il ne peut être sur le bord sinon il y aurait trois des A_i qui seraient alignés). On effectue une triangulation de C à partir des diagonales issues de A_1 et, quitte à renuméroter, on peut supposer que A_n est à l'intérieur (comme ci-dessus) du triangle $A_1A_2A_3$. Mais alors, les points A_1, A_2, A_3, A_n ne sont pas les sommets d'un quadrilatère convexe, en contradiction avec l'énoncé. D'où le résultat.

Exercice 10
On donne 2020 points dans le plan, trois quelconques jamais alignés. Démontrer que l'on peut construire 505 quadrilatères deux à deux disjoints, non nécessairement convexes, et dont les sommets sont les points données.

Solution de l'exercice 2
Quitte à faire tourner la figure, on peut supposer que les points ont des abscisses deux à deux distinctes. On note P_i avec $1 \leqslant i \leqslant 2020$ les points ordonnés par abscisse croissante et, pour tout k entre 0 et 504, on considère un quadrilatère dont les sommets sont $P_{4i+1}, P_{4i+2}, P_{4i+3}$ et P_{4i+4}.

Exercice 11
On considère 2020 droites du plan, deux à deux non parallèles et trois à trois non concourantes. On appelle E l'ensemble de leurs points d'intersection.

On veut attribuer une couleur à chacun des points de E de sorte que deux quelconques de ces points qui appartiennent à une même droite et dont le segment qui les relient ne contient aucun autre point de E, soient de couleurs différentes.

Combien faut-il au minimum de couleurs pour pouvoir réaliser une telle coloration ?

Solution de l'exercice 3

La configuration contient au moins un triangle. Cela peut par exemple se prouver par récurrence sur le nombre de droites : trois droites forment un triangle et si on ajoute une droite, soit elle laisse le triangle intact, soit elle le sépare en un triangle et une quadrilatère. Par conséquent, il est impossible d'effectuer un coloriage avec deux couleurs.

On va maintenant montrer qu'un coloriage à trois couleurs est possible : on ordonne les points par abscisse croissante comme tout à l'heure, et on les colorie dans cet ordre. Au moment où on doit colorier un point $P = (d_i) \cap (d_j)$, on a déjà colorié au plus un de ses voisins sur (d_i) (celui qui est à gauche) et un sur (d_j) (aussi celui de gauche). On a donc au plus deux couleurs interdites et on peut toujours choisir la troisième. La réponse est donc 3 couleurs.

Exercice 12

Soit P un polygone convexe à n côtés. Montrer qu'il existe un ensemble S de $n-2$ points tels que tout triangle dont les sommets sont des sommets de P contient exactement un point de S.

Solution de l'exercice 4

On choisit S comme suit : notons A le point le plus à gauche de P (qui est unique quitte à "tourner" la figure) et Z le plus à droite. Pour tout sommet X de P sur l'arc de P au-dessus de A et Z, on prend dans S un point "juste en-dessous" de X. Pour tout sommet X de P sur l'arc de P au-dessus de A et Z, on prend dans S un point "juste au-dessus" de X. On a donc pris 1 point par sommet de P différent de A et Z, soit $|S| = n-2$.

Enfin, soient I, J et K des sommets de P. On peut supposer qu'ils sont ordonnés par abscisse croissante, donc J est différent de A et Z. Il y a alors à l'intérieur du triangle IJK un petit segment issu de J partant vers le haut (si J est sur l'arc bas) ou vers le bas (si J est sur l'arc haut). Ainsi il y a un point dans ce triangle, c'est le seul car les points associés aux sommets différents de IJK sont choisis très proche de leur sommet pour ne pas appertenir au triangle et la droite perpandiculaire à l'axe des absices passant par I ne rencontre IJK que en I.

Exercice 13

Soit $n \geqslant 1$: on place dans le plan $2n$ points, trois quelconques non alignés. On en colorie n en bleu et n en rouge. Montrer qu'il est possible de tracer n segments qui ne se croisent pas, chaque segment reliant un point bleu à un point rouge, de telle manière que chaque point soit utilisé une seule fois.

Solution de l'exercice 5

On raisonne par récurrence forte sur n : le résultat est trivial pour $n = 1$. Il suffit donc de séparer les $2n$ points par une droite de manière à avoir de chaque côté de la droite autant de points bleus que rouges, et de traiter séparément chaque côté de la droite. On considère le bord de l'enveloppe convexe des $2n$ points : si elle contient deux points de couleurs différentes, alors elle contient deux points consécutifs de couleur différente. On peut isoler ces deux points par une droite et on a gagné. Sinon, on suppose que le bord de l'enveloppe convexe est bleu.

Quitte à faire une rotation, les ordonnées des points sont deux à deux distinctes. On fait descendre une droite horizontale : le point le plus haut A_1 et le plus bas A_{2n} sont sur le bord donc sont bleus. On a donc un point bleu "en trop" au-dessus de la droite juste après avoir passé A_0 et un point rouge en trop juste avant A_{2n}. Comme on passe les points un par un on aura à un moment autant de points bleus que de rouges au-dessus de la droite, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Exercice 14
Soient 2017 droites dans le plan telles qu'il n'en existe pas trois s'intersectant en un même point. Turbo l'escargot se trouve sur un point n'appartenant qu'à une seule droite. Il se déplace le long des droites de la façon suivante. Il se meut sur une droite donnée jusqu'à ce qu'il arrive à une intersection. À chaque fois qu'il rencontre une intersection, il continue son parcours sur l'autre droite, tournant à gauche ou à droite, alternant son choix à chaque intersection rencontrée. Aucun demi-tour n'est permis. Est-il possible qu'il parcoure un même segment de droite dans deux sens opposés durant son parcours ?

Solution de l'exercice 6
On essaie de trouver un invariant qui permet de montrer que l'escargot ne peut pas aller dans le sens opposé. Cette preuve ne prend pas en compte de quel côté il tourne. Dans un problème de géométrie combinatoire les invariants sont souvent de type coloriage et dans notre cas on peut colorier le plan en deux couleurs tel que chaque région séparée par des droites soit d'une couleur et que deux régions se touchant par un côté soient de deux couleurs différentes. Ce coloriage est valable : raisonnons par récurrence sur le nombre de droite (n=0 ok), quand on rajoute une droite on inverse toutes les couleurs d'un côté de la droite alors deux régions se touchant sont bien de deux couleurs différentes. Maintenant que l'on a introduit le coloriage, on peut remarquer que la couleur à droite de l'escargot est toujours la même pour cela on peut faire un dessin d'une intersection et voir que l'escargot tournant à droite ou à gauche ne change pas cette propriété. Finalement on a bien que l'escargot ne peut pas parcourir un même segment dans un sens ou l'autre.

Exercice 15
Dans le plan, on considère un ensemble A de $n \geqslant 3$ points, trois quelconques jamais alignés. Prouver qu'il existe un ensemble S de $2n-5$ points du plan tel que tout triangle dont les sommets sont des points de A contienne intérieurement au moins un point de S.

Solution de l'exercice 7
Faisons un raisonnement similaire à l'exercice 4, ie on a ordonné les points selon leur abscisse (on peut tourner le repère si il y a un alignement) puis on prend un point juste au dessus et un juste en dessous de chaque sommet, cela fait $2n$ points, on enlève ceux associés aux deux sommets extrémaux. Les sommets ne sont pas alignés donc l'enveloppe convexe admet au moins trois sommets, il existe alors un sommet non encore utilisé, ce sommet admet un des points au dessus ou en dessous n'appartenant pas à l'enveloppe convexe (car l'angle entre les arêtes extérieurs vaut moins de 180^o), on enlève le point n'appertant pas à l'enveloppe convexe, finalement dans notre ensemble on a $2n-4-1$ points.

Vérification : soient I, J, K trois points de A, tel que $I < J < K$ alors un des deux points associés à J est dans le triangle dépendant de la position de l'arête de IK.

Exercice 16
(OIM 2013). Une configuration de 4027 points du plan est appelée colombienne si elle est

constituée de 2013 points de couleur rouge et de 2014 points de couleur bleue, et si trois quelconques de ces points ne sont pas alignés. En traçant des droites, le plan est divisé en régions.

Un tracé de droites est appelé bon pour une configuration colombienne si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- aucune droite tracée ne passe par un point de la configuration ;
- aucune région ne contient des points de couleurs différentes.

Trouver la plus petite valeur de k telle que, pour chaque configuration colombienne de 4027 points, il existe un bon tracé de k droites.

Solution de l'exercice 8

Ceci est le $C2$ (et P2) de 2013 que vous pouvez retrouver sur cette page :https://www.imo-official.org/problems/IMO2013SL.pdf.

4 Transformations du plan (Cécile)

À venir…

5 Combinatoire (Félix)

À venir…

6 TD de Géométrie (Alexander)

Axes radicaux

Nous avons corrigé les exercices 4 à 8 du TD de Mathieu Barré.

Chasse aux angles

Ces exercices de chasse aux angles sont issus des OIM 2019, 2018 et 2001.

Exercice 1
Deux cercles G_1 et G_2 s'intersectent en deux points M et N. Soit AB la droite tangente à ces deux cercles en A et B, respectivement, de sorte que M soit plus proche de AB que N. Soit CD la droite parallèle à AB et passant par M, avec C sur G_1 et D sur G_2. Les droites AC et BD se rencontrent en E, les droites AN et CD se rencontrent en P et les droites BN et CD se rencontrent en Q. Prouver que $|EP| = |EQ|$.

Exercice 2
Soit A_1 et B_1 deux points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC. Soit également P et Q deux points appartenant respectivement aux segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$, de sorte que les droites (PQ) et (AB) soient parallèles. Soit P_1 un point situé sur la droite (PB_1), tel que B_1 se retrouve strictement entre P et P_1, et tel que $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. De même, soit Q_1 un point, situé sur la droite (QA_1), tel que A_1 se retrouve strictement entre Q et Q_1, et tel que $\widehat{CQ_1Q} = \widehat{CBA}$.

Démontrer que les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques.

Exercice 3
Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Les points D et E sont situés sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, de sorte que $AD = AE$. Les médiatrices de $[BD]$ et $[CE]$ coupent les petits arcs AB et AC aux points F et G respectivement. Montrer que les droites (DE) ou (FG) sont parallèles (ou confondues).

Rappel du théorème de Céva

Dans le but de rappeler le théorème de Céva, nous traitons l'exercice suivant. Il est corrigé sur le site de Mathraining.

Exercice 4
Soit ABC un triangle. Soit D un point de (AC) tel que le cercle circonscrit à BCD est tangent à (AB) en B. Soit E un point de (AB) tel que le cercle circonscrit à BCE est tangent à (AC) en C. Soit F le point d'intersection entre (DE) et (BC). Montrer que (AF) passe par le milieu de $[BD]$ et le milieu de $[CE]$.

Relation d'Euler

La relation d'Euler est rappelée et l'exercice suivant est corrigé sur le site de Mathraining.

Exercice 5
On considère un triangle ABC dont le centre du cercle circonscrit se situe exactement sur son cercle inscrit. Si R désigne le rayon du cercle circonscrit à ABC et r le rayon du cercle inscrit, alors que vaut $\frac{R}{r}$?

4 Entraînement de fin de parcours

Test de fin de parcours groupe C

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Pour les exercices de géométrie, on attend de l'élève une figure propre, grande, où la propriété que l'on cherche à démontrer est apparente : s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points. Le respect de la consigne rapporte un point.

Exercice 1
Soient deux cercles extérieurs (disjoints et pas un inclus dans l'autre) Γ et Γ' de centre O, O'. Soit M, P des points de Γ et M', P' des points de Γ' tels que (OM) et $(O'M')$ sont parallèles et (OP) et $(O'P')$ sont parallèles. La droite (MM') recoupe Γ' en N et la droite (PP') recoupe Γ' en Q. Montrer que les points M, N, P, Q sont cocycliques.

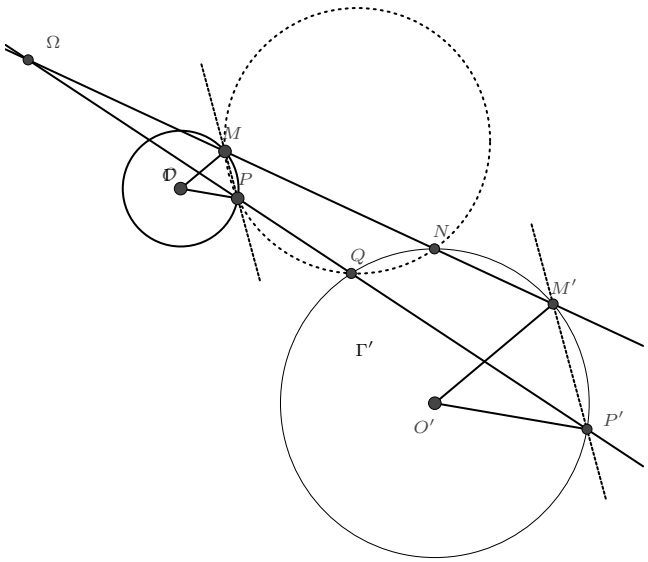
Exercice 2
Soit $n \geqslant 4$ un entier. Montrer combinatoirement, sans calculs, la formule suivante :

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

Exercice 3
Trouver tous les entiers $n \geqslant 3$ tel qu'il existe un ensemble de points du plan de cardinal n tels que pour tout triplet de points de cet ensemble deux à deux distincts, le triangle formé de ses trois points est rectangle.

Exercice 4
Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ au point A coupe la droite (BC) en un point P. Soient E et F les pieds des hauteurs issues des sommets B et C respectivement. Soit Q le point d'intersection de la droite (EF) avec la parallèle à la droite (BC) passant par le point A. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les droites (AM) et (PQ) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 1



Exercice 1

Les triangles OMP et $O'M'P'$ sont isocèles en O et O' respectivement. De plus, les angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ et $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'P'})$ sont égaux, donc ces deux triangles sont directement semblables. Comme de plus (OM) et $(O'M')$ sont parallèles, (MP) et $(M'P')$ le sont.

On en déduit $(MP, MN) = (M'P', M'N) = (QP', QN) = (QP, QN)$, donc $MNPQ$ est inscriptible.

Autre solution. Supposons que les cercles sont de rayons différents. Soit Ω le centre de l'homothétie h de rapport $\lambda > 0$ qui transforme le premier cercle en le deuxieme. Le point $h(M)$ vérifie la même condition de l'énoncé que le point M', donc $h(M) = M'$. De même, $h(P) = P'$. On a $\Omega N \cdot \Omega M' = \Omega Q \cdot \Omega P'$ (puissance d'un point par rapport à un cercle), donc $\lambda\Omega N \cdot \Omega M = \lambda Q \cdot \Omega P$. En simplifiant par λ et en utilisant encore la puissance d'un point par rapport à un ' cercle, on en déduit que M, N, P, Q sont cocycliques.

Si les cercles sont de même rayon, alors il existe une translation qui envoie M et P sur M' et P' respectivement, donc comme ci-dessus on a $(MP, MN) = (M'P', M'N) = (QP', QN) = (QP, QN)$.

Solution de l'exercice 2

$\binom{n}{2}$ est le nombre de paire d'éléments de $\{1, \dots, n\}$. $\binom{\binom{n}{2}}{2}$ est donc le nombre de manières de choisir une paire de paires d'éléments de $\{1, \dots, n\}$.

D'autre part, pour choisir une paire de paires d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ on peut soit choisir :

— 3 éléments distincts $\{1, \dots, n\}$. Dans ce cas, pour choisir une paire de paire, il faut encore choisir quel élément appartient à deux des paires. Il y a $\binom{n}{3}$ manières de choisir les 3 éléments de $\{1, \dots, n\}$, et 3 manières de choisir quel élément appartient à deux paires, soit en tout $3\binom{n}{3}$ possibilités.

— 4 éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, notons les a, b, c, d. Il y a alors 3 possibilités d'associer ces 4 éléments de en deux paires : $\{a, b\}, \{c, d\}$ ou $\{a, c\}, \{b, d\}$ ou $\{a, d\}, \{b, c\}$. Il y a donc en tout $3\binom{n}{4}$ possibilités.

On conclut que

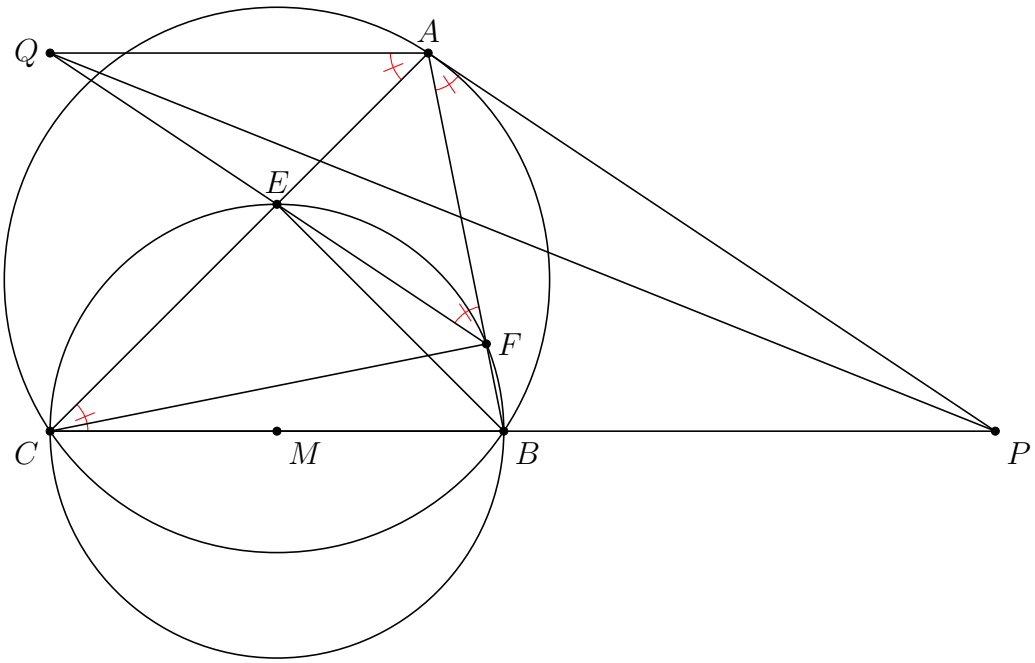
$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

Solution de l'exercice 3

La propriété est vérifiée pour $n = 3$ et $n = 4$ car il suffit de prendre un triangle rectangle et un rectangle.

Montrons que pour $n \geqslant 5$ il n'existe pas de tels points. On peut remarquer par croissance que si pour n la propriété est fausse alors elle est fausse pour tous les entiers $\geqslant n$. Considérons l'enveloppe convexe des points. La somme des angles d'un m-gone vaut $(m-2)\cdot 180$ avec m le nombre de sommet de l'enveloppe convexe, si $m \geqslant 5$ alors il existe un sommet avec un angle de plus de 90 degré car $(m-2)\cdot 180 > 90 \cdot m \Leftrightarrow m > 4$. Ensuite on prend un triangle formé par un tel triangle et de ces deux voisins il admet de plus de 90 degré donc comme la somme des angles du triangle fait 180 degré alors les deux autres angles ne peut valoir 90. Ainsi on a une contradiction et alors l'enveloppe convexe est un triangle ou un quadrilatère. Si il existe un point noté D à l'intérieur de cette enveloppe alors par triangulation on sait que ce point appartient à un triangle noté ABC. Parmi les angles $\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}$ au moins un des trois est strictement supérieur à 90 ainsi on trouve un triangle non droit (ça peut être un triangle plat si trois points sont alignés). Pour conclure les seuls points du plan sont les sommets de l'enveloppe convexe donc la propriété est seulement vérifée pour $n \leqslant 4$

Solution de l'exercice 4



D'après le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{BCA} = \widehat{BAP}$. De plus, par définition des points E et F, $\widehat{BEC} = 90° = \widehat{BFC}$. Ainsi

$$\widehat{EFA} = \widehat{BCE} = \widehat{BCA} = \widehat{QAC}$$

Donc la droite (AQ) est tangente au cercle circonscrit au triangle AEF. On a donc $QA^2 = QE \cdot QF$ par puissance d'un point. Donc le point Q est sur l'axe radical du cercle de centre M passant par le point B et du cercle de rayon nul et de centre A. Par ailleurs on a aussi $PA^2 = PB \cdot PC$. Donc le point P est aussi sur cet axe radical. La droite (PQ) est donc perpendiculaire au segment joignant les centres des deux cercles, à savoir le segment $[AM]$.

5 Derniers cours

1 Dénombrabilité (Tristan)

Résumé et remerciements

Voici un petit cours d'introduction à la dénombrabilité. Merci à M. Pommellet dont ce cours est largement inspiré. On étudie quelques résultats classiques de dénombrabilité, on fini par étudier le théorème de Cantor Bernstein qui généralise l'étude de l'équipotence de deux ensembles.

Définitions

Définition 1.
Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$.

Définition 2.
Un ensemble est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

Notation.
Dans la suite de ce cours, on notera $A \sim B$ s'il existe une bijection $\phi : A \to B$, on dit alors que A et B ont même cardinal ou encore qu'ils sont équipotents. En particulier, E est dénombrable si et seulement si $A \sim \mathbb{N}$.

Remarque 3. Une bijection de $\phi : \mathbb{N} \to A$ permet d'écrire que $A = \{\phi(n) | n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, A est dénombrable si et seulement on peut énumérer ses éléments. On utilisera souvent cette version car elle est plus commode dans l'écriture des preuves.

Exemple 4.

— $\mathbb{N}^*$ est dénombrable car $x \mapsto x + 1$ est bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
— $\mathbb{Z}$ est dénombrable car ($n \mapsto 2n$ si $n \geqslant 0$ et $n \mapsto 2|n| - 1$ sinon) est bijective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.

On va chercher des façons de montrer qu'un ensemble est au plus dénombrable, voici quelques critères plus souple que notre définition de départ.
On aura d'abord besoin d'un lemme intermédiaire.

Lemme 5.
Si $A \subset \mathbb{N}$ alors A est au plus dénombrable.

Démonstration. Si A est fini c'est bon. Sinon on construit f par récurrence comme ce qui suit : $f(0) = min(A)$ qui est bien défini car tout sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un élément minimum. Si $f(0), ..., f(k-1)$ construits, alors on définit $f(k) = min(A - \{f(0), ..., f(k-1)\})$. Alors par définition on a $f(k) \neq f(j)$ pour $j < k$ donc f ainsi construite est injective. Est-elle surjective ? On se donne un $a \in A$. Comme $A \subset \mathbb{N}$ on que $\{b \in A | b < a\}$ est fini et donc il existe $k \in \mathbb{N}, f(k) = a$. Bref, $A \sim \mathbb{N}$. □

On peut remplacer la bijectivité par une injectivité si l'ensemble d'arrivée est dénombrable.

Théorème 6.
Critère injectif On suppose F au plus dénombrable, on suppose qu'il existe une injection $f : E \to F$ où E est un ensemble quelconque, alors E est au plus dénombrable.

Démonstration. On peut supposer F infini, le cas fini étant clair. Alors on se donne $g : F \to \mathbb{N}$ bijective alors $g \circ f$ est une bijection de E dans $g \circ f(E) \subset \mathbb{N}$. Et donc par le lemme précédent, on a la dénombrabilité de E. □

Analoguement, on peut remplacer la bijectivité par une surjectivité si l'ensemble de départ est dénombrable.

Théorème 7.
Critère surjectif Si $s : E \to F$ une surjection, si E est au plus dénombrable, alors F l'est aussi.

Démonstration. $y \in F$ on a $s^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ alors on choisit $x \in s^{-1}(\{y\})$ et on pose $f(y) = x$. Alors on vient de définir une injection de $F \to E$. En effet, si $f(y) = f(z) = x$ alors $s(x) = y = z$ et donc on se ramène au théorème précédent ce qui assure que F est au plus dénombrable. □

Remarque 8. On peut interpréter les deux théorèmes comme ce qui suit : s'il existe une injection de $E \to F$ alors "E a un cardinal inférieur à F", dans l'idée, il y a assez d'éléments dans F pour associer à tout élément de E un élément différent. De même, s'il existe une surjection de $E \to F$ alors le cardinal de E est supérieur à celui de F.
De plus, on remarque que $\mathbb{N}$ "a le deuxième plus petit cardinal possible" dans le sens ou un ensemble E est soit fini, soit infini et donc on peut trouver une suite d'éléments deux à deux distincts dans cet ensemble qui donne une injection de $\mathbb{N}$ dans E . Ainsi, soit E est fini, soit $\mathbb{N}$ s'injecte dans dans E et donc $\mathbb{N}$ "a un cardinal inférieur à E". Ici, l'hypothèse du premier théorème donne que E a un cardinal plus petit que $\mathbb{N}$ et on en déduit que les cardinaux sont en fait les mêmes.
Tout ceci n'est pas très formel mais on peut au moins se poser la question suivante : si E a un cardinal inférieur à F (ie il existe une injection $f : E \to F$) et si F a un cardinal inférieur à E (i.e. il existe une injection $g : F \to E$) alors E et F ont-ils même cardinal ? (ie existe-il une bijection $h : E \to F$). La réponse est oui ! C'est le théorème de Cantor Bernstein dont on vient de montrer un cas particulier pour les ensembles dénombrables.

Ensembles dénombrables classiques

On exhibe des ensembles dénombrables classiques (comme $\mathbb{Q}$) et on montre que les unions dénombrables et les produits cartésien d'ensembles dénombrables sont aussi dénombrables. Ce qui donnera des opérations permettant de créer des ensembles dénombrables à partir des ensembles classiques. On commence par la dénombrabilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Théorème 9.
$\mathbb{N}^2$ L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration. On donne deux preuves, la première qui est la plus expéditive consiste à écrire $f(n, m) = 2^n 3^m$ qui est une injection de $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ (unicité de la décomposition en facteurs premiers) et donc par ce qui précède on a la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$.
On peut chercher directement une bijection de $\mathbb{N}^2$ ce qui revient donc à énumérer $\mathbb{N}^2$. On représente donc notre ensemble par un quadrillage dans le plan puis on le parcourt

$(0,0),(0,1),(1,0),(2,0),(1,1),(0,2),...$ bref on parcourt en prenant les (n,m) par $n+m$ croissant. On peut se représenter le parcours graphiquement ce qui revient à faire des serpentins et cela constitue une énumération de $\mathbb{N}^2$. □

On déduit directement de ce théorème le lemme de stabilité suivant :

Lemme 10.
Soient E, F deux ensembles au plus dénombrables, alors $E \times F$ est aussi au plus dénombrable.

Démonstration. On se donne deux injection $g : E \to \mathbb{N}, f : F \to \mathbb{N}$ et alors $h(x,y) = (g(x), f(y))$ est injective de $E \times F \to \mathbb{N}^2$ qui est dénombrable. Donc $E \times F$ est au plus dénombrable. □

Exemple 11.
On remarque tout de suite qu'on a par récurrence $\mathbb{N}^p$ dénombrable pour tout $p \in \mathbb{N}$. Cela illustre comment on obtient facilement des ensembles dénombrables à partir d'opérations sur des ensembles connus. Remarquons tout de même que si on note $q_1 < q_2 < ... < q_p$ des premiers distincts, $f(n_1, ..., n_p) = q_1^{n_1}...q_p^{n_p}$ donne une injection de $\mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$.

On obtient alors un résultat fondamental de dénombrabilité : $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Théorème 12.
$\mathbb{Q}$ L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable.

Démonstration. On écrit pour tout rationnel q, $f(q) = (a,b)$ où $q = \frac{a}{b}$ avec $pgcd(a,b) = 1$ et $f(0) = (0,0)$. On construit donc une injection de $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}^2$ ce qui assure la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$. □

Une dernière opération fondamentale est l'union dénombrable.

Théorème 13.
Union dénombrable Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles au plus dénombrables, alors $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un ensemble au plus dénombrable.

Démonstration. On peut supposer sans nuire à la généralité que $\forall n, A_n \neq \emptyset$ (sinon on les enlève de l'union) et on se donne donc une surjection $f_n : \mathbb{N} \to A_n$. Alors on pose $g : \mathbb{N}^2 \to A, (n,m) \mapsto f_n(m)$ qui est une surjection de $\mathbb{N}^2 \to A$ qui est donc dénombrable. □

Remarque 14. On comprend l'importance de la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$ ainsi que des critère de dénombrabilité énoncés plus haut.

On peut alors se demander si les opérations restantes laissent les ensembles dénombrables, pour l'intersection c'est vrai car si E est dénombrable, pour tout ensemble F on a $E \cap F \subset E$ et donc l'intersection est dénombrable. Qu'en est il des unions non dénombrables ou encore des ensembles du type E^F ? Pour cela, on va avoir besoin de pouvoir montrer qu'un ensemble est non dénombrable.

Procédé diagonal de Cantor

La technique la plus classique est de supposer par l'absurde que notre ensemble est dénombrable et donc on l'énumère. On construit un objet de notre ensemble qui diffère de tous nos objets énumérés. Pour cela on construit notre objet par un procédé diagonal dont le nom prendra tout son sens lorsqu'on donnera l'exemple suivant.

Théorème 15.
$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. On suppose par l'absurde que l'on peut énumérer les éléments de $[0,1[$ et on les écrit $a_n = 0.x_{1,n}...x_{m,n}...$ l'écriture en base 10. On construit a comme ce qui suit $a = 0.x_1...x_m...$ où $x_i = 8$ si $x_{i,i} \neq 8$ et $x_i = 1$ sinon. Alors on a construit un $a \in [0,1[$ qui n'est pas dans l'énumération car $a \neq a_i$ car ils diffèrent sur leurs $i-$ ème décimale. Cela constitue une contradiction. □

Remarque 16. On a donc par le même principe la non dénombrabilité des intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$. On en déduit donc que $\mathbb{R}$ est non dénombrable (car sinon $[0,1[\subset \mathbb{R}$ le serait aussi).
Remarquons que comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on a $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ et donc on vient de montrer l'existence de nombres irrationnels. En fait, comme $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable (sinon $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ le serait) on a montré qu'il y a "beaucoup" de nombre irrationnels.

Revenons à nos questions du départ, une union non dénombrable d'ensembles dénombrables l'est elle aussi ? La réponse est non car $\mathbb{R} = \cup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$. De même si E, F sont dénombrables, a t'on E^F dénombrable ? La réponse est non aussi, on peut prendre $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Le procédé de Cantor s'applique : supposons l'existence d'une énumération $(u_n) = (x_{0,n}, x_{1,n}, ..., x_{m,n}, ...)$ des suites d'entiers positifs. Alors on définit $(u) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ où $x_i = x_{i,i} + 1$ alors (u) n'est pas dans notre énumération. En fait, on peut même montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$!

Nombres algébriques

Définition 17.
On appelle nombre algébrique un nombre z tel qu'il existe un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ tel que $Q(z) = 0$.

Remarque 18. Si q est rationnel alors $X - q \in \mathbb{Q}[X]$ est non nul et s'annule en q donc q est algébrique. De plus, il existe des algébriques non rationnels comme $\sqrt{2}$ qui est annulé par $X^2 - 2$. Une question naturelle est alors "est ce que tout réel est algébrique ?". La réponse est non et la construction du premier nombre non algébrique est due à Liouville. On va montrer le résultat par une preuve non constructiviste. On va pour cela montrer que l'ensemble A des nombres algébriques est dénombrable et donc qu'il existe (même beaucoup !) des nombres non algébriques (qu'on appelle nombres transcendants).

Première étape : On se ramène à des polynômes entiers.

Lemme 19.
Un nombre est algébrique si et seulement si il est annulé par un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. On remarque que si $Q(z) = 0$ alors pour tout entier A on a $AQ(z) = 0$. On prend donc A le ppcm des entiers apparaissant aux dénominateurs des coefficients et on a $AQ \in \mathbb{Z}[X]$. □

Deuxième étape : On montre que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
Démonstration. On note $\mathbb{Z}_n[X]$ l'ensemble des polynômes entiers de degré n. Alors $\mathbb{Z}_n[X] \sim \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n$ (on a le choix de chaque coefficient sauf le coefficient dominant qui est non nul).

Alors $\mathbb{Z}_n[X]$ est dénombrable comme produit carthésien d'ensembles dénombrables. Puis on écrit $\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z} \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{Z}_n[X])$ est donc dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables. □

Troisième étape : On écrit $A = \cup_{P\in\mathbb{Z}[X]-\{0\}} Z(P)$ où $Z(P) = \{a | P(a) = 0\}$ est l'ensemble des zéros de P.

Théorème 20.
A L'ensemble A est dénombrable.

Démonstration. On remarque que pour $P \neq 0$ on a $Z(P)$ fini et donc $A = \cup_{P\in\mathbb{Z}[X]-\{0\}} Z(P)$ est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. □

Cantor Bernstein

On énonce et on montre le résultat annoncé plus haut et on profite pour en donner quelques applications.

Théorème 21.
Cantor Bernstein Soient E, F sont deux ensembles, il existe une bijection de E dans F si et seulement si il existe à la fois une injection de $f : E \to F$ et une injection de $g : F \to E$.

Lemme 22.
On montre d'abord que si il existe une injection de A dans $B \subset A$, alors il existe une bijection de $A \to B$.

Démonstration. On se donne une telle injection u et on définit $C_0 = A - B$ et $u(C_n) = C_{n+1}$ ainsi que $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. On pose $v(x) = x$ si $x \in A - C$ et $v(x) = u(x)$ sinon. On va montrer que v convient. v est à valeur dans B. Pour la surjectivité on prend $y \in B$ si $y \notin C$ on a $v(y) = y$. Sinon il existe $n \geqslant 1$ (car $y \notin C_0$). Et il existe $x \in C, u(x) = v(x) = y$. Comme $u(C) \subset C$ on a l'injectivité de v sur C (grâce à celle de u), sur $A - C$ et donc sur A (car les images sont disjointes). Donc v convient. □

On conclut maintenant

Démonstration. On note $B = g(F)$, $u = g \circ f$ est une injection de $E \to B \subset E$. Donc il existe une bijection v de $E \to B$. g se corestreint à une bijection $h : E \to B$. On prend alors $k = h^{-1} \circ v$ qui est une bijection de $E \to F$. □

Voici quelques applications :

Théorème 23.
Quelques équipotences Montrer que les paires d'ensembles suivantes sont équipotents.
1) $[0, 1]$ et $[0, 1[$ sont équipotents.
2) $[0, 1]$ et $\mathbb{R}$.
3) $\{0, 1, 2..., 9\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$.
4) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$.

Démonstration. 1) C'est ce qu'on appelle le principe de l'hôtel de Hilbert. On se donne la suite $x_n = \frac{1}{2^n}$ et on envoie $0 \mapsto 1$ et $x_n \mapsto x_{n+1}$ et on laisse les autres points invariants. Cela définit une bijection de $[0, 1]$ dans $]0, 1]$. De façon plus générale, tout ensemble A infini est équipotent à $A - \{a\}$.

2) On peut par exemple utiliser la fonction $\arctan$ qui est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. De là, $[-1,1]$ est équipotent à $\mathbb{R}$ (on utilise deux fois 1)). et comme $[-1,1]$ est équipotent à $[0,1]$ (avec $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ par exemple) on a le résultat voulu. On peut aussi utiliser $x \mapsto \frac{1}{x}+1$ pour mettre en bijection $]1,2[$ et $]1,\infty[$ et donc on obtient une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[0,2[$ puis on fait la même chose sur les négatifs.
3) A chaque réel on lui associe la suite de ses décimales en binaire, c'est une fonction injective de $[0,1[\to \{0,1,2...,9\}^{\mathbb{N}}$, réciproquement, à une suite de $\{0,1,2...,9\}^{\mathbb{N}}$ on associe le réel de $[0,1[$ dont les décimales en base 11 sont les entiers de la suite. On a donc deux injections et Cantor Bernstein permet de conclure. Pourquoi ne pas tout de suite prendre l'écriture en base 10 ? En fait on a des problèmes pour l'écriture non propre de x (c'est à dire avec une infinité de 9 à la fin). Par exemple, $0.19999999999999... = 0.2$. et donc on perdrait l'injectivité car les suites $(1,9,...,9,...)$ et $(2,0,...,0,...)$ auraient même image. On comprend donc l'utilité de Canotr Bernstein car construire des injections est facile, mais pour les bijections, ça l'est beaucoup moins.
4) On injecte d'abord $\{0,1,2...,9\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Il reste à faire l'injection dans l'autre sens. On montre d'abord que $P(\mathbb{N})$ s'injecte dans $\mathbb{R}$. Pour cela on associe à un sous ensemble A un réel (en base 3) $a = 0.x_1...x_m...$ où $x_i = 1$ si $i \in A$ et 0 sinon. Maintenant on injecte $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $P(\mathbb{N})$. Pour cela, à une suite $x_0,...,x_n,...$ on associe l'ensemble défini par $0,...,x_0 \in A$ puis $x_0+1,...,x_0+x_1 \notin A$ puis $x_0+x_1+1,...,x_0+x_1+x_2 \in A$. Puis ainsi de suite. □

2 Méthode probabiliste (Théo)

À venir…

VI. Groupe D

Contenu de cette partie

1 Première partie : Combinatoire et Arithmétique

1 Combinatoire (Omid)

À venir...

2 Arithmétique (Raphaël)

À venir...

3 Combinatoire : double-comptage (Matthieu Piquerez)

Nous avons fait le TD de double-comptage du stage d'été 2012, premier TD de combinatoire avancé, deuxième période, par Bodo LASS, (ou par Louis NEBOUT, ça n'est pas très clair), disponible ici.

4 Arithmétique (Théo)

Exercices

Exercice 1
(IMO 2009 P1) Soit n un entier strictement positif et $a_1, \dots, a_k$ avec $k \geqslant 2$ des entiers strictement positifs distincts de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ tels que n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$ pour $i = 1, \dots, k-1$. Montrer que n ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

Exercice 2
(IMO SL 2007 N2) Soient $b, n > 1$ des entiers. Supposons que pour tout $k > 1$, il existe un entier a_k tel que k divise $b - a_k^n$. Montrer qu'il existe A un entier tel que $b = A^n$.

Exercice 3
(IMO SL 2009 N2) Un entier strictement positif N est dit joli si $N = 1$ ou si N s'écrit comme un produit d'un nombre pair de facteurs premiers (pas forcément distincts). Pour toute paire (a, b) d'entiers strictement positifs, on pose $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a) Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs distincts (a, b) tels que $P(1), P(2), \dots, P(50)$ sont jolis.

b) Montrer que si $P(n)$ est joli pour tout entier $n > 0$, alors $a = b$

Exercice 4
(IMO 2016 P4) Un ensemble d'entier naturels est dit parfumé s'il contient au moins deux éléments et si chacun de ses éléments possède un facteur premier en commun avec au moins l'un des autres éléments. Soit $P(n) = n^2 + n + 1$. Déterminer le plus petit entier strictement positif b pour lequel il existe un entier positif a tel que l'ensemble

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

soit parfumé

Exercice 5
(Olympiade Francophone 2020) Soit $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ et soit m un entier. On suppose que pour tout sous-ensemble fini non vide S de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier.

Montrer que parmi les entiers $a_1, a_2, \ldots$, seul un nombre fini possède moins de m facteurs premiers distincts.

Exercice 6
(Balkan MO 2016) Déterminer tous les polynômes unitaires à coefficients entiers f vérifiant la condition suivante : il existe un entier strictement positif N tel que pour tout nombre premier p tel que $f(p)$ est un entier strictement positif, p divise $2(f(p)!) + 1$.

Exercice 7
(IMO SL 2011 N2) Soit $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\cdot\ldots\cdot(x+d_9)$ avec $d_1, \ldots, d_9$ des entiers distincts. Montrer qu'il existe N un entier tel que pour tous les entiers $x \geqslant N$ le nombre $P(x)$ est divisible par un nombre premier plus grand que 20.

Exercice 8
(IMO 2017 P1) Pour tout entier $a_0 > 1$, on définit la suite $a_0, a_1, \ldots$ par $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ si $\sqrt{a_n}$ est un entier et $a_{n+1} = a_n + 3$ sinon pour tout $n \geqslant 0$.

Déterminer toutes les valeurs de a_0 pour lesquelles il existe un nombre A tel que $a_n = A$ pour une infinité de valeurs de n.

Exercice 9
(USAMO 2018 P4) Soit p un nombre premier et soient $a_1, \ldots, a_p$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier k tel que les nombres

$$a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$$

donnent au moins $\frac{1}{2}p$ restes distincts modulo p.

Exercice 10
(BXMO 2016) Soit n un entier strictement positif. On suppose que ses diviseurs positifs peuvent être répartis par paires de telle sorte que la somme de chaque paire est un nombre premier. Prouver que ces nombres premiers sont tous distincts et qu'aucun d'eux ne divise n.

Exercice 11
(IMO SL 2006 N3) On définit pour tout entier n strictement positif $f(n)$ par

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor \right)$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

(a) Montrer que $f(n+1) > f(n)$ pour une infinité d'entiers n.

(a) Montrer que $f(n+1) < f(n)$ pour une infinité d'entiers n.

Exercice 12

(IMO SL 2015 N1) Déterminer tous les entiers M tels que la suite $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ définie par $a_0 = \frac{2M+1}{2}$ et $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ pour $k \geqslant 0$ contient au moins un terme entier.

Exercice 13

(USA TSTST 2018 P8) Déterminer tous les entiers $b > 2$ tels qu'il existe une infinité d'entiers n tels que n^2 divise $b^n + 1$.

Exercice 14

(USA TST for EGMO 2019, P3) Soit n un entier strictement positif tel que

$$\frac{1^k + 2^k + \ldots n^k}{n}$$

est un entier pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 99\}$. Montrer que n ne possède pas de diviseurs compris entre 2 et 100.

Exercice 15

(RMM 2015 P5) Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Pour un entier strictement positif k, soit $R(k)$ le reste de la division de k par p, avec $0 \leqslant R(k) \leqslant p-1$. Déterminer tous les entiers strictement positifs $a < p$ tels que pour tout entier $m = 1, 2, \ldots, p-1$

$$m + R(ma) > a$$

Solutions

Exercice 1

(IMO 2009 P1) Soit n un entier strictement positif et $a_1, \ldots, a_k$ avec $k \geqslant 2$ des entiers strictement positifs distincts de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ tels que n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$ pour $i = 1, \ldots, k-1$. Montrer que n ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

Solution de l'exercice 1

On traduit les relations données sous la forme suivante : pour tout $1 \leqslant i \leqslant k-1$ on a $a_i a_{i+1} \equiv a_i \mod n$. On regarde ce que traduise ces relations pour $k = 3$:

$$a_1 a_2 \equiv a_1 \mod n$$

$$a_2 a_3 \equiv a_2 \mod n$$

Alors $a_1 \equiv a_1 a_2 \equiv a_1 a_2 a_3 \mod n$. Ainsi, si $a_3(a_1 - 1) \equiv 0 \mod n$, alors $a_1 \equiv a_2 a_3 a_1 \equiv a_2 a_3 \equiv a_2 \mod n$ ce qui est impossible car a_1 et a_3 sont censé donner des restes distincts modulo n.

On obtient la généralisation suivante :

Par réccurence sur j, si on suppose par l'absurde que $a_k a_1 \equiv a_k \mod n$, on déduit

$$a_1 \equiv a_1a_2 \equiv \ldots \equiv a_1a_2 \ldots a_j \equiv \ldots a_1a_2 \ldots a_k \mod n$$

pour tout $2 \leqslant j \leqslant a_k$. D'autre part on a aussi, puisque $a_ka_1 \equiv a_k \mod n$ par l'absurde :

$$a_1 \equiv a_1a_2 \ldots a_k = a_2 \ldots a_ka_1 \equiv a_2 \ldots a_k \equiv a_2 \ldots a_{k-1} \equiv a_2 \ldots a_j \equiv a_2 \mod n$$

et on retombe sur une contradiction car a_1 et a_2 ont des restes distincts modulo n.

Exercice 2
(IMO SL 2007 N2) Soient $b, n > 1$ des entiers. Supposons que pour tout $k > 1$, il existe un entier a_k tel que k divise $b - a_k^n$. Montrer qu'il existe A un entier tel que $b = A^n$.

Solution de l'exercice 2
Pour montrer que b est une puissance $n-$ème, on montre que pour tout nombre premier p, n divise $v_p(b)$. On fixe donc un nombre premier p et on pose $a = v_p(b)$.

On teste l'hypothèse de l'énoncé pour des valeurs particulières et intelligentes de k.

Pour $k = p$, on obtient qu'il existe une entier a_p tel que p divise $b - a_p^n$. Malheureusement, on ne peut rien conclure de cette substitution.

On teste alors pour $k = p^a$, ce qui ne nous apporte pas d'informations non plus.

Pour $k = p^{a+1}$, il existe un entier $a_{p^{a+1}}$ tel que p^{a+1} divise $b - a_{p^{a+1}}^n$. On déduit que

$$b \equiv a_{p^{a+1}}^n \mod p^{a+1}$$

Or p^a divise b donc $a_{p^{a+1}}^n$ est divisble par p^a mais pas par p^{a+1}. Comme $a_{p^{a+1}}^n$ est une puissance $n-$ème, cela implique que p^a soit aussi une puissance $n-$ ème donc n divise a, ce que l'on désirait.

Exercice 3
(IMO SL 2009 N2) Un entier strictement positif N est dit joli si $N = 1$ ou si N s'écrit comme un produit d'un nombre pair de facteurs premiers (pas forcément distincts). Pour toute paire (a, b) d'entiers strictement positifs, on pose $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a) Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs distincts (a, b) tels que $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ sont jolis.

b) Montrer que si $P(n)$ est joli pour tout entier $n > 0$, alors $a = b$

Solution de l'exercice 3
a) On désire trouver des entiers a et b tels que le nombre de facteurs premiers des entiers $x + a$ et $x + b$ ont la même parité. Cela revient à trouver deux suites de 50 entiers consécutifs $a + 1, \ldots, a + 50$ et $b + 1, \ldots, b + 50$ tels que le nombre de facteurs premiers de $a + 1$ et $b + 1$ aient la même parité, le nombre de facteurs premiers de $a + 2$ et $b + 2$ aient la même parité, etc...

Si on pose $f(x) = 0$ si le nombre de facteurs premiers de x est pair et $f(x) = 1$ s'il est impair, on constate qu'il n'y a que 2^50 suites de 0 ou 1 possibles pour la suite $f(a+1), \ldots, f(a+50)$.

Ainsi, parmi les suites $(f(1), \ldots, f(50))$; $(f(51), \ldots, f(100))$; ... ; $(f(2^{50}+1), \ldots f(2^{50}+50))$, il y a deux suites égales. On dispose donc de deux entiers a et b tels que $(f(a+1), \ldots f(a+50))$ et $(f(b + 1), \ldots, f(b + 50))$ soient égales. Les entiers a et b conviennent donc.

b) On peut se convaincre, à la lumière de la question précédente, que la fonction $f(x)$ introduite à la question précédente n'est pas périodique à partir d'un certain rang et donc que les entiers a et b ne peuvent pas être distincts, mais on propose un raisonnement rigoureux :

On suppose par l'absurde que $a \neq b$. On observe que $P(k(b - a) - a) = k(k + 1)(b - a)^2$ pour k un entier suffisamment grand pour que $k(b-a)-a$ soit strictement positif. Le nombre $P(k(b - a) - a)$ admet donc un nombre pair de facteurs premiers si et seulement si $k(k + 1)$ admet un nombre pair de facteurs premiers. Comme par l'absurde c'est le cas pour tout entier k suffisamment grand, cela implique que $f(k) = f(k + 1)$ pour tout entier k suffisamment grand et donc que la fonction f soit constante à partir d'un certain rang. Mais pour tout nombre premier p, $f(p) = 1$ et pour tout entier k, $f(k^2) = 0$. La fonction n'est donc pas constante donc on a obtenu la contradiction désirée.

Exercice 4
(IMO 2016 P4) Un ensemble d'entier naturels est dit parfumé s'il contient au moins deux éléments et si chacun de ses éléments possède un facteur premier en commun avec au moins l'un des autres éléments. Soit $P(n) = n^2 + n + 1$. Déterminer le plus petit entier strictement positif b pour lequel il existe un entier positif a tel que l'ensemble

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

soit parfumé

Solution de l'exercice 4
Ici il est naturel de se dire que b risque d'être relativement petit, sinon l'exercice risque d'être très compliqué. On s'empresse de calculer les $P(n)$ pour n entre 1 et 20, calculer leur décomposition en facteurs premiers pour comprendre un peu comment l'exercice fonctionne. Regardons $b = 2$: la question revient à savoir si $P(n)$ et $P(n+1)$ sont premiers entre eux. Pour cela, on va calculer d leur pgcd. On a donc d qui divise $P(n+1)-P(n) = n^2+3n+3-n^2-n-1 = 2n+2 = 2(n+1)$. De plus d est impair car $P(n) = n(n+1)+1$ est impair, donc d divise $(n+1$ et $n(n+1)+1$ donc d divise 1, $d = 1$.

Maintenant qu'est-ce que cela permet de dire sur b? Si $b = 2$, soit a un entier vérifiant l'énoncé. Comme $P(a+1)$ et $P(a+2)$ sont premiers entre eux pour tout entier a, l'ensemble n'est pas parfumé. On a donc $b \geqslant 3$. Si $b = 3$, soit a vérifiant l'énoncé, $P(a+2)$ est premier avec $P(a+1)$ et $P(a+3)$ pour tout entier a, donc forcément $b \geqslant 4$.

Maintenant on peut se demander si $P(n)$ et $P(n+2)$ sont premiers entre eux. Soit d leur pgcd, alors d divise $P(n+2)-P(n) = 4n+4+2 = 2(2n+3)$. Ainsi d divise $2n+3$ donc comme d divise $(2n)^2 + 2 \times 2n + 4$, d divise $9-6+4 = 7$. Ainsi soit $d = 1$, soit $d = 7$ et 7 divise $2n+3$, donc 7 divise $8n+12$, donc 7 divise $n-2$. En particulier, comme $P(2)$ et $P(4)$ valent 7 et 21 et son bien divisibles par 7, on en déduit que $P(7k+2)$ et $P(7k+4)$ sont toujours divisibles par 7. Ainsi $P(n)$ et $P(n+2)$ ne sont pas premiers entre eux si et seulement si $n \equiv 2 \pmod 7$.

On se pose la même question pour $P(n)$ et $P(n+3)$: soit d leur pgcd, on a d qui divise $P(n+3) - P(n) = 6n+12$ donc d divise $3(n+2)$. Or $P(1)$ est divisible par 3, $P(0)$ et $P(2)$ ne le sont pas, donc on en déduit que $P(3k+2)$ et $P(3k)$ ne sont pas divisibles par 3 et $P(3k+1)$ l'est. Ainsi si $n \equiv 1 \pmod 3$, $P(n)$ et $P(n+3)$ sont tous les deux divisibles par 3. Si $n \not\equiv 1 \pmod 3$, on a donc d qui divise $n+2$ et n^2+n+1, donc d divise $(-2)^2-2+1 = 3$, contradiction. Ainsi $P(n)$ et $P(n+3)$ sont premiers entre eux si et seulement si $n \not\equiv 1 \pmod 3$-.

Maintenant revenons au problème : si $b = 4$, soit a un entier vérifiant l'énoncé. Comme $P(a+2)$ est premier avec $P(a+3)$ et $P(a+1)$, alors il est non premier avec $P(a+4)$. De même, $P(a+3)$ est non premier avec $P(a+1)$. On a donc $a+2 \equiv a+3 \equiv 2 \pmod 7$, contradiction. Si $b = 5$, soit a un entier vérifiant l'énoncé.

Maintenant revenons au problème : supposons que $b = 5$, soit a un entier vérifiant l'énoncé. Vu que $P(a+3)$ est premier avec $P(a+2)$ et $P(a+4)$, il est forcément non premier avec $P(n+1)$ ou $P(n+5)$, et ils sont tous les deux divisibles par 7. En particulier, $P(n+2)$ et $P(n+4)$ ne sont pas divisibles par 7, donc ils sont premiers entre eux. Forcément $P(n+2)$ et $P(n+5)$ ne sont pas premiers entre eux, idem pour $P(n+1)$ et $P(n+4)$, donc $n+1 \equiv n+2 \equiv 1 \pmod 3$ contradiction.

Maintenant on peut se demander si $P(n)$ et $P(n+4)$ sont premiers entre eux. Soit d leur pgcd, alors d divise $P(n+4) - P(n) = 8n+16+4 = 4(2n+5)$. Ainsi d divise $2n+5$ donc comme d divise $(2n)^2 + 2 \times 2n + 4$, d divise $25-10+4 = 19$. Ainsi soit $d = 1$, soit $d = 7$ et 19 divise $2n+5$, donc 19 divise $20n+50$. Ainsi 19 divise $n-7$. Or on remarque que $P(7)$ et

$P(11)$ sont divisibles par 19, donc $P(n)$ et $P(n+4)$ sont premiers entre eux si et seulement si $n \not\equiv 7 \pmod{19}$.

Maintenant regardons $b = 6$, essayons d'apparier les différents $P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+6)$ pour avoir des paires potentiellement non premières entre eux : ainsi il faut que la différence des arguments de p vale $2, 3$ ou 4, mais pas deux fois la même chose. On peut donc les apparier de la façon suivante : $\{P(a+1), P(a+4)\}$, $\{P(a+2), P(a+6)\}$, $\{P(a+3), P(a+5)\}$. Il suffit ainsi d'avoir $a + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, $a + 2 \equiv 7 \pmod{19}$ et $a + 3 \equiv 2 \pmod{7}$ et a strictement positif, ce qui est possible via le lemme chinois, pour que les 3 différents ensembles précédents soient composés d'entiers non premiers entre eux. L'ensemble est alors parfumé, donc $b = 6$ est la valeur minimale vérifiant l'énoncé.

Exercice 5
(Olympiade Francophone 2020) Soit $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ et soit m un entier. On suppose que pour tout sous-ensemble fini non vide S de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier.

Montrer que parmi les entiers $a_1, a_2, \ldots$, seul un nombre fini possède moins de m facteurs premiers distincts.

Solution de l'exercice 5
Nous allons montrer qu'étant donné un nombre premier p, il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que p divise tous les termes a_k pour $k \geqslant N$, ce qui nous donnera le résultat voulu.

On suppose par l'absurde qu'il existe une infinité d'entiers a_k qui ne sont pas divisibles par p. Alors d'après le principe des tiroirs, il en existe une infinité qui possède le même reste modulo p. On dispose donc de $p-1$ indices $i_1, \ldots i_{p-1}$ tels que $a_{i_1}, \ldots a_{i_{p-1}}$ possède le même reste modulo p, on note a ce reste. Puisqu'on en dispose d'une infinité, on peut choisir $a_{i_{p-1}}$ supérieur strictement à p. En prenant $S = \{i_1, \ldots, i_{p-1}\}$, on obtient que le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier. Or d'après notre choix de $a_{i_{p-1}}$, ce nombre est strictement supérieur à p et d'après le théorème de Fermat :

$$\prod_{k \in S} a_k \equiv a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

donc le nombre $-1 + \prod_{k \in S} a_k$ est divisible par p. Comme il est strictement plus grand que p, ce n'est pas un nombre premier ce qui donne la contradiction.

Exercice 6
(Balkan MO 2016) Déterminer tous les polynômes unitaires à coefficients entiers f vérifiant la condition suivante : il existe un entier strictement positif N tel que pour tout nombre premier p tel que $f(p)$ est un entier strictement positif, p divise $2(f(p)!)+1$.

Solution de l'exercice 6
On dispose d'un entier M tel que pour tout entier $n \geqslant M$, le nombre $f(n)$ est strictement posisitif. Quitte à reconditionner choisir le maximum de N et M, on peut supposer que $N = M$. Pusiqu'il existe une infinité de nombre premiers p, cette condition est en fait superflue et nous donne même une indication sur l'esprit de l'exercice : puisque l'on ne se soucit pas d'oublier un nombre fini d'entiers, l'exercice va en fait jouer sur le fait qu'on dispose d'une infinité de nombres premiers.

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à N et supérieur ou égal à 3. Puisque p divise $2(f(p)!)+1$, p ne divise pas $2(f(p)!)$ donc p ne divise $f(p)!$. Ceci implique que $p > f(p)$.

Cette inégalité étant vraie pour une infinité d'entiers, la rigidité des polynômes nous indique que f est de degré inférieur ou égal à 1. Plus précisément, si f était de degré $\geqslant 2$, alors il en serait de même du polynôme $f(X) - X$, qui tendrait donc vers $+\infty$ et $+\infty$ et serait donc strictement positif à partir d'un certain rang, ce qui n'est pas le cas ici puisque pour des nombres premiers arbitrairement grands, $f(p) - p < 0$.

De la même façon, on obtient que f est de degré 1 et unitaire. On dispose plus précisément d'un entier strictement positif c tel que $f(X) = X - c$.

Si $p > N$, on a

$$2(p-c)! \equiv -1 \mod p$$

On cherche à compléter le $(p-c)!$ en un $(p-1)!$ pour appliquer le théorème de Wilson qui dit que $(p-1)! \equiv -1 \mod p$. On multiplique donc $(p-c+1)\dots(p-1)$ des deux côtés (ce produit est éventuellement vide et égal à 1 si $c=1$). On a donc

$$-2 \equiv 2(p-1)! \equiv -1\cdot(p-c+1)\dots(p-1) \equiv (-1)\cdot(-1)(c-1)\dots(-1)\cdot 1 = (-1)^c(c-1)! \mod p$$

Cette égalité étant vraie modulo tout entier p, il suffit de choisir p suffisamment grand pour que cette congruence devienne une égalité. Cette égalité impose que $c = 3$.

Réciproquement, le polynôme $P(X) = X - 3$ fonctionne en remontant la preuve précédente.

Exercice 7
(IMO SL 2011 N2) Soit $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\cdot\ldots\cdot(x+d_9)$ avec $d_1, \ldots, d_9$ des entiers distincts. Montrer qu'il existe N un entier tel que pour tous les entiers $x \geqslant N$ le nombre $P(x)$ est divisible par un nombre premier plus grand que 20.

Solution de l'exercice 7
L'idée est de remarquer qu'il y a 8 nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 et d'appliquer le principe des tiroirs puisque qu'il y a 9 facteurs.

Pour deviner l'entier N à choisir, on commence naïvement par procéder par l'absurde : On suppose qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $P(n)$ n'admet que des facteurs premiers inférieurs ou égaux à 20. Pour un tel entier n, on dispose donc de deux indices i et j et d'un nombre premier p parmi les nombres $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ tels que p divise $n + d_i$ et $n + d_j$. Ainsi, p divise $d_i - d_j$.

A partir de cette remarque, on propose la preuve suivante.

On suppose par l'absurde que l'on dispose d'une suite (x_n) d'entiers strictement positifs tels que les nombres $P(x_n)$ n'admettent pas de facteurs premiers strictement supérieurs à 20.

La suite $(x_n + d_1)_n$ n'est pas bornée, on dipose donc d'un nombre premier $p_1 < 20$ tel que la suite $(v_{p_1}(x_n + d_1))_n$ ne soit pas bornée non plus. Quitte à extraire une sous-suite y_n de la suite x_n telle que la suite $(v_{p_1}(y_n + d_1))_n$ tende vers $+\infty$, on peut supposer que la suite (x_n) satisfait déjà cette propriété.

A nouveau, quitte à extraire de la suite (x_n), on peut supposer que l'on dispose de nombres premiers $p_2, \ldots p_9$ tels que la suite $(v_{p_i}(x_n + d_i))_n$ tende vers $+\infty$ pour tout entier i.

D'après le principe des tiroirs, on dispose de deux indices i et j tels que $p_i = p_j$, que l'on note désormais p. Ainsi, les suites $(v_p(x_n + d_i))_n$ et $(v_p(x_n + d_j))_n$ tendent toutes les deux vers $+\infty$. En particulier, on dispose d'un entier N tel que $v_p(x_n + d_i) > v_p(d_i - d_j)$ et $v_p(x_n + d_j) > v_p(d_i - d_j)$. Ceci constitue la contradiction désirée puisque si p^k divise $x_n + d_j$ et $x_n + d_i$, il divise également $d_i - d_j$ pour tout entier k.

Exercice 8
(IMO 2017 P1) Pour tout entier $a_0 > 1$, on définit la suite $a_0, a_1, \ldots$ par $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ si $\sqrt{a_n}$ est un entier et $a_{n+1} = a_n + 3$ sinon pour tout $n \geqslant 0$.

Déterminer toutes les valeurs de a_0 pour lesquelles il existe un nombre A tel que $a_n = A$ pour une infinité de valeurs de n.

Solution de l'exercice 8
Déjà essayons de regarder ce qui se passe pour la suite (a_n). Si $a_{n+1} = a_n + 3$, la congruence modulo 3 est conservée. Si $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, si a_n est divisible par 3, a_{n+1} l'est aussi, et que la réciproque est vraie. De ceci, on déduit que si 3 divise a_0, alors 3 divise a_n pour tout entier n par une récurrence immédiate et de même si 3 ne divise pas a_0, 3 ne divise pas a_n pour tout entier n. Notons aussi que $a_n > 1$ par récurrence immédiate

Maintenant intéressons nous au cas où il existe un nombre A tel que $a_n = A$ pour une infinité de valeurs de n. Dans ce cas à partir d'un certain rang la suite boucle car c'est une suite récurrente déterminée par le nombre précédent. En particulier elle est bornée ! On peut donc essayer de chercher une borne intelligente pour la suite (a_n). Regardons le cas où a_0 est divisible par 3, il faudrait trouver une borne intelligente de a_n. Il est naturel d'en cherche une divisible par 3 et de sorte que si $a_n = M$, alors $a_{n+1} \leqslant M$. Pour cela, il faut que a_{n+1} ne vale pas $a_n + 3$, donc que M soit un carré.

Soit k un entier positif tel que $a_0 \leqslant (3k)^2$. Montrons par récurrence que $a_n \leqslant (3k)^2$. L'initialisation étant faite, si $a_n \leqslant (3k)^2$ alors deux cas se présentent :

— Si $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ l'hérédité est claire car $a_{n+1} \leqslant 3k \leqslant (3k)^2$.
— Sinon, on a forcément $a_n \neq (3k)^2$, donc comme a_n est divisible par 3, $a_n \leqslant (3k)^2 + 3$, donc $a_{n+1} \leqslant (3k)^2$

En particulier la suite (a_n) est bornée et à valeurs entières, elle prend donc une valeur une infinité de fois.

Maintenant plaçons nous dans le cas où a_0 n'est pas divisible par 3. On peut essayer de voir s'il y a un cas ou la suite tend grossièrement vers $+\infty$ et on a $a_{n+1} = a_n + 3$. C'est le cas si a_n n'est jamais un carré, en particulier c'est le cas si $a_0 \equiv 2 \pmod 3$ puisque $a_n \equiv 2 \pmod 3$ pour tout n, et 2 n'est pas un carré modulo 3. En particulier, comme le carré d'un nombre congru à 2 modulo 3 vaut 1 modulo 3, il semble assez possible que si $a_0 \equiv 1 \pmod 3$, la suite prend une infinité de fois la même valeur.

Supposons le contraire : comme cela boucle, il est pertinent de considérer un entier A tel que $a_n = A$ pour une infinité de valeurs n. A priori il risque d'y avoir plusieurs A intéressants il faudrait en trouver un pertinent : prenons le A le plus petit. Forcément $A \equiv 1 \pmod 3$ d'après les arguments précédents. Regardons les valeurs suivantes prises par la suite : elle vaut $A+3$, $A+6$, etc jusqu'à $A+3k$ le premier carré modulo 3 supérieur ou égal à A. Ensuite la suite prend la valeur $\sqrt{A+3k}$. On ne peut pas avoir $\sqrt{A+3k} < A$ sinon la valeur $\sqrt{A+3k}$ est prise une infinité de fois, ce qui contredit la minimalité de A. De plus on a forcément $\sqrt{A+3k}$ est congru à 1 modulo 3 d'après les arguments précédents. On ne peut pas non plus avoir $\sqrt{A+3k} > A$, car sinon la suite bouclerait sur le motif $\sqrt{A+3k}, \sqrt{A+3k}+3, \ldots, A+3k$, donc A n'est pas une valeure prise une infinité de fois par la suite (a_n). On en déduit donc que le premier carré congru à 1 modulo 3 supérieur ou égal à A vaut A^2. Or parmi $A-1$ et $A-2$, un n'est pas divisible par 3 donc son carré est congru à 1 modulo 3. On a donc $(A-1)^2 < A$ ou $(A-2)^2 < A$.

Bref dans tous les cas $(A-2)^2 < A$ soit $A^2 - 5A + 4 = A(A-5) + 4 < 0$. En particulier on a forcément $A \leqslant 5$, et un rapide calcul donne que forcément $A = 4, 3, 2$. Notons que $A = 3$ ou

$A = 2$ est impossible par les arguments précédents, donc $A = 4$. Mais si $u_n = 4$, alors $u_{n+1} = 2$ et donc la suite tend vers $+\infty$, elle ne prend donc pas une infinité de fois la même valeurs.

Ainsi les solutions sont exactement les entiers strictement positifs divisibles par 3.

Exercice 9
(USAMO 2018 P4) Soit p un nombre premier et soient $a_1, \ldots, a_p$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier k tel que les nombres

$$a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$$

donnent au moins $\frac{1}{2}p$ restes distincts modulo p.

Solution de l'exercice 9
La première chose à faire est de regarder à quelle condition deux nombres $a_j + jk$ et $a_i + ik$ donnent le même reste modulo p. Cette condition se réécrit

$$a_j + jk \equiv a_i + ik \mod p$$

$$k \equiv -\frac{a_i - a_j}{i - j} \mod p$$

On souhaite donc trouver un ensemble S de $\frac{p+1}{2}$ entiers $i_1, \ldots i_{\frac{p+1}{2}}$ tels que pour tous les couples d'indices i, j dans cet ensemble $k \neq -\frac{a_i - a_j}{i-j} \mod p$.

On dispose de $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ couples $\{i, j\}$ donc d'après le principe des tiroirs, il existe un élément k de $\{0, \ldots, p-1\}$ tel qu'il y a au plus $\frac{p-1}{2}$ couples satisfaisant $k \neq -\frac{a_i - a_j}{i-j} \mod p$.

On suppose dès lors, par l'absurde, qu'il y a au plus $\frac{p-1}{2}$ restes distincts modulo p avec l'entier k obtenu. On note $c_1, \ldots, c_r$ ces restes distincts, et r_i le nombre d'élements de $\{a_1, \ldots, a_p\}$ tels que $a_l + lk = c_i \mod p$.

On obtient pour chaque i $\binom{a_i}{2}$ couples $\{s, t\}$ tels que $k \equiv -\frac{a_s - a_t}{s-t} \mod p$.

On obtient en tout $\binom{a_1}{2} + \ldots + \binom{a_p}{2}$ couples satisfaisant la congruence ci-dessus.

La fonction $x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}$ est convexe donc d'après l'inégalité de Jensen,

$$\binom{a_1}{2} + \ldots + \binom{a_p}{2} \geqslant \frac{p(\frac{p}{r} - 1)}{2} \geqslant \frac{p(\frac{2p}{p-1} - 1)}{2} > \frac{p-1}{2}$$

ce qui est la contradiction voulue.

Exercice 10
(BXMO 2016) Soit n un entier strictement positif. On suppose que ses diviseurs positifs peuvent être répartis par paires de telle sorte que la somme de chaque paire est un nombre premier. Prouver que ces nombres premiers sont tous distincts et qu'aucun d'eux ne divise n.

Solution de l'exercice 10
Examinons l'hypothèse donnée. Etant donnée un couple (d_1, d_2) de dvisieurs, si ces diviseurs admettent un diviseur premier commun p, ce diviseur divise également leur somme, qui n'est donc pas un nombre premier. En conclusion, dans un couple (d_1, d_2), les nombres d_1 et d_2 sont premiers entre eux. En particulier, $d_1 d_2 \leqslant n$.

Or, le produit de tous les diviseurs de n vaut $n^{d(n)/2}$, avec $d()$ le nombre de diviseurs de n, et il y a $d(n)/2$ paires de diviseurs et le produit de chaque paire vaut au plus n. Donc le produit des produits de chaque n vaut au plus $n^{d(n)/2}$. Comme ce produit est effectivement égal à $n^{d(n)/2}$ donc il y a égalité dans chaque paire. En conclusion, dans chaque paire, $d_1 d_2 = n$. Autrement dit, les paires de diviseurs sont de la forme $\left(d, \frac{n}{d}\right)$.

A présent, on résout le problème. Soit d un diviseur de n et $p = d + \frac{n}{d}$ le nombre premier somme des éléments de la paire $\left(d, \frac{n}{d}\right)$. Si p divise n, p divise d ou n/d et est donc strictement inférieur à la somme $d + \frac{n}{d} = p$ ce qui est absurde. Ainsi, les nombres premiers des diverses paires ne divisent pas n.

On montre que les nombres premiers sont distincts. En effet, soient d_1 et d_2 deux diviseurs, il s'agit de montrer que $d_1 + \frac{n}{d_1} \neq d_2 + \frac{n}{d_2}$. Mais l'égalité est équivalente à $(n - d_1 d_2)(d_1 - d_2) = 0$. Or les éléments d_1 et d_2 sont supposés être distincts et dans des paires distinctes. Ainsi, on ne peut ni avoir $d_2 = d_1$ ni avoir $d_2 = \frac{n}{d_1}$. On a donc le résultat désiré.

Exercice 11
(IMO SL 2006 N3) On définit pour tout entier n strictement positif $f(n)$ par

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor \right)$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

(a) Montrer que $f(n+1) > f(n)$ pour une infinité d'entiers n.

(a) Montrer que $f(n+1) < f(n)$ pour une infinité d'entiers n.

Solution de l'exercice 11
L'énoncé nous invite à étudier $f(n+1) - f(n)$. Etant donné que les facteurs $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$ sont génants et au fond ne sont pas vraiment différents, on se contente de noter $f(n) = \frac{1}{n} S_n$ et de regarder $S_{n+1} - S_n$.

$$S_{n+1} - S_n = \lfloor \frac{n+1}{n+1} \rfloor + \sum_{i=1}^{n} \left(\lfloor \frac{n+1}{i} \rfloor - \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} 1_{i|n+1} = \sum_{i=1}^{n} 1_{i|n+1} = d(n+1)$$

avec $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. On déduit par récurrence immédiate que $S_n = d(1) + \ldots + d(n)$. Ainsi, $f(n) = \frac{d(1)+\ldots+d(n)}{n}$. Ainsi :

$$nS_{n+1} - (n+1)S_n = n(d(1)+\ldots+d(n)+d(n+1)) - (n+1)(d(1)+\ldots+d(n)) = (n+1)d(n+1) - d(1) - \ldots - d(n)$$

On résout à présent l'exercice.

1) On cherche des entiers n tels que $(n+1)d(n+1) - d(1) - \ldots - d(n) > 0$. Pour cela, il suffit de choisir un entier n tel que pour tout $i \leqslant n$, $d(n+1) \geqslant d(i)$. Pour cela, notons que la fonction $d(n)$ est non bornée. En particulier, pour tout entier N, on dispose d'un entier $k \leqslant N$ tel que pour tout $i \leqslant k$, $d(i) \leqslant d(k)$. L'entier k convient donc. Pour en construire un nouveau, on utilise le fait que la fonction $d(n)$ est non bornée pour produire un entier M tel que $d(M) > d(k)$. Alors on dispose d'un entier $k' > k$ tel que pour tout entier $i \leqslant k'$, $d(i) < d(k')$ et on a trouvé un nouvel entier qui convient. On en dispose donc d'une infinité.

2) On cherche des entiers $n+1$ tels que $(n+1)d(n+1) - d(1) - \ldots - d(n) > 0$. Pour cela, on intuite que l'on doit choisir des entiers n avec peu de diviseurs. Les nombres premiers semblents de bons candidats. Pour tout nombre premier $p > 7$, on a d'une part $d(p) = 1$ et d'autre part

$$d(1)+d(2)+d(3)+d(4)+d(5)+d(6)+\ldots+d(p-1) \geqslant 1+1+1+2+1+2+\ldots+1 = p+1 > pd(p)$$

On en déduit que les nombres premiers satisfont la propriété.

Exercice 12

(IMO SL 2015 N1) Déterminer tous les entiers M tels que la suite $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ définie par $a_0 = \frac{2M+1}{2}$ et $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ pour $k \geqslant 0$ contient au moins un terme entier.

Solution de l'exercice 12

On teste les petites valeurs de M. Pour $M = 1$, la suite est constante égale à $\frac{3}{2}$ donc satisfait les conditions de l'énoncés.

Pour les valeurs suivantes de M, on peut calculer les 10 premiers termes pour se convaincre que la suite contient toujours un terme entier. On se met donc en quête de montrer que pour toute valeur de $M > 1$, la suite contient un terme entier.

Tout d'abord, si $M > 1$ est par, alors $\lfloor a_0 \rfloor = 2M$ et donc $a_1 = 2M \cdot \frac{2M+1}{2} = M(2M+1)$ est entier.

On suppose désormais que M est impair et $M > 1$.

Si $M = 4i + 1$, alors $a_0 = \frac{8i+3}{2}$ et $a_1 = (4i+1)\frac{8i+3}{2}$. Alors

Si $M = 4i + 3$, alors

De manière générale,

Exercice 13
(USA TST for EGMO 2019, P3) Soit n un entier strictement positif tel que

$$\frac{1^k + 2^k + \dots n^k}{n}$$

est un entier pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 99\}$. Montrer que n ne possède pas de diviseurs compris entre 2 et 100.

Solution de l'exercice 13
Déjà essayons de voir ce qu'on peut faire avec cette hypothèse : le résultat est toujours vrai pour $k = 0$. Comme la condition est linéaire on peut en déduire que $\frac{P(1)+P(2)+\dots P(n)}{n}$ est entier ceci étant vrai pour tout polynôme P à coefficients entiers de degré au plus 99. La question maintenant est : à quel polynôme appliquer cela de façon astucieuse ?

Pour P un polynôme de la forme $P(X) = Q(X) - Q(X-1)$ pour Q à coefficients entiers de degré au plus 99. La somme précédente se téléscopage et donne que $\frac{P(n)-P(0)}{n}$ est un entier. En fait pas de chance, on sait déjà que $n - 0 = n$ divise $P(n) - P(0)$. On aimerait donc avoir quelque chose de plus fort. Pour cela, on pourrait chercher à appliquer le résultat non pas à $Q(X+1) - Q(X)$, mais à un polynôme ressemblant à $\frac{Q(X)-Q(X-1)}{d}$ avec d entier bien choisi, divisant tous les coefficients de $Q(X+1) - Q(X)$. Le plus facile pour d est de prendre $d = p$ un nombre premier, reste à trouver comment avoir un polynôme dont beaucoup de coefficients sont divisibles par p. Fixons p un nombre premier entre 1 et 99, on considère alors logiquement $Q = X^p$, on a $Q(X+1) - Q(X) = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k = 1 + pR(X)$ avec $R(X) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{k}}{p} X^k$. Il est connu que p divise $\binom{p}{k}$ si $1 \leqslant k \leqslant p-1$ (ce qui se prouve aisément par la formule comité président). Ainsi le polynôme $\frac{Q(X+1)-Q(X)-1}{p} = R(X)$ est à coefficient entiers.

On applique alors l'hypothèse à $R(X-1)$: via un téléscopage, on obtient que $\frac{Q(n)-Q(0)-n}{np} = \frac{n^p-n}{np}$ est entier. En particulier, si p divise n, np divise n^p donc np divise n ce qui est contradictoire. Ainsi n n'est divisible par aucune entier premier entre 1 et 99 donc aucun entier entre 2 et 100 (car 100 n'est pas premier).

5 Arithmétique (Vincent)

Énoncés

Exercice 1
Soit P un polynôme à coefficients entiers, et soit n le cardinal de l'ensemble

$$\{k \in \mathbb{Z} \colon kP(k) = 2020\}.$$

Quelles sont les valeurs que peut prendre n ?

Exercice 2
Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers. Démontrer que l'ensemble des nombres premiers divisant $P(n)$ pour au moins un entier n est infini.

Exercice 3
Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers. Démontrer qu'il existe un entier n tel que $P(n^2 + 2020)$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 4
Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que n divise $2^n - 1$.

Exercice 5
Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que n divise $3^n + 1$ et $11^n + 1$.

Exercice 6
Soit p un nombre premier. On écrit le nombre

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Démontrer que, si $p \geqslant 5$, alors p^2 divise a.

Exercice 7
Trouver tous les entiers naturels non nuls x, y et z tels que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2.$$

Exercice 8
Soit x un entier. Démontrer que les entiers $2x - 1$, $5x - 1$ et $13x - 1$ ne sont pas tous les trois des carrés parfaits.

Exercice 9
Trouver tous les entiers naturels non nuls a et b tels que

$$a^b = b^{a^2}.$$

Exercice 10
Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls tels que $a > b > c > d$ et

$$ac + bd = (-a + b + c + d)(a + b - c + d).$$

Démontrer que $ab + cd$ est un nombre composé.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On considère le polynôme $Q(X) = XP(X) - 2020$, qui possède n racines entières distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Alors $Q(X)$ est divisible par le polynôme $R(X) = (X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_n)$. Cela signifie en particulier que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des diviseurs distincts de $R(0)$, qui divise lui-même $Q(0) = -2020 = -2^2 \times 5 \times 101$. On en déduit que $n \leqslant 6$.

Réciproquement, si l'on souhaite avoir $n = 0$, il suffit de choisir $P(X) = 0$. Puis, si l'on souhaite atteindre un n quelconque entre 1 et 6, on commence par construire les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ comme les $n - 1$ premiers termes de la suite $-1, 1, -2, 2, 5$, puis on pose

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{2020}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}.$$

On vérifie sans peine que a_n est aussi un entier, et alors on choisit directement il suffit de choisir

$$P(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n)+2020}{X}.$$

Solution de l'exercice 2

Supposons que l'ensemble E des nombres premiers divisant au moins un nombre $P(n)$ est fini, et soit q le produit des éléments de E. Soit également m un entier tel que $P(m) \neq 0$, et soit

$$k = \max\{v_p(P(m)) : p \in E\}.$$

On considère alors le polynôme $Q(X) = P(m + q^{k+1}X)$, et un entier ℓ quelconque.

Puisque $Q(\ell) \equiv P(m) \not\equiv 0 \pmod{q^k}$ et que tout facteur premier de $Q(\ell)$ appartient à E, on sait que $|Q(\ell)| \leqslant q^k$. On en déduit que Q est constant, donc que P l'est aussi. Ainsi, notre supposition initiale est invalide, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

En posant $Q(X) = P(X^2 + 2020)$, on se ramène en fait à montrer qu'il existe un entier n tel que $Q(n)$ n'est pas premier. Si $Q(0)$ n'est pas un nombre premier, alors $n = 0$ convient. On suppose donc que $Q(0)$ est un nombre premier, de sorte que $Q(0) \geqslant 2$.

Puisque Q est non constant, il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que $Q(n) \neq Q(0)$ pour tout $n \geqslant \ell$. On choisit alors $n = \ell Q(0)$. En effet, on sait alors que $Q(n) \equiv Q(0) \equiv 0 \pmod{Q(0)}$. Ainsi, $Q(n)$ est divisible par le nombre premier $Q(0)$ mais ne lui est pas égal, et n'est donc pas premier.

Solution de l'exercice 4

Tout d'abord, $n = 1$ convient. Réciproquement, supposons que l'on dispose d'une solution $n \geqslant 2$. Soit p le plus petit facteur premier de n. Puisque $2^n - 1$ est impair, n est impair également, donc $p \geqslant 3$.

Soit alors ω l'ordre multiplicatif de 2 modulo p. Puisque ω divise n et divise $p-1$, il divise également $n \wedge (p-1) = 1$, de sorte que p divise $2^1 - 1 = 1$.

Cette impossibilité nous montre que $n = 1$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 5

Tout d'abord, $n = 1$ et $n = 2$ conviennent. Réciproquement, supposons que l'on dispose d'une solution $n \geqslant 3$. On écrit n sous la forme $n = 2^\alpha m$, où m est impair.

— Si $\alpha = 0$, soit p le plus petit facteur premier de n, puis ω l'ordre multiplicatif de 3 modulo p. Puisque ω divise $p-1$ et $2n$, il divise également $(2n) \wedge (p-1)$, donc il divise aussi $2(n \wedge (p-1)) = 2$, de sorte que p divise $3^2 - 1 = 2^3$. Ce cas est donc impossible.

— Si $\alpha \geqslant 1$, alors $3^n + 1 \equiv 9^{n/2} + 1 \equiv 1^{n/2} + 1 \equiv 2 \pmod 8$, donc $\alpha = 1$ et $m \geqslant 3$. Soit alors p le plus petit facteur premier de m, puis ω l'ordre multiplicatif de 3 modulo p. Là encore, ω divise $p-1$ et $2n$, donc il divise $(2n) \wedge (p-1) = 4 \wedge (p-1)$, de sorte que p divise $3^4 - 1 = 2^5 \times 5$. On en déduit que $p = 5$, et donc que 5 divise $11^n + 1$, ce qui est impossible également.

En conclusion, les solutions sont $n = 1$ et $n = 2$.

Solution de l'exercice 6

Soit x_k l'inverse de k modulo p. On constate que que

$$-2(p-1)!^2\frac{a}{pb} = \frac{-(p-1)!^2}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{p-k}\right) = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{k}\frac{(p-1)!}{k-p} \equiv \sum_{k=1}^{p-1}((p-1)!x_k)^2 \equiv (p-1)!\sum_{k=1}^{p-1}x_k^2\ [p].$$

Soit maintenant σ la permutation de $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ telle que $2\sigma(k) = k$. Alors

$$4S_2 \equiv (2x_{\sigma(1)})^2 + \ldots + (2x_{\sigma(p-1)})^2 = x_1^2 + \ldots + x_{p-1}^2 \equiv S_2 \ [p],$$

donc p divise $3S_2$. Puisque $p \geqslant 5$, cela signifie que p divise S_2. Par conséquent, p divise $-2(p-1)!^2 \dfrac{a}{pb}$, donc p^2 divise $-2(p-1)!^2 a$, et divise a également.

Solution de l'exercice 7

Soit (x, y, z) un triplet solution éventuel. Sans perte de généralité, on suppose ci-dessous que $x \leqslant y \leqslant z$. On en déduit tout d'abord que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \geqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2 = \frac{128}{64} > \frac{125}{64} = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^3,$$

de sorte que $x \leqslant 4$. De même, on sait que

$$1 + \frac{1}{1} = 2 > 1 + \frac{1}{x},$$

de sorte que $2 \leqslant x$. On étudie donc les trois valeurs plausibles de x.

— Si $x = 2$, on vérifie alors que

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{4}{3} = \frac{196}{147} > \frac{192}{147} = \frac{64}{49} = \left(1 + \frac{1}{7}\right)^2,$$

de sorte que $y \leqslant 6$. En outre, l'égalité de l'énoncé se réécrit comme

$$z = \frac{3(y+1)}{y-3},$$

de sorte que $4 \leqslant y$. Les solutions telles que $x = 2$ sont donc les triplets $(2, 4, 15)$, $(2, 5, 9)$ et $(2, 6, 7)$.

— Si $x = 3$, on vérifie cette fois-ci que

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{3}{2} = \frac{75}{50} > \frac{72}{50} = \frac{36}{25} = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^2,$$

de sorte que $y \leqslant 4$. En outre, l'égalité de l'énoncé se réécrit comme

$$z = \frac{2(y+1)}{y-2}.$$

Les solutions telles que $x = 3$ sont donc les triplets $(3, 3, 8)$ et $(3, 4, 5)$.

— Si $x = 4$, on vérifie enfin que

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5} = \frac{40}{25} > \frac{36}{25} = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^2,$$

de sorte que $y = 4$. En outre, l'égalité de l'énoncé se réécrit comme

$$z = \frac{5(y+1)}{3y-5} = \frac{25}{7}.$$

Il n'y a donc aucune solution telle que $x = 4$.

En conclusion, les solutions, à l'ordre des variables x, y et z près, sont $(2,4,15)$, $(2,5,9)$, $(2,6,7)$, $(3,3,8)$ et $(3,4,5)$.

Solution de l'exercice 8

Supposons qu'il existe des entiers a, b, c et x tels que $2x-1=a^2$, $5x-1=b^2$ et $13x-1=c^2$. Puisque a est impair, on sait que $2x=a^2+1\equiv 2\ [4]$, donc que x est impair. On en déduit que b et c sont pairs.

En posant $\beta=b/2$ et $\gamma=c/2$, on constate alors que

$$a^2=2x-1=(c^2-b^2)/4-1=\gamma^2-\beta^2-1.$$

On en déduit en particulier que

$$2\equiv a^2+1\equiv\gamma^2-\beta^2\ [4],$$

ce qui est impossible puisque les seuls carrés modulo 4 sont 0 et 1. Notre supposition initiale était donc invalide, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9

Tout d'abord, on constate que $(a,b)=(1,1)$ est une solution. Réciproquement, soit (a,b) une éventuelle solution autre que $(1,1)$. Puisque a divise b^{a^2} et b divise a^b, on sait que a et b ont les mêmes facteurs premiers.

Soit p un facteur premier de a, puis v et w les valuations p-adiques respectives de a et de b. Soit également $d=(a^2)\wedge b$, puis $\alpha=a^2/d$ et $\beta=b/d$. Alors

$$\beta dv=bv=v_p(a^b)=v_p\left(b^{a^2}\right)=a^2w=\alpha dw.$$

Comme $\alpha\wedge\beta=1$, on en conclut que α divise v et que β divise w. Il existe donc un entier k_p tel que

$$k_p=\frac{v}{\alpha}=\frac{w}{\beta}.$$

Par conséquent, en posant

$$c=\prod_p p^{k_p},$$

on constate que $a=c^\alpha$, $b=c^\beta$ et $c\geqslant 2$. L'équation de l'énoncé se réécrit alors comme $c^{\alpha b}=c^{\beta a^2}$, ou encore comme $\alpha c^\beta=\alpha b=\beta a^2=\beta c^{2\alpha}$.

Supposons maintenant que $\beta<2\alpha$. Dans ce cas, l'équation de l'énoncé se réécrit comme $\alpha=c^{2\alpha-\beta}\beta$. Puisque $\alpha\wedge\beta=1$, cela signifie que $\beta=1$ et que $\alpha\geqslant c\geqslant 2$, de sorte que $2\alpha-1\geqslant 3$, donc que

$$\alpha=c^{2\alpha-1}\geqslant 2^{2\alpha-1}\geqslant\binom{2\alpha-1}{0}+\binom{2\alpha-1}{1}+\binom{2\alpha-1}{2\alpha-2}+\binom{2\alpha-1}{2\alpha-1}=2\alpha-1.$$

On en déduit que $\alpha\leqslant 1$, en contradiction avec le fait que $\alpha\geqslant 2$.

On en conclut que $\beta\geqslant 2\alpha$, et l'équation de l'énoncé se réécrit comme $\alpha c^{\beta-2\alpha}=\beta$. Cela signifie que $\alpha=1$ et que $\beta=c^{\beta-2}$. Puisque $\beta\geqslant 2$, il s'ensuit que $\beta-2\geqslant 1$, c'est-à-dire que $\beta\geqslant 3$. Or, si $\beta\geqslant 5$, on constate que

$$\beta=c^{\beta-2}\geqslant 2^{\beta-2}\geqslant\binom{\beta-2}{0}+\binom{\beta-2}{1}+\binom{\beta-2}{\beta-3}+\binom{\beta-2}{\beta-2}=\beta.$$

Cela signifie que $3 \leqslant \beta \leqslant 5$.

Cependant, si $\beta = 5$, le nombre $c = \beta^{1/(\beta-2)} = 5^{1/3}$ n'est pas entier. Réciproquement, si $\beta = 3$, alors $c = 3$, donc $a = 3$ et $b = 3^3$; si $\beta = 4$, alors $c = 2$, donc $a = 2$ et $b = 2^4$.

En conclusion, les seuls triplets solutions éventuels sont $(1, 1)$, $(2, 2^4)$ et $(3, 3^3)$. Réciproquement, on vérifie aisément que chacun d'entre eux convient.

Solution de l'exercice 10

L'égalité de l'énoncé se réécrit comme

$$(b+d)^2 - (a-c)^2 = ac + bd = \frac{(a+c)^2 - (a-c)^2 + (b+d)^2 - (b-d)^2}{4},$$

ou encore

$$4(b^2 + bd + d^2) = 3(b+d)^2 + (b-d)^2 = 3(a-c)^2 + (a+c)^2 = 4(a^2 - ac + c^2),$$

c'est-à-dire

$$ac + bd = a^2 - b^2 + c^2 - d^2.$$

Au vu de l'énoncé, on souhaiterait écrire $ab + cd$ comme produit de deux polynômes de degré 1 en les variables a, b, c et d, et espérer que la condition $a > b > c > d$ forcera ces deux polynômes à être supérieurs ou égaux à 2. Cependant, comme b et d jouent des rôles symétriques dans l'énoncé, notre espoir semble vain, et l'on va devoir se contenter d'étudier le produit $(ab + cd)(ad + bc)$. On constate alors que

$$(ab+cd)(ad+bc) = (a^2+c^2)bd+(b^2+d^2)ac = (b^2+d^2+ac+bd)bd+(b^2+d^2)ac = (ac+bd)(b^2+bd+d^2).$$

Il est manifestement indispensable de s'arrêter sur une telle identité. Ainsi, supposons que $ab + cd$ soit égal à un nombre premier p. Puisque

$$ab + cd = ac + bd + (a-d)(b-c) > ac + bd = ad + bc + (a-b)(c-d) > ad + bc,$$

on sait que $ac + bd$ est premier avec p, donc que p divise $b^2 + bd + d^2$ et que $ac + bd$ divise $ad + bc$, ce qui est impossible. Notre supposition est donc invalidée, et puisque l'entier $ab + cd$ est supérieur ou égal à 2, il est donc composé.

6 Combinatoire (Colin)

Exercice 1

Monsieur Dupond se promène à New York. S'il se situe au point de coordonnées (x, y) il peut se déplacer en taxi au point de coordonnées (y, x), $(3x, -2y)$, $(-2x, 3y)$, $(x + 1, y + 4)$ ou $(x - 1, y - 4)$. S'il part du point $(0, 1)$ pourra-t-il se retrouver au point $(0, 0)$?

Solution de l'exercice 1

Soient (x, y) les coordonnées de Monsieur Dupond, on peut remarquer que $x + y$ modulo 5 reste invariant, ou est multiplié par 3 après une opération. Ainsi si initialement cette somme n'est pas nulle modulo 5, elle ne le sera jamais. D'où le résultat.

Exercice 2

Soit n un entier positif. Sisyphe effectue une série d'opérations sur un plateau composée de $n+1$ cases en ligne. Initialement n pierres sont placées sur la case la plus à gauche, et une opération consiste à choisir une case contenant $k > 0$ pierres et à bouger une de ces pierres de k cases au plus vers la droite.

Montrer que le plus petit nombre d'opérations nécessaires pour que toutes les pierres se retrouvent sur la dernière case est au moins de :

$$\lceil \frac{n}{1} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil + \cdots + \lceil \frac{n}{n-1} \rceil + \lceil \frac{n}{n} \rceil.$$

Solution de l'exercice 2

Une idée efficace est de supposer que les n pierres sont numérotées de 1 à n, et que lorsque l'on bouge une pierre, on choisit toujours celle avec le plus grand numéro.

Ainsi lorsque la pierre k est bougée, elle se déplace d'au plus k cases. On en déduit qu'elle doit être déplacée au moins $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ fois au total.

Exercice 3

À Ligneville il y a $n \geqslant 1$ quartiers, disposés le long d'une route rectiligne allant de gauche à droite. Chaque quartier dispose d'un bulldozer pointant vers la gauche et d'un bulldozer pointant vers la droite. Les tailles des $2n$ bulldozers sont distincts. À chaque fois que deux bulldozers se rencontrent, le plus grand pousse le plus petit en dehors de la route. Cependant les bulldozers ne sont pas protégés à l'arrière, donc si un bulldozer atteint l'arrière d'un autre bulldozer, le premier pousse le second hors de la route, quelles que soient leurs tailles.

Soient A et B deux quartiers, avec B à droite de A. On dit que le quartier A peut balayer le quartier B si un des bulldozers du quartier A peut aller jusqu'à B en poussant tous les bulldozers sur sa route, y compris ceux se trouvant dans la ville B.

Montrer qu'il existe un quartier qui ne peut être balayé par aucun autre quartier.

Solution de l'exercice 3

Nous allons procéder par récurrence. Si il y a une seule ville, le résultat est évident. Supposons qu'il y a $n \geqslant 2$ villes et que pour tout $1 \leqslant k < n$ l'énoncé est vrai pour k quartiers.

On considère le bulldozer $\mathcal{B}$ sur la quartier Q de taille maximale parmis tous les bulldozers sauf les deux qui ne pointent vers aucun quartiers. Supposons sans perte de généralité qu'il est dirigé vers la gauche. Alors parmi les $1 \leqslant k < n$ quartiers à droite de $\mathcal{B}$, Q compris, il y a par hypothèse de récurrence un quartier ne pouvant être balayé par aucun autre parmi les quartiers à droite de Q.

Ce quartier ne peut être balayé par aucun quartier, car le bulldozer $\mathcal{B}$ le protège des quartiers à gauche de Q. Par récurrence forte, l'énoncé est vérifié pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 4

Deux listes d'entiers sont proposés. Une liste contient $1, 6, 11, \cdots, 46$ et une autre contient $4, 9, 14, \cdots, 49$. Une opération autorisée est de prendre deux éléments x et y d'une liste, les effacer, et d'écrire $\frac{x+y}{3}$ dans l'autre liste (qui n'a pas besoin d'être un entier).

Après un nombre fini d'opérations, il ne reste plus qu'un élément par liste. montrer que ces deux éléments ne sont pas égaux.

Solution de l'exercice 4

On peut écrire à l'étape k tous ls rationnels des deux listes sous la forme $\frac{a}{3^k}$ avec a entier. On se ramène alors à une liste d'entiers, et à chaque opération on multiplie tous les éléments par 3 sauf deux que l'on additionne et que l'on change de liste.

Ainsi, modulo 4 la différence entre les sommes de ces entiers pour les deux listes est multipliée par -1 à chaque étape. Initialement cette différence n'est pas nulle modulo 4, donc elle ne le sera jamais.

Exercice 5
Dans un champ se trouvent n moutons et un loup déguisé en mouton . Certains moutons sont amis (l'amitié est réciproque). Le but du loup est de manger tous les moutons. Initialement le loup choisit certains moutons don il devient ami. Chaque jour suivant, le loup mange un de ses amis. À chaque fois que le loup mange un mouton A : (a) Si un ami de A est initialement un ami, il n'est plus amis avec le loup. (b) Si un ami de A n'est pas un ami du loup, il devient ami avec le loup. Le loup répète cette procédure jusqu'à avoir mangé autant de moutons que possible.

Trouver le plus grand entier m en fonction de n satisfaisant la condition suivante : il existe un choix des amitiés parmi les moutons tels qu'il y a exactement m façons de choisir les moutons maritalement amis avec le loup, de sorte que le loup puisse manger tous les moutons.

Solution de l'exercice 5

On remarque si A est le nombre d'amis du loup, M le nombre de moutons vivants et que P est le nombre de paires d'amis parmi les moutons encore vivants. Alors $A+E+M$ modulo 2 ne varie pas au cours du temps. Ainsi initialement A doit avoir la même parité que E si le loup veut manger tous les moutons. Ainsi il y a au plus 2^{n-1} configurations qui conviennent.

Si on considère la configuration où un mouton, que l'on nommera Gaston, connaît tous les autres. Si initialement le loup connaît un nombre impair de moutons, il commence par manger en épargnant Gaston tant que c'est possible. En faisant ça le nombre d'amis du loup reste impair, car les moutons qu'il mange ont un seul ami : Gaston. Ainsi s'il n'a plus d'amis autre que Gaston, il a forcément Gaston comme ami. Il le mange, et il peut ensuite manger les autres moutons un à un.

Ainsi $m = 2^{n-1}$.

Exercice 6
On considère des mots écris avec les lettres a et b. On se donne certaines transformations de la forme $m \to m'$ avec m et m' deux mots. En partant d'un mot initial, on effectue des transformations successives qui consistent à remplacer une copie du mot m apparaissant dans le mot et à la remplacer par m'. On note $x^k =$ le mot $xx\cdots x$, avec la lettre x écrite k fois.

Une telle transformation est terminale si quelque soit le mot de départ et quel que soit les opérations choisies il existe un moment où il n'y a plus d'opérations possibles. Lesquelles parmi les transformations suivantes sont terminales ?

(i) $a^2b \to ba$

(ii) $ab \to ba$

(iii) $ab \to b^2a$

(iv) $ab \to b^2a^2$

Exercice 7
On considère une transformation comme dans l'exercice précédent de la forme $a^kb^\ell \to b^{k'}a^{\ell'}$ avec $k, \ell, k', \ell' \geqslant 1$.

Montrer que si cette transformation est terminale, la position finale de dépend pas de l'ordre des opérations.

Solution de l'exercice 6

Pour les premières transformations on propose une quantité entière positive qui diminue strictement ou un raisonnement qui montre que la suite de transformations est finie. Pour la dernière on propose une suite d'opération qui arrive à un mot contenant le mot de départ. Dans le premier cas la transformation est terminale, dans le second elle ne l'est pas.

(i) Le nombre de lettres diminue strictement : la transformation est terminale.

(ii) Si on remplace a par 1 et b par 0, l'entier correspondant en écriture décimale (ou en toute base) diminue strictement : la transformation est terminale. On peut aussi utiliser le fait que le nombre de lettres est invariant donc il a un nombre fini de configurations possibles, et la configuration décroit strictement pour l'ordre lexicographique (ordre du dictionnaire).

(iii) Le nombre d'occurrences de la lettre a est invariant.

(iv) On peut considérer les transformations :$a^2b \to ab^2a^2 \to b^2(a^2b)a^2$, la transformation n'est donc pas terminale.

Solution de l'exercice 7
Cette propriété est une propriété dite de "confluence". Pour la montrer, nous allons considérer une suite d'opération $p_1, \cdots p_n$ qui ne peut pas être prolongée, et une suite (éventuellement infinie) $q_1, q_2, \cdots$ d'opérations. Montrons que l'on peut changer la première suite d'opérations sans en changer le résultat, de sorte à avoir $q_1 = p_1$. Par récurrence on aura terminé : la suite d'opérations (q_k) sera finie et aura le même résultat.

Si on dessine une barre entre un a à gauche et un b à droite du transformé par l'opération q_1, alors tant que cette barre n'est pas utilisés, c'est à dire au centre d'un mot a^kb^ℓ que l'on transforme, on la laisse et les lettres qui l'entourent restent inchangées. Puisqu'après p_n il n'est plus possible d'effectuer d'opérations, alors il existe k tel que p_k utilise cette barre.

Ainsi on peut effectuer p_k puis $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}, p_{k+1}, \cdots p_n$, ce qui donne le même résultat.

D'où le résultat.

Exercice 8
Plusieurs entiers positifs non nuls sont écrits au tableau en ligne. Une opération consiste à choisir deux nombres adjacents x et y tels que $x > y$ et x est à gauche et y à droite. et

à remplacer la paire (x, y) par $(y + 1, x)$ ou par $(x - 1, x)$. Montrer que l'on peut effectuer seulement un nombre fini de telles opérations.

Solution de l'exercice 8

Une première chose que l'on peut remarquer, c'est que le maximum des nombres écrits ne varie pas. Ainsi il y a un nombre fini de configurations possibles. De plus, on peut comparer deux suites de nombres par l'ordre lexicographique en partant d la droite, et la suite écrite au tableau croît strictement pour cet ordre. Ainsi à partir d'un certain moment le processus doit s'arrêter.

Exercice 9

On dispose de 2^m feuilles de papier, avec l'entier 1 écrit sur chaque feuille. On effectue les opérations suivantes. À chaque étape on choisit deux feuilles ; si les nombres sur les deux feuilles sont a et b, alors on efface ces nombre et on écrit $a + b$ sur les deux feuilles. Montrer que après $m2^{m-1}$ étapes, la somme des nombres sur toutes les feuilles est au moins 4^m .

Solution de l'exercice 9

On a du mal à estimer comment varie la somme. En revanche on peut considérer le produit des 2^m nombres : en effet à chaque étape, on le multiplie par 4 puisque $(x + y)^2 \geqslant 4xy$ pour tous les réels $x, y \geqslant 0$.

Ainsi le produit à la fin est $4^{m2^{m-1}} = 2^{m2^m}$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, la somme est alors au moins

$$2^m \sqrt[2^m]{2^{m2^m}} = 2^m \cdot 2^m = 4^m$$

d'où le résultat.

Exercice 10

Raphaël a inscrit, sur chaque sommet d'un pentagone, un entier, de sorte que la somme de ces cinq entiers soit strictement positive. Puis il s'autorise des opérations de la forme suivante : il choisit trois sommets consécutifs sur lesquels se trouvent des entiers x, y et z, tels que $y < 0$, et les remplace respectivement par $x + y$, $-y$ et $y + z$. Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ? Et si Raphaël reprend ce processus sur un 2019-gone au lieu d'un pentagone ?

Solution de l'exercice 10

Tout d'abord, on s'intéresse au cas du pentagone. A priori, on ne peut pas savoir quelle est la réponse attendue. Mais au bout de divers essais, on se rend compte que l'on arrive pas à créer de suite d'opérations infinie, et on se convainc donc qu'une telle suite doit être finie. Dans de telles conditions, on pourra chercher des invariants et des monovariants de notre processus.

Dans la suite, on identifie nos sommets aux éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, de sorte que chaque arête du pentagone relie deux éléments voisins. Puis on note x_k l'entier écrit sur le sommet k. La première esquisse d'invariant qui saute aux yeux est l'égalité $(x+y)-y+(z+y) = x+y+z$. Ainsi, la somme $\mathcal{S}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ est un invariant, et elle restera donc strictement positive. Au vu des contraintes de l'énoncé, on sent bien qu'il s'agit là d'une information importante.

Forts de ce succès, on peut être tenté de regarder les sommes de degré 2, de la forme $\mathcal{S}_2 = \sum_{k=0}^{4} x_k^2$ ou, plus généralement, $\mathcal{S}_{2,\ell} = \sum_{k=0}^{4} x_k x_{k+\ell}$. En effet, il s'agit là encore de sommes

cycliques, donc peu susceptibles d'être trop affectées par le choix des sommets $(i-1, i, i+1)$ qu'a choisis Raphaël. Par ailleurs, on remarquera que

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{2,0},\ \mathcal{S}_{2,1} = \mathcal{S}_{2,4},\ \mathcal{S}_{2,2} = \mathcal{S}_{2,3} \text{ et } \mathcal{S}_1^2 = \sum_{k=0}^{4} \mathcal{S}_{2,k},$$

de sorte que tout polynôme cyclique de degré 2 peut s'exprimer à partir de l'invariant $\mathcal{S}_1$ et des deux quantités $\mathcal{S}_{2,0}$ et $\mathcal{S}_{2,1}$, auxquelles on s'intéresse donc.

Considérons alors une opération où, sans perte de généralité, Raphaël a choisi les sommets $(-1, 0, 1)$. Les quantités $\mathcal{S}_{2,0}$ et $\mathcal{S}_{2,1}$ augmentent alors respectivement de $2x_0(x_{-1} + x_0 + x_1)$ et de $x_0(x_{-2} + x_2 - 2(x_{-1} + x_0 + x_1))$. Ainsi, la quantité

$$3\mathcal{S}_{2,0} + 2\mathcal{S}_{2,1} = \sum_{k=0}^{4} (3x_k^2 + 2x_k x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{4} x_k^2 + (x_k + x_{k+1})^2$$

augmente de $2x_0\mathcal{S}_1$. Mais puisque $x_0 < 0 < \mathcal{S}_1$, c'est qu'elle diminue strictement. S'agissant d'un entier naturel, elle ne peut diminuer qu'un nombre fini de fois, ce qui conclut.

Penchons-nous maintenant sur le cas du 2019-gone ou, plus généralement, du $(2n+1)$-gone, avec $n \geqslant 2$. On pourrait s'intéresser de nouveau aux sommes $\mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$, $\mathcal{S}_{2,\ell} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+\ell}$ et $\mathcal{S}'_{2,\ell} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + \ldots + x_\ell)^2$. Ce faisant, on peut alors montrer que, lorsque Raphaël choisit les sommets $(-1, 0, 1)$, la quantité $\mathcal{S}_1$ est un invariant. Puis, après moult calculs longs mais pas forcément très difficiles, on en vient à constater que la quantité

$$\Delta = \sum_{\ell=1}^{n-1} (n-\ell)\mathcal{S}'_{2,\ell} + n(7-n^2)/6\, \mathcal{S}'_{2,0},$$

qui est la généralisation la plus naturelle de la somme $\mathcal{S}'_{2,0} + \mathcal{S}'_{2,1}$ identifiée dans le cas $n = 2$, augmente de $2x_0\mathcal{S}_1$. Malheureusement, cette quantité n'a aucune raison d'être positive a priori, puisque $7 - n^2 < 0$ dès lors que $n \geqslant 3$.

Devoir manipuler des termes de degré 2 semble donc trop compliqué, et on se restreint alors à ne considérer que des termes linéaires en les x_i ; mais, pour qu'ils soient positifs, on en prendra la valeur absolue. On s'intéresse ainsi aux quantités

$$\mathcal{T}_{k,\ell} = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_\ell;$$

Seules peu d'entre elles varient lors d'une opération de Raphaël. En effet :

— si $-1, 0, 1 \notin \{k, k+1, \ldots, \ell\}$ ou si $\{-1, 0, 1\} \subseteq \{k, k+1, \ldots, \ell\}$, alors $\mathcal{T}_{k,\ell}$ ne varie pas ;

— si $\ell \in \{1, \ldots, n-2\}$, alors les sommes $\mathcal{T}_{0,\ell}$ et $\mathcal{T}_{1,\ell}$ échangent leurs valeurs ;

— de même, si $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, alors les sommes $\mathcal{T}_{k,-1}$ et $\mathcal{T}_{k,0}$ échangent leurs valeurs.

Par conséquent, si l'on pose

$$\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} |\mathcal{T}_{k,\ell}|,$$

les seuls termes qu'il nous faut étudier de plus près pour contrôler la variation de Δ sont $\mathcal{T}_{0,0}$ et $\mathcal{T}_{1,-1}$. Ainsi, on constate que Δ augmente de

$$(|-x_0| - |x_0|) + (|\mathcal{S}_1 + x_0| - |\mathcal{S}_1 - x_0|) = |\mathcal{S}_1 + x_0| - |\mathcal{S}_1 - x_0|.$$

Puisque $x_0 < 0 < \mathcal{S}_1$, on sait que $|\mathcal{S}_1 + x_0| < |\mathcal{S}_1 - x_0|$, de sorte que Δ diminue strictement, ce qui conclut.

Note : En pratique, il est peu probable de penser, de but en blanc, à considérer directement toutes les sommes $\mathcal{T}_{k,\ell}$. Cependant, si l'on cherche à évaluer l'évolution des sommes $\mathcal{T}_{k,k}$ après une opération, on se ramène à devoir aussi considérer certaines des sommes $\mathcal{T}_{k,k+1}$ juste avant l'opération ; puis, potentiellement, certaines des sommes $\mathcal{T}_{k,k+2}$ avant l'opération précédente, et ainsi de suite. C'est donc en faisant graduellement augmenter la différence $\ell - k$ que l'on peut être amené à vouloir étudier l'ensemble des sommes $\mathcal{T}_{k,\ell}$.

Exercice 11
Dans une ligne sont disposées 2020 pierres blanches et une pierre noire. Un opération possible est la suivante : choisir une pierre noire qui n'est pas au bord et changer la couleur de ses pierres voisines. Trouver toutes les positions initiales possible pour la pierre noire telle qu'il soit possible de colorer toutes les pierres en noir avec un nombre fini d'opérations.

Solution de l'exercice 11
On numéro les pierres de 1 à 2021.Soit $f(i)$ le nombre de pierres noires à la droite de la i-ième pierre blanche. On définit g comme suit :

— $g(i) = 0$ si la i-ième pierre est noire
— $g(i) = (-1)^{f(i)}$ si la i-ième pierre est blanche

La somme $S = \sum a_i$ est invariante : en effet faire une opération sur la pierre i ne change pas $f(j)$ pour $j < i - 1$ et $j > j + 1$. On vérifie aussi que $g(i-1) + g(i+1)$ ne varie pas. Ainsi la seule position initiale possible qui convient est $\overbrace{www\ldots www}^{1010} b \overbrace{www\ldots www}^{1010}$.

Il faut ensuite montrer que cette configuration convient. Pour cela on peut procéder par récurrence pour montrer que commencer avec une pierre noire au milieu d'une ligne de $2n+1$ pierres permet de toutes les colorer en noir. pour $n = 0$ c'est clair.

Si cela est vérifié pour l'entier n, on considère $2n+3$ pierres avec un pierre noire au milieu. On commence par appliquer l'hypothèse de récurrence pour avoir les pierres numéro 2 à $2n+2$ colorées en noir. Ensuite on utilise la pierre numéro 2, puis la 4, et ainsi de suite jusqu'à la $2n+2$ pour tout colorer en noir.

Ainsi on a bien montré qu'avec 2021 pierres, il est possible de tout colorier en noir si et seulement si la pierre noire est placée au milieu.

Exercice 12
La banque de Bath a émis des pièces dont une face arbore la lettre H et l'autre face arbore la lettre T. Morgane a aligné n de ces pièces de gauche à droite. Elle réalise alors plusieurs fois de suite l'opération suivante : si la lettre H est visible sur exactement k pièces, avec $k \geqslant 1$, alors Morgane retourne la $k^{\text{ème}}$ pièce en partant de la gauche ; si $k = 0$, elle s'arrête. Par exemple, si $n = 3$, le processus partant de la configuration THT sera $THT \to HHT \to HTT \to TTT$: Morgane s'arrête donc au bout de 3 opérations.

(a) Démontrer que, quelle que soit la configuration initiale, Morgane doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations.

(b) Pour chaque configuration initiale C, on note $L(C)$ le nombre d'opérations que va réaliser Morgane avant de s'arrêter. Par exemple, $L(THT) = 3$ et $L(TTT) = 0$. Trouver la valeur moyenne des nombres $L(C)$ obtenus lorsque C parcourt l'ensemble des 2^n configurations initiales possibles.

Solution de l'exercice 12

Tout d'abord, on s'intéresse au cas du pentagone. A priori, on ne peut pas savoir quelle est la réponse attendue. Mais au bout de divers essais, on se rend compte que l'on arrive pas à créer de suite d'opérations infinie, et on se convainc donc qu'une telle suite doit être finie. Dans de telles conditions, on pourra chercher des invariants et des monovariants de notre processus.

Dans la suite, on identifie nos sommets aux éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, de sorte que chaque arête du pentagone relie deux éléments voisins. Puis on note x_k l'entier écrit sur le sommet k. La première esquisse d'invariant qui saute aux yeux est l'égalité $(x+y)-y+(z+y) = x+y+z$. Ainsi, la somme $\mathcal{S}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ est un invariant, et elle restera donc strictement positive. Au vu des contraintes de l'énoncé, on sent bien qu'il s'agit là d'une information importante.

Forts de ce succès, on peut être tenté de regarder les sommes de degré 2, de la forme $\mathcal{S}_2 = \sum_{k=0}^{4} x_k^2$ ou, plus généralement, $\mathcal{S}_{2,\ell} = \sum_{k=0}^{4} x_k x_{k+\ell}$. En effet, il s'agit là encore de sommes cycliques, donc peu susceptibles d'être trop affectées par le choix des sommets $(i-1, i, i+1)$ qu'a choisis Raphaël. Par ailleurs, on remarquera que

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{2,0},\ \mathcal{S}_{2,1} = \mathcal{S}_{2,4},\ \mathcal{S}_{2,2} = \mathcal{S}_{2,3} \text{ et } \mathcal{S}_1^2 = \sum_{k=0}^{4} \mathcal{S}_{2,k},$$

de sorte que tout polynôme cyclique de degré 2 peut s'exprimer à partir de l'invariant $\mathcal{S}_1$ et des deux quantités $\mathcal{S}_{2,0}$ et $\mathcal{S}_{2,1}$, auxquelles on s'intéresse donc.

Considérons alors une opération où, sans perte de généralité, Raphaël a choisi les sommets $(-1, 0, 1)$. Les quantités $\mathcal{S}_{2,0}$ et $\mathcal{S}_{2,1}$ augmentent alors respectivement de $2x_0(x_{-1} + x_0 + x_1)$ et de $x_0(x_{-2} + x_2 - 2(x_{-1} + x_0 + x_1))$. Ainsi, la quantité

$$3\mathcal{S}_{2,0} + 2\mathcal{S}_{2,1} = \sum_{k=0}^{4} (3x_k^2 + 2x_k x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{4} x_k^2 + (x_k + x_{k+1})^2$$

augmente de $2x_0\mathcal{S}_1$. Mais puisque $x_0 < 0 < \mathcal{S}_1$, c'est qu'elle diminue strictement. S'agissant d'un entier naturel, elle ne peut diminuer qu'un nombre fini de fois, ce qui conclut.

Penchons-nous maintenant sur le cas du 2019-gone ou, plus généralement, du $(2n+1)$-gone, avec $n \geqslant 2$. On pourrait s'intéresser de nouveau aux sommes $\mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$, $\mathcal{S}_{2,\ell} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+\ell}$ et $\mathcal{S}'_{2,\ell} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + \ldots + x_\ell)^2$. Ce faisant, on peut alors montrer que, lorsque Raphaël choisit les sommets $(-1, 0, 1)$, la quantité $\mathcal{S}_1$ est un invariant. Puis, après moult calculs longs mais pas forcément très difficiles, on en vient à constater que la quantité

$$\Delta = \sum_{\ell=1}^{n-1} (n-\ell)\mathcal{S}'_{2,\ell} + n(7-n^2)/6\, \mathcal{S}'_{2,0},$$

qui est la généralisation la plus naturelle de la somme $\mathcal{S}'_{2,0} + \mathcal{S}'_{2,1}$ identifiée dans le cas $n = 2$, augmente de $2x_0\mathcal{S}_1$. Malheureusement, cette quantité n'a aucune raison d'être positive a priori, puisque $7 - n^2 < 0$ dès lors que $n \geqslant 3$.

Devoir manipuler des termes de degré 2 semble donc trop compliqué, et on se restreint alors à ne considérer que des termes linéaires en les x_i ; mais, pour qu'ils soient positifs, on en prendra la valeur absolue. On s'intéresse ainsi aux quantités

$$\mathcal{T}_{k,\ell} = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_\ell;$$

Seules peu d'entre elles varient lors d'une opération de Raphaël. En effet :

— si $-1, 0, 1 \notin \{k, k+1, \ldots, \ell\}$ ou si $\{-1, 0, 1\} \subseteq \{k, k+1, \ldots, \ell\}$, alors $\mathcal{T}_{k,\ell}$ ne varie pas ;

— si $\ell \in \{1, \ldots, n-2\}$, alors les sommes $\mathcal{T}_{0,\ell}$ et $\mathcal{T}_{1,\ell}$ échangent leurs valeurs ;

— de même, si $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, alors les sommes $\mathcal{T}_{k,-1}$ et $\mathcal{T}_{k,0}$ échangent leurs valeurs.

Par conséquent, si l'on pose

$$\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} |\mathcal{T}_{k,\ell}|,$$

les seuls termes qu'il nous faut étudier de plus près pour contrôler la variation de Δ sont $\mathcal{T}_{0,0}$ et $\mathcal{T}_{1,-1}$. Ainsi, on constate que Δ augmente de

$$(|-x_0| - |x_0|) + (|\mathcal{S}_1 + x_0| - |\mathcal{S}_1 - x_0|) = |\mathcal{S}_1 + x_0| - |\mathcal{S}_1 - x_0|.$$

Puisque $x_0 < 0 < \mathcal{S}_1$, on sait que $|\mathcal{S}_1 + x_0| < |\mathcal{S}_1 - x_0|$, de sorte que Δ diminue strictement, ce qui conclut.

Note : En pratique, il est peu probable de penser, de but en blanc, à considérer directement toutes les sommes $\mathcal{T}_{k,\ell}$. Cependant, si l'on cherche à évaluer l'évolution des sommes $\mathcal{T}_{k,k}$ après une opération, on se ramène à devoir aussi considérer certaines des sommes $\mathcal{T}_{k,k+1}$ juste avant l'opération ; puis, potentiellement, certaines des sommes $\mathcal{T}_{k,k+2}$ avant l'opération précédente, et ainsi de suite. C'est donc en faisant graduellement augmenter la différence $\ell - k$ que l'on peut être amené à vouloir étudier l'ensemble des sommes $\mathcal{T}_{k,\ell}$.

Exercice 13

Soit $n \geqslant 1$ un entier positif. on considère une ligne de n lampes. Initialement certaines lampes dont allumées, et à chaque minutes les lampes ayant exactement une voisine allumée s'allument, et les autres s'éteignent (les lampes au bord n'ont qu'une lampe voisine).

Pour quels entiers n est on certain que quelle que soit la configuration initiale des lampes, elles seront toutes éteintes après un certain temps ?

Solution de l'exercice 13

Si n est pair, il est impossible que toutes les lampes s'éteignent. En effet pour cela il faudrait qu'à la minute d'avant la deuxième lampe soit éteinte, ainsi que la 4ème et ainsi de suite jusqu'à la n-ième. De même en partant de la droite la $n-1$-ièmes, la $n-3$-ième et ainsi de suite jusqu'à la première.

Si n est impair, on considère les cases $2, 4, \cdots, n-1$. On peut remarquer qu'après deux minutes, une de ces lampes s'allume uniquement lorsque parmi ses voisines à distance 2 une seule est allumée. Ainsi si n ne satisfait pas l'énoncé, $2n+1$ non plus.

Les seuls cas restants sont les entiers de la forme $2^k - 1$ avec $k \geqslant 1$. Pour montrer que ces entiers satisfont l'énoncé, on procède par récurrence sur k.

Supposons le résultat vrai pour k, alors on considère la ligne avec $2^{k+1} - 1$ lampes. Si on regarde uniquement les temps pairs, les lampes paires évoluent indépendamment des lampes impaires : c'est à dire que les $2^k - 1$ lampes paires évoluent comme l'énoncé initial, et les 2^k lampes impaires évoluent comme l'énoncé initial si on suppose que les lampes du bord sont voisines d'elles même.

Il reste donc à montrer que si 2^k lampes sont disposées en ligne, et que les lampes du bord sont considérées comme voisines d'elles même, alors après un certain temps toutes les lampes s'éteignent quelle que soit la configuration initiale.

Une astuce est de considérer le problème suivant : 2^{k+1} lampes sont placées en cercle, et à chaque minute une lampe s'allume si exactement une de ses voisines l'est. On montre par récurrence sur k qu'avoir une lampe allumée initialement force qu'après $k + 1$ étapes les lampes sont toutes éteintes (en considérant pour $k = 0$ les deux lampes sont doublement voisines).

Ainsi toute configuration initiale mène à avoir toutes les lampes éteintes après $k+1$ étapes : en effet on peut écrire une configuration en notant 1 pour une lampe allumée et 0 sinon. Alors la valeur d'une lampe après une étape est la somme modulo 2 de ses voisines. Ainsi si on a deux configurations A et B des lampes, et qu'on ajoute modulo 2 leurs nombres associés à chaque lampe, on obtient une configuration C. Si A devient A', B devient B' et C devient C', alors C' est la somme de A' et B'. On en déduit en particulier que chaque configuration disparaît totalement après $k + 1$ coups.

Si on a une configuration dans notre intervalle de longueur 2^k, qu'on la place dans le cercle de longueur 2^{k+1} et qu'on place son symétrique sur les 2^k cases restantes, la configuration va préserver son axe de symétrie, et la moitié du cercle va se comporter comme l'intervalle. On a bien montré ce que l'on souhaitait.

2 Entraînement de mi-parcours

Énoncés

Exercice 1
Soit $n \geqslant 3$ un entier. Dans une école, n enfants sont assis en cercle. Chaque enfant possède initialement un certain nombre de livres. Lorsqu'un enfant possède au moins deux livres et possède strictement plus de livres que la somme des nombres de livres de ses deux voisins, il peut faire un partage qui consiste à donner un livre à chacun de ses deux voisins. Toutes les minutes, si au moins un enfant peut faire un partage alors l'un des enfants effectue un partage.

(i) Pour quels entiers $n \geqslant 3$ existe-il une distribution de livres initiale pour que les enfants puissent faire des partages de livres indéfiniment ?

(ii) On suppose qu'un enfant ne peut faire de partage que s'il possède au moins 3 livres. Reprendre la question précédente dans ce cas.

Exercice 2
Trouver tous les nombres premiers p et q tels que pq divise $2^p + 2^q$.

Exercice 3
Montrer que pour tout entier positif n, on a l'égalité

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv n\,[2]}}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{(n-k)/2} = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 4
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n le chiffre non nul le plus à droite dans l'écriture de $n!$ en base 10. La suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est-elle périodique à partir d'un certain rang ?

Solutions

Solution de l'exercice 1

(i) Après quelques essais, on peut trouver une configuration qui permet de faire des partages indéfiniment dans le cas $n = 3$, et on la généralise aisément.

On considère la configuration où un enfant nommé Aline a deux livres, l'enfant suivant nommé Raphaël dans le cercle n'en possède aucun et les autres enfants en possèdent 1. Aline peut partager ses livres. Elle n'en a plus, Raphaël en a un, et un enfant à côté d'Aline, nommé Martin en a deux. La configuration est la même que la configuration initiale, à une rotation près. Ainsi les partages peuvent peuvent continuer indéfiniment.

(ii) Il semblerait que faire des partage a tendance à répartir de manière plus équitable les livres. Afin de quantifier cela avec un monovariant, on cherche une quantité qui est minimale lorsque tous les nombre de livres des enfants sont égaux.

On peut considérer S le nombre total de livres : c'est un invariant. On peut considérer la somme C des carrés des nombres de livres des enfants. Si un enfant avec n cadeaux partage avec ses voisins qui en ont a et b alors $n \geqslant 2$ et $n > a + b$. Si cet enfant fait un partage, il aura $n-2$ cadeaux, et ses voisins en ont $a+1$ et $b+1$. Or $(n-2)^2 + (a+1)^2 + (b+1)^2 = n^2 + a^2 + b^2 + 2a + 2b - 4n + 6$. De plus $2a + 2b - 4n + 6 < 6 - 2n \leqslant 0$. Ainsi c'est un monovariant : la somme des carrés des nombres de livres C est un entier positif qui diminue strictement à chaque étape. Ainsi après au plus C partage il n'y a plus de partages possibles.

Solution de l'exercice 2

On vérifie tout d'abord que les paires $(p, q) = (2, 2)$, $(p, q) = (2, 3)$ et $(p, q) = (3, 2)$ sont des solutions.

Réciproquement, soit (p, q) une solution éventuelle autre que celles mentionnées ci-dessus. Sans perte de généralité, on suppose que $p \leqslant q$. Si $p = 2$, alors q divise $2^p + 2^q = 2(2^{q-1} + 2)$; puisque $q \geqslant 3$, le petit théorème de Fermat indique que

$$0 \equiv 2(2^{q-1} + 2) \equiv 2(1 + 2) \equiv 6\ [q],$$

ce qui est impossible. On en déduit que $3 \leqslant p \leqslant q$.

Notons maintenant ω_p et ω_q les ordres multiplicatifs respectifs de 2 modulo p et q. Le petit théorème de Fermat indique que

$$0 \equiv 2^p + 2^q \equiv 2(1 + 2^{q-1})\ [p],$$

donc que ω_p divise $p - 1$ et $2(q - 1)$ mais pas $q - 1$. Cela signifie que $v_2(q - 1) + 1 = v_2(\omega_p) \leqslant v_2(p - 1)$. On démontre de même que $v_2(p - 1) + 1 \leqslant v_2(q - 1)$, ce qui est incohérent avec l'inégalité précédente.

En conclusion, les solutions sont les paires $(2, 2)$, $(2, 3)$ et $(3, 2)$.

Solution de l'exercice 3

L'idée est de calculer de deux façons différentes le nombre de façons de choisir n éléments parmi $2n$. Ce nombre est égal à $\binom{2n}{n}$, le membre de droite de notre égalité. Essayons maintenant de faire apparaître le membre de gauche. En observant ce membre, on observe un terme 2^k, qui correspond à k choix binaires (et non pas à un nombre de sous-ensembles), et un terme $\binom{n}{k}$, correspondant à un choix de k éléments. Comme $2 \cdot \frac{n-k}{2} + k = n$, on se dit que le deuxième coefficient binomial correspond à un choix de $(n - k)/2$ paires d'éléments. En mettant ces idées bout à bout, on arrive à la méthode de calcul suivante.

Groupons nos $2n$ éléments en n paires. Choisissons k de ces paires ($\binom{n}{k}$ choix). Le nombre k correspond au nombre de paires contenant exactement un élément de notre ensemble à n éléments : dans chacune de ces k paires, choisissons un des deux éléments (2^k choix). Nous avons sélectionnés k éléments, il nous reste à en choisir $n - k$ pour aboutir à un ensemble à n éléments. Ces $n - k$ éléments doivent être regroupés dans $(n - k)/2$ paires. On voit immédiatement que l'on construit ainsi une fois chaque ensemble à n éléments, et qu'il y a $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{(n-k)/2}$ façons d'effectuer cette construction.

Solution de l'exercice 4

Procédons par l'absurde, et supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $a_n = a_{n+p}$ pour tout $n \geqslant q$.

Tout d'abord, la formule de Legendre indique que $v_2(n!) > v_5(n!)$ dès lors que $\lfloor n/2 \rfloor > \lfloor n/5 \rfloor$, donc dès lors que $n \geqslant 2$. On en déduit que a_n est pair pour tout $n \geqslant 2$, et que $a_{n+1} \equiv (n+1)a_n \pmod 5$ pour dès lors que $n \geqslant 2$ et $n \not\equiv -1 \pmod 5$.

En pose alors $k = \max\{v_2(p), v_5(p)\}$, puis un entier ℓ tel que le nombre $m = \ell p/10^k$ soit un entier congru à $3 \pmod{10}$. On considère ensuite un entier $n \geqslant \max\{k+1, \log_{10}(q+1)\}$, de sorte que $a_{10^n-1} = a_{10^n}$. Puisque $10^{n-k} + m \equiv 3 \pmod{10}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} a_{10^n-1} \equiv a_{10^n} \equiv a_{10^n+\ell p} &\equiv a_{10^k(10^{n-k}+m)} \\ &\equiv (10^{n-k}+m)a_{10^k(10^{n-k}+m)-1} \\ &\equiv 3a_{10^n+\ell p-1} \\ &\equiv 3a_{10^n-1} \pmod{10}, \end{aligned}$$

ce qui constitue une contradiction.

3 Deuxième partie : Algèbre et Géométrie

1 Algèbre (Colin)

Suites et bricolage d'inégalités

Exercice 1

Soit $a_1, a_2, a_3, \cdots$ une famille de réels strictement positifs tels que pour tout entier naurel non nul k on ait :

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}.$$

Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqslant k.$$

Solution de l'exercice 1

Afin de mieux comprendre ce qui se pase, on peut commencer par montrer l'inégalité pour $k = 2$. En effet la condition de l'énoncé impose que $a_2 \geqslant \frac{1}{a_1}$, et ainsi $a_1 + a_2 \geqslant a_1 + \frac{1}{a_1} \geqslant 2$ par le cas particulier classique de l'inégalité arithético- géométrique.

Pour étudier le cas général il faut rendre la condition de l'énoncé plus lisible. Soit k un entier, en passant l'inégalité à l'inverse, les termes étant positifs, on obtient que :

$$a_k^2 + k - 1 \geqslant \frac{ka_k}{a_{k+1}}.$$

En divisant le tout par $a_k > 0$ on obtient alors :

$$a_k + \frac{k-1}{a_k} \geqslant \frac{k}{a_{k+1}}.$$

Notons pour $n \geqslant 1$ entier $s_n = a_1 + a_2 + + \cdots + a_n$. Ainsi on obtient que $a_k \geqslant \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k}$, et par télescopage que $s_k \geqslant \frac{k}{a_{k+1}}$.

Cette dernière inégalité n'est pas suffisante. Ainsi il faut ajouter le fait que soit $k \geqslant 1$, $s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$, ainsi :

$$s_{k+1} \geqslant s_k + \frac{k}{s_k}$$

Afin d'obtenir pour tout $k \geqslant 1$ que $s_{k+1} \geqslant k + 1$, on procède par récurrence. Le cas $k = 1$ a déjà été vérifié, et si $k \geqslant 2$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence qui se traduit par le fait que $s_k \geqslant k$. On en déduit que $s_{k+1} \geqslant k+1$ en utilisant soit l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\frac{\frac{s_k}{k} + \frac{s_k}{k} + \cdots + \frac{s_k}{k} + \frac{k}{s_k}}{k+1} \geqslant s_k^{\frac{k-1}{k+1}} k^{\frac{k+1}{k-1}} \geqslant 1$$

soit en remarquant tout simplement que la fonction qui à $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe $x + \frac{k}{x}$ est strictement croissante sur $[k, +\infty[$ pour $k \geqslant 1$.

Ainsi par récurrence, pour tout $k \geqslant 1$, $s_{k+1} \geqslant k + 1$.

Exercice 2

Soient $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ une suite infinie d'entiers positifs non nuls. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}$$

Solution de l'exercice 2
Les deux inégalités souhaitées ne sont pas commodes à utiliser telles qu'elles puisque le terme central varie en fonction de n. On peut donc les réécrire :

$$na_n < a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n < na_{n+1}$$

ou encore :

$$(n-1)a_n - a_{n-1} - \cdots - a_1 < a_0$$
$$a_0 \leqslant na_{n+1} - a_n - \cdots - a_1.$$

Ainsi on peut introduire la suite de terme général :

$$b_n = (n-1)a_n - a_{n-1} - \cdots - a_1$$

La suite (b_n) est strictement croissante puisque la suite (a_n) l'est aussi. Puisque c'est une suite strictement croissante d'entiers elle n'est pas bornée. De plus $b_1 = 0$ et $a_0 > 0$, donc il existe un unique $n \geqslant 1$ tel que $b_n < a_0 \leqslant b_{n+1}$. Cet entier n convient.

Exercice 3

On considére les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n b_n + a_n + 1}{b_n}$$
$$b_{n+1} = \frac{a_n b_n + b_n + 1}{a_n}.$$

Montrer que $a_{2020} < 5$.

Solution de l'exercice 3
La relation qui définit la suite est compliquée. On va essayer de la simplifier. En ajoutant 1 de chaque côté on obtient pour out $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} + 1 = \frac{a_n b_n + a_n + b_n + 1}{b_n}$$

$$b_{n+1}+1=\frac{a_nb_n+b_n+a_n+1}{a_n}.$$

Cela nous incite à définir $c_n=a_n+1$ et $d_n=b_n+1$ pour $n\geqslant 0$. On obtient alors :

$$c_{n+1}=c_n\frac{d_n}{d_n-1}$$

$$d_{n+1}=d_n\frac{c_n}{c_n-1}$$

À partir de là, il est intéressant de poser $e_n=\frac{1}{c_n}$ et $f_n=\frac{1}{d_n}$, en effet :

$$e_{n+1}=e_n(1-f_n)$$

$$f_{n+1}=f_n(1-e_n).$$

Afin de combiner ces deux informations, on peut regarder leur différence, et on obtient pour $n\geqslant 0$:

$$e_{n+1}-f_{n+1}=e_n-f_n$$

Ainsi par récurrence immédiate pour tout $n\geqslant 0$:

$$e_n-f_n=e_0-f_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Pour tout $n\geqslant 0$, e_n et f_n sont positifs, donc $e_n\geqslant\frac{1}{6}$. On en déduit que $c_n\leqslant 6$ et donc $a_n\leqslant 5$. En particulier $a_{2020}\leqslant 5$.

Exercice 4

Trouver tous les entier $n\geqslant 3$ pour lesquels il existe des réels $a_1,a_2,\cdots,a_{n+2}$ tels que $a_1=a_{n+1}$, $a_2=a_{n+2}$ et :

$$a_ia_{i+1}+1=a_{i+2}$$

pour $1\leqslant i\leqslant n$.

Solution de l'exercice 4

On peut commencer par résoudre le cas $n=3$. On note $x=a_1$ et $y=a_2$, alors $a_3=xy+1$, et x,y doivent satisfaire $x=xy^2+y+1$ et $y=xy^2+y+1$. Or cela se réécrit $x(1-y)(1+y)=(1+y)$ et $y(1-x)(1+x)=(1+x)$. Ainsi en particulier $x=y=-1$ est solution. On trouve aussi que $x=-1,y=2$ et $x=2,y=-1$ sont également solutions, et que ce sont les seules. Remarquons aussi que $-1\times 2+1=-1$.

Ainsi, lorsque n est divisible par 3, la suite $-1,-1,2,-1,-1,2,\cdots,-1,-1,2$ convient.

Montrons qu'il est nécessaire que 3 divise n. La suite est en réalité une suite circulaire, et on a un exemple de solution périodique de période 3. On pose $a_{n+3}=a_3$. Considérons :

$$\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+3}=\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}a_{i+2}+a_i$$

Or puisque $a_1=a_{n+1}$ et $a_2=a_{n+2}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2}$$

et par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

On en déduit que l'on est dans le cas d'égalité de l'inégalité de réordonnement, donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $a_i = a_{i+3}$.

Si n n'est pas un multiple de 3, alors 3 est premier avec n puisque 3 est un nombre premier. Cela signifie que tout entier k s'écrit $1+3u+nv$ avec des entiers relatifs u, v, donc que $a_k = a_1$. Ainsi la suite est constante. Or cela signifie que $a_1^2 + 1 = a_1$, ce qui est impossible car le polynôme $x^2 - x + 1$ n'a pas de racines réelles.

On en déduit qu'une telle suite existe si et seulement si 3 divise n.

Exercices divers sur les suites

Exercice 5

Soit $n \geqslant 1$ un entier et soient $a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$ des réels quelconques. On définit les suites $u_0, u_1, \cdots, u_n$ et $v_0, v_1, \cdots, v_n$ par $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$ et pour $1 \leqslant k < n$:

$$u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$$

$$v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}.$$

Montrer que $u_n = v_n$.

Solution de l'exercice 5

On peut commencer par regarder les formules qui donnent u_k pour k petit. En effet la suite (u_k) peut se calculer indépendamment de n en fonction de la suite (a_k). On obtient alors :

$$u_2 = 1 + a_1$$

$$u_3 = 1 + a_1 + a_2$$

$$u_4 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_3$$

$$u_5 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_3 + a_4 + a_4 a_1 + a_2 a_1$$

On remarque que ces expressions restent invariantes lorsque l'on remplace pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$ le terme a_i par a_{n-i}.

Afin de généraliser cette remarque il faut comprendre les termes qui interviennent dans l'expression développée de u_n. On remarque que les termes sont des produits d'éléments distincts parmi $a_1, \cdots, a_n$, et chaque produit apparaît au plus une fois. On remarque également qu'il n'y a jamais de terme dans le développement contenant deux termes consécutifs de la suite (a_k).

Soit E_n l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, n\}$ qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs. Montrons par récurrence sur n que :

$$u_n = \sum_{I \in E_n} \prod_{i \in I} a_i$$

En effet $E_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$, et $u_1 = 1 + a_1$, donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Pour $n \geqslant 2$, on peut écrire chaque sous-ensemble de $\{1, \cdots, n\}$ comme un sous ensemble de $\{1, \cdots, n-1\}$ sans éléments consécutifs ou comme un sous-ensemble de $\{1, \cdots n-2\}$ sans éléments consécutifs auquel on ajoute n. Ainsi $E_n = E_{n-1} \cup E'_{n-2}$ où $E'_{n-2} = \{A \cup \{n\} | A \in E_{n-2}\}$.

On en déduit en particulier que si

$$u_{n-2} = \sum_{I \in E_{n-2}} \prod_{i \in I} a_i$$

$$u_{n-1} = \sum_{I \in E_{n-1}} \prod_{i \in I} a_i$$

Alors :

$$u_n = \sum_{I \in E_{n-1}} \prod_{i \in I} a_i + a_n \sum_{I \in E_{n-2}} \prod_{i \in I} a_i = \sum_{I \in E_{n-1}} \prod_{i \in I} a_i + \sum_{I \in E'_{n-2}} \prod_{i \in I} a_i = \sum_{I \in E_n} \prod_{i \in I} a_i$$

On en déduit par récurrence la formule souhaitée pour u_n. Lorsque l'on remplace pour $1 \leqslant i \leqslant n$ le terme a_i par a_{n-i} cette formule pour u_n reste inchangée et par conséquent $u_n = v_n$.

Exercice 6

Soit S un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$. Montrer que l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

(i) Il existe deux parties finies de S distinctes A et B telles que :

$$\sum_{x \in A} \frac{1}{x} = \sum_{x \in B} \frac{1}{x}$$

(ii) Il existe un rationnel positif r tel que pour toute partie finie A de S :

$$\sum_{x \in A} \frac{1}{x} \neq r$$

Solution de l'exercice 6

Supposons que notre ensemble S ne satisfasse ni (i) ni (ii). L'ensemble S doit être infini, ou bien la condition (ii) serait automatiquement satisfaite.

Soient $a < b$ deux éléments de S. On peut considérer le rationnel $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. La propriété (ii) n'étant pas satisfaite, il existe un sous ensemble $A \subset S$ tel que :

$$\sum_{x \in A} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Supposons que $b \notin A$. Dans ce cas on aurait :

$$\sum_{x \in A \cup \{b\}} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

Ce qui prouve la propriété (i). Ainsi nécessairement $b \in A$, et ainsi : $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, donc $2a \leqslant b$.

On numérote $s_0 < s_1 < s_2 < \cdots$ les éléments de S. On a montré que pour $k \geqslant 0$, $2s_k \leqslant s_{k+1}$. Supposons que pour un certain $\ell \in \mathbb{N}$ on ait $2s_\ell < s_{\ell+1}$. Alors soit $A \subset S$ une partie finie on définit r comme :

$$r = \sum_{x \in A} \frac{1}{x}.$$

Il n'est alors pas possible que r appartienne à l'intervalle $\left]\frac{2}{s_{\ell+1}}, \frac{1}{s_\ell}\right[$. En effet si A contient un élément inférieur ou égal à s_ℓ, alors $r \geqslant \frac{1}{s_\ell}$. Sinon alors puisque pour $k \geqslant 0$, $s_{\ell+1+k} \geqslant 2^k_{\ell+1}$, pour un certain $N > 0$:

$$\sum_{x \in A} \frac{1}{x} \leqslant \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{s_{\ell+1+i}} \leqslant \frac{2}{s_{\ell+1}}.$$

Or on a supposé que l'intervalle $\left]\frac{2}{s_{\ell+1}}, \frac{1}{s_\ell}\right[$ était non vide, il contient donc un rationnel, et l propriété (ii) est vérifiée.

Le dernier cas restant à étudier est le cas où pour tout $k \geqslant 0$, $s_{k+1} = 2s_k$. Dans ce cas soit $A \subset S$ une partie finie, on note s_ℓ son élément maximum. Alors pour un certain entier m :

$$\sum_{x \in A} \frac{1}{x} = \frac{m}{s_0 2^\ell}.$$

En particulier cette somme ne peut jamais être égale à $\frac{1}{3s_0}$, donc la propriété (ii) est vérifiée.

Exercice 7

On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = 1$ et pour $n \geqslant 1$:

$$a_{2n} = a_n + 1$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}.$$

Montrer que tous les nombres rationnels strictement positifs apparaissent une unique fois dans cette suite.

Solution de l'exercice 7

Une solution consiste à remarquer que si $a_n = \frac{p}{q}$ avec p, q premiers entre aux, alors l'écriture en base 2 de n encode d'une certaine manière les opérations effectuées par l'algorithme d'Euclide entre p et q (dès qu'un 1 apparaît on échange p et q). À chaque paire de tels entiers premiers entre eux correspond une unique suite d'opérations, ce qui permet de montrer le résultat souhaité.

Cette preuve astucieuse peut être écrite proprement, mais nous allons ici proposer une preuve plus terre à terre, même si elle s'appuie fondamentalement sur le même principe.

Tout d'abord, on montre par récurrence que si n est pair, alors $a_n > 1$ et si n est impair, $a_n \in]0, 1]$. Cette propriété est vérifiée au rang $n = 1$. De plus soit $n \geqslant 2$ un entier telle qu'elle soit vérifiée au rang k pour tout $k < n$, alors elle est vérifiée au rang n : en effet si n est impair, alors par hypothèse $a_{n-1} > 1$ donc $a_n < 1$, et si $n = 2\ell$, alors $a_n = a_\ell + 1 > 1$.

À présent considérons une paire (p, q) d'entiers positifs non nuls premiers entre eux telle que $\frac{p}{q}$ n'apparaisse pas dans la suite. Supposons de plus que $p + 2q$ est minimal parmis les telles paires.

Si $p < q$, alors $q + 2p < p + 2q$ donc $\frac{q}{p} = a_\ell$ pour un certain $\ell > 0$ qui est nécessairement pair puisque $\frac{q}{p} > 1$.Par conséquent $\frac{p}{q} = a_{\ell+1}$.

Si $p > q$, alors $(p - q) + 2q < p + 2q$ donc $\frac{p-q}{q} = a_\ell$ pour un certain $\ell > 0$, et par conséquent $\frac{p}{q} = a_{2\ell}$.

Si $p = q$, alors $p = q = 1$ donc $\frac{p}{q} = a_1$. Ainsi il n'existe pas de telle paire (p, q) minimale, donc il n'existe pas de telle paire (p, q).

Il reste à montrer que chaque rationnel est atteint une unique fois. Soient $n \neq m$ deux entiers positifs non nuls tels que $a_n = a_m$. On se donne une telle maire (n, m) telle que $n + m$ soit minimale.

Puisque $a_n = a_m$, alors ils ont même parité. Ainsi soit ils sont tous les deux impairs et $a_{n-1}) = a_{m-1}$, soit s'écrivent $n = 2k, m = 2\ell$ avec k, ℓ entiers et alors $a_k = a_\ell$.

Par conséquent il n'existe pas de paire minimale (m, n) d'entiers distincts tels que $a_m = a_n$, donc en particulier il n'existe pas de telle paire. Tous les nombres rationnels apparaissent donc une et une seule fois dans la suite (a_n).

Exercice 8

Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite de nombre réels tels que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$ il existe $1 \geqslant k \geqslant n$ tel que

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}.$$

Quelle est la valeur maximale de $a_{2018} - a_{2017}$?

Solution de l'exercice 8

La réponse est $\frac{2016}{2017^2}$.afind e voir que $\frac{2016}{2017^2}$ peut être atteint, on considère la suite

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \cdots = a_{2016} = 1, \quad a_{2017} = 1 - \frac{1}{2017}, \quad a_{2018} = 1 - \frac{1}{2017^2}.$$

À présent montrons que c'est optimal. Considérons les suites auxiliaires :

$$u_n = \min_k \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k} \quad \text{and} \quad v_n = \max_k \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}.$$

La première chose que l'on peut remarquer est que l'on peut supposer que, $a_n \in \{u_n, v_n\}$ pour tout n, en effet si on se donne $a_0, \cdots, a_{n-1}$ ainsi que les entiers k définissant $a_{n+1}, \cdots a_{2018}$, alors $a_{2018} - a_{2017}$ est une fonction affine de a_n, donc on peut supposer $a_n \in \{u_n, v_n\}$.

De plus on peut supposer que $a_{2017} = u_{2017}$ et $a_{2018} = v_{2018}$. À présent il nous faut étudier $v_n - u_n$. Pour cela montrosn les deux faits suivants :

Fait 1. Si $a_n = v_n$, alors $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{n}{n+1} \cdot (v_n - u_n)$.
Preuve. Dans ce cas $v_{n+1} = v_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \min_k \frac{v_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k+1} \\ &= \min_k \left(\frac{1}{k+1} \cdot v_n + \frac{k}{k+1} \cdot \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k} \right) \\ &\geq \min_k \left(\frac{1}{n+1} \cdot v_n + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} v_n + \frac{n}{n+1} u_n \end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{n}{n+1} \cdot (v_n - u_n)$ comme souhaité.

Fait 2. Si $a_n = u_n$, alors$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{n-1}{n} \cdot (v_n - u_n)$.
Preuve. Dans ce cas $u_{n+1} = u_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \max_k \frac{u_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k+1} \\ &= \max_k \left(\frac{1}{k+1} \cdot u_n + \frac{k}{k+1} \cdot \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k} \right) \\ &\leq \max_k \left(\frac{1}{n} \cdot u_n + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n} u_n + \frac{n-1}{n} v_n \end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{n-1}{n} \cdot (v_n - u_n)$ comme souhaité.

On peut à présent conclure. Remarquons que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{n}{n+1} \cdot (v_n - u_n)$ pour $n \in \{2, 3, \ldots, 2016\}$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{n-1}{n} \cdot (v_n - u_n)$ pour $n = 2017$. Ainsi

$$\begin{aligned} a_{2018} - a_{2017} = v_{2018} - u_{2017} = v_{2018} - u_{2018} & \\ \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2016}{2017} \cdot \frac{2016}{2017} \cdot (v_2 - u_2) & \\ = \frac{2016}{2017^2} & \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Exercice 9

Soit A_0 un n-uplet de nombres réels. Pour tout $k \geqslant 0$ le n-uplet A_{k+1} est construit à partir du n-uplet $A_k = (a_1, \cdots, a_n)$ comme suit :

(i) On partitionne l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ en 2 ensembles disjoints I et J de sorte que la quantité :

$$\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} a_j \right|$$

soit minimale. Si le minimum peut être atteint de plusieurs manières différentes, on choisit une partition arbitraire parmi celles qui atteignent ce minimum.

(ii) On note $\epsilon_i = 1$ si $i \in I$ et $\epsilon_i = -1$ si $i \in J$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On pose alors $A_{k+1} = (a_1 + \epsilon_1, a_2 + \epsilon_2, \cdots, a_n + \epsilon_n)$.

Montrer qu'il existe un entier N tel que quel que soit le n-uplet de départ, il existe un élément x du n-uplet A_N satisfaisant $|x| \geqslant \frac{n}{2}$.

Solution de l'exercice 9

Ce qui semble se passer, c'est qu'on force les valeurs à s'écarter de 0 en ajoutant $+1$ ou -1 à certains éléments du n-uplet. Une grandeur intéressante pour mesurer à quel point un n-uplet s'écarte de 0 est de considérer

$$f(a_1, \cdots, a_n) = a_1^2 + \cdots + a_n^2.$$

On remarque en effet qu'avec les notations de l'énoncé :

$$f(a_1 + \epsilon_1, \cdots, a_n + \epsilon_n) - f(a_1, \cdots, a_n) = n + 2 \sum_{i \in I} a_i - 2 \sum_{j \in J} a_j.$$

Supposons que pour $1 \leqslant i \leqslant n$ on ait $|a_i| < \frac{n}{2}$. Alors nécessairement il est possible de s'arranger pour que $\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} a_j \right| < \frac{n}{2}$: en effet on peut passer de la valeur maximale possible pour $\sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} a_j$ à la valeur minimale possible en ne faisant que des pas de taille au plus n.

Ainsi nécessairement la valeur de $f(a_1, \cdots, a_n)$ va augmenter strictement. Or il y a un nombre fini de n-uplets de la forme $(a_1 + m_1, a_2 + m_2, + \cdots, a_n + m_n)$ avec des entiers $m_1, \cdots m_n$ tels que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $|a_i + m_i| \leqslant \frac{n}{2}$. Ainsi il existe un entier N tel que A_n possède un terme x tel que $|x| \geqslant \frac{n}{2}$.

Exercice 10

Montrer qu'il existe une suite bornée $(a_n)_{n \geqslant 0}$ telle que pour toute paire (n, m) d'entiers positifs telle que $n > m$ on ait :

$$|a_m - a_n| \geqslant \frac{1}{n - m}.$$

Une suite est dite bornée lorsqu'il existe deux constantes C et D telles que $C \leqslant a_n \leqslant D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 10

Une première remarque qui est bonne à faire est que si on multiplie la suite par une constante c, l'inégalité souhaitée pour tout $n > m$ devient :

$$|a_m - a_n| \geqslant \frac{c}{n-m}.$$

Ainsi on peut chercher une suite à valeurs dans $[0, 1]$ qui satisfait cette nouvelle condition.

Soit n un entier, on note $n = \overline{e_\ell e_{\ell-1} \cdots e_2 e_1}^2$ son écriture en base 2. Une idée qui semble bien répartir les termes dans l'intervalle $[0, 1]$ est de considérer $a_n = \overline{0, e_1 e_2 \cdots e_\ell}^2$.

En effet soient $n > m$ deux entiers positifs, et soit k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leqslant n - m < 2^k$. On peut écrire $n = \overline{e_\ell e_{\ell-1} \cdots e_2 e_1}^2$ et $m = \overline{f_\ell f_{\ell-1} \cdots f_2 f_1}^2$ en base 2 avec un certain $\ell \geqslant k$. On notera alors :

$$a'_n = \overline{0, e_1 e_2 \cdots e_k}^2$$

$$a'_m = \overline{0, f_1 f_2 \cdots f_k}^2$$

$$b_n = \overline{0, 0 \cdots 0 e_{k+1} e_2 \cdots e_\ell}^2$$

$$b_m = \overline{0, 0 \cdots 0 f_{k+1} f_2 \cdots f_\ell}^2$$

avec $a_n = a'_n + b_n$ et $a_m = a'm + b_m$. Puisque $n - m < 2^k$, il y a deux possibilités.

Soit $\overline{e_\ell e_{\ell-1} \cdots e_{k+1}}^2 = \overline{f_\ell f_{\ell-1} \cdots f_{k+1}}^2$, auquel cas $a'_n - a'_m \geqslant 2^{-k}$ et $b_n = b_m$.

Soit $\overline{e_\ell e_{\ell-1} \cdots e_{k+1}}^2 = \overline{f_\ell f_{\ell-1} \cdots f_{k+1}}^2 + 1$, auquel cas $|a'_m - a'_n| \geqslant 2^{-k}$ et soit $|b_n - b_m| \leqslant 2^{-k-1}$, soit $b_n < b_m$.

Dans tous les cas on obtient que :

$$|a_n - a_m| \geqslant 2^{-k} - 2^{-k-1} \geqslant \frac{1}{4 \times 2^{k-1}} \geqslant \frac{1}{4(n-m)}$$

D'où le résultat souhaité.

2 Géométrie (Alexander)

3 Droite et cercle d'Euler

Rappels théoriques

Des rappels sur la droite et le cercle d'Euler peuvent être trouvés dans la liste des lemmes utiles en géométrie de Thomas Budzinsky disponible sur le site de la POFM.

Remarque 1.
La notion de droite d'Euler pour un triangle équilatéral n'est pas définie. Il y a une droite d'Euler pour tout triangle non équilatéral.

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle non équilatéral. Les bissectrices extérieures du triangle ABC issues de A, B, C se rencontrent en A', B', C' (tels que A' est opposée à A, B' à B et C' à C). Montrer que (OI) est la droite d'Euler du triangle $A'B'C'$ (où O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et I le centre du cercle inscrit du triangle ABC).

Solution de l'exercice 1
Soit I le centre du cercle inscrit de ABC. On sait que $AI, B'C, C'B$ s'intersectent en A' par concourance des bissectrices extérieures. On a : $AI \perp B'C'$. Donc, AI est une hauteur du triangle $A'B'C'$. Donc, I est l'orthocentre de $A'B'C'$ (et se trouve donc sur la droite d'Euler du triangle $A'B'C'$), et A, B, C sont les pieds des hauteurs issues de A', B', C' du triangle $A'B'C'$. Donc, le cercle circonscrit à ABC est le cercle d'Euler du triangle $A'B'C'$, donc son centre O se trouve sur la droite d'Euler du triangle $A'B'C'$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux des côtés BC, CA, AB respectivement et P, Q, R les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. Soit S_1 le point d'intersection de (PQ) et $(A'C')$ et S_2 le point d'intersection de (PR) et $(A'B')$. Montrer que les points A, S_1, S_2 sont alignés.

Solution de l'exercice 2
Appliquer le théorème de Pascal dans le cercle d'Euler du triangle ABC.

Exercice 3
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible, avec $AB < CD$, dont les diagonales s'intersectent au point F et AD, BC s'intersectent au point E. Soit aussi K, L les projections de F sur les côtés AD, BC respectivement, et M, S, T les milieux de EF, CF, DF. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits des triangles MKT, MLS se trouve sur le côté CD.

Solution de l'exercice 3
C'est l'exercice 2 des olympiades balkaniques de mathématiques de 2016. Sa solution est sur le site des BMO.

Symédianes

Le cours est les exercices sont issus des volumes 62 et 63 de Jean-Louis Aymé, disponibles sur son site internet. Des solutions aux exercices utilisant des points harmoniques ont également été proposées par les élèves. En effet, si ABC est un triangle et A' un point du cercle circonscrit de ABC tel que AA' est la symédiane de ABC issue de A, alors les points $BCAA'$ sont harmoniques sur le cercle circonscrit à ABC (la preuve se fait par conservation du birapport par symétrie).

4 TD sur le théorème de Pascal (Martin)

Le but de ce TD est de mettre en avant le théorème de Pascal pour qu'il fasse parti des réflexes des élèves. On en profitera pour revoir d'autres méthodes dans des exercices où le théorème de Pascal n'est qu'une étape.

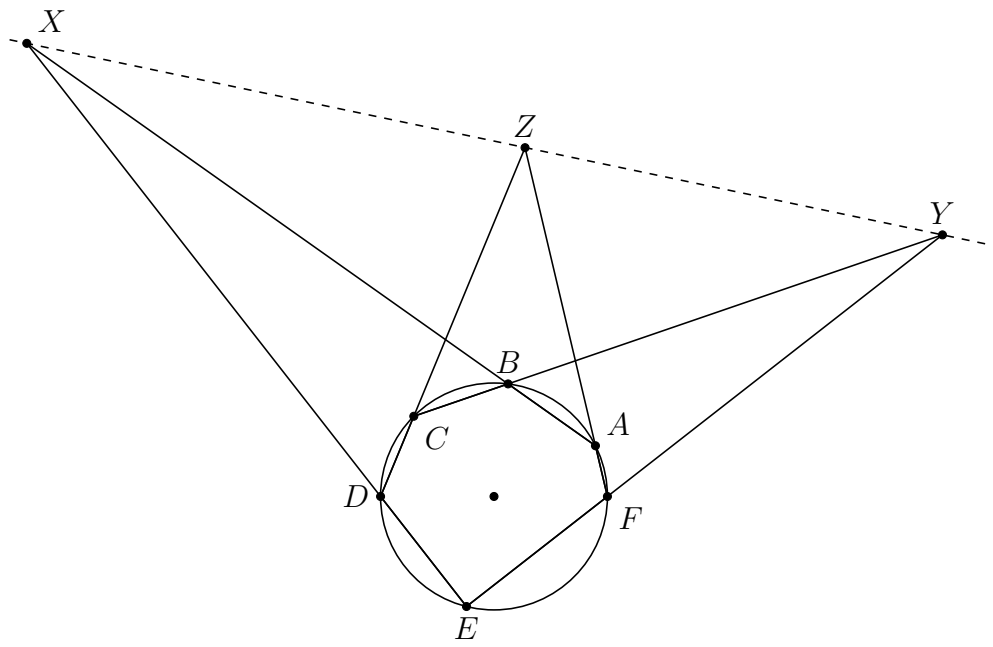
Enoncé du théorème

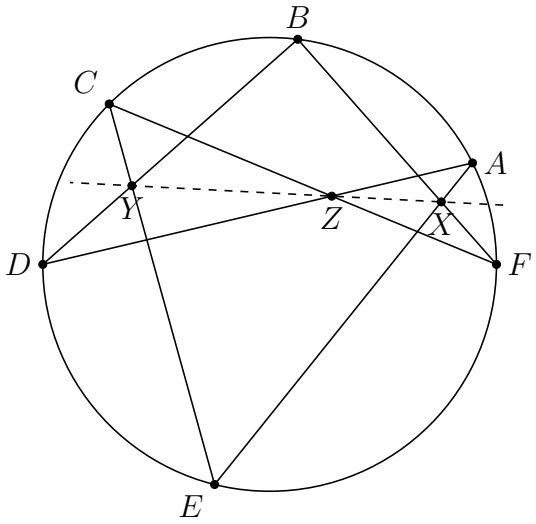
Voici le théorème :

Théorème 1.
Soit ω un cercle et soient A, B, C, D, E et F six points de ω. Alors les points suivants sont alignés :

- $(AB) \cap (DE)$
- $(BC) \cap (EF)$
- $(CD) \cap (FA)$

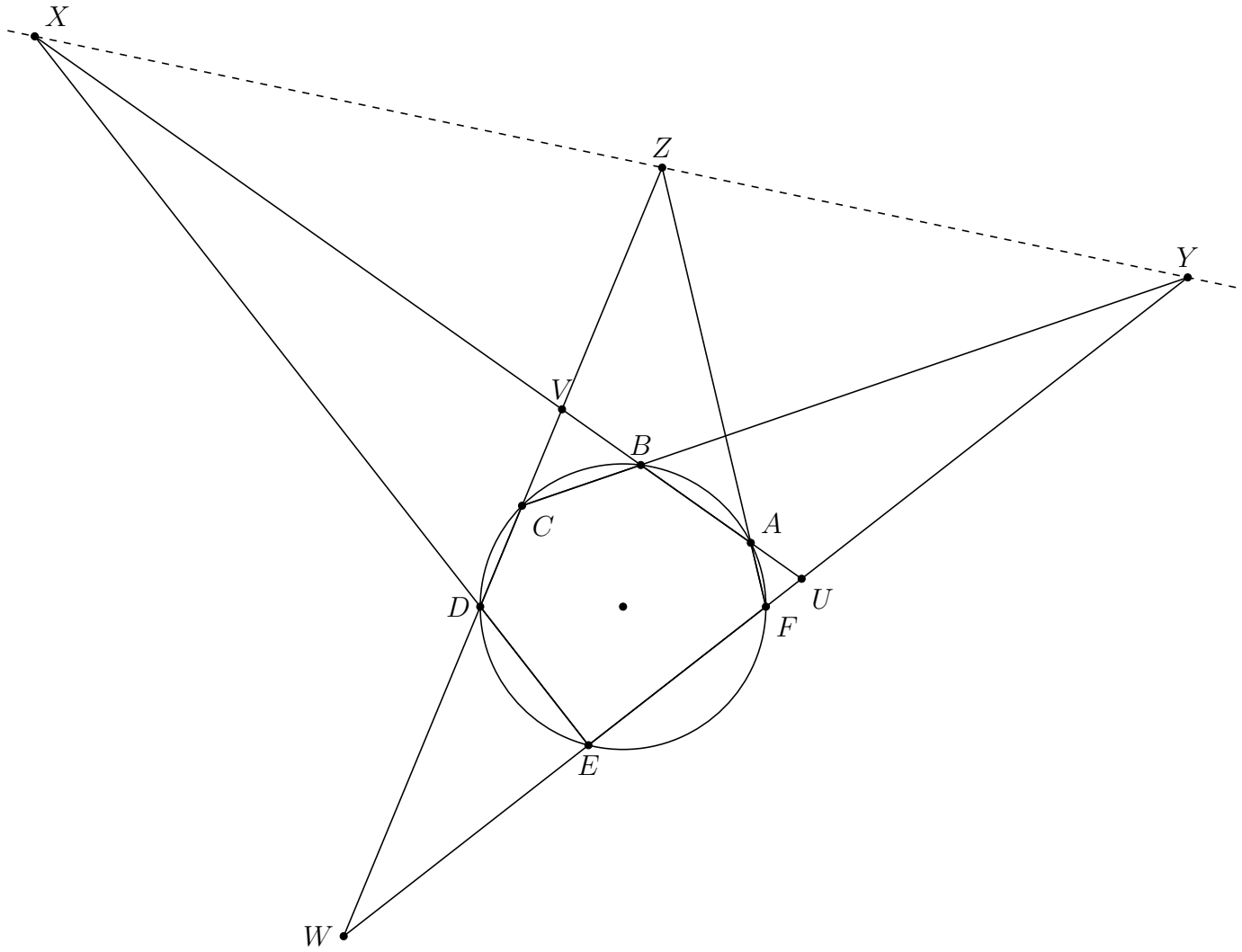
Remarquons d'emblée que l'ordre des points sur le cercle n'était pas spécifié, et c'est normal puisque le théorème est vrai quelque soit l'ordre des points sur le cercle ! De façon générale, on parle plutôt d'hexagone inscrit dans un cercle. On choisit alors l'hexagone auquel on désire appliquer le théorème. L'alignement obtenu par le théorème ne concerne pas les même points si l'on choisit l'hexagone $ABCDEF$ que si l'on choisit l'hexagone $AECFBD$.





On dispose de nombreuses preuves, on en présente une qui n'est pas "trop" projective, avec le théorème de Ménélaüs.

Démonstration.



Soit U le point d'intersection des droites (AB) et (EF). Soit V le point d'intersection des droites (DC) et (AB). Soit W le point d'intersection (DC) et (EF). On va appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle UVW et aux points X, Y et Z.

Pour cela, on désire montrer que

$$\frac{XV}{XU} \cdot \frac{YU}{YW} \cdot \frac{ZW}{ZV} = 1$$

Pour cela, on va utiliser à volonté le théorème de Ménélaüs et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points E, D et X, on a

$$\frac{XV}{XU} \cdot \frac{EU}{EW} \cdot \frac{DW}{DV} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points F, A et Z, on a

$$\frac{ZW}{ZV} \cdot \frac{AV}{AU} \cdot \frac{FU}{FW} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points C, B et Y, on a

$$\frac{YU}{YW} \cdot \frac{CW}{CV} \cdot \frac{BV}{BU} = 1$$

On calcule donc le produit des trois égalités en regroupant les termes

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\tfrac{XV}{XU} \cdot \tfrac{EU}{EW} \cdot \tfrac{DW}{DV}\right) \cdot \left(\tfrac{ZW}{ZV} \cdot \tfrac{AV}{AU} \cdot \tfrac{FU}{FW}\right) \cdot \left(\tfrac{YU}{YW} \cdot \tfrac{CW}{CV} \cdot \tfrac{BV}{BU}\right) \\ &= \left(\tfrac{XV}{XU} \cdot \tfrac{YU}{YW} \cdot \tfrac{ZW}{ZV}\right) \cdot \tfrac{EU \cdot FU}{AU \cdot BU} \cdot \tfrac{AV \cdot BV}{CV \cdot DV} \cdot \tfrac{CW \cdot DW}{EW \cdot FW} \\ &= \tfrac{XV}{XU} \cdot \tfrac{YU}{YW} \cdot \tfrac{ZW}{ZV} \end{aligned}$$

En effet les fractions $\frac{EU \cdot FU}{AU \cdot BU}$, $\frac{AV \cdot BV}{CV \cdot DV}$ et $\frac{CW \cdot DW}{EW \cdot FW}$ vaut 1 par puissance d'un point.
On a obtenu le résultat voulu. □

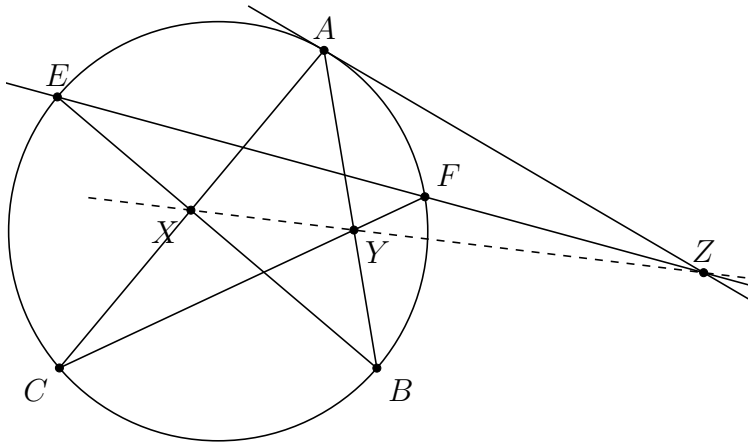
Comment retenir le théorème ? Une fois que l'on a choisi l'hexagone que l'on désire utiliser, on peut imaginer le coloriage suivant pour obtenir les points alignés :

$ABCDEF$ $ABCDEF$ $ABCDEF$

Les groupes de lettres voisines de même couleurs correspondent à des droites.

Cas dégénéré

On peut se demander ce qu'il se passe si l'on choisit deux fois le même point dans l'hexagone, en considérant par exemple l'hexagone $AABEFC$. La réponse est que le théorème s'applique toujours ! La droite (AA) correspond en fait à la droite tangente au cercle ω. On peut même séparer les deux points A et considérer l'hexagone $ABCAEF$.



Ceci peut être appliqué à l'extrême pour résoudre l'exercice suivant :

Exercice 1
Soit ABC un triangel et ω son cercle circonscrit. On note X le point d'intersection de la tangente au cercle ω au point A avec la droite (BC), Y le point d'intersection de la tangente au cercle ω au point B avec la droite (AC) et Z le point d'intersection de la tangente au cercle ω au point C avec la droite (AB). Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

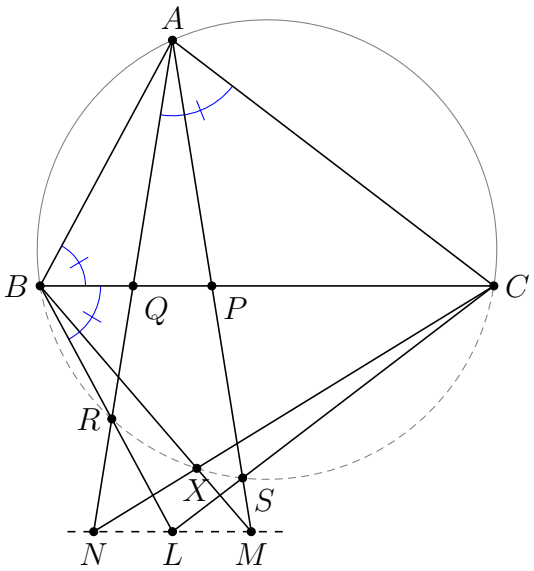
Solution de l'exercice 1
Il suffit d'appliquer le théorème de Pascal à l'hexagone $AABBCC$ pour obtenir que les points $X = (AA) \cap (BC)$, $Y = (BB) \cap (AC)$ et $Z = (CC) \cap (AB)$ sont alignés.

Une utilisation subtile

On présente ici à travers un exemple comment on peut déduire une cocyclicité avec le théorème de Pascal.

Exercice 2
(IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Solution de l'exercice 2



On introduit les points R et S, points d'intersection des droites (AN) et (AM) respectivement avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Voici l'idée :

Les points A, B, R, S et C définissent une conique (ici, un cercle). Si l'on parvient à démontrer que le théorème de Pascal est vérifié pour l'hexagone $ARBXCS$, on aura démontré que ces six points appartiennent à la même conique, et donc que le point X appartient à la

conique définie par les points A, B, R, S et C, et donc que le point X appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

On note L le point d'intersection des droites (BR) et (CS). Il s'agit de démontrer que les points $L = (BR) \cap (CS)$, $M = (BX) \cap (AS)$ et $N = (CX) \cap (AR)$ sont alignés.

On a $\widehat{RBC} = \widehat{RAC} = \widehat{QAC} = \widehat{CBA}$. De même on obtient que $\widehat{SCA} = \widehat{BCA}$. Le point L est donc le symétrique du point A par rapport au segment $[BC]$. Les points M, N et L sont donc les images respectives des points P, Q et du pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABC par l'homothétie de centre A de rapport 2. Puisque les points P, Q et le pied de la hauteur issue du sommet A sont alignés, il en est de même des points M, N et L. On a démontré ce que l'on désirait.

La leçon à retenir est que l'on peut démontrer des cocyclicités à l'aide du théorème de Pascal : s'il est vérifié pour une hexagone dont 5 des sommets sont sur un même cercle, alors le sixième sommet est lui aussi sur ce cercle.

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle. Soient S_B et S_C les pôles Sud des points B et C. Soient E et F les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que la tangente au cercle circonscirt au triangle ABC en A et les droites (EF) et $(S_B S_C)$ sont concourantes.

Exercice 2
(BXMO 2010) Soient A, B et P trois points alignés dans cet ordre sur une droite l. Soit a la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point A. Soit b la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point B. Une droite passant par le point P distincte de la droite l coupe la droite a en Q et la droite b en R. La perpendiculaire à la droite (BQ) passant par A coupe la droite (BQ) au point L et la droite (BR) au point T. La perpendiculaire à la droite (AR) passant par le point B coupe la droite (AR) en K et la droite (AQ) en S.
1) Montrer que les points P, T et S sont alignés.
2) Montrer que les points P, K et L sont alignés.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues des sommets B et C, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[AC]$ et $[AB]$ et P et Q les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que les droites $(PQ), (EF)$ et $(H_B H_C)$ sont concourantes.

Exercice 4
(G2 2004) Soit Γ un cercle et soit d une droite ne passant par aucun point du cercle Γ. Soit $[AB]$ le diamètre du cerlce Γ perpendiculaire à la droite d et tel que le point B est plus proche que le point A de la droite d. Soit C un point arbitraire sur le cercle Γ, distinct des points A et B. Soit D le point d'intersection des droites d et (AC). L'une des deux tangentes au cercle Γ issues du point D touche le cercle au point e, en supposant que les points B et E sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Soit F le point d'intersection des droites (BE) et d. Soit G le second point d'intersection de la droite (AF) avec le cercle Γ. Montrer que le symétrique du point G par rapport au segment $[AB]$ appartient à la droite (CF).

Exercice 5
(ELMO 2014 SL G4) Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle ω. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (CD) au point E. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (BC) au point F. La droite (BE) recoupe le cercle ω au point G. Les droites (BE) et (AD) se coupent au point H. La droite (DF) recoupe le cercle ω au point I et les droites (DF) et (AB) se coupent au point J. Montrer que les droites $(GI), (HJ)$ et la symmédiane issue du sommet B dans le triangle ABC sont concourantes.

Exercice 6
Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles inscrits aux triangles ACD et ABD. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BE) et (CF). Les droites (BE) et (BF) recoupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles PQX et RSX. Prouver que le point Y appartient à (AD).

Exercice 7
(FRA TST 2017/2018) . Soient deux cercles ω_1 et ω_2 tangents l'un a l'autre en un point T, tels que le cercle ω_1 soit à l'interieur du cercle ω_2. Soient M et N deux points distincts sur le cercle ω_1, differents du point T. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes du cercle ω_2 passant respectivement par les points M et N. On suppose que les segments $[BD]$, $[AC]$ et $[MN]$ s'intersectent en un point K. Montrer que la droite (TK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MTN}$.

Exercice 8
(RMM 2016 P1) Soit ABC un triangle et soit A' le symétrique du point A par rapport au segment $[BC]$. Soit D un point du segment $[BC]$ différent des points B et C. Le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le segment $[AC]$ en un point E. Le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le segment $[AB]$ en un point F. Les droites $(A'C)$ et (DE) se coupent en un point P et les droites $(A'B)$ et (DF) se coupent en un point Q. Montrer que les droites $(AD), (BP)$ et (CQ) sont concourrantes ou parallèles.

Exercice 9
(Envoi de géométrie 2019/2020) Soit ABC un triangle, soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et D le point de tangence de ce cercle avec le segment $[AC]$. Les droites (OI) et (AB) se coupent en un point P. Soit M le milieu de l'arc AC ne contenant pas B et N le milieu de l'arc BC contenant A.

Montrer que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 10
(Vietnam MO 2019) Soit ABC un triangle non isocèle et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soient M, N et P les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soient D, E et F les pieds des hauteurs issuées des sommets A, B et C. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Soit K le symétrique du point H par rapport à la droite (BC). Les droites (DE) et (MP) se coupent au point X. Les droites (DF) et (MN) se coupent au point Y.

1) La droite (XY) coupe le petit arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC au point Z. Montrer que les points K, Z, E et F sont cocycliques.

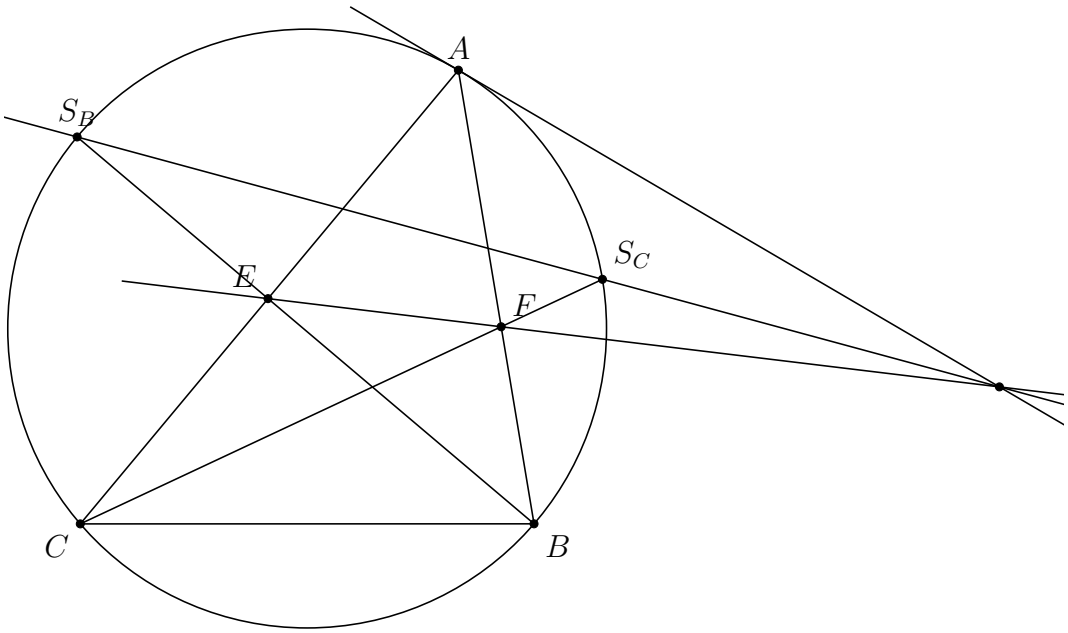
2) Les droites (KE) et (KF) coupent le cercle circonscrit au triangle ABC une deuxième fois aux points S et T respectivement. Montrer que les droites $(BS), (CT)$ et (XY) sont concourantes.

Exercice 11
(G5 IMO 2011) Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et ω son cercle circonscrit. Soient D et E les seconds points d'intersection des droites (AI) et (BI) avec le cercle ω. La corde (DE) coupe la droite (AC) au point F et la droite (BC) au point G. Soit P le point d'intersection de la parallèle à la droite (AD) passant par le point F avec la parallèle à la droite (BE) passant par le point G. On note K le point d'intersection des tangentes au cercle ω en les points A et B. Montrer que les droites $(AE), (BD)$ et (KP) sont concourantes ou parallèles.

Solutions

Exercice 1
Soit ABC un triangle. Soient S_B et S_C les pôles Sud des points B et C. Soient E et F les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que la tangente au cercle circonscirt au triangle ABC en A et les droites (EF) et (S_BS_C) sont concourantes.

Solution de l'exercice 1



D'après le théorème de pascal appliqué à l'hexagone $AABS_BS_CC$, les points $(AA) \cap (S_BS_C)$, $F = (AB) \cap (CS_C)$ et $E = (AC) \cap (BS_B)$ sont alignés, ce qui se traduit par le fait que les droites (EF) et (S_BS_C) ainsi que la tangente au point A sont concourantes.

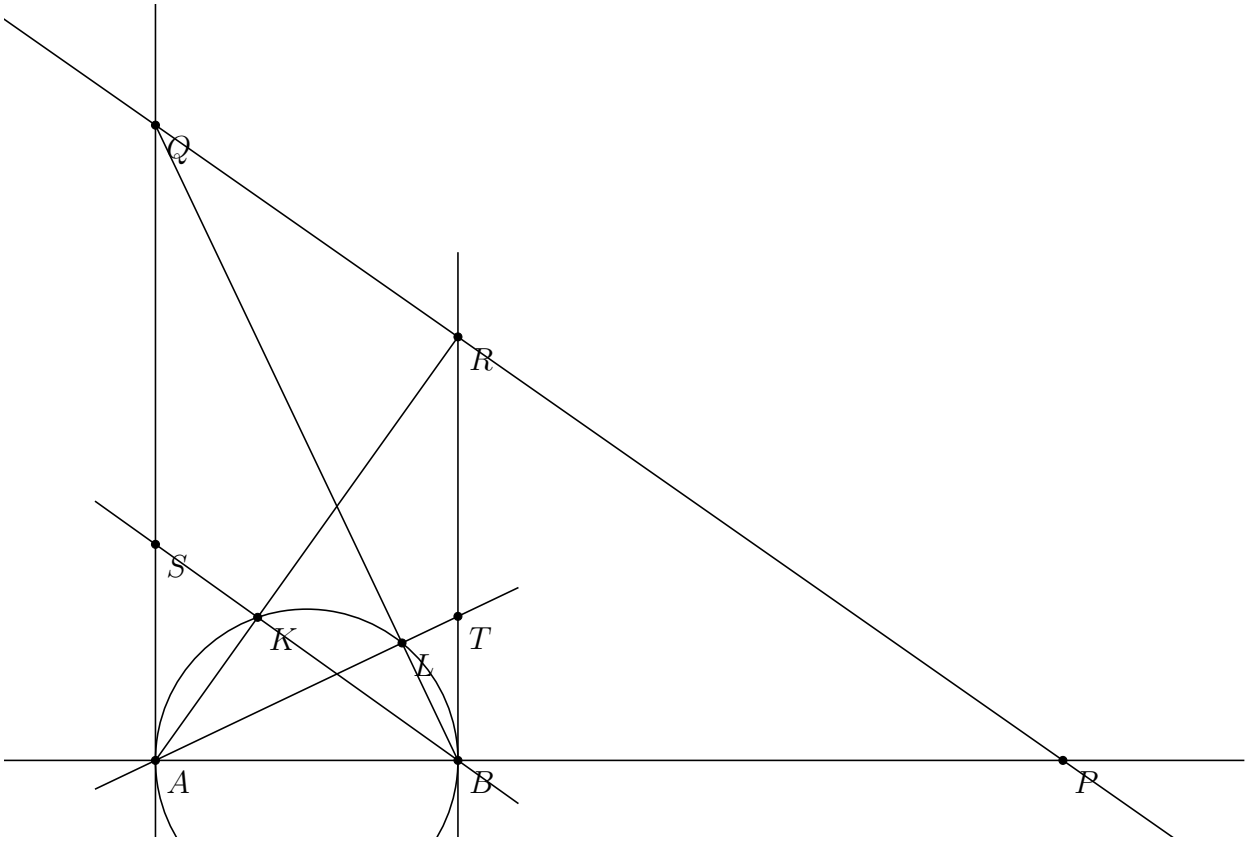
Exercice 2

(BXMO 2010) Soient A, B et P trois points alignés dans cet ordre sur une droite l. Soit a la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point A. Soit b la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point B. Une droite passant par le point P distincte de la droite l coupe la droite a en Q et la droite b en R. La perpendiculaire à la droite (BQ) passant par A coupe la droite (BQ) au point L et la droite (BR) au point T. La perpendiculaire à la droite (AR) passant par le point B coupe la droite (AR) en K et la droite (AQ) en S.

1) Montrer que les points P, T et S sont alignés.

2) Montrer que les points P, K et L sont alignés.

Solution de l'exercice 2



On a $\widehat{BLA} = 90° = \widehat{AKB}$ donc les points A, K, L et B sont cocycliques. On note ω le cercle obtenu. La droite a est tangente au cercle ω au point A et la droite b est tangente au cercle ω au point B.

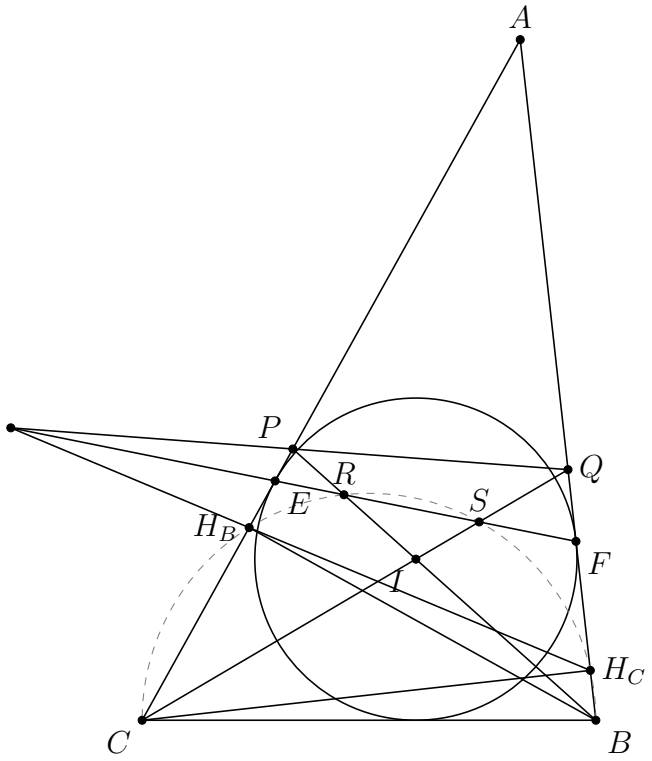
D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone cyclique $AAKLBB$, les points $Q = (AA) \cap (BL)$, $R = (AK) \cap (BB)$ et $(KL) \cap (AB)$ sont alignés. Les droites $(QR), (KL)$ et (AB) sont donc concourantes au point P donc les points P, K et L sont alignés.

D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone cyclique $AALKBB$, les points $S = (AA) \cap (BK)$, $T = (AL) \cap (BB)$ et $P = (KL) \cap (AB)$ sont alignés.

On a répondu aux deux questions.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues des sommets B et C, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[AC]$ et $[AB]$ et P et Q les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que les droites $(PQ), (EF)$ et (H_BH_C) sont concourantes.

Solution de l'exercice 3



Soit ω le cercle de diamètre $[BC]$. Le point clé est le lemme suivant : les droites (BI) et (EF) se coupent sur le cercle ω et les droites (CI) et (EF) se coupent sur le cercle ω.

En effet, si l'on pose R le second point d'intersection de la droite (BI) avec le cercle ω, on a $\widehat{CRI} = \widehat{CRB} = 90°$. Les points C, E, R et I sont donc cocycliques.

On pose alors S le second point d'intersection de la droite (CI) avec le cercle ω. On obtient

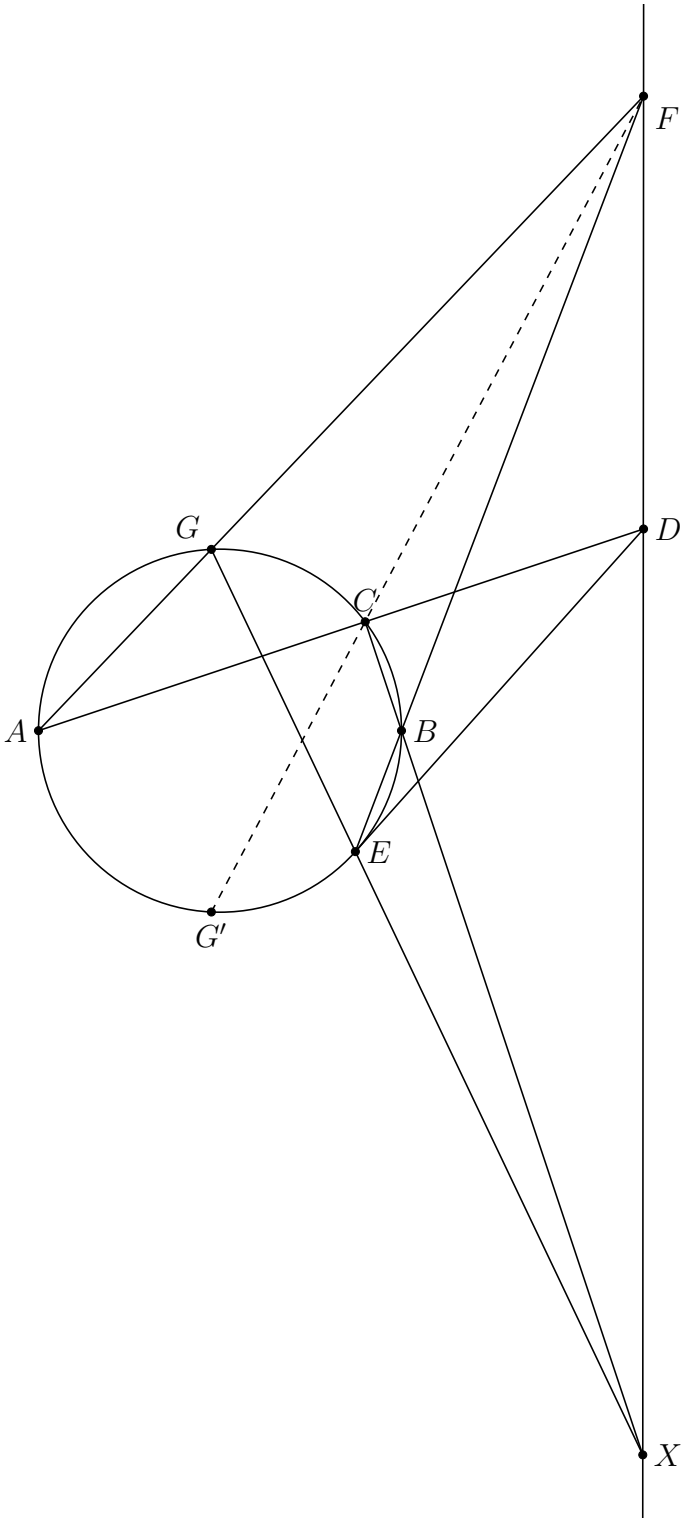
$$\widehat{IRS} = \widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{BCA} = \widehat{ICE} = 180° - \widehat{ERI}$$

Les points E, R et S sont donc alignés et de la même façon les points R, S et F sont alignés. En conclusion, les points R et S appartiennent à la droite (EF).

En appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone cyclique $RSCH_BH_CB$, les points $(RS) \cap (H_BH_C)$, $Q = (CS) \cap (BH_C)$ et $P = (BR) \cap (CH_B)$ sont alignés, ce qui signifie bien que les droites $(PQ), (EF)$ et (H_BH_C) sont concourantes.

Exercice 4
(G2 2004) Soit Γ un cercle et soit d une droite ne passant par aucun point du cercle Γ. Soit $[AB]$ le diamètre du cerlce Γ perpendiculaire à la droite d et tel que le point B est plus proche que le point A de la droite d. Soit C un point arbitraire sur le cercle Γ, distinct des points A et B. Soit D le point d'intersection des droites d et (AC). L'une des deux tangentes au cercle Γ issues du point D touche le cercle au point e, en supposant que les points B et E sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Soit F le point d'intersection des droites (BE) et d. Soit G le second point d'intersection de la droite (AF) avec le cercle Γ. Montrer que le symétrique du point G par rapport au segment $[AB]$ appartient à la droite (CF).

Solution de l'exercice 4



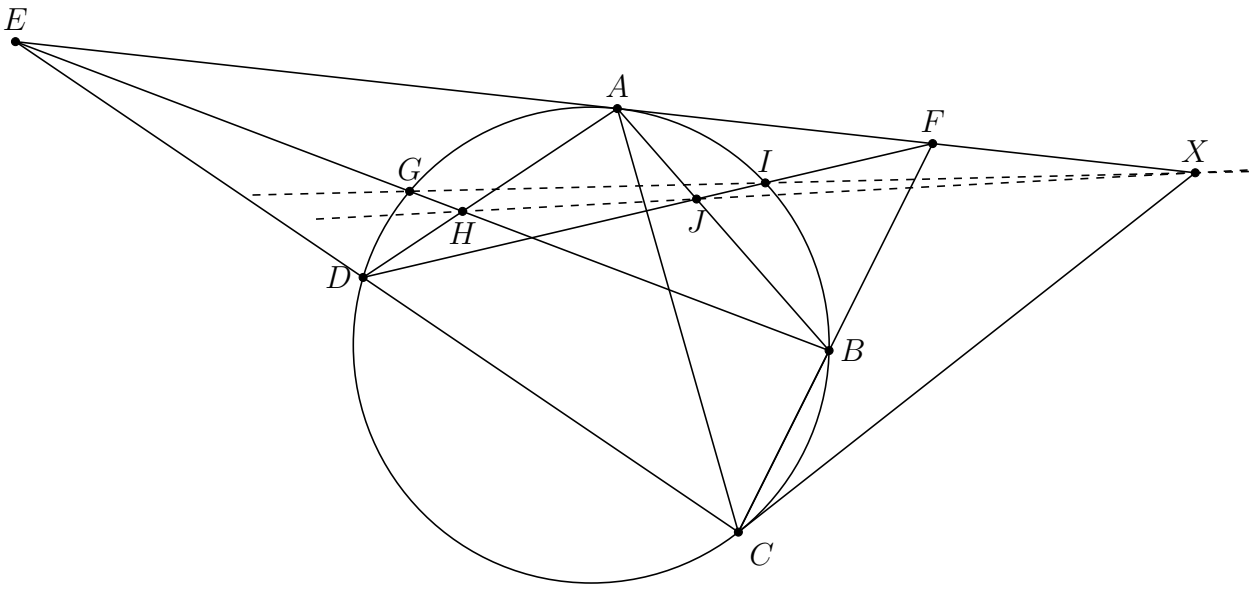
D'après le théorème de Pascal pour l'hexagone $EEBCAG$, les points $D = (EE) \cap (AC)$, $F = (EB) \cap (AG)$ et $(BC) \cap (EG)$ sont alignés. On note X le point d'intersection des droites (GE) et (BC), qui appartient donc à la droite d.

On note G' le symétrique du point G par rapport au segment $[AB]$. Le point G' appartient donc au cercle Γ. D'après le théorème de Pascal pour l'hexagone $GEBBCG'$, les points $X = (GE) \cap (BC)$, $(EB) \cap (CG')$ et $(GG') \cap (BB)$ sont alignés.

Or les droites (BB) et (GG') sont toutes les deux perpendiculaires au segment $[AB]$, donc elles sont parallèles. Le point d'intersection des droites (GG') et (BB) est donc le point à l'infini porté par la droite d (qui est parallèle à la droite (BB)). Ainsi, si on note $F' = (EB) \cap (CG')$, l'aligenment mis en évidence se traduit par le fait que les droites (XF') et (BB) sont parallèles, donc que le point F' appartient à la droite d. On a donc que $F = F'$ et les points G', C et F sont bien alignés.

Exercice 5
(ELMO 2014 SL G4) Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle ω. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (CD) au point E. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (BC) au point F. La droite (BE) recoupe le cercle ω au point G. Les droites (BE) et (AD) se coupent au point H. La droite (DF) recoupe le cercle ω au point I et les droites (DF) et (AB) se coupent au point J. Montrer que les droites (GI), (HJ) et la symmédiane issue du sommet B dans le triangle ABC sont concourantes.

Solution de l'exercice 5



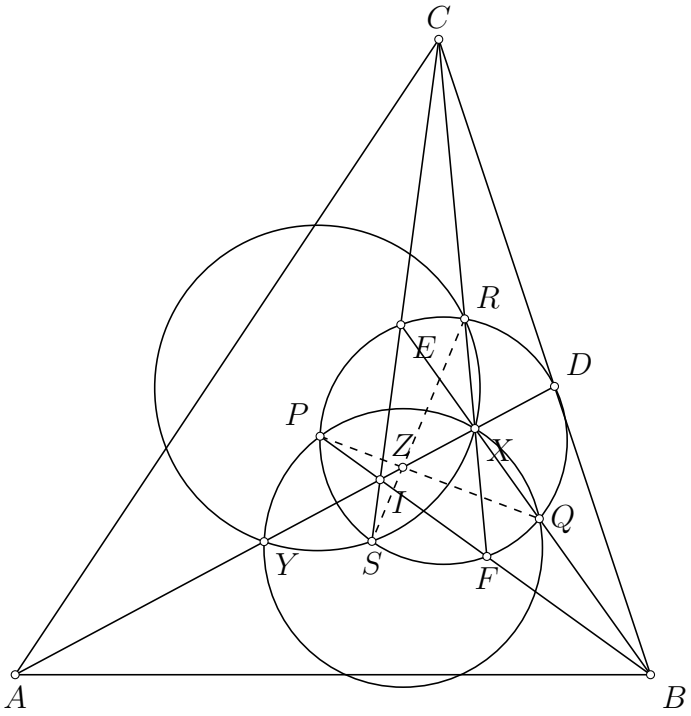
Une figure exacte montrer que le point de concours appartient à la droite (EF). Cette droite va donc nous servir d'intermédiaire.

Le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $AABGID$ nous montre que les points $(AB)\cap(ID) = J$, $(BG)\cap(DA) = H$ et $(AA)\cap(GI)$ sont alignés. On note X le dernier point.

Le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $CCBGID$ nous montre que les points $(CB)\cap(ID) = F$, $(BG)\cap(DC) = E$ et $(CC)\cap(GI)$ sont alignés. Or la droite (EF) correspond à la tangente au cercle ω au point A. Donc le point d'intersection des droites (EF) et (GI) est le point X. On a donc obtenu que le point X appartient à la tangente au cercle ω au point C. Ainsi, le point X appartient au tangentes au cercle ω (donc à la symmédiane issue du sommet B) et aux droites (HJ) et (GI), ce qui donne le résultat.

Exercice 6
Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles inscrits aux triangles ACD et ABD. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BE) et (CF). Les droites (BE) et (BF) recoupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles PQX et RSX. Prouver que le point Y appartient à (AD).

Solution de l'exercice 6



Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Par théorème de la bissectrice :

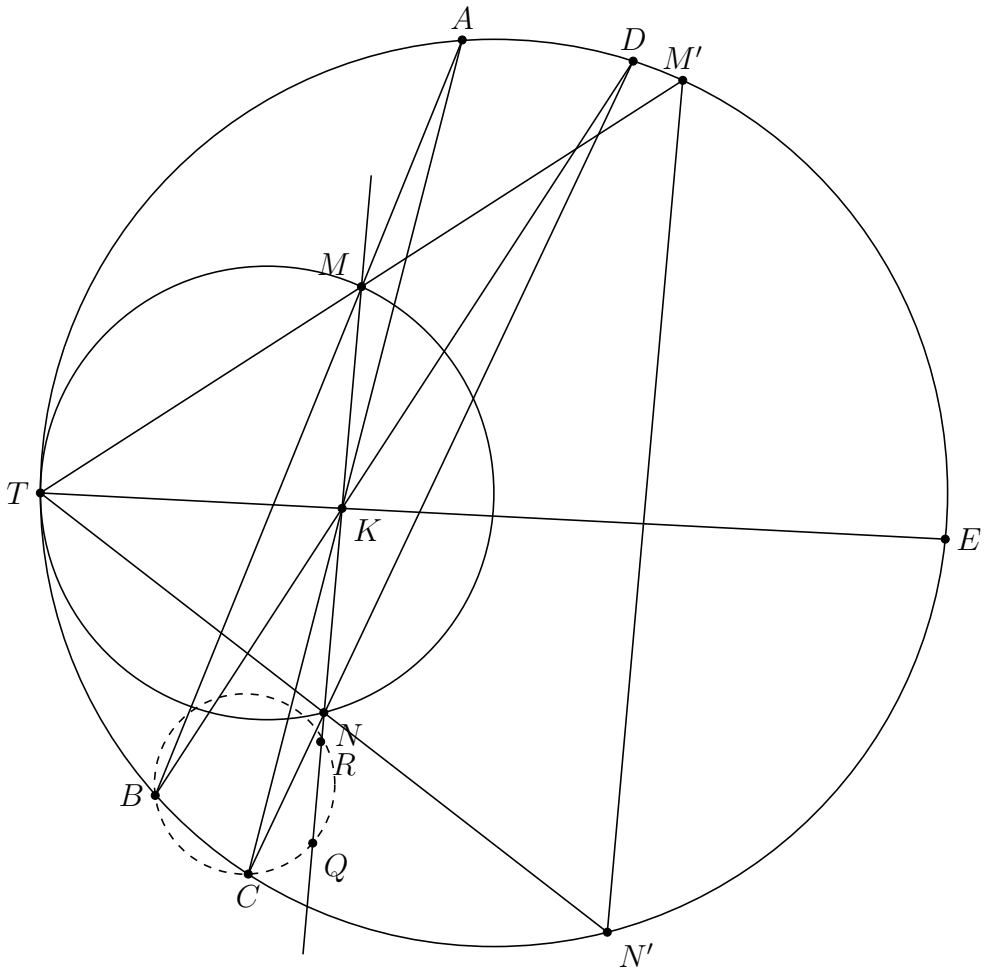
$$\frac{IE}{EC}\cdot\frac{DC}{DB}\cdot\frac{BF}{IF}=\frac{AI}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{AI}=1$$

Donc, d'après le théorème de Céva, le point X est sur la droite (ID).

Soit Z le point d'intersection des droites (RS) et (PQ). Par le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $PFRSEQ$, les points X, I, Z sont alignés. Par puissance d'un point dans le cercle ω, $SZ\cdot RZ = QZ\cdot PZ$ donc le point Z est sur l'axe radical des cercles PQX et RSX, donc le point Z est aligné avec les points X et Y. Il vient que le point Y est sur (AD).

Exercice 7
(FRA TST 2017/2018) Soient deux cercles ω_1 et ω_2 tangents l'un a l'autre en un point T, tels que le cercle ω_1 soit à l'interieur du cercle ω_2. Soient M et N deux points distincts sur le cercle ω_1, differents du point T. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes du cercle ω_2 passant respectivement par les points M et N. On suppose que les segments $[BD]$, $[AC]$ et $[MN]$ s'intersectent en un point K. Montrer que la droite (TK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MTN}$.

Solution de l'exercice 7



On appelle E le second point d'intersection de la droite (TK) et du cercle ω_2. On prolonge les droites (TM) et (TN) qui coupent le cercle ω_2 en les points M' et N'.

D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $BACM'TE$ les points $M = (BA) \cap (TM')$, $K = (AC) \cap (TE)$ et $(BE) \cap (CM')$ sont alignés. On note $R = (BE) \cap (CM')$. Le point R appartient donc à la droite (MN). D'après le théorème de Pascal dans l'hexagone $CDBN'TE$, les points $N = (CD) \cap (TN')$, $K = (DB) \cap (ET)$ et $(BN') \cap (EC)$ sont alignés. On pose $Q = (BN') \cap (EC)$. Le point Q appartient donc à la droite (MN). L'homothétie de centre T envoyant le cercle ω_1 sur le cercle ω_2 envoye les points M et N sur les points M' et

N'. Les droites (QR) et $(M'N')$ sont donc parallèles. Ainsi :

$$\widehat{CRQ} = \widehat{CM'N'} = \widehat{CBN'} = \widehat{CBQ}$$

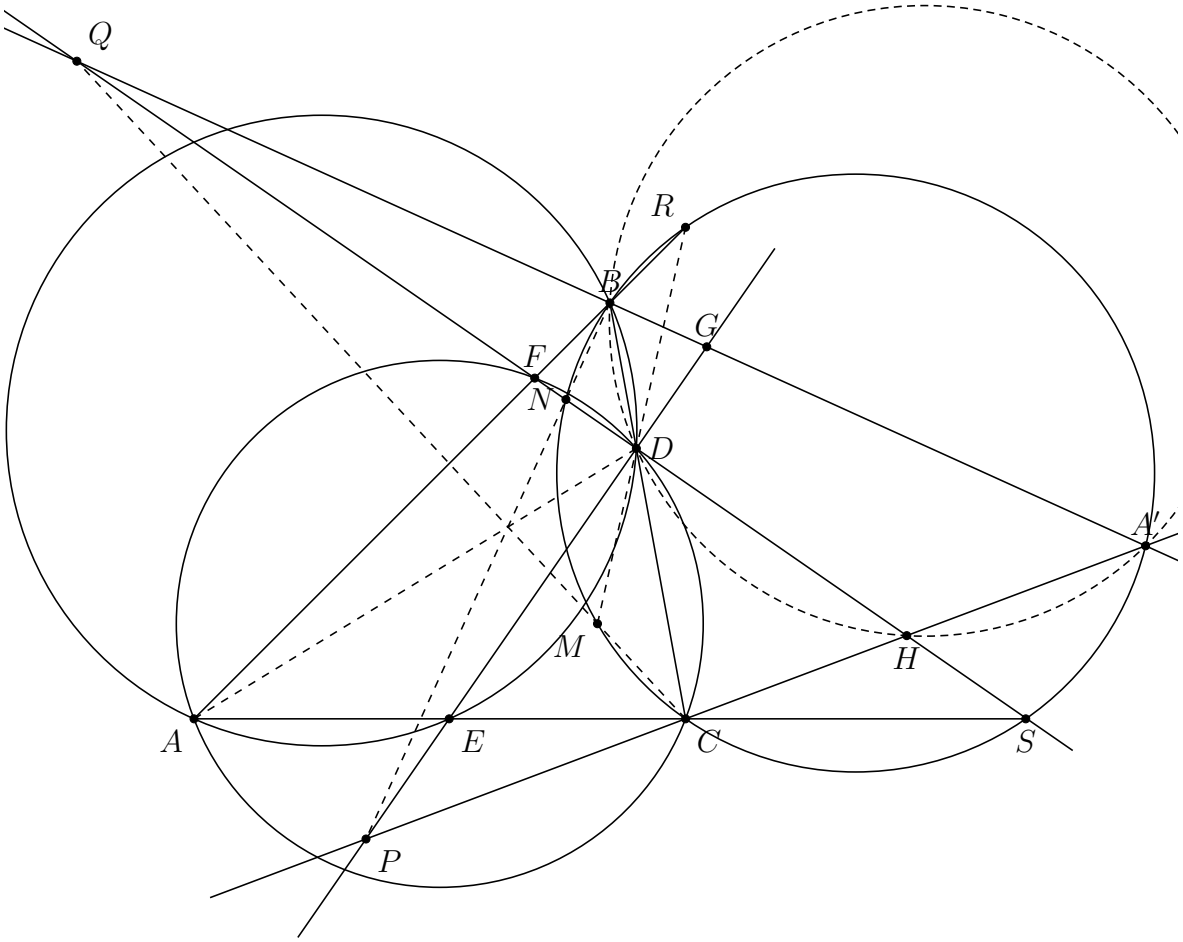
donc le quadrilatère $BCQR$ est cyclique. Alors

$$\widehat{NTK} = \widehat{N'TE} = \widehat{N'BE} = \widehat{QBR} = \widehat{QCR} = \widehat{ECM'} = \widehat{KTM}$$

ce qui prouve que le point K est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{NTM}$.

Exercice 8
(RMM 2016 P1) Soit ABC un triangle et soit A' le symétrique du point A par rapport au segment $[BC]$. Soit D un point du segment $[BC]$ différent des points B et C. Le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le segment $[AC]$ en un point E. Le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le segment $[AB]$ en un point F. Les droites $(A'C)$ et (DE) se coupent en un point P et les droites $(A'B)$ et (DF) se coupent en un point Q. Montrer que les droites $(AD), (BP)$ et (CQ) sont concourrantes ou parallèles.

Solution de l'exercice 8

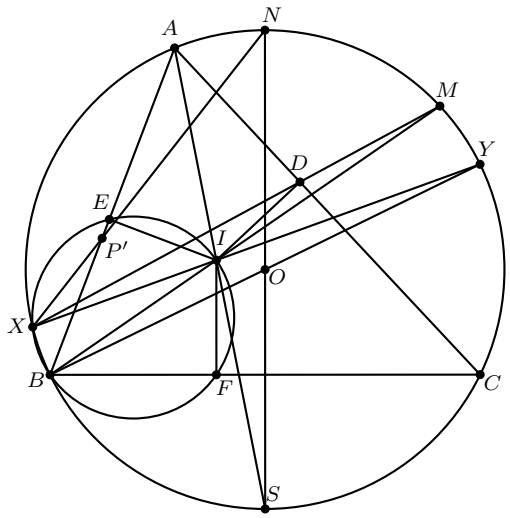


On note G le point d'intersection des droites (ED) et (BA') et H le point d'intersection des droites (FD) et (CA'). On a $\widehat{HDC} = \widehat{BDF} = 180° - \widehat{FDC} = \widehat{FAC} = \widehat{BAC}$. Donc $\widehat{HDC} = \widehat{EDC}$ donc le point H est le symétrique du point E par rapport à la droite (BC). De la même manière, le point G est symétrique du point F par rapport à la droite (BC). De ce fait, comme les points A, E, D et B sont cocycliques, les points B, A', H et$D$ sont cocycliques et le point de Miquel M du quadrilatère complet $CDBA'QH$ appartient à la droite (CQ). De même, le point de Miquel N du quadrilatère $BDCA'PQ$ est sur la droite (BP). Par définition des points M et N, les points A', B, C, M, N sont cocycliques. Ce cercle coupe la droite (AC)

en S et la droite (AB) en R. On essaye de montrer que $D \in (MR)$ désormais. Pour cela on a, puisque les points M, D, B et Q sont cocycliques par définition du point M : $\widehat{CMD} = \widehat{CBQ} = \widehat{CBA'} = \widehat{CBA}$ puisque A' est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC). Enfin, on a $\widehat{CBA} = \widehat{CBR} = \widehat{CMR}$ puisque les points C, B, M et R sont cocycliques. On trouve donc $\widehat{CMD} = \widehat{CMR}$ donc le point D appartient bien à la droite (MR) et de même il appartient à la droite (NS), il est donc le point d'intersection des droites (NS) et de (MR). Finalement, en appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone $BRMCSN$, les points $A = (BR) \cap (CS)$, $D = (MR) \cap (NS)$ et $(CM) \cap (BN)$ sont alignés, ce qui se traduit par le fait que les droites $(BP), (CQ)$ et (AD) sont concourantes.

Exercice 9
Soit ABC un triangle, soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et D le point de tangence de ce cercle avec le segment $[AC]$. Les droites (OI) et (AB) se coupent en un point P. Soit M le milieu de l'arc AC ne contenant pas B et N le milieu de l'arc BC contenant A.

Montrer que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.



Solution de l'exercice 9
Soit X le point d'intersection de la droite (MD) avec le cercle circonscrit au triangle ABC et soit P' le point d'intersection de la droite (XN) avec le segment $[AB]$. Soit S le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le cercle circonscrit au triangle ABC. On sait que les points N, O et S sont alignés.

Soient E et F les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangles ABC avec les segment $[AB]$ et $[BC]$.

Le point M est le milieu de l'arc CA, il est donc sur la bissectrice de l'angle $\widehat{AXC}$. Le point D est le pied de cette bissectrice. D'après le théorème de la bissectrice, $\frac{AX}{XC} = \frac{DA}{DC} = \frac{AE}{CF}$. Puisque $\widehat{EAX} = \widehat{BAX} = \widehat{BCX} = \widehat{FCX}$, il vient que les triangles AEX et CFX sont semblables donc le point X est le centre de la similitude qui envoie les points E et F sur les points A et C, il est donc le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et EFB. Puisque $[BI]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle EBF, on déduit $\widehat{IXB} = 90°$. Soit Y le point diamétralement opposé au point B dans le cercle circonscrit au triangle ABC. Alors $\widehat{YXB} = 90 = \widehat{IXB}$. Les points X, I et Y sont donc alignés.

D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $SABYXN$, les points $O = (BY) \cap (SN)$, $I = (YX) \cap (AS)$ et $P' = (AB) \cap (XN)$ sont alignés. Le point P' correspond donc au point d'intersection des droites (OI) et (AB) donc $P = P'$ ce qui donne bien que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

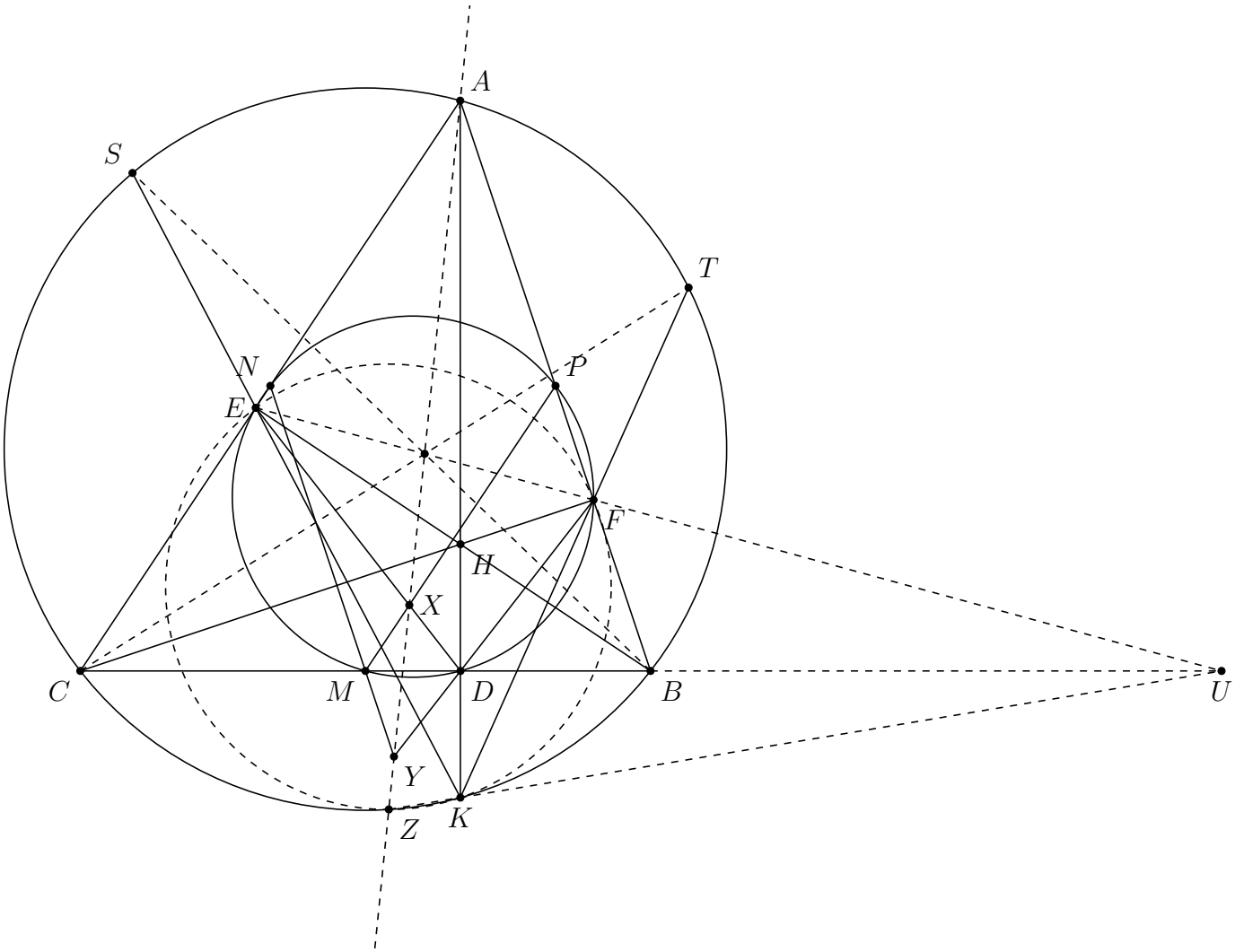
Exercice 10

(Vietnam MO 2019) Soit ABC un triangle non isocèle et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soient M, N et P les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soient D, E et F les pieds des hauteurs issuées des sommets A, B et C. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Soit K le symétrique du point H par rapport à la droite (BC). Les droites (DE) et (MP) se coupent au point X. Les droites (DF) et (MN) se coupent au point Y.

1) La droite (XY) coupe le petit arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC au point Z. Montrer que les points K, Z, E et F sont cocycliques.

2) Les droites (KE) et (KF) coupent le cercle circonscrit au triangle ABC une deuxième fois aux points S et T respectivement. Montrer que les droites $(BS), (CT)$ et (XY) sont concourantes.

Solution de l'exercice 10



1) D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $NMPFDE$, les points $Y = (NM) \cap (FD)$, $X = (MP) \cap (DE)$ et $A = (PF) \cap (EN)$ sont alignés. Soit Q le point d'intersection des droites (EF) et (AY). D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle DEF et aux points Q, X et Y, on a

$$\frac{QE}{QF}\cdot\frac{YF}{YD}\cdot\frac{XD}{XE}=1$$

Or d'après le théorème de Thalès, $\frac{YF}{YD}=\frac{DF}{YD}+1=\frac{DB}{DM}+1=\frac{MB}{MD}$ et $\frac{XD}{XE}=\frac{MD}{MC}=\frac{MD}{MB}$ donc

$$\frac{QE}{QF}=1$$

et le point Q est le milieu du segment $[EF]$. La similitude indirecte de centre A envoyant E sur B et F sur C envoye donc Q sur M donc les droites (AM) et (AQ) sont conjugués isogonales par rapport aux droites (AB) et (AC). La droite (AQ) est donc la symédiane issue du sommet A. Les points A, Z, C et B sont donc harmoniques.

Soit désormais U le point d'intersection des droites (ZK) et (BC). On rappelle que le point K appartient au cercle circonscrit au triangle ABC en tant que symétrique de l'orthocentre par rapport au côté $[BC]$.

En projetant par rapport au point K sur la droite (BC), on obtient

$$-1=(A,Z,B,C)=(D,U,B,C)$$

Or, le point U' d'intersection des droites (EF) et (BC) vérifie également que les points U', D, B, C sont harmoniques. On a donc $U'=U$, les droites $(EF), (ZK)$ et (BC) sont concourantes. Ainsi, par puissance d'un point :

$$UK\cdot UZ=UB\cdot UC=UE\cdot UF$$

donc par la réciproque, les points E, F, K et Z sont cocycliques.

2) Le point de concours semble être le point Q. Tout d'abord, d'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $KTCABS$, les points $F=(KT)\cap(AB)$, $(CT)\cap(BS)$ et $E=(AC)\cap(KS)$ sont alignés. Il s'agit donc de montrer que le point d'intersection des droites (BS) et (CT) est le point Q.

Les quadrilatères $CEFB$ et $HFBD$ sont cycliques donc $\widehat{QEC}=180°-\widehat{FBC}=180°-\widehat{DBF}=\widehat{KHF}$. Ensuite,

$$\frac{HF}{HK}=\frac{1}{2}\cdot\frac{HF}{HD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{HF}{HB}\cdot\frac{HB}{HD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{HF}{HB}\cdot\frac{BC}{EC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{EF}{EC}=\frac{EQ}{EC}$$

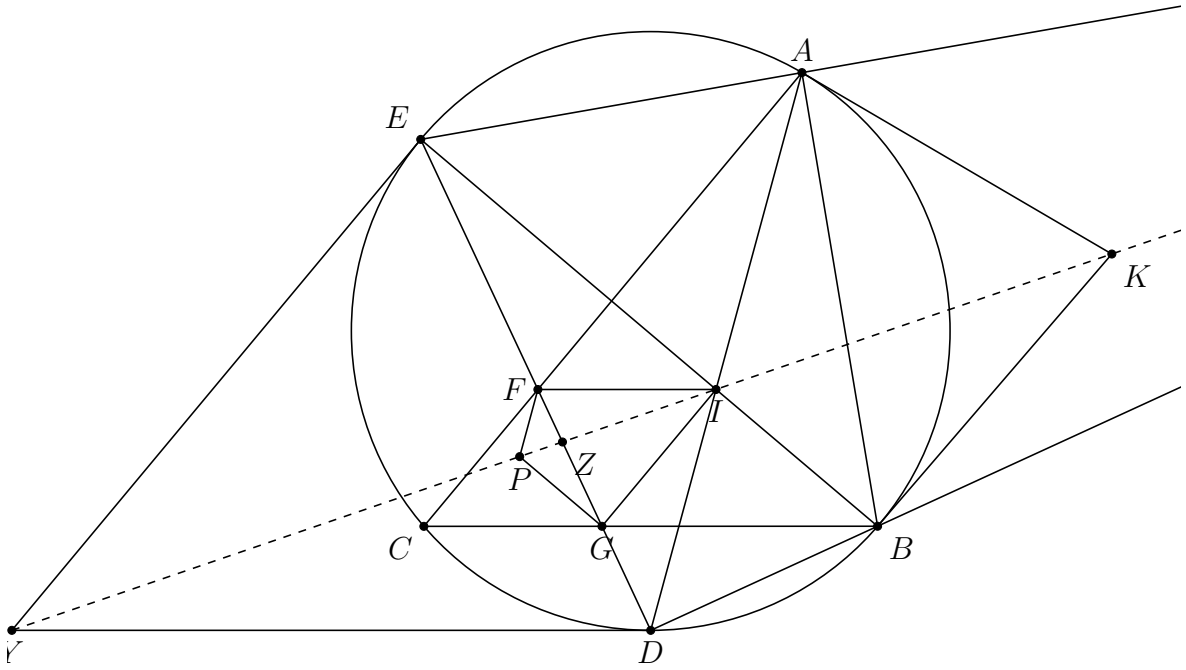
Donc les triangles QEC et FHK sont semblables. Ainsi

$$\widehat{ECQ}=\widehat{HKF}=\widehat{AKT}=\widehat{ECT}$$

donc les points C, Q et T sont alignés. De même les pionts B, Q et S sont alignés, donc les droites (BS) et (CT) se coupent sur la droite (XY).

Exercice 11
(G5 IMO 2011) Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et ω son cercle circonscrit. Soient D et E les seconds points d'intersection des droites (AI) et (BI) avec le cercle ω. La corde (DE) coupe la droite (AC) au point F et la droite (BC) au point G. Soit P le point d'intersection de la parallèle à la droite (AD) passant par le point F avec la parallèle à la droite (BE) passant par le point G. On note K le point d'intersection des tangentes au cercle ω en les points A et B. Montrer que les droites $(AE), (BD)$ et (KP) sont concourantes ou parallèles.

Solution de l'exercice 11



On note X le point d'intersection des droites (AE) et (BD). D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $AADBBE$, les points $K = (AA) \cap (BB)$, $I = (AD) \cap (BE)$ et $X = (AE) \cap (BD)$ sont alignés donc il suffit de montrer que les points P, I et K sont alignés. On note Y le point d'intersection des tangentes au cercle ω aux points E et D. D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $DDAEEB$, les points $Y = (DD) \cap (EE)$, $I = (AD) \cap (BE)$ et $X = (AE) \cap (BD)$ sont alignés, donc il suffit de montrer que les points Y, P et I sont alignés. Les points E et D sont les pôles Sud des sommets B et A donc les droites (EY) et (DY) sont parallèles aux droites (AC) et (BC). D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $DDEBCA$, les points $F = (DE) \cap (AC)$, $I = (AD) \cap (BE)$ et $(BC) \cap (DD)$ sont alignés. Les droites (BC) et (DD) sont parallèles donc on déduit en fait que les droites (FI), (DD) et (BC) sont parallèles.

De même on obtient que les droites $(GI), (AC)$ et (EE) sont parallèles. Le quadrilatère $CFIG$ est donc un parallélogramme. De plus, on sait que les droites (IC) et (DE) sont perpendiculaires donc le parallélogramme est en fait un losange.

On note désormais Z le point d'intersection des droites (DE) et (IY). Ce point vérifie d'après le théorème de Thalès, $\frac{ZF}{ZD} = \frac{IF}{YD}$ et d'autre part $\frac{ZG}{ZE} = \frac{IG}{EY}$ donc

$$\frac{ZF}{ZD} = \frac{IF}{YD} = \frac{IG}{YE} = \frac{ZG}{ZE}$$

Le point Z est donc le centre de l'homothétie qui envoie le point E sur le point G et le point D sur le point F. Il envoie le point Y sur le point I.

La droite (ID) est envoyé sur la droite passant par le point F et parallèle à la droite (AD), et donc sur la droite (FP). La droite (IE) est de même envoyé sur la droite (PG). Donc le point I, point d'intersection des droites (ID) et (IE), est envoyé sur le point d'intersection des droites (FP) et (GP), c'est-à-dire le point P. Les points P, Z et I sont alignés. Le point P appartient donc à la droite (YI), ce que l'on voulait démontrer.

5 Algèbre (Émile)

Cours

Un cours complet sur les polynômes se trouve sur le site de la POFM.
Les points importants à retenir sont :

— Un polynôme de degré n a au plus n racines comptées avec multiplicités, notamment si deux polynômes sont égaux pour une infinité de valeurs, on peut identifier leurs coefficients.

— α est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

— α est une racine de multiplicité n de P si et seulement si α est une racine de $P, P', \ldots, P^{(n-1)}$ mais pas une racine de $P^{(n)}$. Notamment, α est une racine multiple de P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

— Si $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ sont des couples de réels (respectivement rationnels, complexes), alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant pour tout i entre 0 et n : $P(x_i) = y_i$. De plus, ce polynôme est à coefficients réels (respectivement rationnels, complexes).

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les réels a, b tels que $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^2 + 1$.

Exercice 2
Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients réels. Montrer qu'il existe deux polynômes Q et R unitaires de degrés n à coefficients réels, et ayant chacun n racines réelles comptées avec multiplicité, tels que

$$P = \frac{Q + R}{2}.$$

Exercice 3
Montrer qu'un polynôme à coefficients rationnels irréductible ne peut pas avoir de racine complexe double.

Exercice 4
Soit P un polynôme de degré $n \geq 4$ à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et tel que $P(0) \neq 0$. Montrer que P a au moins une racine non réelle.

Exercice 5
Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n possédant n racines réelles (pas forcément distinctes). Montrer que pour tout réel x,

$$nP(x)P''(x) \leq (n-1)(P'(x))^2.$$

Quand a-t-on égalité pour tout x ?

Exercice 6
Soit f un polynôme à coefficients réels. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que pour tout entier naturel n on ait $a_n \leq f(n)$. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers divisant au moins un des a_n.

Exercice 7
Soit P un polynôme à coefficients réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0.$$

Montrer qu'il existe deux polynômes A et B à coefficients réels tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 8 (P2 IMO 2004)

Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant $ab + bc + ca = 0$, on ait

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

Exercice 9 (SL IMO 2002, A3)
Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d des entiers et $a \neq 0$. Supposons que pour une infinité de couples d'entiers distincts (x, y) on ait $xP(x) = yP(y)$. Montrer que P a une racine entière.

Exercice 10 (SL IMO 2015, A6)

Soit $n \geq 2$ un entier. On dit que deux polynômes à coefficients réels P et Q sont *similaires par blocs* si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, les suites $P(2015i), P(2015i-1), \ldots, P(2015i-2014)$ et $Q(2015i), Q(2015i-1), \ldots, Q(2015i-2014)$ sont des permutations l'une de l'autre.

(a) Montrer qu'il existe des polynômes *similaires par blocs* distincts de degrés $n+1$.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de polynômes *similaires par blocs* distincts de degrés n.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

L'énoncé demande de trouver tous les réels a, b tels que le polynôme $P(x) = ax^4 + bx^2 + 1$ ait 1 comme racine double, ou encore tels que $P(1) = P'(1) = 0$, ce qui se réécrit

$$\begin{cases} a + b + 1 &= 0 \\ 4a + 2b &= 0 \end{cases}.$$

On résoud ce système facilement pour obtenir $(a, b) = (1, -2)$. On peut vérifier à la main si l'on veut (mais ce n'est pas nécessaire car on a raisonné par équivalences), qu'en effet,

$$X^4 - 2X^2 + 1 = (X - 1)^2(X + 1)^2.$$

Solution de l'exercice 2

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si i est impair, on pose $y_i = max(0, 2P(i)) + 1$, si i est pair, on pose $y_i = min(0, 2P(i)) - 1$. Soit T le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(i, y_i - i^n)$ pour i entre 1 et n, qui est donc de degré inférieur ou égal à $n - 1$, et posons $Q(x) = x^n + T(x)$ et $R(x) = 2P(x) - Q(x)$.

On vérifie aisément que Q et R sont deux polynômes unitaires de degrés n à coefficients réels vérifiant $P = \frac{Q+R}{2}$. Vérifions à présent qu'ils ont chacun n racines réelles comptées avec multiplicité.

Par définition de Q et R, on a pour tout i entre 1 et n : $Q(i) = y_i$ et $R(i) = 2P(i) - y_i$. Ainsi, on a $Q(1) > 0, Q(2) < 0, Q(3) > 0, \ldots$ et $R(1) < 0, R(2) > 0, R(3) < 0, \ldots$. Comme les fonctions $Q(x)$ et $R(x)$ sont continues, pour tout i entre 1 et $n - 1$, Q et R changent de signe entre i et $i + 1$, et ont donc une racine dans cet intervalle.

Ainsi, ces deux polynômes ont $n - 1$ racines $q_1, \ldots, q_{n-1}$ et $r_1, \ldots, r_{n-1}$ respectivement : on peut poser $Q = (X - q_1) \ldots (X - q_{n-1})Q_0$ et $R = (X - r_1) \ldots (X - r_{n-1})R_0$, les polynômes Q_0 et R_0 sont alors de degrés 1, et ont une racine réelle, ainsi Q et R ont n racines réelles comptées avec multiplicité, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

Supposons que P soit un polynôme à coefficients rationnels irréductible ayant une racine complexe α double. Soit μ un polynôme non nul à coefficients rationnels de degré minimal ayant α comme racine (qui existe car α est racine de P). En écrivant la division euclidienne de P par μ : $P = \mu Q + R$, on a $0 = P(\alpha) = \mu(\alpha)Q(\alpha) + R(\alpha) = R(\alpha)$ donc R admet α comme racine, or $deg(R) < deg(\mu)$, donc par définition de μ, on a $R = 0$ et μ divise P.

Mais comme P est irréductible et que μ n'est pas constant, Q est constant et $P = k\mu$ pour un certain réel k non nul. Or, comme α est racine double de P, $P'(\alpha) = 0$, mais $deg(P') < deg(P) = deg(\mu)$, absurde car $P' \neq 0$.

Solution de l'exercice 4

Supposons par l'absurde que P n'ait que des racines réelles. Le coefficient dominant de P vaut 1 ou -1 donc quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer P unitaire, posons

$$P(x) = (x - r_1) \ldots (x - r_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Par les relations coefficients-racines, on a

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$$

$$a_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_i r_j.$$

On a alors

$$(a_{n-1})^2 - 2a_{n-2} = r_1^2 + \ldots + r_n^2.$$

Comme les r_i sont réels, les r_i^2 sont positifs et on peut appliquer l'inégalité arithmético-géométrique pour obtenir

$$\begin{aligned} r_1^2 + \ldots + r_n^2 &\geq n \sqrt[n]{(r_1 \ldots r_n)^2} \\ &= n \sqrt[n]{a_0^2} \end{aligned}$$

Comme $P(0) \neq 0$, $a_0 \neq 0$ donc $a_0^2 = 1$, et on a

$$(a_{n-1})^2 - 2a_{n-2} \geq n.$$

Or, $a_{n-1}^2 \leq 1$ et $-2a_{n-2} \leq 2$, ce qui donne en sommant et en réinjectant, $3 \geq n$, absurde.

Solution de l'exercice 5

Posons $P(x) = C(x - r_1) \ldots (x - r_n)$ avec les r_i réels. Remarquons d'abord que l'inégalité proposée est évidente si x est l'un des r_i. On peut aussi remarquer que si l'on soustrait les deux membres de l'équation, on reconnait presque le numérateur de la dérivée de la fonction $\frac{P'(x)}{P(x)}$. Etudions donc cette fonction. On a, pour x réel non racine de P,

$$\begin{aligned} \frac{P'(x)}{P(x)} &= \frac{C[\sum_{i=1}^n \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} (x - r_j)]}{C(x - r_1) \ldots (x - r_n)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - r_i}. \end{aligned}$$

Soit x un réel non racine de P. Plaçons nous sur un intervalle ouvert contenant x mais aucun des r_i. Alors on peut dériver les deux côtés de l'équation précédente et évaluer en x pour obtenir

$$\frac{P(x)P''(x) - (P'(x))^2}{P(x)^2} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - r_i)^2} < 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (n-1)P'(x)^2 - nP(x)P''(x) &= P(x)^2 \frac{n(P'(x)^2 - P(x)P''(x)) - P'(x)^2}{P(x)^2} \\ &= P(x)^2 \left(n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - r_i)^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - r_i} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

ce qui est positif par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On vérifie facilement que le cas d'égalité s'obtient lorsque tous les r_i sont égaux, ce qui revient à dire que P est de la forme $P(x) = C(x - r)^n$.

Solution de l'exercice 6

Supposons par l'absurde qu'il n'y ait qu'un nombre fini de premiers $p_1, \ldots, p_m$ qui divisent des éléments de la suite (a_n). Soit n un entier naturel. On va compter le nombre d'entiers

naturels inférieurs ou égaux à $f(n)$ n'étant divisible par aucun autre nombre premier que $p_1, \dots, p_m$.

Un tel entier naturel s'écrit de la forme $p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$. On a nécessairement pour tout i entre 1 et m : $p_i^{\alpha_i} \leq f(n)$, donc $2^{\alpha_i} \leq f(n)$ et $\alpha_i \leq \frac{\ln(f(n))}{\ln(2)}$ ainsi le nombre de choix pour α_i est au plus $\frac{\ln(f(n))}{\ln(2)} + 1$ donc le nombre de choix pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ est au plus $(\frac{\ln(f(n))}{\ln(2)} + 1)^m$.

Or, par le théorème des croissances comparées, comme f est une fonction polynomiale, pour n assez grand,

$$\left(\frac{\ln(f(n))}{\ln(2)} + 1\right)^m < n$$

Or, les entiers $\{a_1, \dots, a_n\}$ sont n entiers deux-à-deux distincts inférieurs à $f(n)$ qui ne sont divisibles que par des nombres premiers parmi $p_1, \dots, p_m$, c'est absurde.

Solution de l'exercice 7

Commençons par traiter le cas où P est de degré 2, sans racine réelle. Dans ce cas, on peut écrire $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$. On a

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$= \left(\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}\right)^2$$

car $c - \frac{b^2}{4a} > 0$.

Traitons maintenant le cas où P n'a que des racines réelles. Le degré de P est évidemment pair sinon P tendrait vers $-\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$, on travaille par récurrence sur $deg(P)$. Si $deg(P) = 0$, P est constant positif donc est le carré d'un réel. Si le résultat est vrai pour un polynôme avec toutes ses racines réelles de degré $2n$ et que P est de degré $2n + 2$ avec toutes ses racines réelles, soit a une racine de P. Si a est une racine simple de P, alors P change de signe en a, absurde car on a toujours $P(x) \geq 0$. Ainsi, a est racine multiple de P, posons $P(x) = (x - a)^2 Q(x)$ avec Q de degré $2n$, avec toutes ses racines réelles, et toujours positif. Par récurrence, il existe deux polynômes A et B tels que $Q = A^2 + B^2$, alors $P(x) = ((x - a)A(x))^2 + ((x - a)B(x))^2$, ce qui conclut la récurrence.

On traite enfin le cas général. P étant à coefficients réels, il peut s'écrire comme un produit d'un polynôme ayant toutes ses racines réelles et de polynômes de degré 2 sans racines réelles. Chacun de ces polynômes peut s'écrire comme somme de deux carrés par ce que l'on a fait avant, pour terminer il reste à voir que si A, B, C, D sont quatre polynômes, on a

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2.$$

On peut retrouver cette formule en pensant à l'égalité dans les complexes

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

ce qui donne, en passant à la norme et en mettant au carré

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Solution de l'exercice 8
Si l'on prend $b = c = 0$, tout a vérifie la condition $ab + bc + ca = 0$, et on a donc que pour tout réel a, $P(a) + P(-a) + P(0) = 2P(a)$, ainsi pour $a = 0$ on a $P(0) = 0$ et ceci donne que P est pair, et ne contient que des termes de degré pair.

En remarquant que $6 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 6 \cdot (-2) = 0$, on a que pour tout x réel, les réels $a = 6x, b = 3x$ et $c = -2x$ vérifient la condition de l'énoncé, et donc pour tout réel x,

$$P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x).$$

L'étude des coefficients dominants donne, en notant $n = deg(P)$,

$$3^n + 5^n + (-8)^n = 2 \cdot 7^n.$$

On peut vérifier que ceci n'est que possible si $n \leq 4$, c'est-à-dire que P est de la forme $P = rX^4 + sX^2$. Réciproquement, pour tous a, b, c tels que $ab + bc + ca = 0$:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a+b+c)^2$$

et

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4 = 2(a^4+b^4+c^4)-4(a^3b+a^3c+b^3c+b^3a+c^3a+c^3b)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

En remarquant que

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = -2(a^2bc + b^2ac + c^2ab) = 2(a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b)$$

on trouve

$$(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 = 2(a+b+c)^4.$$

On en déduit donc

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c).$$

Les polynômes solution sont donc ceux de la forme $rX^4 + sX^2$.

Solution de l'exercice 9
Si x, y sont des entiers distincts vérifiant $xP(x) = yP(y)$, on a

$$a(x^4 - y^4) + b(x^3 - y^3) + c(x^2 - y^2) + d(x - y) = 0$$

En divisant par $x - y \neq 0$, on obtient

$$a(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + b(x^2 + xy + y^2) + c(x + y) + d = 0$$

donc en posant $k = a + b$,

$$a(k^3 - 2x^2y - 2xy^2) + b(k^2 - xy) + ck + d = 0$$

et

$$P(k) = xy(2ak + b).$$

Le polynôme $xP(x)$ est de degré 4, et est strictement monotone pour x assez grand et pour $-x$ assez grand. On en déduit aisément que l'équation $xP(x) = yP(y)$ n'a qu'un nombre fini de solutions de même signe.

Or, pour k de valeur absolue assez grande, $P(k)$ et $2ak + b$ sont de même signe, et donc il n'y a pas de solutions x, y de signes différents car $P(k) = xy(2ak + b)$. Il existe donc un entier k tel que pour une infinité de couples x, y d'entiers vérifiant $xP(x) = yP(y)$, on a $P(k) = xy(2ak + b)$. Ainsi, le polynôme

$$X(k - X)(2ak + b) - P(k)$$

a une infinité de racines, il est donc nul et on obtient, en évaluant en 0, $P(k) = 0$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10

(a) On peut par exemple prendre les polynômes

$$P(x) = x(x - 2015)(x - 2 \cdot 2015)(x - 2015n)$$

et $Q(x) = P(x - 1)$. Alors pour tout i entre 1 et n,

$$P(2015i - 2014) = Q(2015i - 2013), \ldots, P(2015i - 1) = Q(2015i)$$

et

$$P(2015i) = 0 = Q(2015i - 2014)$$

ce qui permet de conclure en remarquant que $deg(P) = deg(Q) = n + 1$.

(b) Supposons par l'absurde que l'on ait P et Q deux polynômes *similaires par blocs* distincts de degré n. On pose $R = P - Q$ et $S = P + Q$ ainsi que $I_i = [2015(i - 1) + 1, 2015i]$ et $Z_i = \{2015(i - 1) + 1, 2015(i - 1) + 2, \ldots, 2015i\}$.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On définit p^- et p^+ dans Z_i tels que $P(p^-)$ soit le minimum des $P(x)$ avec $x \in Z_i$, et $P(p^+)$ soit le maximum. Comme les valeurs $Q(x)$ pour $x \in Z_i$ et $P(x)$ pour $x \in Z_i$ sont des permutations l'une de l'autre, on a $R(p^-) = P(p^-) - Q(p^-) \leq 0$ et $R(p^+) = P(p^+) - Q(p^+) \geq 0$. Comme R est continue, R s'annule entre p^- et p^+, et notamment sur I_i. Comme les n segments I_i sont disjoints et que R est non nul de degré n, R a exactement une racine simple dans chacun des I_i.

Montrons que $S(x)$ n'est pas strictement monotone sur Z_i. On va montrer que S n'est pas strictement croissant sur cet ensemble (sans perte de généralité quitte à remplacer P et Q par $-P$ et $-Q$). Par symétrie entre P et Q, on peut supposer $P(2015i) \leq Q(2015i)$. Si $P(p^-) = P(p^+)$, alors P est constant sur Z_i et R s'annule sur tout Z_i, absurde par ce que l'on a montré précédemment. Notamment, $p^- \neq p^+$.

Si $p^- > p^+$, alors

$$S(p^-) = S(p^+) + (Q(p^-) - Q(p^+)) - (P(p^+) - P(p^-)) \leq S(p^+)$$

donc S n'est pas strictement croissante sur Z_i. On suppose maintenant $p^+ > p^-$. On a $R(p^-) \leq 0$, $R(p^+) \geq 0$ et $R(2015i) \leq 0$. Si $R(p^+) > 0$, R a deux racines sur I_i, absurde. Sinon, p^+ est la racine de R dans I_i, elle est simple donc R change de signe en p^+ et reste du même signe, ce qui implique $p^+ = 2015i$. Mais alors R est négatif sur I_i avec une seule racine dans Z_i, donc la somme des $R(x)$ pour x dans Z_i est strictement négative, absurde car cette somme est nulle puisque P et Q sont *similaires par blocs*.

Ainsi, S n'est pas strictement monotone sur Z_i, et $\Delta S(x) = S(x+1) - S(x)$ s'annule sur I_i. Comme c'est vrai pour tout i entre 1 et n et que ΔS est de degré inférieur ou égal à $n-1$, ΔS est nul et S est constant égal à s.

Quitte à remplacer P et Q par $P - \frac{s}{2}$ et $Q - \frac{s}{2}$, on peut donc supposer $P = -Q$. On a $R = 2P$, et donc P, qui a une racine sur chaque I_i, comme P et Q prennent les mêmes valeurs sur Z_i, P prend autant de valeurs strictement positives que de valeurs strictement négatives sur Z_i, comme le cardinal de Z_i vaut 2015 et est impair, P s'annule sur Z_i. Comme P change de signe en cette racine, on a nécessairement que P s'annule sur le milieu de Z_i, ou encore $P(2015i + 1007) = 0$.

On a donc trouvé les n racines de P, et on a, pour une certaine constante $C \neq 0$,

$$P(x) = C \prod_{i=1}^{n} (x - (2015i - 1007)).$$

Une simple vérification montre alors que sur Z_1, $|P(x)|$ atteint son maximum non nul en 1, et seulement en 1, ainsi P n'est pas *similaire par blocs* à $-P = Q$, absurde.

6 Algèbre (Tristan)

Fonctions d'entiers et de rationnels

Exercice 1
(IMO 1977)(M-D) Trouver les fonctions de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $n > 0$ on ait

$$f(n) > f(f(n-1))$$

Exercice 2
(IMO 1987)(M-D) Existe t'il une $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout n on ait $f(f(n)) = n + 2019$?

Exercice 3
(M) Trouver les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n$ on ait

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$$

.

Exercice 4
(M) Trouver les $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que $f(2) = 2$ et que $\forall n, m$ avec $pgcd(n, m) = 1$ on ait $f(mn) = f(n)f(m)$.

Exercice 5
(IMO 1993)(D) Existe t'il $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(1) = 2$ et pour tout n on ait $f(f(n)) = f(n) + n$?

Exercice 6
(IMO SL 2018 A1)(M-D) Determiner les fonctions de fonctions $\mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ et telles que

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

Exercice 7
(IMO SL 2015 A2)(M-D) Trouver les $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tels que

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

Exercice 8
(M) On se donne $a, b \in \mathbb{Q}$, trouver les $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

$$f(x + a + f(y)) = f(x + b) + y$$

Exercice 9
(Moi, largement inspiré du A4 2014)(D) Trouver les $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que

$$f(f(a) + b) + f(a) = f(4a - 9) + f(b) + 6$$

Exercice 10
(IMO SL 2014 A4)(D) Trouver les $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que

$$f(f(m) + n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014$$

Exercice 11
(BMO 2012)(M-D) Trouver les $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $f(n!) = f(n)!$ et $n - m | f(n) - f(m)$.

Exercice 12
(M-D) Trouver une $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ telle que

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

Exercice 13
(M) Trouver les $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bornées telles que

$$f(n + k) + f(k - n) = 2f(k)f(n)$$

Exercice 14
(Irlande 1999)(M) $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que pour a, b premiers entre eux $f(ab) = f(a)f(b)$ et pour p, q premiers on a $f(p + q) = f(p) + f(q)$. Montrer que $f(2) = 2, f(3) = 3, f(1999) = 1999$.

Fonctions réelles

Exercice 15
(D) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(x+y)f(x-y) = f(x)^2$ montrer que f est identiquement nulle ou ne s'annule pas.

Exercice 16
(IMO 1992)(M) Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$

Exercice 17
(F-M) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x + f(x) = f(f(x))$ determiner les solutions de $f(f(x)) = 0$.

Exercice 18
(IMO SL 1992)(M-D) $a, b > 0$ Determiner les solutions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que $f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x$.

Exercice 19
(Vietman 2003)(M) Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que $f(3x) \geqslant f(f(2x)) + x$. Maximiser α tel que $\forall x \geqslant 0, \forall f \in F, f(x) \geqslant \alpha x$.

Exercice 20
(M-D) Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(1) = 1$ et $f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$.

Exercice 21
(Hongrie 2017)(D) Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

Exercice 22
(Awesome math 2015)(M) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(a^2, f(b,c) + 1) = a^2(bc + 1) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Exercice 23
(EGMO 2012)(M-D) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y on a :

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

Exercice 24
(D) Trouver les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(y) + 2x) = x + f(x) + f(y)$$

Exercice 25
(F-M) Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x - f(x-y)) + x = f(x+y)$$

Exercice 26
(Czech-Polish-Slovak Match 2018)(M-D) Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2 + xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y)$$

Exercice 27
(M) Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^4 + 4y^4) = f(x^2)^2 + 4y^3 f(y)$$

Exercice 28
(D) Trouver les $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telles que

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y)$$

Exercice 29
(D)(Bulagrie 1999) Montrer qu'il n'existe pas de fonction de $\mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telle que

$$f(x)^2 \geqslant f(x + y)(f(x) + y)$$

Exercice 30
(Taiwan TST 2020)(M-D) Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + f(y)) + f(xy) = yf(x) + f(y) + f(f(x))$$

Exercice 31
(D) Trouver les $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telles que

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

Solution

Solution de l'exercice 1

On se donne $m_1 = min(f(\mathbb{N}))$ ainsi que n_1 un antécédant de m_1. Si $n_1 > 1$ on a $m_1 > f(f(n_1 - 1)) \geqslant m_1$ absurde donc $n_1 = 1$ et m_1 est atteint en l'unique point 1.
On procède par récurrence et on suppose que pour $k \geqslant 1$ on ait $f(1) = 1, ...f(k-1) = k-1$ et $f(k) = min(f(\mathbb{N}^* - \{1, ..., k-1\})) = m_k$. Avec de plus m_k atteint en l'unique point k.
Soit $m_{k+1} = min(f(\mathbb{N}^* - \{1, ..., k\})$ et n_{k+1} un antécédant.
On a $m_{k+1} > f(f(n_{k+1} - 1))$ avec $n_{k+1} - 1 \geqslant n_k = k$ et donc on doit avoir des égalités par minimalité de n_{k+1}. On en déduit que $n_{k+1} = 1$ et $m_k = f(k) = k$.
Ainsi, on a montré par récurrence que $f = Id$ qui est clairement solution de l'inéquation fonctionnelle.

Solution de l'exercice 2

On va montrer que ce n'est pas possible à cause de l'imparité de $l = 2019$. On raisonne par l'absurde en se donnant une telle f.
On réduit modulo l. On a $f(f(n)) \equiv n[l]$ et donc f est bijective (même involutive) des classes modulo l dans elles mêmes. On partitionne donc en $\{\bar{k}, f(\bar{k})\}$ et l'imparité de l assure l'existe d'un point fixe.
En outre, il existe un k et un h tels que $f(k) = k + lh$ et $f(k + lh) = f(f(k)) = k + l$. Mais on remarque alors que

$$f(f(f(n))) = f(n) + l = f(n + l)$$

et ce pour tout entier n.
Une récurrence immédiate donne pour tout h $f(k+lh) = f(k)+lh$ et on déduit donc que l'on a $f(k) = k + l$ par injectivité de f. Finalement on écrit que $f(f(k)) = f(k + l) = k + l$ et donc $k + l$ est un point fixe or $f(f(k + l)) = k + 2l \neq k + l$ donc une telle f n'existe pas.

Solution de l'exercice 3

f est injective et est surjective sur $3\mathbb{N}$. On a $f(0) + f(f(0)) + f^3(0) = 0$ et par positivité et injectivité on a $f(0) = 0$.
Puis $f(1) + f^2(1) + f^3(1) = 3$ et comme $f(1) \neq 0$ on a $f(1) = 1$.
Bref, on raisonne par récurrence en supposant que pour $k \geqslant 0$ on a $f(0) = 0, ..., f(k) = k$ et alors $f(k + 1) > k + 1$ par injectivité mais

$$f(k + 1) + f^2(k + 1) + f^3(k + 1) = 3(k + 1)$$

donc si $f(k + 1) > k + 1$ on a $f^2(k + 1), f^3(k + 1) \geqslant k + 1$ donc c'est absurde. Finalement, $f = Id$ est l'unique solution.

Solution de l'exercice 4

On suppose par l'absurde que $f \neq Id$ et on se donne $n_0 > 2$ minimal tel que $f(n_0) > n_0$. Parmi $n_0 + 1$ et $n_0 + 2$, l'un est pair, disons $n_0 + 2$ et on écrit $n_0 + 2 = 2^a q$ avec $q < n_0$ et par multiplicativité on a $f(n_0 + 2) = n_0 + 2$ absurde par stricte croissance donc $f = Id$.

Solution de l'exercice 5

En fait la réponse est oui, on va construire une solution par récurrence sur $\mathbb{N}^*$. On suppose construits $f(1) < ... < f(n)$ et on construit $f(n+1)$ comme ce qui suit. Soit $g(n+1)$ le plus grand $k \leqslant n$ tel que $f(k) \leqslant n+1$. On pose $f(n+1) = g(n+1) + n + 1$.
Il s'agit alors de montrer que f convient. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors $f(f(n)) = g(f(n)) + f(n)$ et par définition on a $g(f(n)) = n$.

Solution de l'exercice 6

$c = f(1)$ fixé et on pose $y = 1$ et alors pour tout x on a

$$f((cx)^2) = cf(x^2)$$

et avec $x = 1$ on a $f(c^2) = c^2$ .Puis on pose $x = y = 1$ et on a $f(c^2) = c^3$ et donc $c = 1$.
De là, $f(x^2) = f(x^2)$ ainsi qu'avec $x = 1$

$$f(f(y)^2) = f(y) = f(f(y))^2$$

.
On fixe un y quelconque et on regarde $l = f(y)$. On écrit alors $f((yx)^2) = lf(x)^2 = f(yx)^2$ puis on écrit que $f(x)^2 = (f^k(x))^{2k}$ et donc $l^{\frac{1}{2k}} = \frac{f^k(x)}{f^k(yx)} \in \mathbb{Q}$ et donc $l = 1$. finalement, on a $f \equiv 1$.

Solution de l'exercice 7

On pose $y = f(x)$ et on a $f(x - f(f(x))) = -1$ et on prend donc un w tel que $f(w) = -1$ et on pose $y = w$ et on a $f(x+1) = f(f(x))$ et une récurrence immédiate donne $\forall l \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{Z}$ $f(x+l) = f(f(x) + l - 1)$.
Supposons qu'il existe un x tel que $f(x) - 1 \neq x$ alors en posant $T = f(x) - 1 + x$ on a pour $l \geqslant x + 1$ $f(l) = f(l + T)$.
On pose maintenant $x = f(y)$ et on a $f((f(x))) - f(x) = 1 + f(0) = f(x+2) - f(x)$ et en télescopant pour x grand on a $T(f(0) + 1) = 0$ et donc $f(0) = -1$ et donc $f(x+2) = f(x)$. Notre fonction est donc définie modulo 2. Posons $f(1) = a, f(0) = b$. Comme $f(x - f(f(x)) = f(x - f(x+1)) = -1$ on a soit $b = -1$ et avec $x = 0$ on a $f(1) = -1$ et donc $f \equiv -1$ soit $a = -1$ et avec $x = 1$ on a $f(2) = -1$ et donc $f \equiv -1$ aussi.
Bref, les solutions sont $f \equiv -1$ et $f(x) = x + 1$.

Solution de l'exercice 8

On fixe x, on obtient la bijectivité de f. On pose $x = -b$ et on a $f(a - b + f(y)) = f(0) + y$ et on pose $y = f(0)$ pour obtenir $f(x + a + f(f(0))) = f(x+b) + f(0) = f(a - b + f(f(x+b))$ et par injectivité on a

$$f(f(x)) = f(f(0)) + x$$

on pose alors $x = f(w) - b$ et on obtient $f(f(w) + f(y) + a - b) = w + y + f(f(0)) = f(f(w+y))$ et par injectivité

$$f(w) + f(y) + a - b = f(w + y)$$

Ainsi, $g = f - \frac{a-b}{2}$ respecte l'équation de Cauchy dont les solutions dans $\mathbb{Q}$ sont les linéaires. D'où $f(x) = Ax + \frac{a-b}{2}$. Faire la synthèse proprement.

Solution de l'exercice 9

$a = 3$ on obtient $f(f(3) + b) = f(b) + 6$ on injecte et on obtient $f(f(a) + b) + f(a) = f(4a - 9 + f(3)) + f(b)$ et en posant $a = b$ on obtient

$$f(f(a) + a) = f(4a - 9 + f(3))$$

donc l'injectivité de f donnerai que f est affine ce qui terminerait l'exo.

Si $f(c) = f(d)$ on a $f(4c - 9) = f(4d - 9)$ et on pose les suites $c_{i+1}4c_i - 9$ et $c_1 = c$, de même pour d_i. On a donc $f(c_i) = f(d_i)$. Si $f(3) \neq 0$ on écrit les divisions euclidiennes par $f(3)$ on a $c_i = f(3)q + r$ et $d_i = f(3)q' + r'$ et donc $f(d_i) = f(r') + 6q$ et $f(c_i') = 6q' + f(r)$. On en déduit que

$$f(r) - f(r") = 6(q - q')$$

est bornée. Si $c \neq d$ la forme explicite donne $\frac{c_i - d_i}{f(3)}$ non bornée absurde. Si $f(3) = 0$ on a $f(b) + 6 = f(b)$ absurde. Donc f injective et on finit proprement par une synthèse.

Solution de l'exercice 10

Même idée, on pose $n = m$ pour avoir $f(f(m) + m) = f(3m) + 2014$ puis avec $m = 0$ et $n = 3k$ on a

$$f(f(0) + 3k) = f(3k) + 2014 = f(f(k) + k)$$

et donc l'injectivité de f suffirait à conclure.
Si $f(c) = f(d)$ on a $f(3^n c) = f(3^n d)$et comme $f(f(0) + n) = n + 2014$ on a $f(0) \neq 0$ et par division euclidienne et même argument que précédemment on a $c = d$. Donc c'est fini.

Solution de l'exercice 11

On prend $m = n!$ et on a $n((n-1)! - 1)|f(n)((f(n) - 1)! - 1)$, le membre de gauche a des diviseurs premier plus grand que n d'où $f(n) \geqslant n$. De là on a $n|n!|f(n)!|f(n!)$. De plus, on a $n|f(kn) - f(n)$ pour tout k et donc $n|f(n)$. Montrons par récurrence que $f(n) = n$. C'est clair pour $n = 1, 2$ et supposons que ça soit le cas pour $n = 1, .., m$. On écrit alors que $(m+1)! - m! = m!m|f(m+1)! - m!$ et on écrit $f(m+1) = k(m+1)$ d'où

$$m|(k(m+1))(k(m+1) - 1)...(m+1) - 1$$

mais si $k \geqslant 2$ notre gros produit est divisible par n ce qui est absurde donc $f(n+1) = n+1$. Donc $f = Id$.

Solution de l'exercice 12

On a la bijectivité de f et de plus, avec $y = 1$ et injectivité on a $f(1) = 1$. Puis avec $x = 1$ on obtient $f(f(y)) = \frac{1}{y}$. On pose $x = f^{-1}(y)$ on obtient $f(f^{-1}(y)f(y)) = 1$ puis par injectivité

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f(y)}$$

Maintenant on pose $y = f^{-1}(z)$ et on a $f(xz) = f(x)f(z)$, il s'agit alors de définir f sur les premiers $p_1 < p_2 < ... < p_n < ...$, on peut poser $f(p_{2k}) = p_{2k+1}$ et $f(p_{2k+1}) = \frac{1}{p_{2k}}$ et on vérifie que ça marche.

Solution de l'exercice 13

Par symétrie on a $f(n-k) = f(k-n)$ donc f est paire. On pose $k = 0$, si f est non nulle on a $f(0) = 1$ puis avec $k = n$ on a $f(2n) = 2f(n)^2 - 1$ et donc si $|f(n)| > 1$ on a $|f(2n)| > |f(n)|$ et donc $f(2^m n)$ est non bornées. Ainsi, f ne peut prendre que les valeurs $-1, 0, 1$. La relation initiale donne que $a \equiv b[2]$ implique que $f(a) \equiv f(b)[2]$. Donc si f s'annule sur un impair, elle s'annule sur tous les impairs mais alors avec $n = 1$ on a $f(k+2) = f(k)$ et donc $f(a) = 1$ si a pair et 0 sinon. k-Mais alors $f(2n) = 2f(1)^2 - 1 = -1$ absurde donc f ne)= s'annule pas. $f(k+1) + f(k-1) = 2f(1)f(k)$ et donc f ne dépend que de la parité. Si $f = -1$ sur les impairs c'est bien solution. On a donc $f \equiv 0, f \equiv 1$ et $f \equiv -1$ sur les impairs et $f \equiv 1$ sinon.

Solution de l'exercice 14

$f(pn) = nf(p)$ pour tout p premier et n entier. En particulier $f(p^a) = p^{a-1}f(p)$ et donc si $n = \prod^m p_i^{a_i}$ on a $f(n) = \prod p_i^{a_i - 1} f(p_i)$. Mais aussi $f(n) = \frac{n}{p_1} f(p_1)$. En particulier, pour tout p, q premiers on a $qf(p) = pf(q)$. Et par Euclide $q|f(q)$. Ainsi il existe un k tel que pour tout premier, on a $f(p) = pk$. On les écritures précédentes, $f(n) = k^m n = kn$ et donc $k = 1$ et donc $f = Id$.

Solution de l'exercice 15

Supposons que f s'annule en $x_0 = 0$ sans perte de généralité pour des soucis d'écriture, f étant continue, il suffit de montrer que f s'annule sur un ensemble dense. Supposons l'existence de $[a, b]$ un intervalle non trivial où f ne s'annule pas avec $a > 0$. On a donc f identiquement nulle sur $[-b, -a]$ ($x = 0$). L'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est stable par $x \mapsto x - c$ où $c \in [a, b]$ en particulier on a $\cup_{n\in\mathbb{N}}[-nb, -na] \subset Z(f)$ et en considérant un N tel que $Nb > (N+1)a$ on a qu'il existe un A tel que $]-\infty, A] \subset Z(f)$ c'est à dire que f est nulle pour x suffisamment petit. Alors on écrit $f(a+y)f(a-y) = f(a)^2$ et pour y grand $f(a) = 0$ absurde donc $f \equiv 0$.

Solution de l'exercice 16

On a la bijectivité de f. On pose $x = 0$ et on a $f(f(y)) = y + f(0)^2$ puis on pose $x = f(0)$ et $f(f(0)^2 + f(y)) = f^3(y) = y + f(f(0))^2$ puis avec $x = y = 0$ on a $f(f(0)) = f(0)^2$ et donc $f^3(y) = y + f(0)^4$. Avec $y = 0$ on a $f(x^2 + f(0)) = f(x)^2$ et donc $f(x) = 0$ implique $f(-x) = 0$. Mais par bijectivité on doit alors avoir $f(0) = 0$. de là, on a $f^3 = f^2$ et par injectivité $f = Id$.

Solution de l'exercice 17

On a l'injectivité de f et comme $f(x) + f^2(x) = f^3(x) = f(x + f(x))$ on a $f(f(x)) = 0$ si et seulement si $f(x) = f(x + f(x))$ si et seulement si $x = x + f(x)$ si et seulement si $f(x) = 0$ et donc $x + f(x) = f(f(x)) = x = 0$ donc la seule solution potentielle est 0. De plus, comme $f(0) = f(f(0))$ on a $f(0) = 0$ et donc $f(f(0)) = 0$.

Solution de l'exercice 18

On fixe un x et on définit $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ et alors $x_{n+2} = -ax_{n+1} + b(b+a)x_n$ donc on écrit $x_n = Aa^n + B(-a-b)^n$ mais comme $x_n \geqslant 0$ pour tout n on doit avoir $B = 0$ et alors on obtient $x_1 = f(x) = bx$ qui est bien solution.

Solution de l'exercice 19

$f(x) \geqslant \frac{x}{3}$ donc notre sup est bien définit dans $\bar{\mathbb{R}}$. $\frac{x}{2} \in F$ donc $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ maintenant on écrit

$$f(3x) \geqslant f(f(2x)) + x \geqslant (2\alpha^2 + 1)x$$

et par maximalité $\alpha \geqslant 2\alpha^2 + 1$ et donc $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ et donc $\alpha = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 20

On pose $x = 0$ d'où $f(f(0)) = f(0)$ On pose $y = 0$ d'où $f(f(x)) = f(x) + xf(0)$ Etudions l'injectivité de f : Supposons $f(x) = f(y)$ Alors $f(xy + f(x)) = f(y)x + f(x) = (x + 1)f(x)$ Et $f(yx + f(y)) = f(xy + f(x)) = f(x)y + f(y) = (y + 1)f(x)$ Soit $f(x) \neq 0$ et donc on a $y + 1 = x + 1$ d'où $x = y$ Soit $f(x) = f(y) = 0$ On en déduit donc que $f(f(0)) = f(0)$ implique dans tous les cas que $f(0) = 0$ Et donc que $f(f(x)) = f(x)$ pour tout x Mais si $f(y) = 0$ alors on a en remplaçant dans la condition de départ on a $f(wy + f(w)) = f(w)$ pour tout w réel d'où $f(wy + f(w)) = f(f(w))$ pour tout w réel, en particulier, pour $w = 1$ on a $f(y + 1) = f(1)$ or $f(1) = 1 \neq 0$, l'injectivité de f (Sur $\mathbb{R}^*$) permet de conclure que $y + 1 = 1$ soit encore $y = 0$ donc le seul antécédent de 0 est 0,f est donc injective sur $\mathbb{R}$. Donc $f(f(x)) = f(x)$ implique que $f(x) = x$ pour tout x donc la seule solution est l'identité, on vérifie et on trouve bien que $xy + x = yx + x$.

Solution de l'exercice 21

$y = 0$ on a $f(-1) + f(x)f(0) = -1$ comme f n'est pas constante on a $f(0) = 0, f(-1) = -1$. Puis on pose $y = 1$ et on a $f(x - 1) + f(x)f(1) = 2x - 1$ puis avec $y = \frac{1}{x}$ on obtient $f(x)f(\frac{1}{x}) = 1$. Donc $f(1) = 1$ ou -1.
On pose $y = \frac{1}{x-1}$ et on a $f(\frac{1}{x-1})(1 + f(x)) = \frac{x+1}{x-1}$ pour $x \neq 1$.
Puis on multiple par $f(x - 1)$ et $1 + f(x) = \frac{x+1}{x-1}f(x - 1)$. Bref, on substitue, si $f(1) = 1$ on obtient l'identité qui est solution, sinon on a $f(x) = -x^2$ qui l'est aussi.

Solution de l'exercice 22

On montre que f est injective de la seconde coordonée quand on fixe une première coordonnées non nulle. Si $x \neq 0$ et $f(x, a) = f(x, b)$ alors on écrit $f(1, f(x, b)+1) = f(1++, f(x, a)+1)$ et donc $x(b - a) = 0$. En particulier si $bc = b'c'$ on écrit que $f(1, f(b, c) + 1) = f(1, f(b', c') + 1)$ d'où $f(b, c) = f(b', c') = g(bc)$.
On écrit en terme de g :

$$g(a^2(1 + g(b)) = a^2(b + 1)$$

et avec $a = 1$ on a

$$a^2(b + 1) = g1 + g(a^2(b + 1) - 1))$$

et donc $a^2(1 + g(b)) = 1 + g(a^2(b + 1) - 1)$ car g est bijective et donc avec $b = 0$ et $b = -2$ on a que g est affine par morceaux, on écrit correctement la synthèse et on a $f(a, b) = ab$.

Solution de l'exercice 23

$y = 0$ donne $f(f(x)) = 4x$ et donc la bijectivité de f. $f(f(0)) = 0$ et aussi $f^3(0) = f(4 \cdot 0) = 0$. Avec $x = 0$ on a $f(yf(y)) = 2yf(y)$ avec $y = \frac{1}{2}$ et l'injectivité de f on a $f(\frac{1}{2}) = 1$ et donc

$f(1) = \frac{4}{2} = 2$ et donc avec $y = 1 - x$ on obtient

$$f((1-x)f(1) + f(x)) = 4x + 2(1-x)2 = 4 = f(f(1)) = f(2)$$

et par injectivité on a $2(1-x) + f(x) = 2$ et donc $f(x) = 2x$ qui est bien solution.

Solution de l'exercice 24

On pose $x = 0$ et $f(f(y)) = f(y) + f(0) = f(y) + a$.
On pose $x = 2w - a, y = 0$ et $f(4w - a) = 2w - a + f(2w - a) + a$ et donc tout w s'écrit $w = \frac{f(u)-f(v)}{2}$ pour u, v bien choisis.
On pose désormais $x = \frac{f(u)-f(v)}{2}$ et $y = v$ et on a

$$f(f(u)) = f(u) + a = \frac{f(u) - f(v)}{2} + f(\frac{f(u) - f(v)}{2}) + a$$

et donc finalement

$$f(x) = x + a$$

qui est bien solution pour tout réel a.

Solution de l'exercice 25

Avec $x = 0$ on écrit $f(-f(-y)) = f(y)$ puis $y = 0$ $f(x - f(x)) = f(x) - x$ et $y = x$ et $f(x - f(0)) = f(2x) - x$ mais avec $y = -x$ on a alors

$$f(x - f(2x)) = f(0) - x = f(-f(-(x - f(0))))$$

et donc f est bijective d'où $f(-f(-y)) = f(y)$ implique $f = Id$ qui est bien solution.

Solution de l'exercice 26

$x = y = 0$ et on a $f(0)^2 = f(0)$ on a donc deux cas :
Si $f(0) = 1$ alors avec $x = 0$ on obtient $f(0) = f(0)f(y) + yf(0)$ et donc $f(y) = 1 - y$.
Sinon $f(0) = 0$ et avec $y = 0$ on a $f(x^2) = xf(x)$ ce qui donne l'imparité de f et puis avec $y = -x$ on a $f(x)f(-x) = xf(x) = -f(x)^2$ et donc pour tous $x, f(x) = -x$ ou $f(x) = 0$. Supposons qu'il existe x, y non nuls tels que $f(x) = -x, f(y) = 0$ alors on obtient $f(x^2 + xy) = -yx + xf(x + y)$. Si $f(x + y) = 0$ alors $f(x^2 + xy) = -xy$ ce qui est absurde car $x, y \neq 0$. De même, si $f(x + y) = -x - y$ on a $f(x^2 + xy) = -x^2 - 2xy$ ce est possible que si $x^2 = 2xy$ et donc $x = 2y$. Il est clair que si f n'est ni nule ni égale à $-Id$ on peut choisir $x \neq 2y$ et donc on obtient une absurdité. Donc $f = Id$ ou $f(x) = -x$.

Solution de l'exercice 27

$y = 0$ donne $f(x^4) = f(x^2)^2$ en particulier on a $x \geqslant 0$ implique $f(x) \geqslant 0$ et $x = 0$ donne $f(4y^4) = f(0)^2 + 4y^3 f(y)$ et avec y tel que $4y^3 = 1$ on a $f(0) = 0$ on a donc l'imparité de f. Puis l'égalité de base se réécrit pour tous $x, y \geqslant 0$ on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Et donc f est linéaire sur $\mathbb{R}^+$ et donc sur $\mathbb{R}$ par imparité et donc $f = Id$.

Solution de l'exercice 28

Si il existe x tel que $f(x) > 1$ on pose $y = \frac{x}{f(x)-1} \geqslant 0$ qui respecte $yf(x) = x + y$ et donc $f(x)f(x+y) = f(x+y)$ et donc $f(x+y) = 0$ absurde. Donc $f \leqslant 0$ et pour tout $y \geqslant 0$ on peut écrire que $f(x+y) = f(x)f(yf(x)) \leqslant f(x)$ donc f décroissante. On écrit donc $f(x+y) \leqslant f(x+y)\frac{1}{f(x)} = f(yf(x))$ et par croissance de f on doit avoir $x + y \leqslant yf(x) \leqslant y$ ce qui est absurde sauf si f constante et donc on a bien $f \equiv 1$.

Solution de l'exercice 29

On écrit $f(x)^2 \geqslant f(x)f(x+y)$ et donc f est décroissante. On se donne un $x > 0$ et avec $y = f(x)$ on écrit $\frac{1}{2}f(x) \geqslant f(x + f(x))$ on va maintenant itérer

$$f(x + f(x) + f(x + f(x))) \leqslant \frac{1}{2}f(x + f(x)) \leqslant \frac{1}{4}f(x)$$

mais par décroissance on a aussi

$$f(x + f(x) + \frac{1}{2}f(x)) \leqslant f(x + f(x) + f(x + f(x))) \leqslant \frac{1}{4}f(x)$$

et par récurrence rapide on montre donc que que

$$f(x + f(x) + \frac{1}{2}f(x) + ... + \frac{1}{2^n}f(x)) \leqslant \frac{1}{2^n}f(x)$$

et comme f est croissante on a $f(x + 2f(x)^-) = 0$ et donc f nulle pour $y < x + 2f(x)$ ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 30

$x = 0$ donne $f(f(y)) + f(0) = yf(0) + f(y) + f(f(0))$ alors que $y = 0$ donne $f(x + f(0)) = f(f(x))$. Si $f(0) \neq 0$, on a f injective et donc $f(x) = x + f(0)$ et donc $f = Id$. Sinon $f(0) = 0$ on a $f(x) = f(f(x))$. Avec $x = 1$ $f(1 + f(y)) = yf(1) + f(1)$, si $f(1) \neq 0$ on a f injective et donc $f = Id$, sinon on réécrit la relation de base comme

$$f(x + f(y)) - yf(x) = -f(xy) + f(y) + f(x)$$

et par symétrie on a

$$f(x + f(y)) - yf(x) = f(y + f(x)) - xf(y)$$

et COMPLETER AVEC UNE sol JUSTE.

Solution de l'exercice 31

Si $f(y) = y$ alors $f(x+y) = f(x+y)+f(y)$ absurde. Si $f(y) < y$ alors $f(x+f(y)) = f(x+y)+f(y)$ et comme $\frac{f(y)}{f(y)-y} < 0$ on a pour N grand $f(x+Nf(y)) < 0$ absurde. Donc $f(y) > y$. Si $f(y) < 2y$ comme $\frac{f(y)}{f(y)-y} > 2$ et comme f minorée. On a pour TOUT z assez grand, on a $f(z) > 2z$. Mais si $f(y) > 2y$ on a $\frac{f(y)}{f(y)-y} < 2$ et donc il existe des z aussi grand que l'on veut tels que $f(z) < 2z$ (ici, le il existe provient du fait que l'on ne puisse pas majorer f sur un intervalle). Absurde. On fait le même travail si $f(y) > 2y$ et donc $f(y) = 2y$ est la seule solution possible.

7 Géométrie (Cécile)

À venir...

4 Entraînement de fin de parcours

Entraînement de mi-parcours, groupe D

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

⚠⚠ *Pour les exercices de géométrie, on attend de l'élève une figure propre, grande, où la propriété que l'on cherche à démontrer est apparente : s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points. Le respect de la consigne rapporte un point.* ⚠⚠

Exercice 1
Soit ABC un triangle et E le milieu du segment $[BC]$ et D le point du cercle circonscrit au triangle ABC appartenant à l'arc BC ne contenant pas le point A et tel que $\widehat{CAD} = \widehat{BAE}$. Soit S le milieu du segment $[AD]$. Montrer que $\widehat{CSB} = 2\widehat{CAB}$.

Exercice 2
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on ait $f(x - f(x - y)) + x = f(x + y)$.

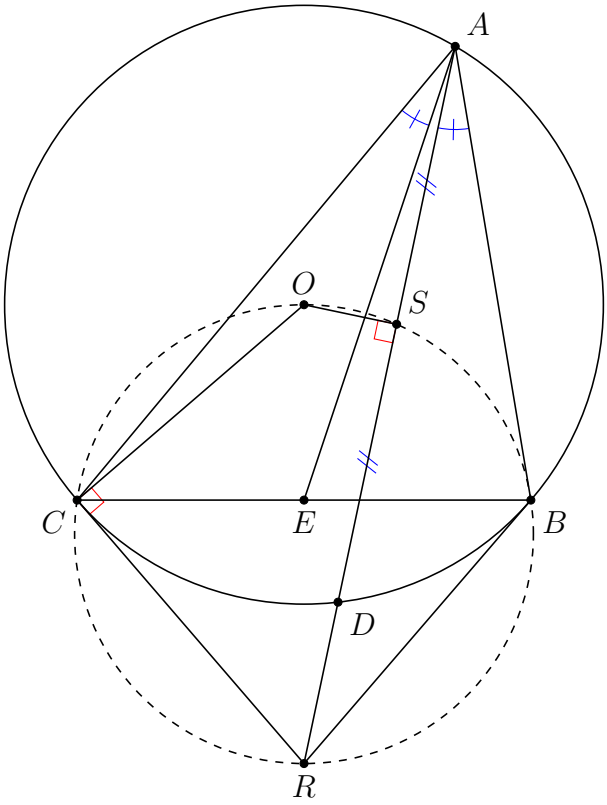
Exercice 3
Soit n un entier positif. Considérons la suite $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ définie par $a_0 = \frac{1}{2}$ et par

$$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$$

pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et P un point variable du cercle Γ. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. La droite (PA_1) recoupe le cercle Γ en un point A'. Les points B' et C' sont définis de façon similaire. On suppose les points A, B, C, A', B' et C' distincts. Montrer que l'aire du triangle formé par les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') ne dépend pas de la position du point P.

Solution de l'exercice 1



Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

D'après le théorème de l'angle au centre, l'énoncé revient à montrer que les points B, S, O et C sont cocycliques. D'après la définition du point D, la droite (AD) est la symédiane issue du sommet A. On sait que celle-ci passe par le point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit au triangle ABC en les points B et C. On note donc R le point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit au triangle ABC en les points B et C. Par définition $\widehat{OBR} = \widehat{OCR} = 90°$. De plus, le point S étant le milieu du segment $[AD]$, la droite (OS) est la

méditraice du segment $[AD]$. Ainsi, $\widehat{OSR} = \widehat{OSD} = 90°$ donc le point S appartient au cercle de diamètre $[OR]$, tout comme les points B et C. Ceci permet de conclure.

Solution de l'exercice 2
Soit f une solution. On pose $y = -x$ ce qui permet d'avoir

$$f(x - f(2x)) = f(0) - x$$

On en déduit que la fonction f est surjective. De là, on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on se donne un $x \in \mathbb{R}$ tel que $-f(x-y) = y$ dont l'existence est assurée par la surjectivité. On a alors $f(x + y) = f(x - f(x - y))$ mais on a aussi $f(x - f(x - y)) + x = f(x + y)$ donc $x = 0$. Cela se réecrit alors $f(-y) = -y$. Réciproquement, la fonction identité est solution du problème car $x - (x - y) + x = x + y$.

Solution de l'exercice 3
Tout d'abord, on remarque que la suite est croissante. Ensuite pour $1 \leqslant k \leqslant n$ on peut diviser la relation $a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$ par $a_k a_{k-1}$ pour obtenir :

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_{k-1}}{n a_k}$$

Un télescopage apparaît alors, et on peut en déduire que

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{n a_k}$$

Mais puisque la suite est croissante $\frac{a_{k-1}}{n a_k} \leqslant \frac{1}{n}$ donc on en déduit que $a_n \leqslant 1$.

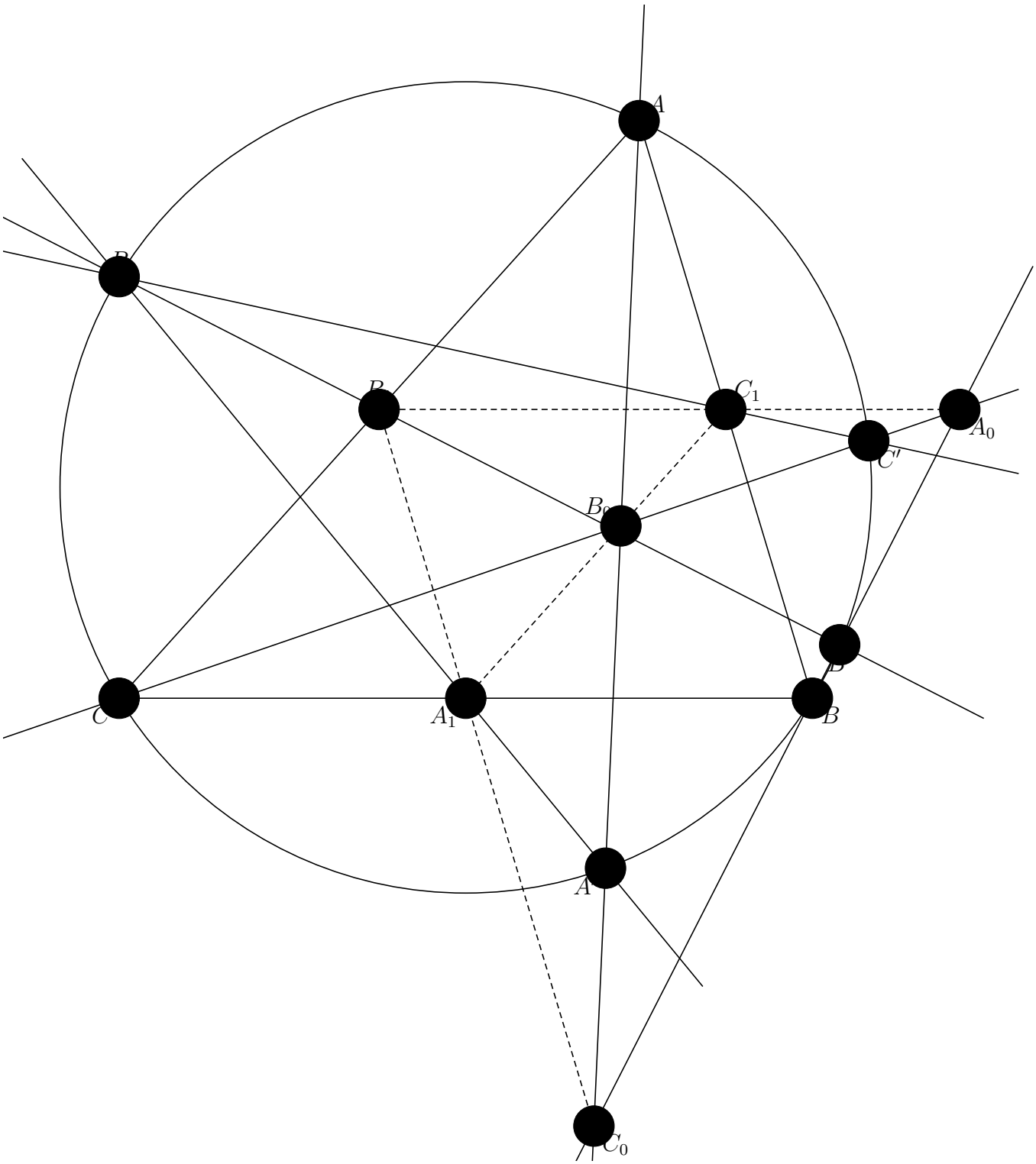
Afin de mieux comprendre le terme $\frac{a_{k-1}}{a_k}$ dans la somme, revenons à la relation de départ. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$, divisons cette relation par a_{k-1} pour obtenir :

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = 1 + \frac{a_{k-1}}{n}$$

Ainsi en particulier $\frac{a_{k-1}}{n a_k} = \frac{1}{n + a_k} \geqslant \frac{1}{n+1}$ puisque $a_n \leqslant 1$ et que la suite est croissante.

On en déduit que $\frac{1}{a_n} \leqslant 2 - \frac{n}{n+1}$, donc $a_n \geqslant \frac{n+1}{n+2} > \frac{n-1}{n}$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 4



Notons A_0, B_0 et C_0 les sommets du triangle formé par les trois droites, avec A_0 le point d'intersection des droites (BB') et (CC'), B_0 celui des droites (AA') et (CC') et C_0 celui des droites (AA') et (BB').

D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone cyclique $B'PC'CAB$, les points $B_1 = (B'P) \cap (AC)$, $C_1 = (AB) \cap (PC')$ et $A_0 = (CC') \cap (BB')$ sont alignés.

Les droites (A_1C_1) et (AC) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{A_0B_0}{A_0C} = \frac{A_0C_1}{AB_1}$$

Les droites $(B_1A_)$ et (AB) sont parallèles donc par le théorème de Thalès :

$$\frac{A_0B}{A_0C_0} = \frac{A_0C_1}{A_0B_1}$$

Il vient que $\frac{A_0B}{A_0C_0} = \frac{A_0B_0}{A_0C}$, ou encore $A_0C \cdot A_0B = A_0B_0 \cdot A_0C_0$. On déduit que

$$\text{aire}(A_0B_0C_0) = \frac{1}{2}A_0B_0 \cdot A_0C_0 \cdot \sin \widehat{B_0A_0C_0} = \frac{1}{2}A_0B \cdot A_0C \cdot \sin \widehat{CA_0B} = \text{aire}(A_0BC)$$

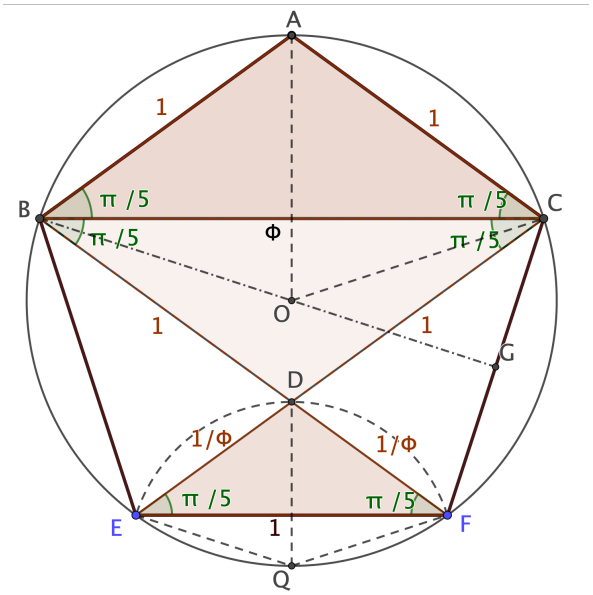
Or l'aire du triangle CA_0B est la même que l'aire du triangle CB_1B car les deux triangles ont la même base et une hauteur de même longueur. Ainsi, l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ vaut l'aire du triangle CB_1B, c'est-à-dire la moitié de l'aire du triangle ABC, cette aire est donc constante !

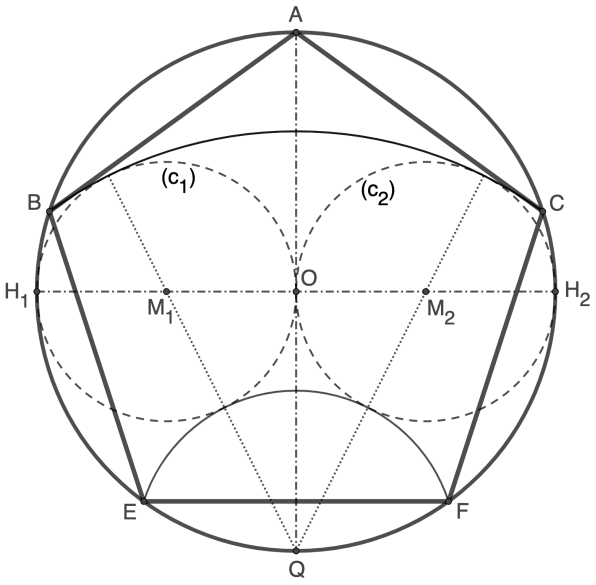
5 Derniers cours

1 Construction de l'heptadécagone (François Lo Jacomo)

Résoudre une équation

Pendant des siècles, la recherche de solutions d'équations était une préoccupation primordiale des mathématiciens. L'équation du second degré est connue de longue date, et elle suffit à construire le pentagone régulier : si, dans un cercle de rayon r, un pentagone régulier a pour côté 1 et pour diagonale Φ, le fait que les triangles ABC, DBC et DEF soient semblables suffit à prouver que $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ donc $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et le fait que les triangles QEF et OBC soient semblables, que $QE = \frac{r}{\Phi} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) r$, d'où la construction classique.





Pour l'équation du troisième degré, une difficulté surgit : l'existence, dans beaucoup de cas, de trois racines. En 1545, Girolamo Cardano (en français : Jérôme Cardan) publie une méthode de résolution des équations du troisième degré, dont il n'est probablement pas l'auteur. Un changement de variable $Y = X + \frac{b}{3a}$ transforme l'équation $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$ en une équation $Y^3 + pY + q = 0$. Par exemple : $X^3 - 3X^2 - 3X - 1 = (X-1)^3 - 6(X-1) - 6$. En remarquant l'identité : $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$, il suffit alors de trouver deux nombres u et v tels que $Y = u + v$ soit solution de l'équation avec $uv = -\frac{p}{3}$. Ces nombres vérifient : $u^3 + v^3 + q = 0$, soit : $u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Dans notre exemple : $u^6 - 6u^3 + 8 = 0$. Cette équation du second degré en u^3 admet deux racines : $u^3 = 2$ et $u^3 = 4$. L'une de ces racines fournit $u = \sqrt[3]{2}$, l'autre $v = \sqrt[3]{4}$, de sorte que l'équation $X^3 - 3X^2 - 3X - 1 = 0$ a pour racine : $X = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Cela marche bien lorsque l'équation du second degré en u^3 admet deux racines, comme dans l'exemple ci-dessus. Mais que peut-on dire lorsqu'elle n'admet pas de racine ? C'est précisément dans ce dernier cas que l'équation du troisième degré, elle, admet trois racines. D'où l'idée de créer de nouveaux nombres, "imaginaires", qui soient racines de l'équation du second degré, et à partir desquels on puisse calculer les trois racines de l'équation du troisième degré. Par exemple, si l'on veut résoudre : $X^3 - 3X + 1 = 0$, la recherche de u et v tels que $X = u + v$ soit racine de l'équation et tels que $uv = 1$ mène à : $u^6 + u^3 + 1 = 0$ et les

premiers mathématiciens qui eurent l'idée de ces nombres imaginaires les conçurent comme : $u^3 = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, soit

$$X = \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$$

Ces nombres imaginaires ont posé problème pendant des siècles, et l'écriture ci-dessus n'est évidemment pas satisfaisante. Certes, algébriquement, si l'on admet que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$, l'expression ci-dessus est incontestablement racine de l'équation $X^3 - 3X + 1 = 0$. Mais le vrai problème, c'est qu'il a fallu énormément de temps pour dissocier le concept mathématique de "nombre" des notions intuitives de "grandeur" ou "quantité". Encore au 19^{eme} siècle et même au delà, les nombres négatifs eux-mêmes posaient problème : même de grands mathématiciens étaient gênés devant des solutions négatives d'équations, car c'était des solutions qui n'existaient pas. Aujourd'hui encore, certains programmes de comptabilité n'acceptent pas les nombres négatifs.

Dès lors, si l'on considérait la racine carrée d'un nombre positif $\sqrt{\Delta}$, c'était tout naturellement un nombre positif, et il n'y avait aucune ambiguïté, lorsque $\Delta > 0$, à écrire les solutions de l'équation du second degré : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$. Mais lorsque $\Delta < 0$, comment différencier par exemple : $\sqrt{-3}$ et $-\sqrt{-3}$ puisqu'ils sont tout aussi imaginaires l'un que l'autre ? Ce n'est qu'au début du 19^{eme} siècle qu'on a pu répondre à cette question, en introduisant le "plan complexe" : un nombre n'est plus considéré comme une "grandeur" ou une "quantité", mais comme un point. S'agissant d'un nombre réel, c'est un point de la droite réelle. Un nombre imaginaire comme la racine carrée de -3 est un point d'une autre droite, qui elle aussi a un côté positif et un côté négatif, mais contrairement à la droite réelle – sur laquelle la distinction entre réel positif et réel négatif est essentielle en mathématiques –, la distinction entre les deux racines carrées de -1, $+i$ et $-i$, est tout aussi arbitraire que le fait d'orienter l'axe des réels de la gauche vers la droite plutôt que de la droite vers la gauche. Mais ce n'est que moyennant cette convention arbitraire qu'on peut différencier les racines carrées du nombre négatif -3 en appelant l'une d'elles $+i\sqrt{3}$ et l'autre $-i\sqrt{3}$. Les solutions de $u^6 + u^3 + 1 = 0$ sont donc : $u^3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $u^3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Mais qu'en est-il de : $u = \sqrt[3]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$ et a fortiori de $X = \sqrt[3]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$, racine de $X^3 - 3X + 1 = 0$?

Le plan complexe

Pour distinguer l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et le plan géométrique, on dira que le point $M\ (x,\, y)$ a pour *affixe* $u = x + iy$. La transformation de $\mathbb{C}$ qui à $+i$ associe $-i$ (et réciproquement), donc à $u = x + iy$ associe $\overline{u} = x - iy$ (appelé le *conjugué* de u), correspond géométriquement à la symétrie par rapport à l'axe des réels. Elle est nécessairement compatible avec l'addition et la multiplication : $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$ et $\overline{(uv)} = \overline{u}\,\overline{v}$. Comme les seuls points fixes d'une symétrie sont les points de l'axe de symétrie, $u + \overline{u}$ et $u\,\overline{u}$, invariants par cette transformation, sont réels. Notons que lorsque u n'est pas réel, le seul nombre complexe u' tel que $s = u + u'$ et $p = uu'$ soient réels est $\overline{u}$. En effet, u et u' sont racines de $X^2 - sX + p$ et les deux racines d'une telle équation, avec s et p réels, sont soit toutes deux réelles, soit complexes conjuguées.

Si $u = x + iy$, $u\,\overline{u} = x^2 + y^2$ est un réel positif, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u)\overline{(\lambda u)} = \lambda^2\, u\,\overline{u}$. De sorte que si l'on appelle *module* du nombre complexe u le réel positif $\sqrt{u\overline{u}} = \sqrt{x^2+y^2}$,

noté $|u| = \sqrt{u\overline{u}}$, celui-ci vérifie, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda u| = |\lambda||u|$ (où $|\lambda|$ est la valeur absolue du nombre réel λ). Si l'axe des imaginaires iy et l'axe des réels sont orthogonaux, d'après le théorème de Pythagore, le module de u est la distance de l'origine O au point M d'affixe u. Mais surtout, il vérifie : $|uv| = \sqrt{uv\,\overline{uv}} = \sqrt{(u\overline{u})(v\overline{v})} = |u|\,|v|$ pour deux nombres complexes quelconques u et v. Si $|u| = 1$, la multiplication par u, application qui à z associe uz, se traduit géométriquement par une isométrie car $|uz - uz'| = |u(z - z')| = |z - z'|$, et si en outre $u \neq 1$, cette isométrie admet O pour unique point fixe : c'est donc une rotation. Si l'on appelle θ l'angle de cette rotation, la multiplication par u^n se traduit par une rotation d'angle $n\theta$, de sorte que si $u^n = 1$, $n\theta$ est multiple de 2π, donc $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ pour un entier k quelconque. Les n racines de l'équation $X^n = 1$ sont donc les affixes des sommets d'un polygone régulier à n côtés de centre O : tracer un polygone régulier à n côtés revient donc à trouver les racines de l'équation $X^n = 1$, appelées "racines n^{emes} de l'unité".

Les trois racines cubiques de l'unité sont les racines de $X^3 - 1 = 0$, or $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ et $X^2 + X + 1$ s'annule pour $X = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $X = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Par un choix purement arbitraire, on a décidé d'appeler j la racine $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, et donc $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \overline{j} = j^2$. $1,\ j$ et j^2 sont les affixes des trois sommets d'un triangle équilatéral de centre O, et si u est une racine cubique d'un nombre complexe a, les deux autres racines cubiques de a sont uj et uj^2 (toutes trois sommets d'un triangle équilatéral de centre O).

L'ennéagone, polygone régulier à neuf côtés

Puisque $1,\ j$ et j^2 sont les trois racines cubiques de l'unité, les neuf racines neuvièmes de l'unité sont donc les racines de : $X^3 = 1$, $X^3 = j$ et $X^3 = j^2$.

Calculer numériquement une racine cubique n'est pas beaucoup plus compliqué que calculer numériquement une racine carrée. Au 19^{eme} siècle, on savait faire beaucoup de calculs numériques à la main, car il n'existait pas d'ordinateur : même les 704 décimales de π qui ornent la fameuse salle du palais de la découverte ont été calculées à la main, en 1873, avec une légère erreur à partir de la 528^{eme} décimale (erreur corrigée depuis). En généralisant quelque peu la méthode de calcul à la main des racines carrées qu'on enseignait encore dans les collèges quand j'avais votre âge, on peut calculer à la main $\sqrt[3]{2}$ ou $\sqrt[3]{4}$. On peut aussi faire converger une suite vers une racine cubique tout comme on peut faire converger une suite vers une racine carrée : si l'on choisit v_0 pas trop éloigné de $\sqrt{a}$, la suite définie par : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{a}{v_n}\right)$ converge rapidement vers $\sqrt{a}$, de même que si l'on choisit w_0 pas trop éloigné de $\sqrt[3]{a}$, la suite définie par : $w_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2w_n + \frac{a}{w_n^2}\right)$ converge rapidement vers $\sqrt[3]{a}$.

Seulement, il existe trois nombres complexes dont le cube est a. Selon la valeur de départ w_0 de la suite ci-dessus, la suite convergera vers l'une ou l'autre de ces trois valeurs ou, pour certaines valeurs de départ, ne convergera pas. Si a est un réel positif, l'une de ces racines cubiques est un réel positif et on peut lui accorder un rôle privilégié en l'appelant $\sqrt[3]{a}$. Mais on ne peut pas en faire autant si a n'est pas réel. Par ailleurs, même si elles sont numériquement calculables, les racines cubiques ne peuvent pas être construites avec une règle et un compas, car les seuls théorèmes de géométrie permettant de construire des rapports de longueur irrationnels avec une règle et un compas sont : le théorème de Pythagore et la bissection de l'angle.

Si l'on revient à notre équation du troisième degré : $X^3 - 3X + 1 = 0$, d'après la méthode de Cardan, ses trois racines peuvent s'écrire : $u+v$ avec $u^3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j$ et $uv = 1$, donc $v = \overline{u}$.

Comme $j^3 = 1$, $u^9 = 1$: les trois valeurs possibles de u sont trois sommets d'un ennéagone, polygone régulier à neuf côtés. Et le fait que $u + \overline{u} = 2\mathcal{R}e(u)$ (deux fois la partie réelle de u) montre que les trois racines de $X^3 - 3X + 1 = 0$ sont : $2\cos\frac{2\pi}{9} = 2\cos\frac{16\pi}{9}$; $2\cos\frac{8\pi}{9} = 2\cos\frac{10\pi}{9}$; $2\cos\frac{14\pi}{9} = 2\cos\frac{4\pi}{9}$.

Il y a principalement deux choses à retenir de cela :

— D'une part, calculer les racines neuvièmes de l'unité, même si on ne peut pas les construire avec une règle et un compas, peut se faire en deux étapes : la racine recherchée est au sommet d'une "tour" d'équations dont chaque étage repose sur l'étage du dessous. Mais il y a deux manières d'atteindre ce sommet :

on peut tout d'abord calculer les racines cubiques de l'unité, $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j} = j^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ en tant que racines d'une équation du second degré, $X^2 + X + 1 = 0$ (graphiquement, ce sont les intersections du cercle unité avec la verticale $\mathcal{R}e(z) = -\frac{1}{2}$), puis chercher les racines cubiques de j et j^2, racines des deux équations du troisième degré : $X^3 - j = 0$ et $X^3 - j^2 = 0$.

on peut également calculer d'abord les trois racines α_k de l'équation du troisième degré $X^3 - 3X + 1 = 0$ (qui peuvent s'écrire $u + \frac{1}{u}$ avec $u^3 = j$), puis résoudre les trois équations du second degré $u + \frac{1}{u} = \alpha_k$, soit $u^2 - \alpha_k u + 1 = 0$. Graphiquement, ces deux racines s'obtiennent comme intersection du cercle unité avec la verticale $\mathcal{R}e(z) = \frac{\alpha_k}{2}$.

— D'autre part, les calculs ci-dessus utilisent seulement le fait que u est racine neuvième de l'unité, peu importe sa valeur en tant que nombre complexe (point du plan complexe). Il existe plusieurs racines neuvièmes de l'unité vérifiant les mêmes équations, mais quelle que soit celle que l'on choisit, les mêmes calculs restent valables. On a donc affaire à un nouveau type de nombres, les **nombres algébriques**, définis uniquement par les équations dont ils sont racines indépendamment de toute valeur numérique. Et alors que le passage du nombre en tant que grandeur ou quantité au nombre réel (positif ou négatif), puis complexe (point du plan complexe) a pris plusieurs siècles dans l'histoire des mathématiques, il a suffi de quelques décennies, au début du 19^{eme} siècle, pour passer du nombre complexe au nombre algébrique, grâce notamment au génie d'Évariste Galois, jeune mathématicien français mort en duel à vingt ans après avoir été recalé à l'école polytechnique.

Exercice 1
Déterminer l'équation du troisième degré admettant pour racines : $2\sin\frac{2\pi}{9}$, $2\sin\frac{8\pi}{9}$, $2\sin\frac{14\pi}{9}$.

Solution de l'exercice 1
Les trois réels $\sin\frac{2\pi}{9}$, $\sin\frac{8\pi}{9}$, $\sin\frac{14\pi}{9}$ sont les trois parties imaginaires de $x,\ xj,\ xj^2$ où x est l'une quelconque des trois racines de l'équation $X^3 = j$. x est ici un nombre algébrique, défini uniquement par l'équation dont il est racine, et non par sa valeur en tant que nombre complexe car les calculs seront identiques que $x = \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}$, $x = \cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}$ ou $x = \cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}$. Dans les trois cas les trois nombres $2\sin\frac{2\pi}{9}$, $2\sin\frac{8\pi}{9}$, $2\sin\frac{14\pi}{9}$ sont, à permutation près, les trois nombres algébriques $i(\overline{x} - x),\ i(\overline{xj} - xj),\ i(\overline{xj^2} - xj^2)$. Les polynômes symétriques de ces trois racines sont :

$$i(\overline{x} - x) + i(\overline{xj} - xj) + i(\overline{xj^2} - xj^2) = 0$$

car $1+j+j^2=0$. Cette même relation entraîne : $(\overline{x}-x)(\overline{xj}-xj)=\overline{x^2j}+1+x^2j$ si bien que :

$$\begin{aligned}-(\overline{x}-x)(\overline{xj}-xj)-(\overline{xj}-xj)(\overline{xj^2}-xj^2)-(\overline{xj^2}-xj^2)(\overline{x}-x)=\\ -(\overline{x^2j}+1+x^2j)-(\overline{x^2}+1+x^2)-(\overline{x^2j^2}+1+x^2j^2)=-3\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-i(\overline{x}-x)(\overline{xj}-xj)(\overline{xj^2}-xj^2)&=-i(\overline{x}-x)(\overline{x^2}+1+x^2)\\ &=-i[(\overline{x^3}-\overline{x})+(\overline{x}-x)+(x-x^3)]\\ &=-i(\overline{j}-j)=-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$2\sin\frac{2\pi}{9}\,,\ 2\sin\frac{8\pi}{9}\,,\ 2\sin\frac{14\pi}{9}$. sont donc les trois racines de l'équation : $X^3-3X+\sqrt{3}=0$, ce qu'on vérifie aisément en résolvant cette équation par la méthode de Cardan.

L'important est que seuls ont été utilisés dans ces calculs j et les relations vérifiées à l'étage de j, à savoir : $j^3=1$, $1+j+j^2=0$ et $\overline{j}-j=-i\sqrt{3}$, ainsi que la relation $x^3=j$ (donc $x\overline{x}=1$) définissant, à l'étage du dessus, x en tant que nombre algébrique.

L'heptagone, polygone régulier à sept côtés

Qu'en est-il de l'heptagone, polygone régulier à sept côtés ?

Construire un heptagone régulier, même si ce n'est pas possible avec une règle et un compas, revient à résoudre l'équation : $X^7-1=0$ soit $(X-1)(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)=0$. Une première manière de résoudre cette équation, mis à part la racine évidente 1, est de faire le changement de variable : $Y=X+\dfrac{1}{X}$. En effet,

$$\begin{aligned}Y^3-2Y&=X^3+X+\frac{1}{X}\ +\frac{1}{X^3}\\ Y^2-1&=X^2+1+\frac{1}{X^2}\end{aligned}$$

si bien que :

$$\frac{1}{X^3}\left(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1\right)=Y^3+Y^2-2Y-1$$

Cette dernière équation peut se résoudre par la méthode de Cardan, sous réserve que "la" solution fait apparaître des racines cubiques de nombres complexes. Si $Z=3Y+1$, $Z^3-21Z-7=27(Y^3+Y^2-2Y-1)$, de sorte qu'il suffit de trouver u et v tels que $u+v=Z$ soit racine de cette dernière équation, avec $uv=7$, ce qui donne : $u^3+v^3-7=0$ soit $u^6-7u^3+7^3=0$, donc $u^3=\dfrac{7+21i\sqrt{3}}{2}=7(3j+2)$ et $v^3=\dfrac{7-21i\sqrt{3}}{2}=7(3j^2+2)$. Si u est l'une quelconque des racines cubiques de $7(3j+2)$ et v la racine cubique correspondante (telle que $uv=7$) de $7(3j^2+2)$, alors, les trois racines $y_1\,,\ y_2\,,\ y_3$ de $Y^3+Y^2-2Y-1=0$ (qui ne sont autres que les $2\cos\frac{2k\pi}{7}$ pour k variant de 1 à 6, puisque ces six cosinus sont deux à deux égaux), sont : $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{u+v}{3}$; $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{uj+vj^2}{3}$; $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{uj^2+vj}{3}$. A l'étage supérieur, on obtient les solutions de

$X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1=0$ (donc les racines septièmes de l'unité autres que 1) comme solutions de $X+\dfrac{1}{X}=y_k$, soit $X^2-y_kX+1=0$.

Mais on peut construire notre tour différemment. Si x est l'une quelconque des racines septièmes de l'unité autre que 1, alors $x+x^2+x^4$ est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers, dont l'autre racine est : $x^3+x^5+x^6$. En effet, leur somme : $(x+x^2+x^4)+(x^3+x^5+x^6)=-1$ vu que $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$, mais également : $(x+x^2+x^4)(x^3+x^5+x^6)=(x^4+x^6+1)+(x^5+1+x)+(1+x^2+x^3)=2$ pour la même raison, de sorte que $x+x^2+x^4$ et $x^3+x^5+x^6$ sont les deux racines de $Y^2+Y+2=0$. Appelons-les $y_1=x+x^2+x^4$ et $y_2=x^3+x^5+x^6$. Suivant le choix de x parmi les racines septièmes de l'unité, on peut avoir soit $y_1=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $y_2=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$, soit l'inverse.

C'est à partir des deux nombres algébriques y_1 et y_2 qu'on va calculer, à l'étage au dessus, les six nombres algébriques : $x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6$. En effet, $(Z-x)(Z-x^2)(Z-x^4)=Z^3-(x+x^2+x^4)Z^2+(x^3+x^5+x^6)Z-1=Z^3-y_1Z^2+y_2Z-1$. Si $T=3Z-y_1$, $T^3-(6y_1+3)T+(2y_1-13)=27(Z^3-y_1Z^2+y_2Z-1)$, compte tenu des relations que l'on connaît à l'étage de y_1 et y_2, notamment $y_1+y_2=-1$, $y_1y_2=2$ et $y_1^2=-y_1-2$. D'où si $Z=u+v$ avec $uv=2y_1+1$ (on posera pour simplifier : $\delta=2y_1+1=-2y_2-1=y_1-y_2$), $v^6+(\delta-14)v^3+\delta^3=0$. Et comme $\delta^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=-7$, $u^3=7-\frac{\delta}{2}\pm\frac{3\sqrt{21}}{2}=7+\delta(3j+1)$ ou $7+\delta(3j^2+1)$. En choisissant $u^3=7+\delta(3j+1)$ et $v^3=7+\delta(3j^2+1)$ mais tels que $uv=\delta$, les trois racines cherchées sont, dans cet ordre ou un autre : $\frac{y_1}{3}+\frac{u+v}{3}$, $\frac{y_1}{3}+\frac{uj+vj^2}{3}$, $\frac{y_1}{3}+\frac{uj^2+vj}{3}$.

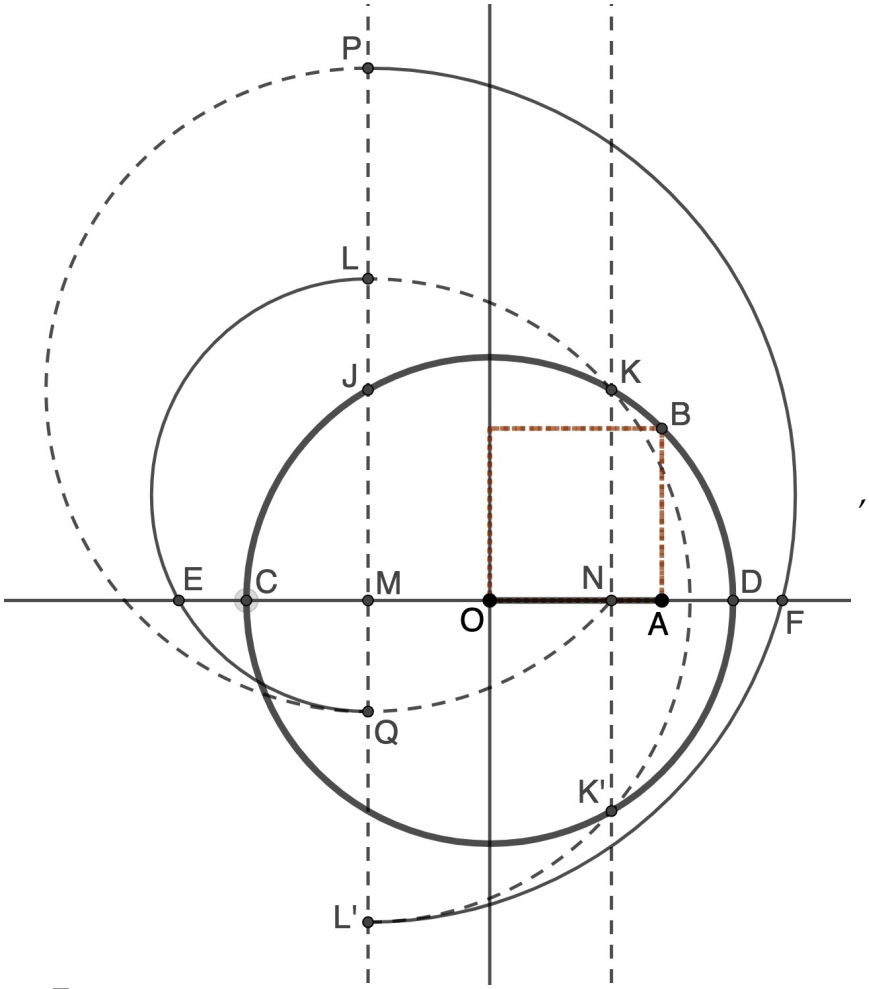
Comme dans l'exercice 1 ci-dessus (à propos de l'ennéagone), on peut chercher l'équation dont les trois racines sont $i(x-\overline{x})$, $i(x^2-\overline{x^2})$, $i(x^4-\overline{x^4})$, c'est-à-dire, suivant le choix de x, soit $2\sin\frac{2\pi}{7}$, $2\sin\frac{4\pi}{7}$, $2\sin\frac{8\pi}{7}$, dans cet ordre ou dans un autre, soit $2\sin\frac{6\pi}{7}$, $2\sin\frac{10\pi}{7}$, $2\sin\frac{12\pi}{7}$. On obtient (en définissant δ comme dans le paragraphe précédent, donc $\delta^2=-7$) : $X^3-i\delta X^2+i\delta=0$ soit, en posant $Y=3X-i\delta$, $Y^3-21Y+13i\delta=0$. Avec $Y=u+v$ tels que $uv=7$, l'équation en u^3 admet pour racines $\frac{-13i\delta+3i\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{-13i\delta-3i\sqrt{21}}{2}$, soit $u^3=i\delta\left(\frac{-13-3i\sqrt{3}}{2}\right)=i\delta(3j^2-5)=i\delta(3j+1)^2$ et $v^3=i\delta(3j^2+1)^2$ ou l'inverse. En définitive, $i(x-\overline{x}),\ i(x^2-\overline{x^2}),\ i(x^4-\overline{x^4})$ sont les trois nombres algébriques : $\frac{i\delta}{3}+\frac{u+v}{3}$, $\frac{i\delta}{3}+\frac{uj+vj^2}{3}$, $\frac{i\delta}{3}+\frac{uj^2+vj}{3}$ avec $u^3=i\delta(3j+1)^2$ et $v=\overline{u}$. La relation $v=\overline{u}$ résulte du fait que ces trois racines sont réelles, alors que pour l'équation précédente, de racines $x,\ x^2$ et x^4 non réelles, les variables intermédiaires u et v telles que $u^3=7+\delta(3j+1)$ et $v^3=7+\delta(3j^2+1)$ peuvent s'écrire : $u=|u|(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $|u|=\sqrt{\dfrac{7-\varepsilon\sqrt{21}}{2}}\neq|v|=\sqrt{\dfrac{7+\varepsilon\sqrt{21}}{2}}$ et $\tan(3\theta)=2\sqrt{7}+3\varepsilon\sqrt{3}$, où $\varepsilon=1$ si $\delta=i\sqrt{7}$ et $\varepsilon=-1$ sinon. Il suffirait que l'on puisse tracer la trisectrice de l'angle de tangente $2\sqrt{7}+3\sqrt{3}$ pour pouvoir construire l'heptagone régulier, car $|u|$ et $|v|$ sont constructibles à la règle et au compas.

Exercice 2

A partir d'un segment OA de longueur 1, construire à la règle et au compas des segments de longueurs $\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{21}}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{21}}{2}}$.

Solution de l'exercice 2

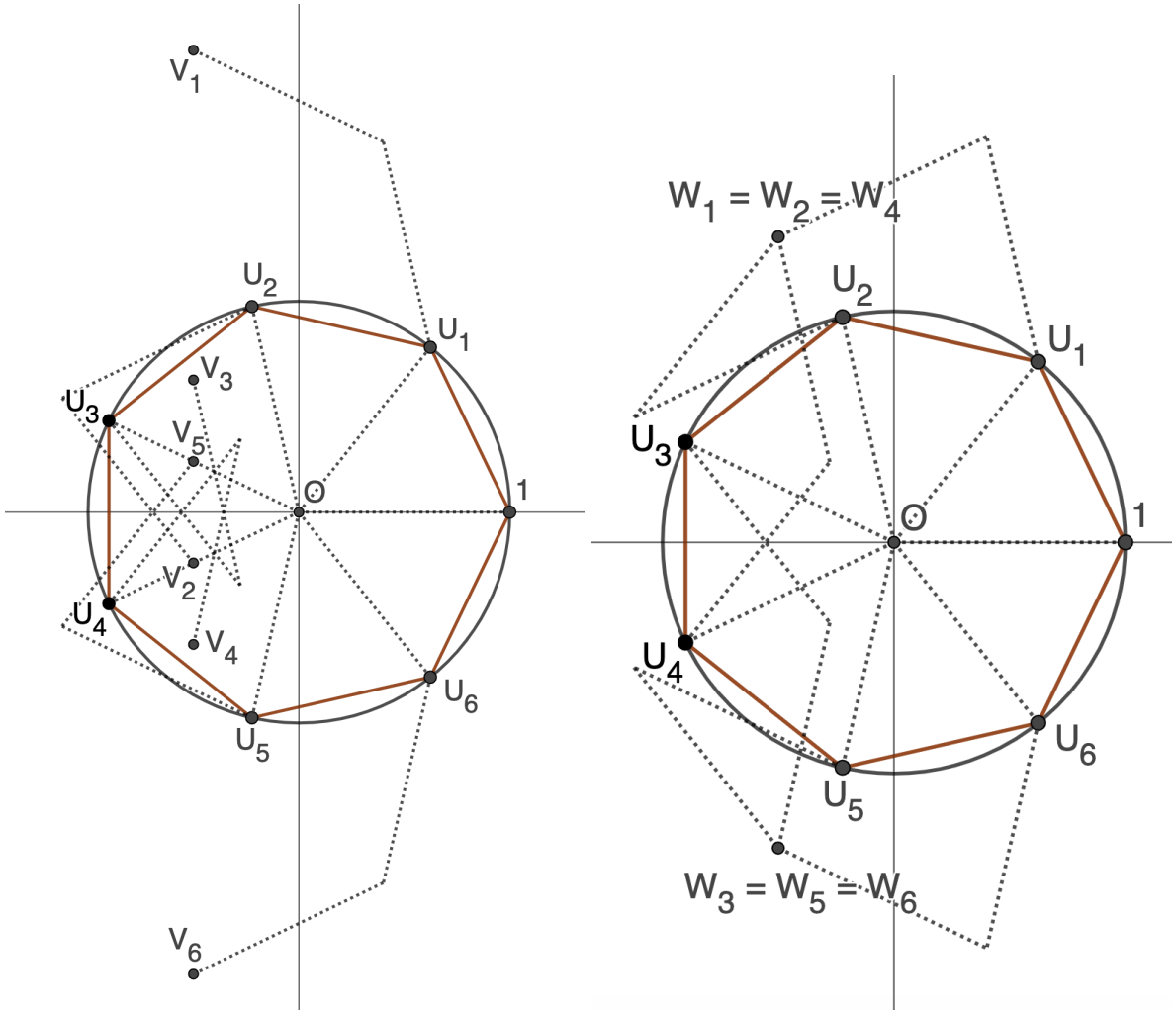
Construisons le carré de côté OA, le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon la diagonale du carré ($\sqrt{2}$), qui coupe la droite (OA) en C et D. Soient M et N les milieux de $[OC]$ et $[OD]$. La médiatrice de $[OC]$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en J et J', et la médiatrice de $[OD]$ coupe le même cercle en K et K'. Comme $MJ = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $MN = \sqrt{2}$, $JN = \sqrt{\frac{7}{2}}$: le cercle de centre J passant par N coupe (MJ) en P et Q et le cercle de centre M et passant par K et K', de même rayon, coupe cette même droite (MJ) en L et L', les points étant disposés comme sur la figure.



$MQ = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $MP = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Le cercle de diamètre $[LQ]$ coupe l'horizontale (OA) en E et E' tels que $ME^2 = ME'^2 = MQ \cdot ML = \dfrac{7-\sqrt{21}}{2}$ et le cercle de diamètre $[L'P]$ coupe la même horizontale (OA) en F (et F') tels que $MF^2 = MP \cdot ML' = \dfrac{7+\sqrt{21}}{2}$, donc $[MF]$ et $[ME]$ sont les segments cherchés.

Comment construire la tour ?

Pourquoi est-ce $x + x^2 + x^4$ qui est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers, et non $x + x^2 + x^3$? Tout simplement parce que selon la valeur attribuée à x, racine septième de l'unité, le nombre algébrique $x + x^2 + x^3$ peut prendre six valeurs distinctes, en tant que nombres complexes ; or dans le plan complexe, une équation du second degré ne peut pas admettre plus de deux racines distinctes. En revanche, $x + x^2 + x^4$ ne prend que deux valeurs distinctes, pour les six valeurs possibles de x : ce sont les mêmes nombres qui sont additionnés, dans un ordre différent, si l'on remplace x par x^2 ou par x^4, du seul fait que $x^7 = 1$.



De manière plus générale, si l'on considère l'ensemble A des nombres algébriques : $\alpha = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{p-1}x^{p-1}$ où x est une racine p-ième de l'unité et les a_k des entiers relatifs, pour tout entier q on peut définir sur A la transformation f_q qui à α associe : $f_q(\alpha) = a_0 + a_1x^q + a_2x^{2q} + \cdots + a_{p-1}x^{(p-1)q}$ obtenu en remplaçant x par x^q. C'est en définitive la même transformation que lorsque l'on transforme $a + bi$ en $a - bi = a + bi^3$ ou $a + bj + cj^2$ en $a + bj^2 + cj$, mais généralisée au cas où $p > 4$: les $f_q(\alpha)$ sont des "conjugués" de α en tant que nombres algébriques. Cela revient également à choisir une autre racine p-ième de l'unité, x^q au lieu de x. Et de ce fait, il est clair que $f_q(\alpha + \beta) = f_q(\alpha) + f_q(\beta)$ et $f_q(\alpha\beta) = f_q(\alpha)f_q(\beta)$ (qui généralise $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ et $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$) pour deux nombres algébriques quelconques α et β appartenant à A.

Appelons désormais $A(q)$ l'ensemble des $\alpha \in A$ tels que $f_q(\alpha) = \alpha$. Pour $p = 7$, $x+x^2+x^4 \in A(2)$ car $x^2+x^4+x = x+x^2+x^4$, mais $x+x^2+x^3 \notin A(2)$. $\alpha \in A(q) \iff (a_1 = a_q)$ et $(a_2 = a_{2q})$ et $(a_3 = a_{3q})$ etc..., donc notamment : $a_1 = a_q = a_{q^2} = a_{q^3} = \cdots$. Si $q,\ q^2,\ q^3,\ \cdots,\ q^{p-1}$ sont tous distincts modulo p, donc parcourent tous les entiers modulo p, tous les coefficients (hormis a_0) doivent être égaux et $A(q)$ est l'ensemble des $a_0 + a_1(x + x^2 + \cdots + x^{p-1}) = a_0 - a_1 \in \mathbb{Z}$ car $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$.

Dès lors, deux choses sont importantes :

— Si $\alpha \in A(q^2)$ et si $\beta = f_q(\alpha)$ alors $\alpha = f_q(\beta)$ de sorte que $f_q(\alpha+\beta) = \beta+\alpha$ et $f_q(\alpha\beta) = \beta\alpha$ donc $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ appartiennent tous deux à $A(q)$. En d'autres termes, les éléments de

$A(q^2)$ sont racines d'une équation du second degré à coefficients dans $A(q)$. De même, si $\alpha \in A(q^3)$ et si $\beta = f_q(\alpha)$ et $\gamma = f_q(\beta)$, alors $\alpha = f_q(\gamma)$ donc les polynômes symétriques élémentaires de $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, à savoir : $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ et $\alpha\beta\gamma$ appartiennent tous trois à $A(q)$, donc α, β et γ sont les trois racines d'une équation du troisième degré à coefficients dans $A(q)$. Et plus généralement, si $\alpha \in A(q^k)$, $\alpha,\ f_q(\alpha),\ f_{q^2}(\alpha),\ \cdots\ f_{q^{k-1}}(\alpha)$ sont les k racines d'une équation du k-ième degré à coefficients dans $A(q)$.

— Pour tout entier p, appelons F_p^* l'ensemble des entiers modulo p premiers avec p. Cet ensemble contient $\varphi(p)$ éléments, qui tous vérifient $q^{\varphi(p)} = 1$ (modulo p), et parmi eux il en existe au moins un tel que les $\varphi(p)$ entiers : $q,\ q^2,\ q^3,\ \cdots\ q^{\varphi(p)}$ soient tous distincts modulo p, donc parcourent tout l'ensemble F_p^*.

Donc si $\varphi(p) = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots$, et si les $q,\ q^2,\ q^3,\ \cdots\ q^{\varphi(p)}$ sont tous distincts modulo p, alors les éléments de $A(q)$ sont les entiers relatifs, les éléments de $A(q^{m_1})$ sont racines d'équations de degré m_1 à coefficient dans $A(q) = \mathbb{Z}$, les éléments de $A(q^{m_1 \times m_2})$ sont racines d'équations de degré m_2 à coefficients dans $A(q^{m_1})$, les éléments de $A(q^{m_1 \times m_2 \times m_3})$ sont racines d'équations de degré m_3 à coefficients dans $A(q^{m_1 \times m_2})$ et ainsi de suite, jusqu'aux éléments de $A(q^{\varphi(p)})$ qui ne sont autres que tous les éléments de A, car $q^{\varphi(p)} = 1$ (modulo p). Ainsi, tous les éléments de A s'obtiennent au moyen d'une tour d'équations reposant chacune sur l'étage du dessous, et dont les degrés dépendent de l'ordre dans lequel on décompose $\varphi(p)$ en un produit $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots$. Ce qui explique que pour l'ennéagone et l'heptagone, on ait eu le choix entre résoudre une équation du troisième degré puis une équation du second degré, ou résoudre d'abord une équation du second degré puis une équation du troisième degré ($\varphi(p) = 6 = 3 \times 2 = 2 \times 3$).

Seulement comme seules sont constructibles avec une règle et un compas les solutions d'équations du second degré, la condition nécessaire et suffisante pour pouvoir construire un polygone régulier de p côtés avec une règle et un compas est que $\varphi(p)$ soit une puissance de 2. Si p est premier $\varphi(p) = p - 1$, donc p doit être de la forme $2^n + 1$: de tels nombres premiers sont appelés "nombres de Fermat", on n'en connaît que cinq (ou six), (2), 3, 5, 17, 257 et 65537, et il se peut qu'il n'en existe pas d'autre, en tout cas s'il en existait, ils auraient au minimum des milliards de chiffres (car on a poursuivi très loin les recherches) et construire un tel polygone avec une règle et un compas serait difficilement envisageable.

En revanche, pour $p = 17$, la construction découverte en 1893 n'est pas si compliquée que cela.

L'heptadécagone, polygone régulier à 17 côtés

Commençons par trouver un q tel que $A(q) = \mathbb{Z}$, donc tel que $q,\ q^2,\ \cdots\ q^{16}$ soient tous distincts. q doit être d'ordre 16, et il suffit pour cela, puisque les seuls diviseurs de 16 sont $1,\ 2,\ 4,\ 8$, que $q^8 \neq 1$ (modulo 17). $q = 2$ ne convient pas, car $2^8 = 1$ (modulo 17), mais $q = 3$ convient car, modulo 17, $3^2 = -8$, $3^4 = -4$ et $3^8 = -1$. Notons que la moitié des nombres de 1 à 16 auraient pu être choisis (toutes les puissances impaires de 3), et on peut prouver que même pour les polygones à 257 ou 65537 côtés, $A(3) = \mathbb{Z}$, donc ce choix est l'étape la plus facile.

Soit x une racine 17^{eme} de l'unité, peu importe laquelle. Choisissons un nombre algébrique appartenant à $A(q^2) = A(-8)$, par exemple : $\alpha_1 = x + x^{-8} + x^{-4} + x^{-2} + x^{-1} + x^8 + x^4 + x^2$. $f_q(\alpha_1) = \alpha_2 = x^3 + x^{-7} + x^5 + x^{-6} + x^{-3} + x^7 + x^{-5} + x^6$. $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\,\alpha_2$ appartiennent tous deux à $A(q) = \mathbb{Z}$, donc chaque puissance de x s'y trouve avec le même coefficient, mis

à part $x^0 = 1$ qui ne s'y trouve pas. Il suffit de compter le nombre de termes pour voir que $\alpha_1 + \alpha_2 = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{16} = -1$ et $\alpha_1\,\alpha_2 = -4$. Donc α_1 et α_2 sont les deux racines de : $X^2 + X - 4 = 0$, à savoir : $\dfrac{-1 + \varepsilon_1\sqrt{17}}{2}$, avec $\varepsilon_1 = +1$ pour "la plus grande" des racines α_1 ou α_2 et $\varepsilon_2 = -1$ pour l'autre, mais cela dépend de la racine 17^{eme} de l'unité, x, choisie (arbitrairement) au départ. L'expression "la plus grande" n'a de sens que pour des nombres réels, il n'est pas possible de comparer ainsi des nombres algébriques.

Choisissons maintenant un nombre algébrique appartenant à $A(q^4) = A(-4)$, par exemple : $\beta_1 = x + x^{-4} + x^{-1} + x^4$. β_1 et $\beta_2 = f_{-8}(\beta_1) = x^{-8} + x^{-2} + x^8 + x^2$ sont racines d'une équation du second degré à coefficients dans $A(q^2)$, en l'occurrence : $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1$ et (cela va faciliter la construction) : $\beta_1\,\beta_2 = -1$. Toutes les puissances non nulles de x apparaissent, dans ce produit, avec le même coefficient 1. Donc β_1 et β_2 sont les deux racines de : $Y^2 - \alpha_1 Y - 1 = 0$, soit : $\dfrac{\alpha_1 + \varepsilon_2\sqrt{\alpha_1^2 + 4}}{2}$. Une nouvelle fois, $\varepsilon_2 = +1$ pour "la plus grande des racines" (réelles) β_1 ou β_2 et $\varepsilon_2 = -1$ pour l'autre racine, car $\sqrt{\alpha_1^2 + 4} > 0$ par définition de la racine carrée, mais cela dépend de x. De même, $\beta_3 = x^3 + x^5 + x^{-3} + x^{-5}$ et $\beta_4 = f_{-8}(\beta_3) = x^{-7} + x^{-6} + x^7 + x^6$ sont les deux racines de $Y^2 - \alpha_2 Y - 1 = 0$, à savoir : $\dfrac{\alpha_2 + \varepsilon_2\sqrt{\alpha_2^2 + 4}}{2}$.

A l'étage du dessus, donc appartenant à $A(q^8) = A(-1)$,
$\gamma_1 = x + x^{-1}$ et $\gamma_2 = f_{-4}(\gamma_1) = x^{-4} + x^4$ vérifient : $\gamma_1 + \gamma_2 = \beta_1$ et $\gamma_1\,\gamma_2 = \beta_3$, donc sont racines de : $Z^2 - \beta_1 Z + \beta_3$, soit : $\dfrac{\beta_1 + \varepsilon_3\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}$.

$\gamma_3 = x^{-8} + x^8$ et $\gamma_4 = f_{-4}(\gamma_3) = x^{-2} + x^2$ sont racines de $Z^2 - \beta_2 Z + \beta_4$, soit $\dfrac{\beta_2 + \varepsilon_3\sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_4}}{2}$.

$\gamma_5 = x^3 + x^{-3}$ et $\gamma_6 = f_{-4}(\gamma_5) = x^5 + x^{-5}$ sont racines de $Z^2 - \beta_3 Z + \beta_2$, soit $\dfrac{\beta_3 + \varepsilon_3\sqrt{\beta_3^2 - 4\beta_2}}{2}$.

Et $\gamma_7 = x^{-7} + x^7$ et $\gamma_8 = f_{-4}(\gamma_7) = x^{-6} + x^6$ sont racines de $Z^2 - \beta_4 Z + \beta_1$, soit $\dfrac{\beta_4 + \varepsilon_3\sqrt{\beta_4^2 - 4\beta_1}}{2}$.

équations	$X^2+X-4=0$	$Y^2-\alpha Y-1$	$Z^2-\beta Z+\beta'$	
racines	$\frac{-1+\varepsilon_1\sqrt{17}}{2}$	$\frac{\alpha+\varepsilon_2\sqrt{\alpha^2+4}}{2}$	$\frac{\beta+\varepsilon_3\sqrt{\Delta}}{2}$	
	$\alpha_1=\beta_1+\beta_2$	$\beta_1=\gamma_1+\gamma_2=\gamma_7\,\gamma_8$	$\gamma_1=x+x^{-1}$ $\gamma_2=x^{-4}+x^4$	$\Delta=\beta_1^2-4\beta_3$
		$\beta_2=\gamma_3+\gamma_4=\gamma_5\,\gamma_6$	$\gamma_3=x^{-8}+x^8$ $\gamma_4=x^{-2}+x^2$	$\Delta=\beta_2^2-4\beta_4$
	$\alpha_2=\beta_3+\beta_4$	$\beta_3=\gamma_5+\gamma_6=\gamma_1\,\gamma_2$	$\gamma_5=x^3+x^{-3}$ $\gamma_6=x^5+x^{-5}$	$\Delta=\beta_3^2-4\beta_2$
		$\beta_4=\gamma_7+\gamma_8=\gamma_3\,\gamma_4$	$\gamma_7=x^{-7}+x^7$ $\gamma_8=x^{-6}+x^6$	$\Delta=\beta_4^2-4\beta_1$

On pourrait ajouter un étage pour calculer chacun des x^k, racines de $T^2-\gamma T+1=0$, mais γ est égal à deux fois la partie réelle de ces racines, donc résoudre cette dernière équation revient géométriquement à trouver l'intersection d'une "verticale" (orthogonale à l'axe des réels) et du cercle unité : trouver les γ (c'est-à-dire les $2\cos\frac{2k\pi}{17}$) suffit donc à considérer le problème résolu.

Ce sont les ε qui permettent de différencier les huit valeurs de γ, mais sous réserve d'avoir choisi une valeur de x. Par exemple, en notant classiquement $\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$

	$x=\exp\left(\frac{2i\pi}{17}\right)$			$x=\exp\left(\frac{6i\pi}{17}\right)$			$x=\exp\left(\frac{10i\pi}{17}\right)$			$x=\exp\left(\frac{16i\pi}{17}\right)$		
	ε_1	ε_2	ε_3	ε_1	ε_2	ε_3	ε_1	ε_2	ε_3	ε_1	ε_2	ε_3
γ_1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
γ_2			-1			-1			+1			+1
γ_3		-1	-1		-1	-1		-1	+1		+1	-1
γ_4			+1			+1			-1			+1
γ_5	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
γ_6			-1			+1			-1			+1
γ_7		-1	-1		+1	-1		+1	+1		+1	-1
γ_8			+1			+1			-1			+1

En étudiant pour chacune des quatre valeurs de β ci-dessus la valeur du discriminant $\Delta=\beta^2-4\beta'$, on voit que (dans le cas où $x=\exp\left(\frac{2i\pi}{17}\right)$) :

β	ε_1	ε_2	β'	ε'_1	ε'_2
β_1	+	+	β_3	-	+
β_2		-	β_4		-
β_3	-	+	β_2	+	-
β_4		-	β_1		+

Les quatre valeurs de β' : $(\beta_3,\ \beta_4,\ \beta_2,\ \beta_1)$ sont une permutation des quatre valeurs de β : $(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4)$ que nous noterons : $\beta' = \sigma(\beta)$. Si l'on choisit un autre x, on permute les valeurs de β (en l'occurrence, par une permutation σ^k pour $k = 0,\ 1,\ 2$ ou 3), mais en conservant $\beta' = \sigma(\beta)$, de sorte qu'on a toujours : $\varepsilon'_1 = -\varepsilon_1$ et $\varepsilon'_2 = \varepsilon_1\,\varepsilon_2$. Dès lors, dans $\Delta = \beta^2 - 4\beta'$, à :

$2\beta = \dfrac{-1+\varepsilon_1\sqrt{17}}{2} + \varepsilon_2\sqrt{\dfrac{17-\varepsilon_1\sqrt{17}}{2}}$, correspond : $2\beta' = \dfrac{-1-\varepsilon_1\sqrt{17}}{2} + \varepsilon_1\,\varepsilon_2\sqrt{\dfrac{17+\varepsilon_1\sqrt{17}}{2}}$.

Donc en simplifiant grâce à la relation : $\sqrt{\dfrac{17+\varepsilon\sqrt{17}}{2}} = \left(\dfrac{\sqrt{17}+\varepsilon}{4}\right)\sqrt{\dfrac{17-\varepsilon\sqrt{17}}{2}}$,

$$\begin{aligned} 4\beta^2 &= 13-\varepsilon_1\sqrt{17} + \varepsilon_1\varepsilon_2\left(\sqrt{17}-\varepsilon_1\right)\sqrt{\frac{17-\varepsilon\sqrt{17}}{2}} \\ -16\beta' &= 4+4\varepsilon_1\sqrt{17} + \varepsilon_1\varepsilon_2\left(-2\sqrt{17}-2\varepsilon_1\right)\sqrt{\frac{17-\varepsilon\sqrt{17}}{2}} \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$4\gamma = \left(\frac{-1+\varepsilon_1\sqrt{17}}{2} + \varepsilon_2\sqrt{\frac{17-\varepsilon_1\sqrt{17}}{2}}\right) + \varepsilon_3\sqrt{\sqrt{17}+3\varepsilon_1}\sqrt{\sqrt{17}-\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\frac{17-\varepsilon_1\sqrt{17}}{2}}}$$

Mais pour construire l'heptadécagone avec une règle et un compas, ce n'est pas de nombres algébriques γ qu'on a besoin, mais de nombres complexes, c'est-à-dire des valeurs des ε en fonction du k de $\cos\dfrac{2k\pi}{17}$ apparaissant dans la formule :

$$8\cos\frac{2k\pi}{17} = \left(\frac{-1+\varepsilon_1\sqrt{17}}{2} + \varepsilon_2\sqrt{\frac{17-\varepsilon_1\sqrt{17}}{2}}\right) + \varepsilon_3\sqrt{\sqrt{17}+3\varepsilon_1}\sqrt{\sqrt{17}-\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\frac{17-\varepsilon_1\sqrt{17}}{2}}}$$

On obtient le tableau suivant où, à la différence du précédent, les ε semblent distribués de manière désordonnée.

k	ε_1	ε_2	ε_3
1	+1	+1	+1
2	+1	-1	+1
3	-1	+1	+1
4	+1	+1	-1
5	-1	+1	-1
6	-1	-1	+1
7	-1	-1	-1
8	+1	-1	-1

Il reste à faire la construction effective avec une règle et un compas.

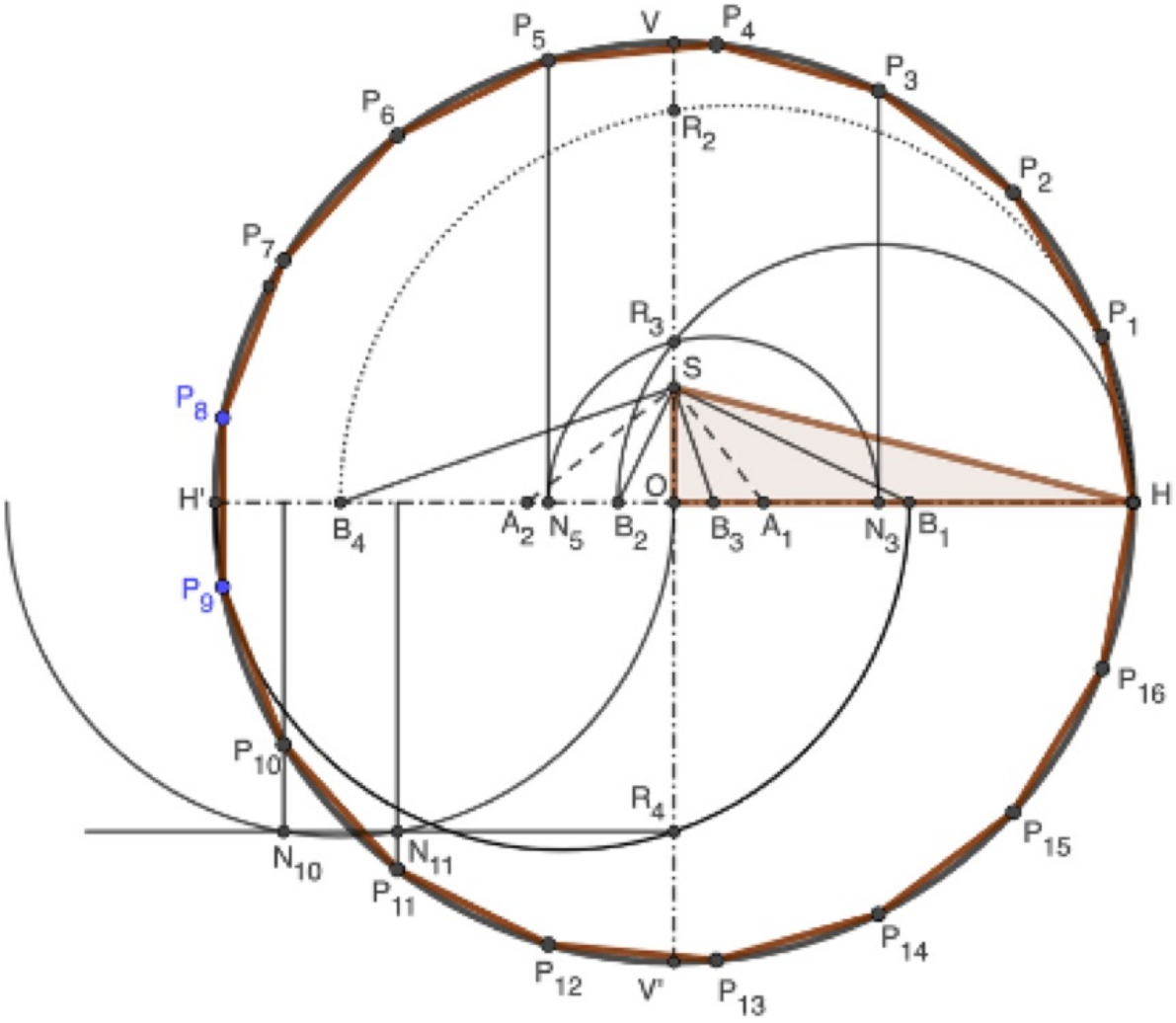
Les solutions α et β des deux premières équations s'obtiennent grâce à la bissection de l'angle. En effet, de la relation $\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^2$ on déduit classiquement : $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$. Donc $\tan\theta$ est racine de : $T^2 + \left(\dfrac{2}{\tan 2\theta}\right) T - 1 = 0$.

Si $\tan 4\theta = 4$, $\tan 2\theta$ est l'une des racines $\dfrac{\alpha_1}{2}$ ou $\dfrac{\alpha_2}{2}$ de $T^2 + \dfrac{1}{2}T - 1 = 0$, α_1 et α_2 étant elles-mêmes les deux racines cherchées de $X^2 + X - 4 = 0$.

Et $\tan\theta$ est l'une des racines β_1 et β_2 (resp. β_3 et β_4) de l'équation $Y^2 - \alpha_1 Y - 1 = 0$ (resp. $Y^2 - \alpha_2 Y - 1 = 0$) car, d'après la première équation, $\alpha_1 = \dfrac{-4}{\alpha_2}$.

Traçons donc un triangle SOH, rectangle en O, vérifiant : $SO = 1$, $OH = 4$, donc $SH = \sqrt{17}$. Les bissectrices (intérieure et extérieure) de $\widehat{OSH}$ coupent l'axe (OH) en A_1 et A_2, d'abscisses $\dfrac{\alpha_1}{2}$ et $\dfrac{\alpha_2}{2}$. La bissectrice intérieure coupe l'axe (OH) en celui des deux points pour lequel $\varepsilon_1 = +1$, qui n'est pas obligatoirement A_1, mais nous nous placerons désormais dans le cas où $x = \exp\dfrac{2i\pi}{17}$, donc où $\alpha_1 > \alpha_2$.

Les bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{OSA_2}$ coupent (OH) respectivement en B_2 et B_1, d'abscisses β_2 et β_1, racines de $Y^2 + \left(\dfrac{4}{\alpha_2}\right) Y - 1 = 0$, et les bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{OSA_1}$ coupent (OH) respectivement en B_3 et B_4, d'abscisses β_3 et β_4. On vérifiera que les trois angles $\widehat{B_4OB_2}$, $\widehat{B_2OB_3}$, $\widehat{B_3OB_1}$ valent tous trois $\frac{\pi}{4}$ car (SB_4), (SB_2), (SB_3), (SB_1) sont quatre quadrisectrices du même angle $\widehat{OSH}$, mais surtout que A_2 (resp. A_1) est bien le milieu de B_4 et B_3 (resp. B_2 et B_1), car $\widehat{B_4SA_2} = \widehat{B_3SA_1}$ (puisque $(SB_4)\perp(SB_3)$ et $(SA_2)\perp(SA_1)$), $\widehat{A_2B_4S} = \widehat{OSB_3}$ (car $(OS)\perp(A_2B_4)$), donc $\widehat{A_2B_4S} = \widehat{B_4SA_2}$ (car (SB_3) est bissectrice de $\widehat{OSA_1}$) et $\widehat{A_2B_3S} = \widehat{B_3SA_2}$ (car $\widehat{B_3SB_4} = \frac{\pi}{2}$), d'où $A_2B_4 = A_2S = A_2B_3$.



Il reste à résoudre les équations $Z^2 - \beta Z + \beta'$ vérifiées par γ, donc à construire à la règle et au compas $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\beta^2 - 4\beta'}$. Si $\beta' < 0$, par exemple pour γ_5 et γ_6 pour lesquels $\beta' = \beta_2$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\beta_3^3 - 4\beta_2}$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés $\beta_3 = OB_3$ et $\sqrt{4|\beta_2|} = OR_3$, R_3 étant l'intersection du cercle de diamètre B_2H avec l'axe vertical (OS), car $OR_3^2 = OB_2 \cdot OH$. Les points N_3 et N_5 d'abscisses $2\gamma_5$ et $2\gamma_6$ (soit $\beta_3 \pm \sqrt{\Delta}$) sont les intersections avec l'axe horizontal (OH) du cercle de centre B_3 et de rayon $B_3R_3 = \sqrt{\Delta}$. Même construction pour $2\gamma_3$ et $2\gamma_4$ (donc N_8 et N_2) car $\beta_4 < 0$. Une seule de ces constructions suffit à déterminer tous les autres sommets de l'heptadécagone, et on se contente généralement de N_3 et N_5.

Mais on peut également calculer les quatre autres γ, lorsque $\beta' > 0$. Le théorème de Pythagore doit alors être utilisé différemment : $\left(\sqrt{\Delta}\right)^2 + \left(\sqrt{4\beta'}\right)^2 = \beta^2$, soit $BN'^2 + OR^2 = BO^2$ (N' étant, sur la figure, la projection orthogonale de N sur l'axe (OH)). Dans le cas, par exemple, de γ_7 et γ_8, où $\Delta = \beta_4^2 - 4\beta_1$, on trace le symétrique H' de H par rapport à O et le cercle de diamètre $H'B_1$, qui coupe l'axe vertical (OS) en R_4 tel que $OR_4^2 = OH' \cdot OB_1 = 4\beta_1$. La parallèle à l'axe horizontal (OH) passant par R_4 coupe le cercle de centre B_4 et de rayon $B_4O = \beta_4$ en N_{10} et N_{11}, d'abscisses $2\gamma_7$ et $2\gamma_8$, soit $\beta_4 \pm \sqrt{\Delta}$. La construction serait similaire pour $2\gamma_1$ et $2\gamma_2$.

Et c'est seulement pour résoudre la quatrième équation $T^2 - \gamma T + 1 = 0$, celle donnant les sommets de l'heptadécagone à partir des γ, que l'on a besoin du cercle de diamètre $[HH']$. La verticale (parallèle à l'axe (OS) passant par N_3 coupe ce cercle aux troisième et quatorzième sommets de l'heptadécagone, celle passant par N_{10} aux dixième et septième sommets, et ainsi de suite... Changer la valeur du nombre algébrique x revient à numéroter différemment les points A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4, mais cela aboutit toujours aux quatre mêmes constructions des quatre mêmes paires de points $\{N_3\,;\,N_5\}$, $\{N_2\,;\,N_8\}$, $\{N_{10}\,;\,N_{11}\}$ et $\{N_{13}\,;\,N_{16}\}$. Avec une vraie règle et un vrai compas, il est difficile de faire une construction bien précise, mais Géogébra permet de réaliser une construction parfaite.

2 Paradoxe de Banach-Tarski (Tristan)

Résumé et remerciements

Après quelques définitions préliminaires, on va montrer le paradoxe de Banach Tarski, c'est à dire la possibilité de dédoubler une boule si on admet l'axiome du choix. Merci à Nataniel Marquis dont le cours est largement inspiré de celui qu'il à donné à Parimath.

Groupes et action de groupes

Définition 1.
Un ensemble G et une opération $* : G^2 \to G$ (dite opération binaire) forment une paire $(G, *)$ qui est appelée un groupe si :

— $\exists e \in G$ appelé neutre de G tel que $\forall g \in G, g * e = e * g = g$.
— $*$ est associative c'est à dire que $\forall g, h, k \in G$ on a $g * (h * k) = (g * h) * k$.
— $\forall g \in G, \exists g' \in G, g * g' = g' * g = e$. g' est l'inverse de g et on le notera $g' = g^{-1}$.

Exemple 2.
Voici quelques exemples de groupes :
— $(\mathbb{Z}, +)$ de neutre 0 et d'inverse $-z$.
— $(\mathbb{R}^*, \times)$ de neutre 1 et d'inverse $\frac{1}{z}$ (la raison pour laquelle on ne prend pas 0)
— $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ de neutre $\bar{0}$ et d'inverse $\bar{-}z$. Notons que ce groupe est fini.
Les trois groupes précédents sont commutatifs c'est à dire que $g * g' = g' * g$. Ce n'est pas toujours le cas.
— (S_n, $\circ$) où S_n est l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$ de neutre Id et d'inverse σ^{-1} est un groupe non commutatif.

Remarque 3. Un groupe est un structure algébrique, c'est à dire qu'on étudie les objets non pas pour ce qu'ils sont mais pour les relations qu'ils ont entre eux, l'étude très générale des groupes a des applications partout en mathématiques, de l'étude des permutations d'un ensemble ou dans l'étude des isométries d'un espace (c'est dans ce contexte qu'on utilisera les groupes ici).

On définit maintenant une deuxième notion centrale, l'action de groupe qui permet d'étudier comment un groupe d'objets "agit" sur un ensemble donné.

Définition 4.
On se donne $(G, *)$ un groupe et X un ensemble, on dit que $\cdot : G \times X \to X$ est une action de groupe de G sur X si :

— $\forall x \in X, e \cdot x = x$.

— $\forall h, g \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x$.

Exemple 5.
Voici quelques exemples d'actions de groupes :

— $G = X$ et $g \cdot x = g^{-1} * x * g$ est une action de groupe de G sur lui même appelée action de conjugaison.

— $G = X$ et $g \cdot x = g * x$ est une action de groupe de G sur lui même appelée action de translation.

— $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $X = \{(x_1, ..., x_m) | x_i \in \mathbb{Z}\}$ et $k \cdot (x_1, ..., x_m) = (x_{k+1}, ..., x_{k+m})$ (où les indices sont pris $mod m$).

Remarque 6. Disséquons ce dernier exemple pour comprendre le concept, X est l'ensemble des objets qu'on manipule, ici, des $m-$uplet d'entiers. G est l'ensembles des opérateurs agissant sur notre ensemble X. Ici, ce sont les entiers modulo m. Maintenant l'opération $\cdot$ donne un sens à l'action, appliquer k à un cycle revient à le décaler k fois. Finalement, il faut s'assurer que l'action est compatible avec la structure de groupe de G c'est à dire d'une part qu'appliquer le neutre (0 ici) ne fait rien et que si on compose à la suite, cela revient de composer avec la somme. (Ce qui est vrai ici car décaler k fois puis l fois revient à décaler $k + l$ fois).

On définit maintenant des objets qui permettront de décrire comment G agit sur X.

Définition 7.
Soit $(G, *)$ agissant sur X.
Soit $x \in X$ on définit l'orbite de x $Orb(x) = \{g \cdot x | g \in G\}$ et on définir $\sim$ par $x \sim y$ si et seulement si $y \in Orb(x)$.

Proposition 8.
$\sim$ est une relation d'équivalence dont les classes sont les orbites.

Démonstration. Symétrie : Si $x \sim y$ ie. $y \in Orb(x)$ il existe $g \in G, g \cdot x = y$ alors on écrit $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = e \cdot x = x \in Orb(y)$.
Réflexivité : $x \sim x$ car $e \cdot x = x$.
Transitivité : si $x \sim y, y \sim z$ alors il existe $g, g' \in G$ tels que $y = g \cdot x, z = g' \cdot y$ et donc $z = g \cdot (g' \cdot x) = (g * g') \cdot x$ et donc $x \sim z$.

□

Applications linéaires

Définition 9.
On se place dans $\mathbb{R}^3$. On appelle application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ si $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall A, B \in \mathbb{R}$ on a $f(A(x, y, z) + B(x', y', z')) = Af(x, y, z) + Bf(x', y', z')$.

Proposition 10.
Soit f une fonction linéaire et $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Alors f est uniquement déterminée par $f(e_1) = (a,d,g), f(e_2) = (b,e,h), f(e_3) = (c,f,i)$ et on lui attribue de façon unique la matrice $M_f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Proposition 11.
Si f est linéaire alors $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a la relation $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = M_f \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
De plus le produit matriciel est compatible avec la composition des applications linéaires. C'est à dire que pour f, g linéaires on a

$$M_{f \circ g} = M_f \circ M_g$$

Remarque 12. On ne montre pas ces faits, ils sont classiques en algèbre linéaire mais ne sont pas l'objectif de ce cours. Ce qu'il faut retenir c'est une application linéaire est définie par 9 valeurs (l'image des vecteurs de base) et que la matrice rassemblant ces valeurs permet de calculer les images de f par produit matriciel.

Isométries

Définition 13.
On définit la norme euclidenne $||(x,y,z)|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (c'est la distance classique utilisée en physique par exemple). Alors f linéaire est une isométrie linéaire si elle conserve la norme ie. $\forall x, y \in \mathbb{R}^3, ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$. On note $(Iso(\mathbb{R}^3), \circ)$ l'ensembles des isométries linéaires (qui est un groupe, ce qu'on admet). On le notera plus simplement Iso.

Exemple 14.
Iso contient par exemple les translations, les rotations d'axes passant par O.

$G-$équidécomposabilité

On se donne G agissant sur X. Dans la suite c'est Iso qui agira sur $\mathbb{R}^3$.

Définition 15.

- On dit que $A, B \subset X$ sont $G-$ congruents (noté $A \sim_G B$) s'il existe $g \in G$ tel que $g \cdot A = \{g \cdot a | a \in A\} = B$.
- $A, B \subset X$ sont dits $G-$équidécomposables si il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ et $B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$ et avec $A_i \sim_G B_i$.

Proposition 16.
$\sim_G$ définit une relation d'équivalence.

Démonstration. Seule la transitivité peut poser problème, il faut prendre une partition suffisamment fine de B pour la partition de A et celle de C. C'est un bon exercice que d'essayer d'écrire ça proprement, c'est donc laissé au savant lecteur. □

Remarque 17. Essayons de mettre ça en relation avec notre problème. $Iso = G$ contient les isométries, deux parties sont donc $Iso-$ congruentes si il existe une isométrie envoyant l'une sur l'autre. Puis elles sont $Iso-$ décomposables si on peut les couper en n sous parties 2 à 2 congruentes. On va découper notre boule en bouts, les bouger avec des isométries et se retrouver avec deux boules.

Voici un exemple non trivial dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1
Montrer que $[0,1]$ et $[0,1[$ sont $Iso(\mathbb{R})$ équi-décomposables.

Démonstration. On prend $x \in [0, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q}$ et on pose $x_n = \{xn+1\}$. Comme $x \notin \mathbb{Q}$, $n \mapsto x_n$ est injective.
On pose alors $A = \{x_n | x_n + x \in [0,1[\}$ et comme $x \leqslant \frac{1}{2}$. On a $x \in A \Rightarrow x_{n+1} = x_n + x$ et $x \in B = \mathbb{N} - A \Rightarrow x_{n+1} = x_n + x - 1$. Ainsi avec $T_x : y \mapsto x + y$ qui est une isométrie on a $T_x(A) \sqcup (T_x - 1)(B) = A \sqcup B - \{x\}$ puis avec l'identité sur $[0,1] - (A \cup B)$ on a bien l'équidécomposabilité de $[0,1]$ et $[0,1] - \{x\}$. Puis il est clair que $[0,1[$ et $[0,1] - \{x\}$ sont équidécomposables. □

Cantor Bernstein version équidécomposabilité

Définition 18.
$A, B \subset X$ si il existe un $A' \subset A$ tel que $A' \sim_G B$ alors on note $B \leqslant_G A$.

Théorème 19.
Relation d'ordre $\leqslant_G$ est une relation d'ordre.

Démonstration. Réflexivité : $A \leqslant_G A$ car $A = e \cdot A$.
Transitivité : si $A \leqslant_G B \leqslant_G C$ alors si $A \sim_G B, B \sim_G C'$. On écrit alors $B' = \sqcup g_i \cdot A_i, C' = \sqcup h_j \cdot B_j$ alors en notant $A_{i,j} = g_i^{-1}(g_i \cdot A_i \cap B_j) = A_i \cap g_i^{-1}(B_j)$ on a $\sqcup_{(i,j)}(g_i * h_j) \cdot A_{i,j} \subset C$. □

Il reste donc l'antisymétrie. Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 20.
$A \leqslant_G B$ si et seulement si il existe $f : A \to B$ injective telle que $\forall A' \subset A$ on ait $A' \sim_G f(A')$.

Démonstration. On définit $f_{|A_i} = g_i \cdot$.
Sens direct : $g_i \cdot$ est injectif car $g_i \cdot x = g_i \cdot y$ implique $g_i^{-1} \cdot (g_i \cdot x) = g_i^{-1} \cdot (g_i \cdot y) = x = y$. De plus, les images étant disjointes, f est globalement injective puis on écrit

$$A' = \bigsqcup A_i \cap A'$$

et

$$f(A) = \bigsqcup g_i \cdot (A_i \cap A')$$

Sens réciproque : $A \sim_G f(A) \subset B$. □

On utilisera aussi le

Lemme 21.
Si $A_1 \sim_G B_1$ et $A_2 \sim_G B_2$ et $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ alors $A_1 \sqcup A_2 \sim_G B_1 \sqcup B_2$

Démonstration. Preuve facile laissée au lecteur sérieux. □
Démonstration. Revenons à Cantor Bernstein, on a $A \leqslant_G B$ d'où $A \sim_G B'$ et $B \leqslant_G A$ d'où $B \sim_G A'$.
On utilise le lemme 16 et on se donne des bijections $f : A \to B'$ ainsi que $g : B \to A'$ et on a alors $g(f(A)) = g(B') \subset g(B) \subset A$.
On veut montrer que $A' = g(B') \sim_G A$ car $g(B) \sim_G B$.
On définit donc $A_0 = A, D_0 = g(B)$ et par récurrence $A_{n+1} = (g \circ f)(A_n)$ et $D_{n+1} = (g \circ f)(D_n)$.
On définit alors $C_n = A_n - D_n$ et $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ et finalement $E = A - C$.
Par récurrence rapide et croissance de $g \circ f$ on a $A_{n+1} \subset D_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(g \circ f)(C) = \cup_{n\geqslant 1} C_n$ on a par le lemme 16 $f(C) \sim_G C$ d'une part et $(g \circ f)(C) \sim_G f(C)$ et donc par transitivité $(g \circ f)(C) \sim_G C$. Et donc $C \sim_G \cup_{n\geqslant 1} C_n$ puis comme $E \sim_G E$, le lemme 17 permet d'écrire $C \sqcup E \sim_G (\cup_{n\geqslant 1} C_n) \sqcup E$ soit encore $A \sim_G A - C_0 = g(B) \sim_G B$.
□

Paradoxalité d'un ensemble

Définition 22.
X est dit $G-$ paradoxal si il existe $A, B \subset X$ avec $A, B \neq X$ et $A \sqcup B = X (**)$ et tels que $A \sim_G X$ et $B \sim_G X$.

Remarque 23. On peut se passer de $(**)$ et remplacer par $A \sqcup B \subset X$ car si $X \times \{0, 1\} = X \sqcup X \sim_G A \sqcup B \leqslant_G X$, comme $X \leqslant_G X \sqcup X$ on a par Cantor Bernstein $X \sim_G X \sqcup X$.
Ici, on a deux copies de X disjointes, il est plus facile de considérer $X \times \{0, 1\}$.
On se rapproche de ce qu'on veut, peut on partitionner une boule en deux parties qu'on peut transformer avec des éléments de Iso en deux copies conformes d la boule initiale ?

Voici un exemple illustrant cette notion.

Exercice 2
Un groupe fini n'est pas paradoxal pour son action de translation.

Démonstration. Si $A \sim_G B$ et A, B sont finis alors $|A| = |B|$. Cela découle de l'injectivité de la translation, en outre, $|g_i \cdot A| = |A|$. Ici, on aurait alors $|X| = 2|X|$. □

Remarque 24. Ce qu'il se passe ici est que pour les ensembles finis on a une notion décrivant correctement la taille des ensembles (le cardinal), un groupe paradoxal ici doit donc doubler son cardinal, ce qui est absurde. Pour les ensembles infinis, c'est plus compliqué ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ ont même cardinal). On pourrait alors chercher à remplacer le cardinal par une notion de volume (c'est ce qui rend paradoxal le dédoublement de la boule) mais cette notion est très difficile à définir correctement.

Axiome du choix

Le paradoxe de Banach-Tarski est une illustration de comment accepter l'axiome du choix peut poser des problème, cet axiome s'énonce comme ce qui suit :

Axiome 25.
On se donne $(X_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ensembles non vides, alors il existe une fonction $f : I \to \cup_i X_i$ dite fonction de choix telle que $\forall i \in I, f(i) \in X_i$.

Remarque 26. Globalement, cela signifie que si vous avez un ensemble quelconque de tiroirs contenant des chaussettes et qu'ils sont tous non vides, alors vous pouvez choisir une chaussette dans chaque tiroir.

Cela permet de montrer la proposition suivante :

Théorème 27.
Action libre
Si G est paradoxal pour son action de translation et agit sur X de manière libre, c'est à dire que $\forall g \neq e, \forall x \in X, g \cdot x \neq x$, alors X est $G-$ paradoxal.

Démonstration. Par axiome du choix, on se donne $S \subset X$ tel que $\forall x \in X, |Orb(x) \cup S| = 1$ (on se donne un représentant de chaque orbite).
Alors on peut écrire $X = \bigsqcup_{g\in G} g \cdot S$. En effet on a $g_1 \cdot s_1 = g_2 \cdot s_2$ implique $s_2 \in Orb(s_1)$ et donc $s_1 = s_2$ puis comme l'action est libre, $(g_2^{-1} * g_1) \cdot s_1 = s_1$ implique $g_1 = g_2$. Ce qui montre que l'union est disjointe.
G est paradoxal donc on peut écrire $G = (\sqcup^n G_i) \sqcup (\sqcup^m H_j)$ où $G = \sqcup^n g_i * G_i = \sqcup^m h_j * H_j$.
Mais maintenant, $X = (\sqcup_i G_i \cdot S) \sqcup (\sqcup_j H_j \cdot S)$. Mais on remarque alors que $\sqcup_i g_i \cdot (G_i \cdot S) = (\sqcup_i g_i * G_i) \cdot S = G \cdot S = X$ et de même on a $\sqcup_i h_i \cdot (H_i \cdot S) = (\sqcup_i h_i * H_i) \cdot S = H \cdot S = X$ ce qui conclut. □

Groupe libre à deux éléments

Définition 28.
On définit le groupe libre à deux éléments $\mathbb{F}_2$ comme l'ensemble des suites finies à valeurs dans $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ quotienté par "j'enlève ou j'ajoute $aa^{-1}, bb^{-1}, a^{-1}a, b^{-1}b$".

Remarque 29. Cela revient à dire qu'on peut simplifier les facteurs $a^{-1}a$ et les autres. Ainsi, on considère que $a^{-1}ab = b$, il est donc préférable de considérer des formes réduites c'est à dire où il n'existe aucun facteur de la forme $aa^{-1}, bb^{-1}, a^{-1}a, b^{-1}b$. On a le fait remarquable suivant.

Théorème 30.
unicité de la forme réduite
Tout mot est égal à un unique mot réduit.

Démonstration. On va admettre ce résultat non trivial. □

On va montrer que $\mathbb{F}_2$ est paradoxal.

Théorème 31.
$\mathbb{F}_2$
$\mathbb{F}_2$ est paradoxal pour son action de translation.

Démonstration. On sépare $\mathbb{F}_2$ en trois groupes selon la forme du mot réduit :

— ceux commençant par a ou a^{-1}

— le mot vide ou les mots qui commencent par un b ou qui sont de la forme $b^{-n}, n \geqslant 0$

— le reste

Puis on applique les transformations suivantes : $Id : (a...) \mapsto (a...)$, $a* : (a^{-1}...) \mapsto (a^{-1}...) \cup (b...) \cup (b^{-1}...) \cup (\emptyset)$ (ici on utilise que le mot est réduit) ainsi que $Id : (b^{-k}a...) \cup (b^{-l}a^{-1}...) \mapsto (b^{-k}a...) \cup (b^{-l}a^{-1}...)$ (ici c'est l'ensemble des mots qui commencent par un certain nombre de b^{-1} mais qui ne sont pas de la forme b^{-n}) et finalement $b^{-1}* : (\emptyset) \cup (b...) \cup (b^{-n}) \mapsto (a...) \cup (a^{-1}...) \cup (b...) \cup (b^{-n}) \cup (\emptyset)$.
Les deux premiers ensembles donnent une copie de $\mathbb{F}_2$ et les deux derniers aussi donc $\mathbb{F}_2$ est paradoxal.

□

Les deux propriétés suivantes vont mettre en lien Iso et $\mathbb{F}_2$

Proposition 32.
Si H est un sous groupe de G et est paradoxal, c'est aussi le cas de G.

Démonstration. L'action (pour la translation) de H sur G est libre, c'est donc une application du théorème 25. □

Proposition 33.
Il existe un sous groupe de Iso isomorphe à $\mathbb{F}_2$.

Remarque 34. Ainsi, on pourra utiliser la paradoxalité de $\mathbb{F}_2$ pour étudier celle de Iso.

Démonstration. Il n'est pas nécéssaire de comprendre la preuve de ce résultat, on peut donc la sauter en prmière lecture ou si on est pas à l'aise avec les matrices.
On note $\Delta = \mathbb{R}(0,0,1)$ et ψ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autours de Δ. On identifie les rotations et leurs matrices dans la base canonique $\psi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et on note $\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a $\phi^2 = Id = \psi^3$. On note $\eta = \psi^{k_1}\phi\psi^{k_2}\phi...\psi^{k_n}\phi(***)$ où $k_i = \pm 1$. (On a utilisé que par conjugaison, on peut se ramener à un combinaison commençant par ψ).
Montrons que $\eta \neq Id$. On écrit par récurrence que

$$\eta = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2m_{11} & (2m_{12}+1)\sqrt{3} & 1+2m_{13} \\ 2m_{21}\sqrt{3} & 1+2m_{22} & (1+2m_{23})\sqrt{3} \\ 2m_{31} & 2m_{32}\sqrt{3} & 2m_{33} \end{pmatrix}$$

avec $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ et donc comme $2m_{13}+1 \neq 0$ on a $\eta \neq Id$.
Il suffit alors d'écrire que $\mathbb{F}_2 \cong \langle \psi\phi\psi, \phi(\psi\phi\psi)\phi \rangle$. L'idée est la suivante, on a l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{\phi, \psi, \phi^{-1}, \psi^{-1}\}$ et on veut que les formes réduites soient deux à deux distinctes. Avec ce qu'on a montré plus haut c'est bon car si deux mots sont égaux alors ils ont la même suite.
On pose donc $\gamma = \psi\phi\psi$ et $\delta = \phi(\psi\phi\psi)\phi$. On a les relations $\gamma^{-1} = \psi^{-1}\phi^{-1}\psi^{-1}$ ainsi que $\delta^{-1} = \phi^{-1}(\psi^{-1}\phi^{-1}\psi^{-1})\phi^{-1}$ et $\gamma^n = \psi\phi\psi...\phi\psi$ et $\delta^n = \phi\gamma^n\phi$. Bref, un mot a sa forme réduite de la forme $(***)$. Par la suite, $\mathbb{F}_2$ sera vu dans Iso.

□

Haussdorf

Théorème 35.
Haussdorf

On note $S = S(0,1)$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. alors il existe $D \subset S$ dénombrable tel que $S - D$ est paradoxal.

Démonstration. $\mathbb{F}_2$ est dénombrable et chaque élément de $\mathbb{F}_2$ a un nombre fini de point fixes sur S (**). Ainsi, on a $\{x | \exists g \in \mathbb{F}_2 - \{Id\}, g \cdot x = x\} = D$ est dénombrable (comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables) et donc $S - D$ est $\mathbb{F}_2$ paradoxal donc il est $Iso-$ paradoxal.
(**) L'ensemble des points fixes d'une isométrie vectorielle est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, si c'est $\mathbb{R}^3$ alors c'est l'identité, si c'est une droite passant par l'origine, il y a deux points fixes sur S si c'est un plan P passant par O alors on se donne un point M n'appartenant pas à P. Les distances de M aux points de P sont conservées donc M est envoyé soit sur M soit sur M' son symétrique par rapport à P. En fait g est soit l'identité soit la symétrie par rapport à P. C'est une vérification sans interêt qu'on va passer. Il reste à montrer que $\mathbb{F}_2$ ne contient pas de symétrie par rapport à un plan. Une façon de le voir est remarquer qu'une symétrie par rapport à un plan a une matrice de déterminant -1 or $det(\psi) = det(\phi) = 1$ donc les éléments de $\mathbb{F}_2$ ont un déterminant égal à 1. (Il n'est pas essentiel d'avoir compris ce point de la preuve).

□

Banach-Tarski

On montre enfin le résultat central de l'exposé :

Théorème 36.
Petit Banach-Tarski

S est Iso-paradoxale.

Démonstration. On montre en fait que S et $S - D$ sont Iso équidécomposables. (Car on vient de montrer que $S - D$ est $Iso-$ paradoxale).
On se donne Δ une droite passant par O telle que $\Delta \cap D = \emptyset$ (possible car D dénombrable) et puis on choisit θ tel que $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}^*, R^{\circ n}_{\theta,\Delta}(x) \notin D$ où $R_{\theta,\Delta}$ est la rotation d'angle θ autours de Δ. Cela est possible car il suffit que $\theta \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} \cup_{x\in D} \{\nu | R^{\circ n}_{\nu,\Delta}(x) = y\}$ qui est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
Bref, on pose alors $\bar{D} = \sqcup_{n\geqslant 0} R^{\circ n}_{\theta,\Delta}(D)$ et donc $R_\theta(\bar{D}) = \bar{D} - D$. Ce qui conclut.

□

On termine enfin par le

Théorème 37.
Banach-Tarski

$B(0,1)$ la boule unité ouverte est $Iso-$ paradoxale.

Démonstration. Pour tout $0 < r < 1$ on se donne par le théorème précédent $A_r \sqcup B_r = S(0,r)$ avec $A_r \sim_G S(0,r)$ et $B_r \sim_G S(0,R)$ (on prend l'image par une homothétie de centre O et de

rapport r de A_1 donné pour S) et avec $A = \sqcup_{0<r<1} A_r$ et $B = \sqcup_{0<r<1} B_r$ on a $B(0,1) - \{0\}$ $Iso-$ paradoxal. Il ne reste plus qu'à montrer que $B(0,1)$ et $B(0,1) - \{0\}$ sont équidécomposables. On peut reprendre la preuve précédente en remplaçant S par $B(0,1)$ et D par $\{0\}$. □

Remarque 38. On vient donc de dupliquer la boule unité! On se rend compte que l'on a pas besoin d'avoir une boule, avec tout ce qu'on a fait jusqu'à présent on peut déduire le théorème suivant plus général.

Théorème 39.
Banach-Tarski 2 $U, V \subset \mathbb{R}^3$ bornés d'intérieurs non vides (i.e. qui contiennent au moins une boule non triviale). Alors U, V sont $Iso-$ décomposables.

Démonstration. Par Cantor-Bernstein, il suffit de montrer que $U \leqslant_G V$. Les intérieurs étant non vides on se donne $r > 0, a, \epsilon > 0$ tels que $B(a,\epsilon) \subset V$ et $U \subset B(0,r)$ (bornitude). Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on puisse recouvrir $B(0,,r)$ de translatés de $B(a,\epsilon)$ et alors on a

$$B(0,r) \leqslant_G \sqcup_{i=1}^{n} B(a,\epsilon) \sim_G B(a,\epsilon) \subset V$$

et donc

$$U \leqslant_G V$$

□

VII. Groupe E

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre et Arithmétique

1 Arithmétique (Vincent)

À venir…

2 Combinatoire (Omid)

À venir…

2 Entraînement de mi-parcours

À venir…

3 Deuxième partie : Combinatoire et Géométrie

1 Géométrie barycentrique (Martin)

Ce cours fait partie d'un polycopié de géométrie analytique plus complet qui sera bientôt publié sur le site de la POFM.

2 Algèbre (Félix)

À venir…

3 Géométrie (Baptiste)

À venir…

4 Entraînement de fin de parcours

À venir…

VIII. Les soirées

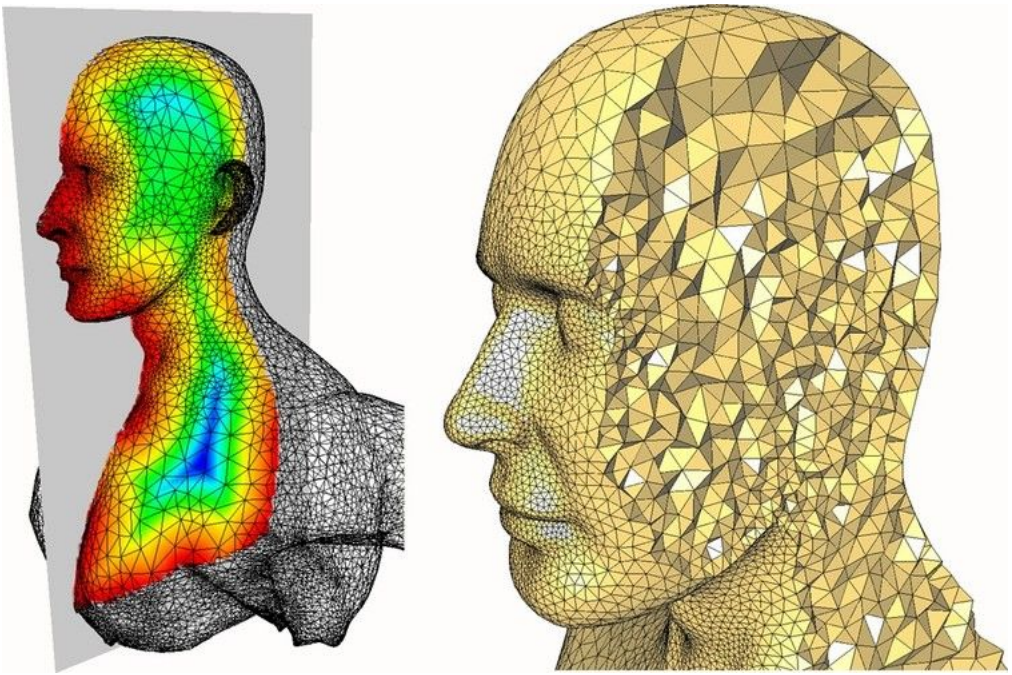
1 Présentation de la POFM (Vincent Jugé, 17/08)

Comme de tradition, la première conférence présente les nombreuses actions de l'association Animath, destinées à faire découvrir les mathématiques sous différents aspects aux élèves du secondaire. Vincent Jugé a ainsi pu répertorier les différentes compétitions auxquelles la France a participé cette année, et les élèves ont eu un premier aperçu de son humour si ravageur !

Après la présentation des animatheurs et du stage, la remise des prix de la Coupe Animath de Printemps et la conférence de Vincent, les élèves ont reçu leur T-shirt du stage, collection été 2020. Cette année, le orange est à l'honneur !

2 À quoi servent les triangulations ? (Pooran, 18/08)

Que ce que c'est qu'une triangulation ? À quoi ça sert ? Cet exposé est un petit voyage au monde « discret » des triangulations. À travers quelques paysages mathématiques, nous avons vu comment des éléments aussi simples que les triangles peuvent nous permettre de construire tout un univers puissant mais discret qui est caché sous les couleurs des films d'animation et la plupart des simulations tridimensionnelles (3D) de nos jours.
Nous avons pu découvrir le problème de la galerie d'art, et apprécier la finesse de certains résultats de coloriage de graphes planaires !



3 Comment gagner à tous les coups ? (Colin, 19/08)

Durant la conférence, nous avons étudié quelques résultats de la jolie théorie des jeux combinatoires impartiaux. Les principales notions présentées lors de la conférence se trouvent sur internet, par exemple en français sur https://www.ceremade.dauphine.fr/~vigeral/Memoire2016Lehuger.pdf et en anglais sur http://web.mit.edu/sp.268/www/nim.pdf. Voici quelques éléments et images de la présentation.

Jeu de Fort Boyard :

8 allumettes sont posées. Jouer un coup consiste à en retirer 1, 2 ou 3. Celui qui prend la dernière allumette gagne.

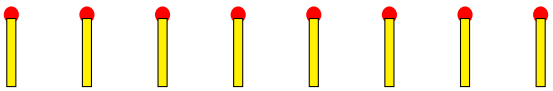


Illustration du jeu de Fort Boyard avec $n = 8$.

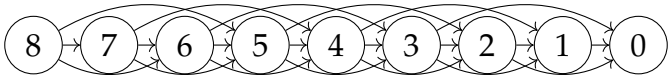


Illustration des configurations et des coups du jeu de Fort Boyard avec $n = 8$.

Jeu de Wythoff

Un dame est posée sur une grille $n \times n$. Un coup consiste à la déplacer en diagonale vers le coin, ou vers la droite ou vers le bas d'autant de cases que l'on souhaite. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

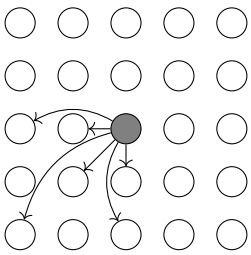


Illustration des configurations du jeu de Wythoff avec $n = 5$ ainsi que de tous les coups partant d'une configuration.

Définition 1.
Une *Stratégie gagnante* est une stratégie qui permet de gagner au jeu quels que soient les coups joués par l'adversaire.

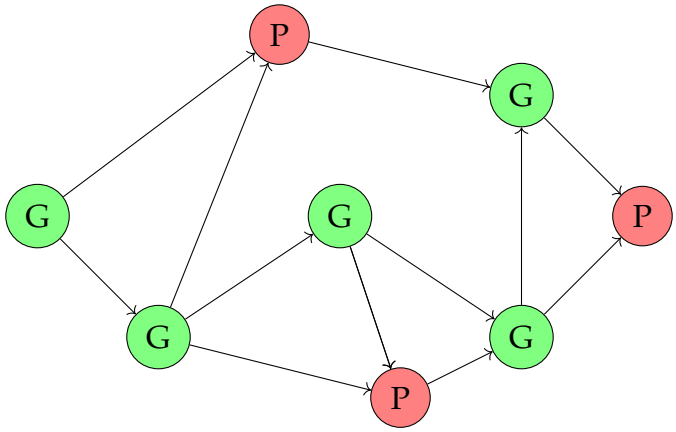
Une *configuration gagnante* est une configuration telle que le joueur qui commence à jouer à partir de cette configuration dispose d'une stratégie gagnante.

Une *configuration perdante* est une configuration telle que le joueur qui ne commence pas à jouer à partir de cette configuration dispose d'une stratégie gagnante.

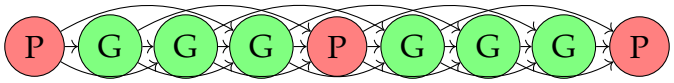
Théorème de Zermelo (Cas particulier) :

Pour tout jeu combinatoire impartial fini, toute configuration est gagnante ou perdante.

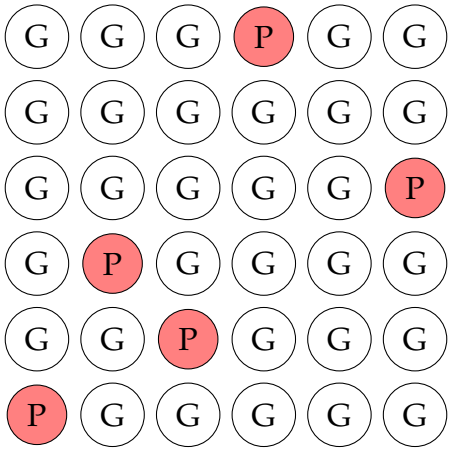
Stratégie gagnante : algorithme pour déterminer les configurations gagnantes.



Premier exemple : Fort Boyard.

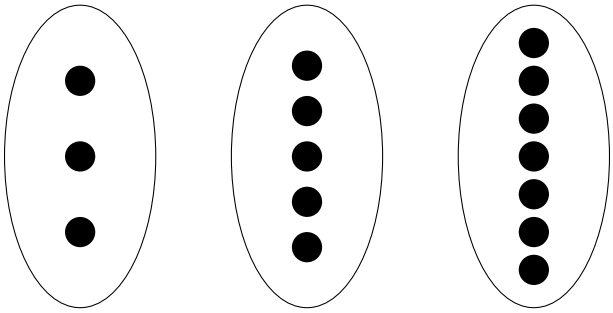


Deuxième exemple : Jeu de Whytoff.



Le jeu de Nim.

Plusieurs tas de pierres sont disposés sur la table, un coup consiste à prendre autant de pierres que l'on souhaite dans un seul tas. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.



Nombre de Grundy du jeu de Wythoff

5	3	4	0	6	8
4	5	3	2	7	6
3	4	5	6	2	0
2	0	1	5	3	4
1	2	0	4	5	3
0	1	2	3	4	5

Une somme de jeux.

6	3	4	0	6	8
4	5	3	2	7	6
3	4	5	6	2	0
2	0	1	5	3	4
1	2	0	4	5	3
0	1	2	3	4	5

2	1	0	3	2	1	0

4 La théorie des nombres dans la vie courante (Phong Nguyen, 22/08)

À venir…

5 Propagation d'une épidémie (Victor, 23/08)

À venir…

IX. La Muraille

Comme chaque année, une muraille d'exercice a été installée dans le couloir, et les stagiaires ont pu exercer leur sagacité en résolvant des exercices olympiques plus ou moins complexes.

Un prix est remis aux élèves ayant résolu le plus d'exercices.

Énoncés

Instructions

Les exercices 1 à 42 sont dits de Niveau 1.
Les exercices 43 à 96 sont dits de Niveau 2.
Les exercices au-delà de 97 sont dits de de Niveau 3.
Un exercice est décoré de n étoiles lorsqu'il est resté sans solution à la muraille de n stages.
Les élèves du groupe A cherchent les exercices de Niveau 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe B cherchent les exercices de Niveau 2 et les exercices étoilés de niveau Niveau 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe C cherchent les exercices de Niveau 3 et les exercices étoilés de niveau Niveau 2 (ou au-dessus). Les élèves du groupe D cherchent les exercices de Niveau 3 (mais pas au-dessus, vu qu'il n'y en a pas).
- Une fois un exercice résolu, la solution doit être rédigée et donnée à une animatrice ou un animateur. Le nom de la personne ayant résolu un exercice sera écrit dans le polycopié.
- Il est possible de résoudre les exercices à plusieurs, le but est d'avoir tout résolu à la fin du stage !

Les prix de la muraille

À la fin du stage, quatre Grand Prix Mystère seront décernés aux quatre élèves ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille dans chacun des quatre groupes A, B, C, D.
À la fin du stage, un autre Grand Prix Mystère sera décerné à l'équipe (constituée d'au moins deux élèves et d'au plus quatre élèves) ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille.

Barème : Un exercice à x étoiles résolu rapporte $x + 1$ points (sauf pour les élèves du groupe B qui résolvent des exercices étoilés de Niveau 1 et les élèves du groupe C qui résolvent des exercices étoilés de Niveau 2, pour lesquels un exercice à x étoiles rapporte x points). Dans une équipe, on prend en compte le groupe de l'élève le plus avancé.

Exercice 1
Si, en étant à jeun au départ, le loup mange 3 cochons et 7 lièvres, il a encore faim après. Si en revanche, en étant à jeun, il mange 7 cochons et 1 lièvre, alors il a mal au ventre parce qu'il a trop mangé. Que se passe-t-il s'il mange 11 lièvres ?

Exercice 2
On écrit les fractions $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{n-1}{n}$ au tableau. On s'autorise à "*retourner*" certaines fractions, *retourner* une fraction consiste à remplacer $\frac{a}{b}$ par $\frac{b}{a}$. Trouver les n tels qu'on puisse *retourner* certaines fractions de sorte à ce que le produit des nombres au tableau soit 1.

Exercice 3
Soit ABC un triangle équilatéral et P un point à l'intérieur de ce triangle. Soient D, E et F les pieds des perpendiculaires de P sur $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer que :

1. $AF + BD + CE = AE + BF + CD$ et que
2. $|APF| + |BPD| + |CPE| = |APE| + |BPF| + |CPD|$,

où $|XYZ|$ désigne l'aire du triangle XYZ.

Exercice 4
Déterminer le plus petit entier $k \geqslant 2$ vérifiant la propriété suivante. Pour toute partition de l'ensemble $\{2, 3, \ldots, k\}$ en deux parties, l'une des deux au moins, possède trois nombres a, b, c, pas nécessairement distincts, pour lesquels $ab = c$.

Exercice 5
Yvan et Zoé jouent au jeu suivant. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les entiers de 1 à n sont écrits sur n cartes alignées dans l'ordre. Yvan en retire une. Zoé en retire ensuite 2 consécutives. Puis Yvan en retire 3 consécutives et Zoé termine en en retirant 4 consécutives.

Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle Zoé peut s'assurer de pouvoir jouer ses deux tours ?

Exercice 6
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $3^{6n} - 2^{6n}$ est divisible par 35.

Exercice 7
Soit $[EF]$ un segment inclus dans le segment $[BC]$ tel que le demi-cercle de diamètre $[EF]$ est tangent à $[AB]$ en Q et à $[AC]$ en P.

Prouver que le point d'intersection K des droites (EP) et (FQ) appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

Exercice 8
On considère un nombre fini de segments sur la droite réelle tels que, quels que soient deux de ces segments, ils aient un point commun.

Montrer qu'il existe un point appartenant à tous ces segments.

Exercice 9
On a un polyèdre convexe, dont les faces sont des triangles. Les sommets du polyèdre sont coloriés avec trois couleurs.

Montrer que le nombre de triangles dont les sommets ont trois couleurs distinctes est pair.

Exercice 10
Trouver tous les triplets d'entiers naturels $\{x, y, z\}$ pour lesquels :

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

Exercice 11
Trouver tous les entiers $x, y \geqslant 0$ tels que :

$$xy = x + y + 3$$

Exercice 12
Combien y a-t-il d'entiers positifs n tels que

$$\frac{n^{2016}}{n - 2016}$$

soit un nombre entier ?

Exercice 13
Soit n un entier naturel. On souhaite choisir n entiers du tableau ci-dessous en en prenant exactement 1 par ligne et 1 par colonne.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

Déterminer la valeur maximale du produit de ces n nombres.

Exercice 14
Six cercles sont concourrants en un même point.

Montrer que l'un de ces cercles contient le centre d'un autre.

Exercice 15
Montrer que tous les termes de la suite (a_n) définie par

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1 + a_{n-1}a_n}{a_{n-2}} \end{cases}$$

sont des entiers.

Exercice 16
Soixante-dix employés travaillent pour une entreprise internationale. Si X et Y sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par X et non parlée par Y, et une langue parlée par Y mais pas par X.

Quel est le nombre minimum total de langues parlées par les employés ?

Exercice 17
Chaque sous-ensemble à k éléments de $\{1, 2, \dots n\}$ possède un plus petit élément. Calculer la moyenne de ces plus petits éléments.

Exercice 18
Soit ABC un triangle isocèle en A et D le pied de la bissectrice intérieure issue de B. On suppose que $BC = AD + DB$. Combien vaut $\widehat{BAC}$?

Exercice 19
On considère 4 cercles concentriques du plan. On suppose que leur rayons forment une progression arithmétique strictement croissante.

Montrer qu'il est impossible d'avoir un carré dont chacun des 4 sommets appartient à un cercle différent.

Exercice 20
Trouver toutes les paires d'entiers naturels (a, b) telles que :

$$ab + 2 = a^3 + 2b$$

Exercice 21
Trouver tous les nombres premiers distincts p, q, r tels que :

$$\begin{aligned} p|qr - 1 \\ q|pr - 1 \\ r|pq - 1 \end{aligned}$$

Exercice 22
On inscrit 100 entiers sur un cercle. Leur somme vaut 1. On appelle séquence positive une suite de nombres consécutifs sur le cercle telle que leur somme soit strictement positive. Combien y a-t-il de séquences positives sur le cercle ?

Exercice 23
Trouver la valeur minimale de l'expression S suivante :

$$S = \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2 + 3}$$

Avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 24
Soit $n > 0$ un entier. On considère un entier $A = 44\ldots4$ constitué de $2n$ chiffres, et un entier $B = 88\ldots8$ constitué de n chiffres.

Prouver que l'entier $A + 2B + 4$ est un carré parfait.

Exercice 25
Soit $ABCD, ECGF$ deux carrés tels que B, C, G sont alignés et A, D, E, F sont du même côté de la droite (BC). Soit M l'autre point d'intersection des cercles circonscrits à $ABCD$ et à $ECGF$.

Donner une autre construction du point M, n'utilisant qu'une règle non graduée.

Exercice 26
Trouver tous les nombres premiers p pour lesquels il existe des entiers naturels x et y tels que :

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$$

Exercice 27
Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice part du nombre 2 et les joueurs jouent chacun leur tour. A chaque tour, en notant n le nombre atteint par le joueur précédent, on ajoute un nombre m tel que m divise n, $m \neq n$, et $m + n \leqslant 2016$. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Quel joueur peut s'assurer la victoire ?

Exercice 28
Soit n un entier strictement positif. On dit qu'un sous ensemble A de $\{1, 2, ..., n\}$ est "*fade*" si pour tout x, y dans A, $x + y$ n'est pas dans A. Selon la valeur de n, quel est le cardinal du plus grand ensemble *fade* ?

Exercice 29
Soient $x, y > 0$, et soit $s = min(x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

Quelle est la valeur maximale possible de s ?
Pour quels x, y est-elle atteinte ?

Exercice 30
Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs impairs (au sens de termes consécutifs dans la suite ordonnée des nombres premiers) est le produit d'au moins trois nombres premiers (pas forcément distincts).

Exercice 31
Soit ABC un triangle isocèle en B, puis F un point sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$ tel que (AF) soit parallèle à (BC). Enfin, soit E le milieu de $[BC]$, et soit D le symétrique de A par rapport à F. Calculer le rapport des distances EF/BD.

Exercice 32
Montrer que parmi 10 entiers consécutifs, il y en a toujours 1 premier avec tous les autres.

Exercice 33
Quelle est la plus grande valeur que peut prendre le produit d'entiers strictement positifs de somme n ?

Exercice 34
Si tous les points du plan sont colorés soit en rouge, soit en orange soit en violet, peut-on toujours trouver deux points de même couleur éloignés d'un centimètre exactement ?

Exercice 35
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que pour tout $i \neq j \geq 1$ entiers on ait :

$$pgcd(a_i, a_j) = pgcd(i, j)$$

Montrer que $a_i = i$ pour tout $i \geq 1$.

Exercice 36
Soit ABC un triangle, I le centre du cercle inscrit dans ABC, D le pied de la hauteur de ABI issue de B, et E le pied de la hauteur de BCI issue de B. Montrer que $AB = BC$ si et seulement si $BD = BE$.

Exercice 37
Quarante et une équipes s'affrontent à *l'open de pétanque du stage de Valbonne*. Chaque équipe affronte successivement chaque autre lors de différents *matchs* (en 13 points, comme il se doit). Chaque match se conclut par une victoire pour une équipe, et une défaite pour l'autre, il n'y a pas de match nul.

Lors de la proclamation des résultats, Mathieu affirme : « *Difficile de dire quelle équipe a gagné. Non seulement chaque équipe a au moins perdu un match, mais pire, à chaque fois que l'on choisit deux équipes, on peut trouver une troisième équipe qui a battu chacune des deux premières équipes.* »
Est-ce possible, autrement dit, un tel tournoi existe-t-il ?

Exercice 38
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$ pour tout $n \geq 0$.

• Montrer que a_n est irrationel pour tout $n \geq 1$.

• La limite de (a_n) est-elle irrationnelle (si elle existe) ?

Exercice 39
Soit ABC un triangle actuangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe BC en D et le cercle circonscrit à ABC en E. La tangente au cercle circonscrit à ABC en B coupe AD en F. On suppose que $AD^2 = 2CD^2$. Montrer que E est le milieu de $[AF]$.

Exercice 40
On donne un nombre n plus grand que 10^{2018}. Quel est le premier chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de la racine carrée de $(n^2 + n + 200)$?

Exercice 41
Mathieu joue au billard sur un billard rectangulaire de 2,03 m sur 3,03 m. Sa boule, de 6 cm

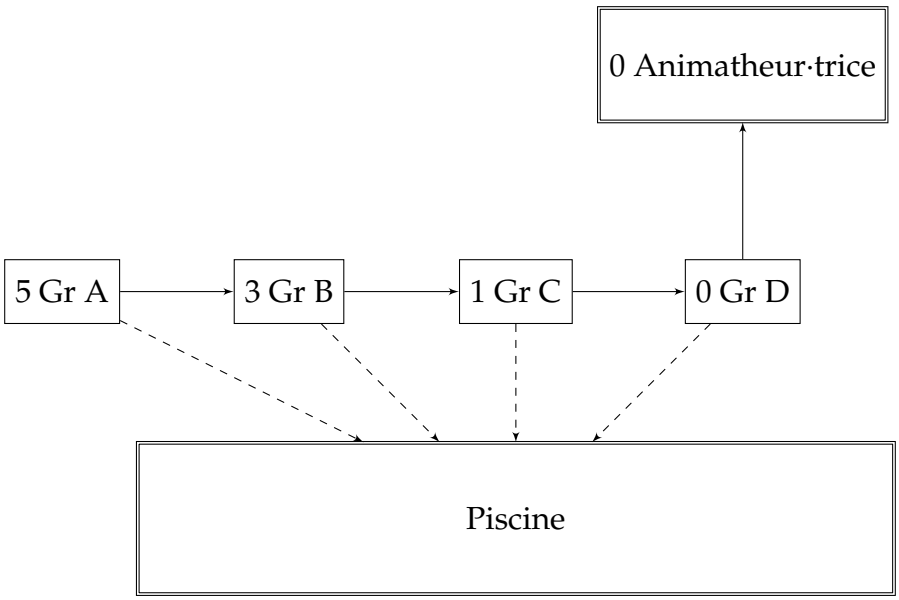
de diamètre, est placée au milieu d'un grand côté du billard et Mathieu la fait rouler, sans effet, selon un angle de 45 degré par rapport au côté du billard. En supposant que Mathieu lui ait donné suffisamment de force, à quelle distance du point de départ le centre de la boule sera-t-il au moment du 59e rebond ?

Exercice 42
Dans le stage de Valbonne, il y a initialement 5 élèves dans le groupe A, 3 dans le groupe B, 1 dans le groupe C, aucun·e dans le groupe D, et aucun·e animatheur·rice.

Chaque jour, un certain nombre d'élèves sont promus dans le groupe suivant, alors que d'autres choisissent d'aller se baigner à la piscine jusqu'à la fin du stage, et de quitter leur groupe. Si un·e élève du groupe D est promu·e, il ou elle devient animateur·rice, autrement dit le graal !

Plus précisément, chaque jour Raphaël, le directeur de stage, va séparer l'ensemble des élèves en deux parties. Les élèves d'une de ces deux parties seront promus, alors que les élèves de l'autre partie iront se baigner jusqu'à la fin du stage.
Ce sont les élèves, et pas Raphaël, qui choisissent quel groupe va se baigner et quel groupe est promu.

Raphaël peut-il toujours faire en sorte qu'il y ait au moins un·e animatheur·rice avant la fin du stage ?



Exercice 43
On fixe n un entier pair. Étant donné un sous-ensemble S des entiers $\{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$, on va définir $D(S)$ l'ensemble des différences d'éléments de S, prises modulo n et regardées avec leurs multiplicité. Par exemple, si $n = 6$, et $S = \{1, 2, 5\}$, alors $D(S) = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5\}$.

On note $\overline{S} = \{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\} \backslash S$ le complémentaire de S.
Montrer que si S a exactement $\frac{n}{2}$ éléments, alors $D(S) = D(\overline{S})$.

Exercice 44
Soit q un entier strictement positif et P un polynôme à coefficients entiers. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $P(1) + \cdots + P(n)$ soit divisible par q.

Exercice 45
Pour quels entiers $n \geqslant 1$ existe-t-il une bijection

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

de sorte que $|\sigma(i) - i| \neq |\sigma(j) - j|$ si $i \neq j$?

Exercice 46
Martin et Savinien jouent à un jeu : une droite est tracée dans le plan. Martin choisit une caractéristique parmi "médiatrice", "médiane", "hauteur", "bissectrice intérieure". Savinien trace ensuite une deuxième droite coupant la première en un point P. Martin trace alors une troisième droite sécante aux deux autres en P. Si Savinien parvient à dessiner un triangle dont les trois droites remarquables à la caractéristique choisie sont les trois droites dessinées, il gagne. Sinon c'est Martin qui l'emporte. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 47
Quel est l'entier n minimal tel que, si on place n points sur le réseau hexagonal, il existe forcément deux de ces points dont le milieu est sur le réseau hexagonal ?

Exercice 48
Soit n un entier strictement positif, on définit $S_n := \sum_{k=1}^{n-1} (k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$.
Montrer que $5S_n + n$ est un carré parfait si et seulement si n est un carré parfait.

Exercice 49
Soit P un point de l'espace et $r > 0$. Montrer qu'il existe 8 sphères disjointes de même rayon r qui cachent le point P, c'est-à-dire que toute demi-droite issue de P rencontre au moins l'une des sphères. On supposera que les centres des sphères sont tous à des distances $> r$ de P.

Exercice 50
Parmi les quadrilatères de côtés a,b,c,d caractériser géométriquement celui qui a la plus grande aire.

Exercice 51
Montrer que la somme $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ n'est jamais un entier si $n > 1$.

Exercice 52
Soit $n \geq 1$ un entier. Une suite $a_1, a_2, ..., a_n$ d'entiers est dite "*élégante*" si elle respecte les deux conditions suivantes :

• $a_i = 1$ ou $a_i = 0$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$

• Il n'existe aucune sous suite de (a_n) se répétant trois fois consécutivement. Par exemple (a_n) ne peut pas contenir les nombres $1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1$ consécutivement puisque la sous-suite $(1, 0, 1)$ est répétée trois fois consécutivement.

Montrer qu'il existe des suite *élégantes* de taille arbitrairement grande.

Exercice 53
Soit ABC un triangle, l une droite et L, M, N les pieds des perpendiculaires à l passant par A, B, C respectivement. Les perpendiculaires aux droites $(BC), (CA), (AB)$ passant par L, M, N respectivement sont notées a, b, c.

Montrer que a, b, c sont concourrantes.

Exercice 54
Soit $n \geqslant 4$ un entier naturel et $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que

$$x_1^4 + \cdots + x_n^4 \geqslant \frac{(x_1 - x_2)^4 + (x_2 - x_3)^4 + \cdots + (x_n - x_1)^4}{16}$$

Exercice 55
Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il existe n points du plan non tous alignés tels que la distance entre deux points soit toujours entière.

Exercice 56
On commence avec 4 triangles rectangles isométriques. Une étape consiste à choisir un triangle rectangle et le diviser en 2 avec la hauteur issue de l'angle droit. Montrer, rigoureusement, qu'ainsi, on ne peut se débarrasser de triangles isométriques.

Deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont les mêmes longueurs de côtés (et donc les mêmes angles).

Exercice 57
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 58
Soit ABC un triangle acutangle. D est le pied de la hauteur issue de A. Soit E le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de D. La perpendiculaire à (BE) par A coupe (DE) en P.
Montrer que $\dfrac{PE}{DP} = \dfrac{DB}{DC}$.

Exercice 59
On a $n \geqslant 3$ points dans le plan. On suppose que l'aire de tout triangle formé par 3 de ces points ne dépasse pas 1.

Montrer que tous ces points peuvent être placés dans un triangle d'aire au plus 4.

Exercice 60
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, O son centre du cercle circonscrit et R son rayon. Soient A', B', C' les symmétriques de A, B, C par rapport au droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement.

Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si $OH = 2R$.

Exercice 61
Déterminer tous les couples de polynômes non constants P et Q unitaires, de degré n et admettant n racines positives ou nulles (non nécessairement distinctes) tels que

$$P(x) - Q(x) = 1.$$

Exercice 62
Montrer que pour tout réels positifs $x_1, x_2, ..., x_n$ on a :

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n$$

Exercice 63
Soit c un entier. Existe-t-il un polynôme P à coefficients entiers vérifiant les conditions suivantes ?

• $P(0) = 1$

• Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = P(x_n)$ (pour tout $n \geq 0$). Il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on ait pgcd$(x_n, n + c) > 1$.

Exercice 64
Les tangentes au cercle circonscrit d'un triangle ABC en A et C se coupent en un point P. Les droites (AB) et (CP) se coupent en un point Q. Montrer que si les triangles ABC, ACP et BCQ ont même aire, alors ABC est rectangle.

Exercice 65
Soit n un entier naturel. Raphaël joue au jeu suivant :

Il place d'abord n pièces en cercle, toutes en position face. Il choisit une pièce qu'il retourne. Il avance ensuite de 1 position dans le sens des aiguilles d'une montre et retourne la pièce. Il continue en faisant des sauts de plus en plus grands : il avance de 2 et retourne la pièce, de 3 et retourne la pièce, etc.
Raphaël ne s'arrête que lorsqu'il tombe sur une pièce déjà en position pile.

Trouver les n pour lesquels toutes les pièces sont en position pile à la fin de la partie.

Exercice 66
Aujourd'hui, Léo l'escargot a avancé le long du chemin de huit heures du matin à six heures du soir. Plusieurs personnes l'ont observé dans son trajet : chacune est restée une heure exactement, et a pu observer que Léo avait avancé d'un mètre exactement. À tout moment de la journée, il y avait au moins un observateur. Quelle est la plus grande distance que Léo a pu parcourir ?

Exercice 67
Trouver tous les entiers n strictement positifs tels que :

$$\text{pgcd}\left(\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n-1}\right) > 1$$

Exercice 68
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver tous les réels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que :

$$\begin{cases} a_1 a_2 \ldots a_n = (a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \\ a_1^3 a_2^3 \ldots a_n^3 = (a_1^3 + a_2^3) \ldots (a_{n-1}^3 + a_n^3)(a_n^3 + a_1^3) \end{cases}$$

Exercice 69
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, (AB) et (CD) leurs tangentes communes (A, C sur ω_1 et B, D sur ω_2). Soit M le milieu du segment $[AB]$. Les tangentes issues de M aux cercles ω_1 et ω_2 coupent (CD) en X et Y. Soit I le centre du cercle M-exinscrit au triangle MXY.

Montrer que $IC = ID$.

Exercice 70
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et P un point à l'intérieur de ce triangle. On construit un triangle XYZ de côtés de longueur PA, PB et PC et on note F son point de Fermat. Montrer que $FX + FY + FZ = a$.

Exercice 71
Soit $[EF]$ un segment inclus dans le segment $[BC]$ tel que le demi-cercle de diamètre $[EF]$ est tangent à $[AB]$ en Q et à $[AC]$ en P.

Prouver que le point d'intersection K des droites (EP) et (FQ) appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

Exercice 72
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tous entiers $m, n \geqslant 0$ on ait

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

Exercice 73
Soient a et b deux entiers strictement positifs.

Peut-on toujours trouver un entier naturel $n \geqslant 1$ tel que an soit un cube et bn une puissance cinquième ?

Exercice 74
On commence par 2 points du plan A et B. On construit le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A. On note C l'une des deux intersections obtenues. On trace le cercle de centre C passant par B. On note D l'une des deux intersections des cercles de centres B, C puis on trace le cercle de centre D passant par B. On note E l'une des deux intersections des cercles de centres B, D puis on trace le cercle de centre E passant par C et le cercle de centre A passant par E. On note F, G les points d'intersection de ces deux cercles. On contruit le cercle de centre F passant par E et de centre G passant par E. On note M leur deuxième intersection.

Montrer que M est le milieu de $[AB]$.
Sur le cercle de centre B, A, C, D, E sont ordonnés ainsi, dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 75
Soit ABC un triangle. Les médianes AM_A, BM_B, CM_C du triangle ABC s'intersectent en M. Soit Ω_A un cercle passant par le milieu de AM et tangent à BC en M_A. On construit similairement Ω_B et Ω_C .
Prouver que Ω_A, Ω_B et Ω_C s'intersectent en un même point.

Exercice 76
On trace un grand triangle ABC, et on le pave avec des triangles. On étiquette ensuite les sommets créés de la façon suivante : à chaque sommet appartenant au côté $[AB]$ du grand triangle est attribuée une lettre, A ou B ; à chaque sommet appartenant au côté $[BC]$ du grand triangle est attribué un B ou un C ; à chaque sommet appartenant au côté $[CA]$ du grand triangle est attribué un C ou un A. On étiquette les sommets situés strictement à l'intérieur du grand triangle avec un A, un B ou un C au choix.

Montrer qu'on peut trouver un triangle (hormis le grand triangle) étiqueté ABC.

Exercice 77
Théo et Paul jouent à un jeu. Théo a face à lui n enveloppes indistingables et fermées. L'une d'elles contient n roubles. Théo choisit une enveloppe. Pour aider Théo, Paul ouvre une enveloppe (autre que celle de Théo) ne contenant rien si il y a au moins 3 enveloppes non ouvertes sur la table. Théo peut alors choisir soit d'ouvrir son enveloppe, soit de recommencer le même processus avec une nouvelle enveloppe (potentiellement la même) mais en enlevant 1 rouble de l'enveloppe contenant de l'argent. Soit E_n l'espérance du gain de Théo en jouant optimalement.
Calculer $\lim_{n\to\infty}(E_n)$

Exercice 78
Soit ABC un triangle acutangle. On note I_A le centre du cercle A-exinscrit de ABC. Soit M le symétrique de I_A par rapport à BC. Montrer que (AM) est parallèle à la droite passant par l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à I_ACB.

Exercice 79
Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini de réels dont toutes les fonctions symétriques élémentaires sont strictement positives. Les éléments a_i sont-ils également strictement positifs ?

Note : La k-ème fonction symétrique élémentaire, notée σ_k, est la somme des produits k par k. Ainsi $\sigma_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\sigma_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \ldots$, et plus généralement, $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$.

Exercice 80
Existe-t-il deux nombres réels distincts a et b et deux polynômes réels unitaires distincts non constants P et Q tels que P et Q prennent la valeur a simultanément (i.e. sur le même ensemble de valeurs, supposé non vide) et de même la valeur b simultanément ?

Exercice 81
Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rationnel r tel que $P(r) = n$.

Exercice 82
Soit ABC un triangle rectangle en C et M le milieu de $[AB]$. Soit G un point de $[MC]$. Soit P sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$ et Q sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{BQC} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQG et BPG se coupent sur (AB).

Exercice 83
On construit la suite (u_n) de la façon suivante : on pose $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit u_n de sorte que $|u_n| = |u_{n-1} + 1|$. Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_{2017}| \ ?$$

Exercice 84
Trouver les polynômes à coefficients entiers P tels que :

$$\forall n,\ n \text{ divise } P(2^n)$$

Exercice 85
Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ de cardinal 2^k. On dit qu'une partie $B \subseteq A$ est admissible si B est telle que la somme de deux de ses éléments n'est jamais dans A. Montrer qu'il existe un sous ensemble de A de cardinal $k+1$ qui est admissible.

Exercice 86
Soit ABC un triangle acutangle, avec $AC > BC$. On note H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit et M le milieu de $[AC]$. Soit F le pied de la hauteur issue de C, et P le symétrique de A par rapport à F. On note X l'intersection de (PH) avec (BC), Y l'intersection de (FX) avec (OM), et Z l'intersection de (OF) avec (AC). Montrer que F, M, Y et Z sont cocycliques.

Exercice 87
Montrer que pour tout entier $n > 1$, on ne peut pas placer les entiers de 1 à n^2 dans un tableau $n \times n$ de telle sorte que les produits de chaque ligne et chaque colonne soient identiques.

Exercice 88
Soient p et q des entiers premiers entre eux. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{\lfloor \frac{k}{p} \rfloor + \lfloor \frac{k}{q} \rfloor} = \begin{cases} 0 \text{ si } pq \text{ est pair,} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice 89
On dit qu'un entier positif n est *sympa* si il existe des entiers $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que :

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = n$$

Trouver tous les entiers *sympas*.

Exercice 90
Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(1) > 0$ et pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on ait

$$f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$$

Exercice 91
Pour un entier n, soit $f(n)$ le nombre obtenu en inversant les 0 et les 1 de l'écriture binaire de n. Par exemple, l'écriture binaire de 23 est 10111. En inversant les 0 et les 1, on obtient 01000, ce qui correspond au nombre 8. Ainsi $f(23) = 8$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{n^2}{4}.$$

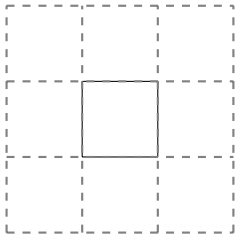
Pour quelles valeurs de n y a-t-il égalité ?

Exercice 92
On se donne un certain nombre de polynômes unitaires de degré 2 de même discriminant. On suppose que la somme de deux quelconques de ces polynômes a toujours deux racines réelles distinctes. Montrer qu'il en est de même de la somme de tous les polynômes considérés.

Exercice 93
On considère un ensemble S de $n \geq 2$ entiers distincts et strictement positifs. Montrer qu'on peut trouver deux entiers a et b dans S tels que ni $|a - b|$ ni $a + b$ ne soient dans S.

Exercice 94
On considère 100 réels distincts $a_1, a_2, ..., a_{100}$. On pose $a_{101} = a_1$, $a_{102} = a_2$ et finalement $a_{103} = a_3$. Montrer qu'il existe un indice i tel que $1 \leq i \leq 100$ et $a_i + a_{i+3} > a_{i+1} + a_{i+2}$.

Exercice 95
On dit que deux carré *se touchent* s'ils ont au moins un point de leurs bords respectifs en



Exemple : 8 carrés qui *touchent* le carré central sans se superposer

commun. Autour d'un carré de côté 1, il est possible de placer 8 autres carrés de côté 1 touchant le premier, sans jamais que deux carrés ne se superposent. Il suffit de placer les carrés comme dans un échiquier.

Est-il possible d'en placer 9 ?

Exercice 96
Soient a et b des entiers positifs. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{a} \frac{1}{2^{b+i}} \binom{b+i}{i} + \sum_{i=0}^{b} \frac{1}{2^{a+i}} \binom{a+i}{i} = 2.$$

Exercice 97
On pose $P(x)$ un polynôme non constant à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, posons :

$$Q_n(x) = (x+1)^n P(x) + x^n P(x+1)$$

Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels toutes les racines de $Q_n(x)$ sont réelles.

Exercice 98
Soit $n \geq 2$ un entier. On considère n droites du plan en position générale. Montrer qu'on peut trouver un polygone non croisé à n côtés tel que chaque côté soit sur exactament une droite et que chaque droite contienne exactement un côté.

Exercice 99
On considère un ensemble fini S de points du plan. Soit d la distance maximale séparant deux de ces points. Montrer que le nombre de couples de points à distance d est au plus $|S|$.

Exercice 100
Soit ABC un triangle et soit ω son cercle circonscrit. Soient D, E, F les milieux de BC, AC, AB respectivement. Soit T un point sur ω et soient P, Q, R les intersections de $(TD), (TE), (TF)$ avec ω. Montrer que l'aire du triangle formé par les droites $(AP), (BQ), (CR)$ ne dépend pas de la position de T.

Exercice 101
Soit P un point à l'intérieur d'un cercle de rayon R, d une droite passant par P et d' la perpendiculaire à d en P. On fait tourner les droites d et d' d'un angle ϕ autour de P. Montrer

que quelle que soit la position du point P, l'aire balayée par d et d' à l'intérieur du cercle (qui a la forme d'une croix) vaudra $\pi R^2 \frac{4\phi}{360}$.

Exercice 102
Martin a face à lui $2n$ boites fermées et numérotées de 1 à $2n$ contenant n cubes bleus et n rouges. Au départ Martin possède 1 euro. Au tour i, il parie sur le contenu de la boîte i (il peut parier sur un cube bleu ou un cube rouge). Martin parie x euros, où x est un montant réel d'euros positif et plus petit que la somme d'argent qu'il possède. Il récupère le double de sa mise en cas de pari réussi et rien sinon. A chaque tour, il connait le contenu des boîtes qui ont déjà été ouvertes. Quelle montant maximal Martin peut-il s'assurer à la fin du jeu ?

Exercice 103
Soit ABC un triangle acutangle avec $AC > BC$. Soit ω son cercle circonscrit. Soit P un point du cercle ω tel que $AC = AP$ et P appartient à l'arc BC ne contenant pas A. Soit Q le point d'intersection des droites (AP) et (BC). Soit R le point du cercle ω appartenant à l'arc AC ne contenant pas le point B et tel que $QA = QR$. Soit S le point d'intersection de la droite (BC) et de la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que les points P, Q, R et S sont cocycliques.

Exercice 104
Alice et Bob jouent au jeu suivant :

— D'abord, Bob dessine un triangle ABC et un point P à l'intérieur.

— Ensuite ils choisissent chacun à leur tour, une permutation $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ du triplet $\{A, B, C\}$, de telle sorte qu'Alice choisisse les permutations σ_1 et σ_3, c'est-à-dire qu'elle commence.

— Alice trace enfin un triangle $V_1V_2V_3$.

Pour $i = 1, 2, 3$, soit ψ_i la similitude qui envoie $\sigma_i(A), \sigma_i(B), \sigma_i(C)$ sur V_i, V_{i+1} et X_i tel que le triangle $V_iV_{i+1}X_i$ soit à l'extérieur du triangle $V_1V_2V_3$ (on note que $V_4 = V_1$). Soit enfin $Q_i = \psi_i(P)$. Alice gagne si le triangle $Q_1Q_2Q_3$ est semblable au triangle ABC, Bob gagne sinon.

Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 105
On considère un ensemble T de points du plan tel que la distance maximale séparant deux points soit d. Montrer qu'il existe un disque de rayon $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ qui contient tous les points de T.

Exercice 106
On définit une suite u_n ainsi : u_1 et u_2 sont des entiers entre 1 et 10000 (au sens large), et u_{k+1} est la plus petite valeur absolue des différences deux à deux des termes précédents. Montrer que $u_{21} = 0$.

Exercice 107
Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$. Le point K est tel que le triangle ABK est équilatéral et les points C et K ne sont pas dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Le point L est tel que le triangle ACL est équilatéral et les points B et L ne sont pas

dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Les droites (AB) et (CK) se coupent un point S. Les droites (AC) et (BL) se coupent en un point R. Les droites (BL) et (CK) se coupent un point T.

Montrer que le centre radical des cercles circonscrits aux triangles BSK, CLR et BTC appartient à la médiane issue du sommet A dans le triangle ABC.

Exercice 108
On considère 10 points distincts du plan. Montrer qu'on peut les recouvrir par des disques disjoints de rayon 1.

Exercice 109
Soit $r > 1$ un entier et soit F une famille infinie d'ensembles différents de cardinal r telle que deux ensembles de cette famille ne soient jamais disjoints. Montrer qu'il existe un ensemble de cardinal $r - 1$ qui intersecte tous les ensembles de la famille F.

Exercice 110
Soit n un entier naturel. On considère $2n + 1$ tickets, chacun possédant un numéro qui est un entier strictement positif. On suppose que la somme des numéros des $2n + 1$ tickets ne dépasse pas 2330 mais que la somme des numéros de tout groupe de n tickets est toujours plus grande que 1165.

Déterminer la valeur maximale de n.

Exercice 111
On se donne des entiers $2 \leq k \leq n$. Théodore joue au jeu suivant contre un méchant sorcier : Le sorcier possède $2n$ cartes, pour chaque entier de $i \in \{1, 2, ..., n\}$, le sorcier possède exactement 2 cartes numérotées i. Le méchant sorcier pose les cartes faces cachées en ligne de façon indistingable. Théodore effectue le mouvement suivant : il choisit k cartes, le sorcier les retourne, et si deux cartes sont identiques, Théodore gagne. Si ce n'est pas le cas, le sorcier prends les k cartes, les mélange et les repose face cachée (Il permute les cartes qu'a retourné Théodore sans modifier les autres cartes). On dit que le jeu est *gagnant* si il existe un entier m tel que Théodore puisse s'assurer de gagner en moins de m coups. Pour quels couples (k, n) le jeu est-il *gagnant* ?

Exercice 112
Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles ABD et ACD respectivement. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BF) et (CE). Les droites (BE) et (BF) coupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits à PQX et RSX. Montrer que Y est sur (AD).

Exercice 113
Martin et Olivier jouent à un jeu. Sur une rangée contenant N cases, ils placent chacun à leur tour un jeton dans l'une des cases, marron pour Martin et orange pour Olivier, de telle sorte que deux cases adjacentes ne peuvent pas contenir un jeton de la même couleur et une case

peut contenir au maximum un jeton. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer perd. Martin commence, qui possède une stratégie gagnante ?

Exercice 114
On définit la suite (a_n) par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ et

$$\forall n \geqslant 0,\ a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n$$

Montrer que n^2 divise a_n pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 115
Soit $n \geq 3$ un entier naturel. Soit x et y des entiers naturels distincts, entre 1 et $n-1$. On dit que x et y sont *amis* s'il existe a et b des entiers naturels tels que $ax = by \neq 0 \pmod{n}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles chaque entier entre 1 et $n-1$ a un nombre pair d'*amis* entre 1 et $n-1$.

Exercice 116
La suite (a_n) vérifie : $a_1 = 1007$ et $\forall i \geqslant 1$, $a_{i+1} \geqslant a_i + 1$.

Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2} < \frac{1}{2016}$$

Exercice 117
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que n^2+1 divise $n!$, et une infinité telle que n^2+1 ne divise pas $n!$.

Exercice 118
Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_{100})$ une permutation de $(1, 2, \ldots, 100)$.

Quel est le plus grand nombre de carrés parfaits qu'il peut y avoir parmi les nombres $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + \ldots + a_{100}$?

Exercice 119
Soit f et g des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel n, on ait :

$$f(g(n)) = f(n) + 1 \text{ et } g(f(n)) = g(n) + 1$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 120
Soit Γ un cercle et A, B et C trois points à l'extérieur de Γ. Soient C_1 et C_2 les deux cercles passant par B et C et tangent à Γ. On note X et X' les points de tangence de ces cercles avec Γ. On définit de manière cyclique les points Y, Y', Z et Z'. Montrer que les cercles circonscrits à AXX', BYY' et CZZ' sont coaxiaux.

Exercice 121
Soit $k \geqslant 6$ un entier et P un polynôme à coefficients entiers tel qu'il existe k entiers distincts

$x_1, \ldots, x_k$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $P(x_i) \in \{1, \ldots, k-1\}$. Montrer que $P(x_1) = \ldots = P(x_k)$.

Exercice 122
Soit n un entier strictement positif fixé. Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels de valeur absolue supérieure ou égale à 1. Soit a un réel. Montrer que l'ensemble des n-uplets $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ où les ε_i sont dans $\{-1, 1\}$ et tels que

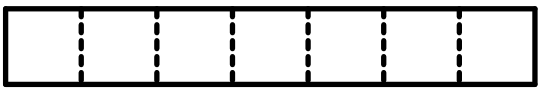
$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \in [a; a+2[$$

est de cardinal au plus $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Exercice 123
On considère une ligne de n carrés. On note $S(n)$ le nombre minimal de carrés à colorier en bleu tels que chacun des $n-1$ traits séparant deux cases voisines soit à égale distance de deux cases bleues. Montrer que

$$\lfloor 2\sqrt{n-1} \rfloor + 1 \leqslant S(n) \leqslant \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + 1.$$

Les "traits séparant deux cases voisines" sont représentés en pointillé ici :



Exercice 124
Déterminer s'il existe une suite strictement croissante (a_n) d'entiers strictement positifs telle que pour tout n, $a_n \leqslant n^3$ et tout entier strictement positif peut être écrit d'une unique façon comme différence de deux entiers de la suite.

Exercice 125
Soit ABC un triangle et D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet D dans le triangle DEF. On suppose que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 126
Soit $n \geqslant 4$ un entier. On considère des entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$ placés sur un

cercle. On suppose que chaque terme a_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) divise la somme de ses deux voisins, c'est-à-dire qu'il existe un entier k_i tel que

$$\frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i} = k_i$$

avec la convention $a_0 = a_n$ et $a_{n+1} = a_1$. Montrer que

$$2n \leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_n < 3n.$$

Exercice 127
Soit A un ensemble fini d'entiers relatifs et $n \geqslant 1$. On note N le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ dans A^n vérifiant $x_1 + \cdots + x_n = -1$. Et M est le nombre de n-uplets de A^n vérifiant $x_1 + \cdots + x_n = -1$ et pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $x_1 + \cdots + x_i \geqslant 0$.

Montrer que $M = \dfrac{N}{n}$.

Exercice 128
Soit n un entier. Dans les lignes d'un tableau de 2^n lignes et n colonnes on place tous les n-uplets formés de 1 et de -1. Ensuite, on efface certains de ces nombres, et on les remplace par des 0.

Prouver que l'on peut trouver un ensemble de lignes dont la somme est nulle (i.e., tel que, pour tout i, la somme des nombres appartenant à la colonne i d'une ligne de notre ensemble soit nulle).

Exercice 129
Soit k un entier strictement positif.

Montrer qu'il existe un entier strictement positif l satisfaisant la propriété suivante : pour tous entiers n et m premiers avec l tels que $m^m \equiv n^n \mod l$, on a $m \equiv n \mod k$.

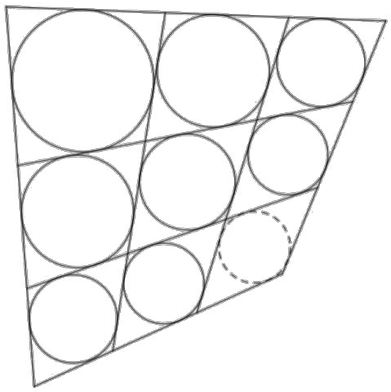
Exercice 130
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les angles aux sommets B et D sont droits. Le point M appartient à $[AB]$ et est tel que $AM = AD$. Soit N l'intersection de (DM) et (BC). les points K et H sont les projections orthogonales de de C et D sur (AN) et (AC) respectivement.

Montrer que $\widehat{MCK} = \widehat{MHN}$

Exercice 131
Dans une classe, un groupe d'élèves est dit dominant si chaque élève de la classe possède un ami dans ce groupe. On sait qu'il y a au moins 100 groupes dominants différents dans la classe.

Montrer qu'il y a en fait au moins 101 groupes dominants dans la classe.

Exercice 132
On considère une grille 3×3 (cf. figure) telle toutes les cases sauf un coin soient circonscriptibles. Montrer que cette dernière case est circonscriptible.



Exercice 133
Soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs premiers de n (comptés sans multiplcité). Trouver tous les n tels que :

$$\sigma(2^n + 1) = \sigma(n)$$

Exercice 134
Soit F_n la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier positif n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On définit le polynôme P_n de degré n dont les coefficients sont les termes de la suite de Fibonacci :

$$P_n(X) = F_1 X^n + F_2 X^{n-1} + \ldots + F_n X + F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{k+1} X^{n-k}$$

Déterminer en fonction de n le nombre de racines réelles de P_n.

Exercice 135
Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels tels que $a + b + c = 3$. Prouver que :

$$\frac{ab}{b^3 + 1} + \frac{bc}{c^3 + 1} + \frac{ca}{a^3 + 1} \leq \frac{3}{2}.$$

Exercice 136
Soit A un ensemble non vide de nombres premiers distincts tel que si $p_1, p_2, ..., p_k$ distincts appartiennent à A alors les diviseurs premiers de $p_1 p_2 ... p_k + 1$ appartiennent aussi à A. Montrer que $A = \mathbb{P}$, où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

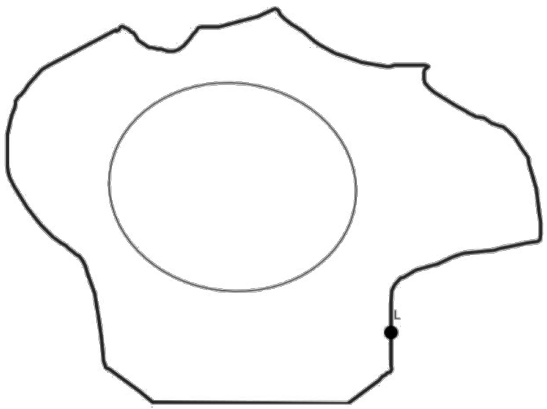
Exercice 137
Soit ABC un triangle, I son centre du cercle inscrit. Soient D, E et F ses projetés sur les côtés de ABC. Soient P et Q les intersections de la droite (EF) avec le cercle circonscrit de ABC. Soient O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits de AIB et de AIC. Montrer que le centre du cercle circonscrit de DPQ est sur la droite (O_1O_2).

Exercice 138
Soient P, Q deux polynômes non nuls à coefficients entiers tels que $\deg P > \deg Q$. On suppose que le polynôme $p \cdot P + Q$ possède une racine rationnelle pour une infinité de nombre premiers p. Montrer qu'au moins une racine de P est rationnelle.

Exercice 139
Soit ABC un triangle. Soit I le centre de son cercle inscrit et I_A, I_B et I_C les centres respectifs des cercles A, B et C-exinscrits. On note l_A la droite passant par les orthocentres des triangles IBC et I_ABC. On définit de même les droites l_B et l_C.

Montrer que les droites l_A, l_B et l_C sont concourantes.

Exercice 140
Timothée a attaché son léopard noté L à un poteau en forme d'ellipse. La laisse du léopard est une boucle de longueur fixée qui fait le tour du poteau. Montrer que la limite de la zone que peut parcourir le léopard est aussi une ellipse.



Exercice 141
Soit p un nombre premier impair et n un entier naturel impair. Montrer que $pn + 1$ ne divise pas $p^p - 1$.

Exercice 142
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un rectangle $2 \times n$. Dans chacune des $2n$ cases est inscrit un réel strictement positif, de telle sorte que dans chacune des n colonnes, la somme des deux réels vaille 1.

Montrer que l'on peut choisir un réel dans chaque colonne de telle sorte que dans chaque ligne, la somme des réels choisis vaille au plus $\frac{n+1}{4}$.

Exercice 143
Soit p un nombre premier fixé. On considère quatre entiers $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et une suite (x_n) telle que :

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_1 = d \\ x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Soit t_p le plus petit entier tel que $x_{n+t_p} \equiv x_n \pmod{p}$ pour tout $n \geq p^2$ (on pose $t_p = +\infty$ si un tel entier n'existe pas). Quelle est la plus grande valeur possible de t_p ?

Solutions trouvées par les élèves

Solution de l'exercice 1 (résolu par Antoine Goix)
On appelle l la quantité de nourriture que représente un lièvre, c celle représentée par un cochon. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} 3c + 7l &< 7c + l \\ 3c + 6l &< 7c \\ 6l &< 4c \\ 3l &< 2c \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{3}{2}l < c$. Maintenant, on veut montrer que $11l$ est plus petit que $3c + 7l$, c'est-à-dire que $4l$ est plus petit que $3c$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}l &< c \\ \frac{9}{2}l &< 3c \end{aligned}$$

Mais $\frac{9}{2}l > 4l$, donc on a bien $4l < 3c$. Ainsi, la quantité de nourriture représentée par 11 lièvres est plus petite que celle représentée par 3 cochons et 7 lièvres, donc le loup aura encore faim après.

Solution de l'exercice 2 (résolu par Auguste Ramondou)
Dans une fraction égale à 1, le numérateur est égal au dénominateur. Si c'est possible, quand on décompose tous les nombres du tableau en facteurs premiers, la somme de tous les exposants de chaque nombre premier est donc paire. Chaque nombre à part n et 1 apparaît deux fois, n doit donc n'avoir que des facteurs premiers avec des exposants pairs. n est par conséquent un carré.

Réciproquement, si n est un carré, on retourne toutes les fractions précédant $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$:

$$\frac{2}{1} \cdot \dots \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} = \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n} = 1$$

Les entiers qui sont solution sont donc les carrés.

Solution de l'exercice 4 (résolu par Auguste Ramondou)
Soit $\{A, B\}$ la partition de $[\![2, k]\!]$. On appelle A la partie qui contient 2.

On essaye de construire ces parties de telle sorte qu'aucune d'entre elle ne contienne deux nombres et leur produit :

— Comme $2 \in A$ et que $2 \times 2 = 4$, 4 doit être dans B (si $k \geqslant 4$).

— Comme $4 \in B$, de même $16 \in A$ (si $k \geqslant 16$).

— Alors A contient 2 et 16, donc $8 = \frac{16}{2} \in B$.

Mais $2 \times 16 = 4 \times 8 = 32$, donc si $k \geqslant 32$, quelle que soit la partie où l'on place 32, il se retrouve être le produit de deux nombres de la partie.

Ainsi, le plus petit entier vérifiant la propriété voulue est nécessairement inférieur ou égal à 32. De plus, si on prend $k \leqslant 32$, on constate que la partition qui place dans A tous les nombres premiers entre 2 et k, plus 16 et 24, et dans B tous le reste, aucune des deux parties ne contient le produit de deux de ses éléments.

Le minimum cherché est donc 32 exactement.

Solution de l'exercice 5 (résolu par Erik Desurmont)
Pour $n = 1$ ou 2 une fois une carte retirée, Zoé ne peut plus jouer. Pour $n = 3$, Zoé ne peut pas jouer si Yvan retire la deuxième carte. Pour $4 \leqslant n \leqslant 13$, Yvan enlève la quatrième carte. Deux cas se présentent : soit Zoé retire des cartes de numéro plus grand que 4 : il y a alors au plus 3 suites decartes consécutifs. Zoé ne pourra jouer dans la première, et les deux autres suites contiennent au plus $9 - 2 = 7$ cartes. En particulier la plus petite contient au plus 3 cartes, il n'y a qu'une possibilité pour Zoé de jouer. Soit Yvan ne peut pas jouer, soit il prend trois cartes au milieu de la plus grande suite, dans ce cas Zoé ne peut pas jouer (il restera au plus 4 cartes, dans la suite, mais s'il en reste autant, elles seront divisées en 2 car les cartes sont prises au milieu, donc Zoé ne pourra pas jouer.

Si Zoé enlève des cartes inférieures, elle ne pourra pas enlever 4 cartes inférieures au prochain tour. Yvan enlève alors 3 cartes s'il le peut au milieu des $n - 4 \leqslant 9$ cartes les plus grandes, de façon à ce qu'il reste au plus 3 cartes consécutives, ce qui est possible car $3+3+3 \geqslant n - 4$. Ainsi Zoé ne peut pas jouer.

Montrons que pour $n = 14$, Zoé peut jouer deux tours. Si Yvan prend la première ou la deuxième carte, Zoé prend les deux cartes suivantes, il reste au moins 10 cartes consécutives. En particulier, en enlevant 3 cartes, il reste 7 cartes divisés en deux suites, donc forcément une suite contient au moins 4 cartes et Zoé peut jouer. Si Yvan prend la troisième ou la quatrième carte, Zoé peut prendre les deux premières cartes, il reste alors 10 cartes consécutives et Zoé peut s'assurer de même de jouer un deuxième tour. Si Yvan prend la cinquième, sixième ou septième carte, Zoé prend les deux cartes suivantes. Il reste alors respectivement $4, 5, 6$ cartes à gauche et $7, 6, 5$ cartes à droite consécutives, Zoé pourra jouer son deuxième coup en enlevant 4 cartes dans la suite consécutive dans laquelle Yvan n'a pas pioché. Comme le jeu est symétrique, le cas où Yvan tire la i-ième carte avec $i \geqslant 8$, on est dans le même cas que si Yvan avait tiré la $15 - i$ ième carte et $15 - i \leqslant 7$. Ainsi dans tous les cas Zoé peut jouer au deuxième tour.

Bilan le plus petit n pour lequel Zoé est assurée de pouvoir jouer deux tours est $n = 14$.

Solution de l'exercice 6 (résolu par Elisa Zheng)
On écrit :

$$\begin{aligned} 3^{6n} - 2^{6n} &= (3^6)^n - (2^6)^n \\ &= (3^6 - 2^6)(3^{6(n-1)} + \cdots + 2^{6(n-1)}) \\ &= 35 \cdot 19(3^{6(n-1)} + \cdots + 2^{6(n-1)}) \end{aligned}$$

Donc en particulier, 35 divise bien $3^{6n} - 2^{6n}$.

Solution de l'exercice 7 (résolu par Claire Fontniaud et Nell Souami)
Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On sait que Q, E, F sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[EF]$ et de centre O. Le triangle OQF est isocèle, donc $\widehat{OQF} = \widehat{OFQ}$. On appelle α cette mesure d'angle.

Comme (AB) est tangente en Q au cercle $\mathcal{C}$, $\widehat{BQO} = 90^\circ$donc $\widehat{AQF} = 90 - \widehat{OQF} = 90 - \alpha$.

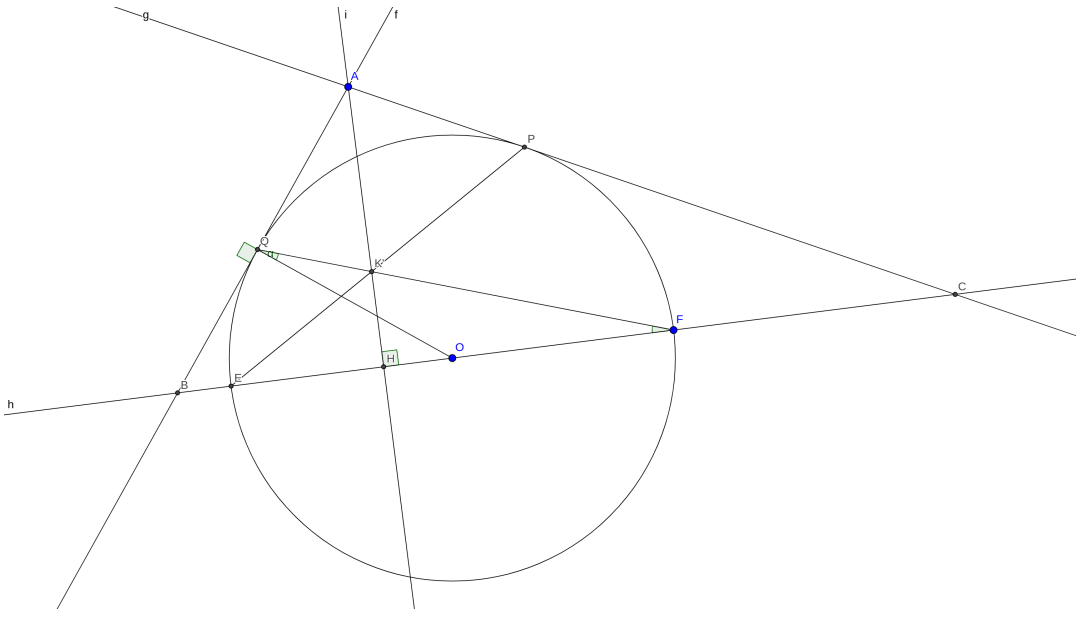
Notons K' le point d'intersection de (AH) avec (QF). Comme $HK'F$ est rectangle, $\widehat{HK'F} = 90 - \widehat{HFK'} = 90 - \widehat{OFQ} = 90 - \alpha$. Mais on a aussi (angles opposés par le sommet) $\widehat{QK'A} = \widehat{HK'F}$, de sorte que $\widehat{QK'A} = 90 - \alpha = \widehat{AQF} = \widehat{AQK'}$.

On obtient que le triangle AQK' est isocèle en A.

De la même manière, si l'on pose K'' l'intersection de (EP) et (AH), on obtient que $AK''P$ est isocèle en A.

Mais comme (AP) et (AQ) sont tangentes à $\mathcal{C}$ en P et Q, $AQ = AP$, de sorte que $AK' = AQ = AP = AK''$. Il en résulte que K' et K'' sont confondus, et coïncident par suite avec K l'intersection de (EP) et (QF).

Finalement, $K \in (AH)$.



Solution de l'exercice 11 (résolu par Silvia Maris et Auguste Ramondou)
Soit $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $xy = x + y + 3$. Ainsi $xy - x - y + 1 = 4$, c'est à dire

$(x-1)(y-1) = 4$. Les diviseurs de 4 étant $\{-4,-2,-1,1,2,4\}$, on a que $(x,y) \in \{(-3,0),(-1,-1),(0,-3),(2,5),(3,3),(5,2)\}$, qui sont bien des solutions.

Solution de l'exercice 15 (résolu par Pierre-Andréa Silvente)
On réarrange l'équation de départ ; donc pour $n \geqslant 3$:

$$a_{n+1}a_{n-2} = 1 + a_n a_{n-1} \tag{I}$$

en passant au rang supérieur :

$$a_{n+2}a_{n-1} = 1 + a_{n+1}a_n. \tag{II}$$

Donc I$-$II donne :

$$a_{n+2}a_{n-1} - a_{n+1}a_{n-2} = a_{n+1}a_n - a_n a_{n-1}.$$

Factorisons cela :

$$(a_{n+2} + a_n)a_{n-1} = (a_n + a_{n-2})a_{n+1}.$$

Donc :

$$\frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}}.$$

Si on pose $u_n = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}}$, on est très heureux car il en suit que

$$u_{n+2} = u_n.$$

Cela signifie que tous les termes ont la même valeur, de mêmes pour les termes impairs.
On calcule alors u_3 :

$$u_3 = \frac{a_3 + a_1}{a_2} = \frac{2}{1} = 2.$$

Puis u_4 :

$$u_4 = \frac{a_4 + a_2}{a_1} = \frac{\frac{1+1}{1} + 1}{1} = 3.$$

Il en suit donc, comme

$$u_n = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

, que si n est pair alors

$$\boxed{a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}}$$

et que si n est impair alors

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}}.$$

Il en suit par une récurrence double que a_n est entier $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 18 (résolu indépendamment par Antoine Bourion et Silvia Maris)
On appelle E le point d'intersection de la bissectrice intérieure issue de C qui coupe le segment $[AB]$ en un point E. On place F sur (BC) tel que $BD = BF$, et on appelle α l'angle $\widehat{CBD}$.

La droite (DE) est parallèle à (BC) puisque B et C sont symétriques par rapport à la hauteur issue de A dans ABC.

Ainsi, $\widehat{DEA} = \widehat{EDA} = \widehat{CBA} = 2\alpha$. On pose alors $\beta = \widehat{BAC}$, et on a $\beta = 180 - 4\alpha$.

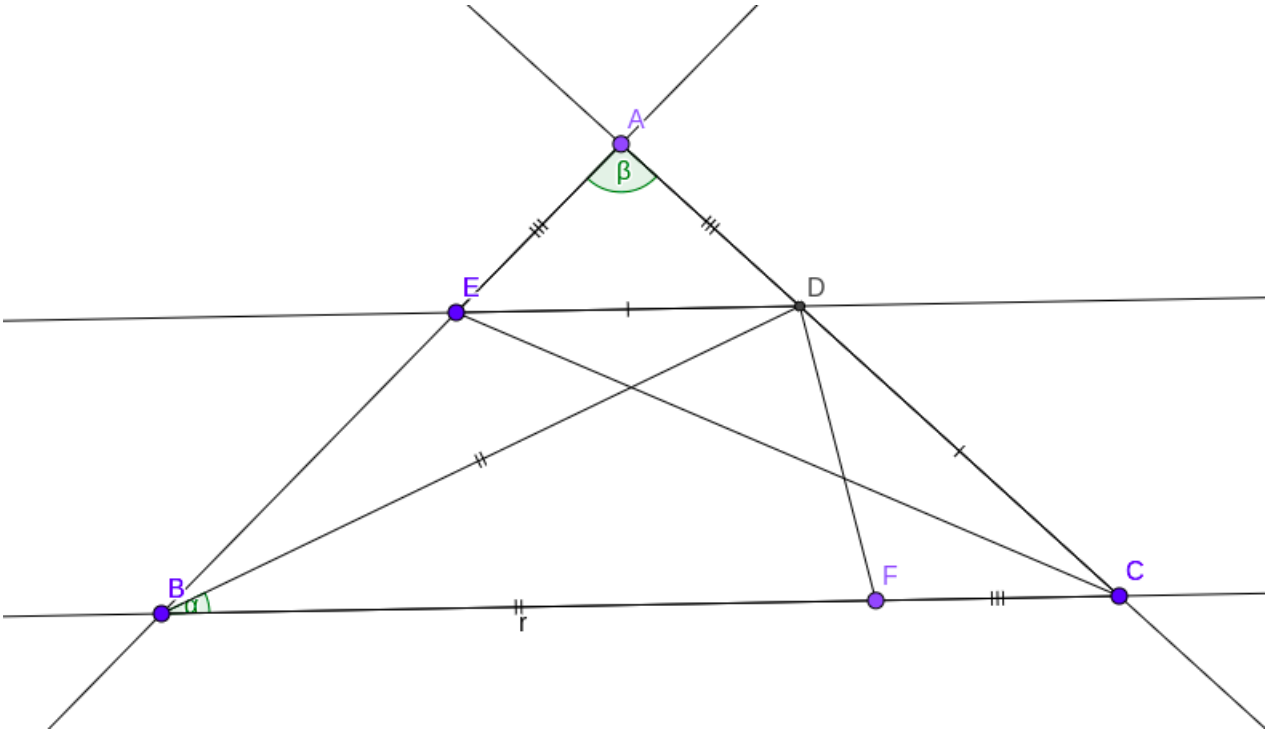
L'égalité $BC = AD + DB$ impose ensuite $AD = AE = FC$. De plus, le triangle CDE est isocèle en D puisque $\widehat{DCE} = \widehat{DEC} = \alpha$ par angles alternes-internes. Les triangles EDA et DCF sont semblables car les angles ADE et FCD sont égaux, donc les triangles ont deux longueurs et un angle en commun. De plus $AD = FC$ et $DF = CD$.

Le triangle CDF est donc isocèle en F, l'angle $\widehat{CDF}$ vaut 2α et l'angle $\widehat{CFD}$ β.

Dès lors, $\widehat{BDF} = \widehat{BFD} = 180 - \beta = 4\alpha$ et ainsi,

$$180 = \widehat{ADE} = \widehat{EDB} = \widehat{BDF} = \widehat{FDC} = (2 + 1 + 4 + 2)\alpha$$

On en tire $4\alpha = 90$ et $\beta = 90^\circ$.



Solution de l'exercice 20 (résolu par Axel Hovasse)
Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $ab + 2 = a^3 + 2b$. Ainsi $a^3 - 2 = b(a - 2)$. On a donc que $a \neq 2$, car $2^3 - 2 \neq 0$. Ainsi $a - 2 \mid a^3 - 2$, mais $a - 2 \mid (a - 2)^3 = a^3 - 6a^2 + 12a - 8$, il suit que $a-2 \mid -6a^2+12a-6$. Or, $a-2 \mid 6a(a-2)$, donc $a-2 \mid 6$. Ainsi $a-2 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$, soit $a \in \{-4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8\}$, mais $a \geqslant 0$, donc $a \in \{0, 1, 3, 4, 5, 8\}$. On trouve alors $(a, b) \in \{(0, 1), (1, 1), (3, 25), (4, 31), (5, 41), (8, 85)\}$. On vérifie ensuite que ces couples sont bien solutions.

Solution de l'exercice 25 (résolu par Erik Desurmont)
On trace (EB) et (FA), et M est leur point d'intersection.

En effet, les diagonales d'un carré sont les bissectrices des angles, $\widehat{GFC}, \widehat{FGE}$ et $\widehat{ACB}$ sont donc égaux à 45°. De plus, le point d'intersection de ces diagonales est le centre du cercle circonscrit au carré et si l'on nomme O le point d'intersection des diagonales de $EFGC$ et O' celui des diagonales de $ABCD$, on a : $\widehat{FOG} = \widehat{COB} = 90^\circ$.

M est sur les cercles $\mathcal{C}$ (circonscrit à $ECGF$) et $\mathcal{C}'$ (circonscrit à $ABCD$).

D'après le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre, $2\widehat{FMG} = \widehat{FOG}$ et donc $\widehat{FMG} = 45^\circ$, $2\widehat{CMB} = \widehat{CO'B}$ et donc $\widehat{CMB} = 45^\circ$.

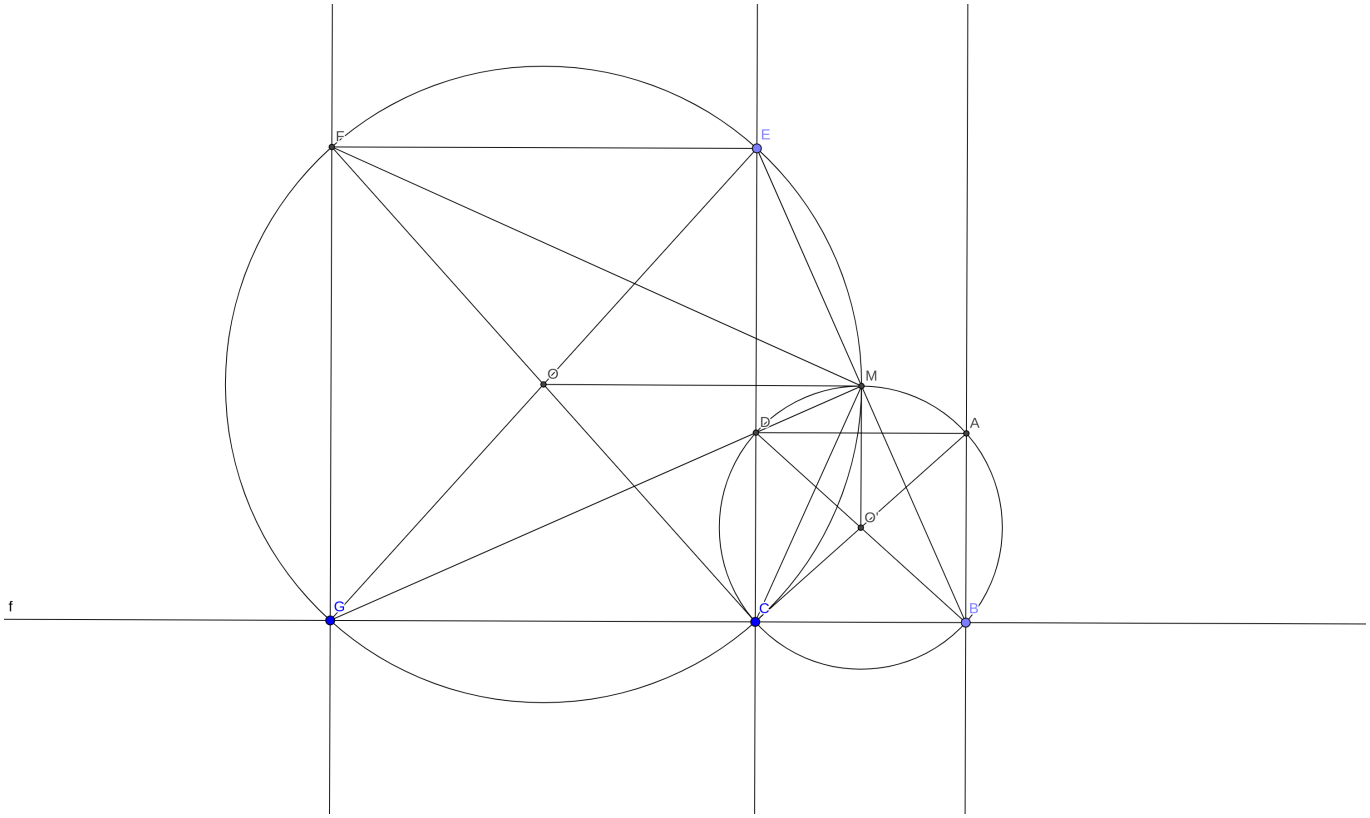
Toujours par le théorème des angles inscrits, on a $\widehat{FME} = \widehat{FGE} = 45^\circ$, $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 45^\circ$et $\widehat{GMC} = \widehat{GFC} = 45^\circ$.

On a $\widehat{FMA} = \widehat{FMG} + \widehat{GMC} + \widehat{CMB} + \widehat{BMA} = 4 \times 45^\circ = 180^\circ$.

Ainsi, F, M, A sont alignés.

De même, on obtient que E, M, B sont alignés.

Comme F, M, A sont alignés et E, M, B aussi, $M \in [AF]$ et $M \in [BE]$ et donc M est le point d'intersection e (AF) et (BE).



Solution de l'exercice 31 (résolu par Pierre-Andréa Silvente)

On a $AF//BC$. Donc $\widehat{AFB} = \widehat{FBC}$ (alterne-interne) et $\widehat{BFC} = \widehat{FBA}$. Or $\widehat{FBA} = \widehat{FBC}$ car (BF) bissectrice de $\widehat{ABC}$. Donc $\widehat{AFB} = \widehat{FBC} = \widehat{BFC} = \widehat{FBA}$. De la même manière, $\widehat{BAC} = \widehat{ACF}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{CAF}$, or $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ car ABC isocèle, donc $\widehat{BAC} = \widehat{ACF} = \widehat{BCA} = \widehat{FAC}$. Donc $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$, et $\widehat{BAF} = \widehat{BCF}$, par conséquent $ABCF$ est un parallélogramme.

Dans un triangle isocèle en B, la bissectrice et la hauteur issues de B sont confondues, donc $AC \perp BF$, donc $ABCF$ est un losange. Soit O le point d'intersection de (AC) et (BF), $\mathcal{D} = BF$ et $d = AC$, P le projeté orthogonal de E sur (BP). D'après le théorème de Thalès ($P \in [BO]$ et $E \in [BC]$, $PE//OC$) :

$$\frac{BP}{BO} = \frac{BE}{BC} = \frac{PE}{OC}$$

Or $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{2}$ car E milieu de $[BC]$, donc $\frac{BP}{BO} = \frac{1}{2}$, donc P milieu de $[BO]$. De plus, $PF = PO + OF = \frac{3}{4}\mathcal{D}$ (car $OF = BO$ car $ABCD$ est un losange). On sait que $\frac{PE}{OC} = \frac{1}{2}$, donc $PE = \frac{1}{4}d$. Par le théorème de Pythagore dans PEF rectangle en P :

$$EF^2 = PE^2 + PF^2 = \frac{d^2}{16} + \frac{9\mathcal{D}^2}{16}$$

Comme $EF > 0$, $EF = \sqrt{\frac{d^2}{16} + \frac{9\mathcal{D}^2}{16}}$.

On a $FD = AF$ (par symétrie). Soit R le projeté orthogonal de D sur BF, donc $AO//RD, F \in [RO]$ et $F \in [AD]$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{FA}{FD} = \frac{FO}{FR} = \frac{AO}{RD}$$

Or $\frac{FA}{FD} = 1$, donc $FO = FR$, et $AO = RD$. Donc $BF = BO + 2FO = \frac{3}{2}\mathcal{D}$ et $RD = \frac{d}{2}$. D'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = BR^2 + RD^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{9\mathcal{D}^2}{4}$$

Donc, comme $BD > 0$, $BD = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{9\mathcal{D}^2}{4}}$. Ainsi

$$\frac{EF}{BD} = \frac{\sqrt{\frac{d^2}{16} + \frac{9\mathcal{D}^2}{16}}}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{9\mathcal{D}^2}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Solution de l'exercice 38 (résolu par Pierre-Andréa Silvente)
Déjà, la suite est bien définie : en effet on a $a_n > 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On le montre par récurrence : on a bien $a_0 > 1$. Soit n un entier positif, supposons $a_n > 1$, on a $a_{n+1} > \sqrt{2 \times 1 - 1} = 1$. Ainsi par principe de récurrence $a_n > 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

Montrons par récurrence que a_n est irrationnel pour $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, $a_1 = \sqrt{3}$ qui nest irrationnel. Soit n un entier positif, supposons a_n irrationnel. Comme $a_n = \frac{1+a_{n+1}^2}{+}1$, si a_{n+1} est rationnel, a_n l'est aussi, donc a_{n+1} est irrationnel. Ainsi a_n est irrationel pour tout $n \geq 1$.

Montrons que (a_n) est décroissante : en effet par positivité de (a_n), $a_{n+1} \leqslant a_n$ équivaut à $2a_n - 1 \leqslant a_n^2$ soit à $(a_n - 1)^2 \geqslant 0$ qui est vrai. Ainsi la suite (a_n) est décroissante et minorée par 1, elle converge donc vers une limite l vérifiant $l \geqslant 1$. Par continuité de $x \mapsto \sqrt{2x-1}$ et théorème du point fixe on a $l = \sqrt{2l-1}$ donc $l^2 - 2l + 1 = 0$ donc $(l-1)^2 = 0$: on a donc $l = 1$ qui est rationnel.

Solution de l'exercice 44 (résolu par Simon Poirson)
Écrivons déjà p sous la forme suivante, où k est le degré de P et $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ sont ses coefficients :

$$P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$$

Ainsi $P(q+a) = \sum_{i=0}^{k} a_i (a+q)^i$ pour tout $a \in \mathbb{N}$, donc grâce au binôme de Newton, on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{k} a_i (q+a)^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot a^i [q]$$

Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in \mathbb{N}$ où $a \leqslant q$,

$$P(a+jq) \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i(a+qj)^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot a^i \equiv P(a)[q]$$

Dès lors,

$$\sum_{i=0}^{k} P(i) \equiv \sum_{i=q+1}^{2q} P(i) \equiv \cdots \equiv \sum_{i=q^2-q+1}^{q^2} P(i)[q]$$

On en conclut :

$$\sum_{i=1}^{q^2} P(i) \equiv q \sum_{i=1}^{q} P(i) \equiv 0[q]$$

Si on prend $n = q^2$, on a donc bien $q | \sum_{i=1}^{n} P(i)$.

Solution de l'exercice 48 (résolu par Paul Ruggeri)
On remarque que pour tout réel k, $(k+1)^5 - k^5 - 1 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k = 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$. Ainsi par téléscopage $5S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^5 - k^5 - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^5 - k^5 - 1 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^5 - k^5\right) - n = n^5 - n$. Comme $5S_n + n = n^5$, il suffit de montrer que n^5 est un carré si et seulement si n l'est. En effet n^5 est un carré si et seulement si pour tout p premier $v_p(n^5) = 5v_p(n)$ est pair, i.e. comme 5 est impair si et seulement si pour tout p premier, $v_p(n)$ est pair. Ainsi n^5 est un carré si et seulement si n est un carré ce qui conclut.

Solution de l'exercice 51 (résolu par Pierre-Andréa Silvente)
On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. On va montrer par récurrence forte que pour $n \geqslant 2$, u_n s'écrit sous la forme $\frac{p_n}{q_n}$ où p_n est impair et q_n pair, et n'est donc pas un entier.

Initialisation $u_2 = \frac{3}{2}$, u_n est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair.

Hérédité On suppose que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, il existe un entier impair p_k et un entier pair q_k tel que $u_k = \frac{p_k}{q_k}$.

— Si n est pair, on écrit $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $u_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{2m+1} = \frac{(2m+1)p_n + q_n}{(2m+1)q_n}$ où le numérateur est impair et le dénominateur pair.

— Si n est impair, on écrit de même $n = 2m - 1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas,

$$u_{n+1} = \sum_{s=1}^{2m} \frac{1}{s} = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{2s+1} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s} = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{2s+1} + \frac{u_m}{2}$$

La somme des inverses des impairs réduite au même dénominateur a un dénominateur impair (produit de nombres impairs). Elle s'écrit donc $\frac{u}{2v+1}$ avec $u, v \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse de récurrence forte, $u_m = \frac{p_m}{q_m}$ avec p_m, q_m deux entiers respectivement impair et pair.
Par conséquent :

$$u_{n+1} = \frac{p_m}{2q_m} + \frac{u}{2v+1} = \frac{(2v+1)p_m + 2uq_m}{2q_m(v+1)}$$

de numérateur impair et de dénominateur pair.

Ceci termine la preuve de l'énoncé.

Solution de l'exercice 57 (résolu par Paul Ruggeri, Alexandre Ittah et Pierre-Andréa Silvente)
En prenant $x = y = 0$ on obtient $f(f(0)^2) = 0$. En particulier, f admet un zéro noté k. En prenant $(x, y) = (0, k)$, $f(0) = 0$.

Supposons que f admet un séro k non nul. En prenant $x = k$, l'équation initiale devient $f(y + k) \times k = f(k^2)$. En particulier soit a un réel, en prenant $y = a - k$, on a $f(a) = \frac{f(k^2)}{k}$ donc f est constante donc nulle.

Supposons f non nulle. Dans ce cas, en prenant $y = -x$ dans l'équation intiiale, $f(x^2 + f(x)f(-x)) = xf(0) = 0$ donc $x^2 + f(x)f(-x) = 0$ pour tout réel x. En prenant $y = 0$, $f(x^2) = xf(x)$, donc $-xf(-x) = f(x^2) = xf(x)$. En particulier si $x \neq 0$ $f(x) = -f(-x)$, l'équation étant encore vraie si $x = 0$ car $f(0) = 0$. On en déduit donc que $x^2 - f(x)^2 = 0$ donc pour tout réel x, $f(x) = \pm x$.

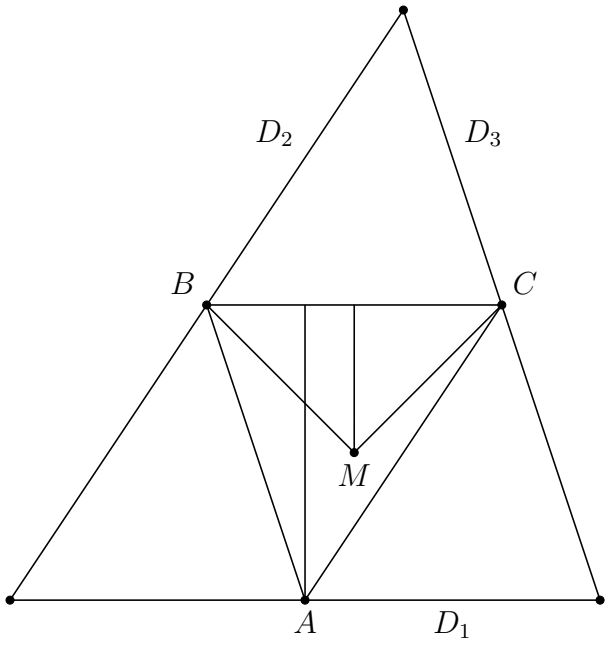
Supposons qu'il existe $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$. En appliquant l'équation initiale à $(x, y) = (a, b)$, on obtient $f(a^2 - ab) = a \times (\pm(a + b))$ donc $\pm(a^2 - ab) = \pm a(a+b)$ donc $a-b = \pm(a+b)$. On obtient alors $a-b = a+b$ donc $b = 0$ ou $-a-b = a-b$ donc $a = 0$ contradiction. En particulier, on a forcément $f(x) = x$ pour tout réel x ou $f(x) = -x$ pour tout réel x.

Réciproquement, les fonctions définies par $f(x) = 0$ pour tout réel x, $f(x) = x$ pour tout réel x et $f(x) = -x$ sont solutions, la vérification est immédiate.

Solution de l'exercice 59 (résolu par Pierre-Andréa Silvente)
On a $n \geq 3$ points dans le plan tels que l'aire de tout triangle formé par 3 de ces points ne dépasse pas 1. Soit E l'ensemble de ces points. Par le principe du maximum, on choisit trois points A, B, C de E tels que le triangle ABC soit d'aire maximale $\mathcal{A}$, qui est donc inférieure ou égale à 1 par hypothèse.

Soit $M \in E$, l'hypothèse de maximalité de $\mathcal{A}$ nous permet de dire que l'aire de MBC est inférieure ou égale à $\mathcal{A}$. Si on trace la hauteur issue de M dans BCM et celle issue de A dans ABC, on a donc que celle issue de M est de longueur inférieure ou égale à celle issue de A. Ainsi, si D_1 désigne la droite parallèle à (BC) passant par A, M est dans le même demi plan délimité par D_1 que B et C. On définit de même D_2 (respectivement D_3) comme la droite parallèle à AC (respectivement AB) passant par B (respectivement C).

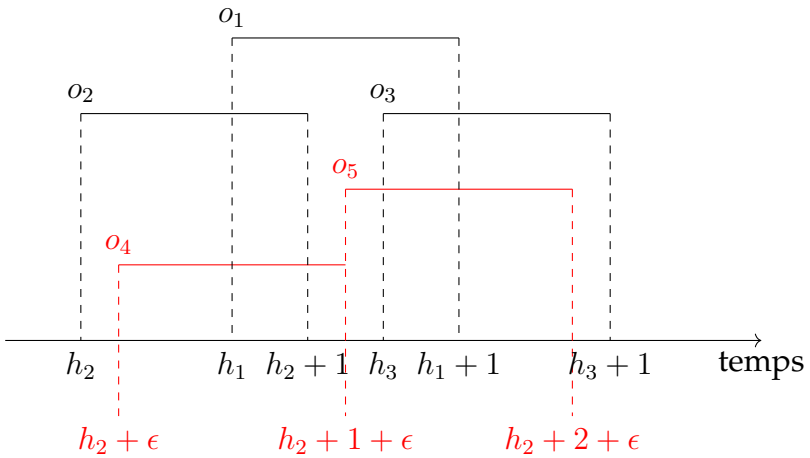
On obtient donc que M est contenu dans le triangle $\mathcal{T}$ formé par les droites D_1, D_2, D_3. Par le théorème des milieux, on obtient que A, B, C sont les milieux des côtés de $\mathcal{T}$, et ainsi l'aire de $\mathcal{T}$ vaut au plus $4\mathcal{A} \leq 4$, et l'intérieur de $\mathcal{T}$ contient tous les points de E, ce qui conclut.



Solution de l'exercice 66 (résolu par Anatole Bouton)
On dira que deux observateurs se voient s'ils observent Léo pendant une durée non nulle ensemble.

Cherchons à maximiser la distance parcourue par Léo. Si, à un instant, il y a trois observateurs o_1, o_2, o_3 en même temps, notons $h_1 < h_2 < h_3$ leurs heures d'arrivée. Alors on vérifie aisément que o_2 ne fait qu'observer une période déjà observée, il ne fait donc que rajouter des contraintes, on peut donc l'enlever. Ainsi, on peut supposer qu'il n'y a jamais plus de 2 observateurs à un même instant.

Supposons qu'un certain observateur o_1 arrivé à l'heure h_1 voit deux observateurs o_2, o_3 d'heures d'arrivée respectives h_2, h_3. On suppose que o_2 arrive avant o_3, ainsi $h_2 < h_1, h_2+1 < h_3 < h_1 + 1$. On pose $\epsilon = \frac{h_3-h_2-1}{2}$. Léo a alors parcouru au plus $1m$ entre h_2 et h_1, au plus $1m$ entre h_1 et $h_1 + 1$, et au plus $1m$ entre $h_1 + 1$ et $h_3 + 1$, donc il a parcouru au plus $3m$ entre h_2 et $h_3 + 1$.



Mais si on enlève o_1 et qu'on le remplace par deux observateurs o_4 et o_5 d'heures d'arrivées respectives $h_4 = h_2 + \epsilon$ et $h_5 = h_2 + 1 + \epsilon$, alors Léo est toujours observé à tout moment, et il pourrait parcourir $1m$ entre h_2 et h_4, $1m$ entre $h_2 + 1$ et h_5, $1m$ entre h_5 et h_3 et $1m$ entre $h_5 + 1$ et $h_3 + 1$. Ainsi, il peut parcourir $4m$ entre h_2 et $h_3 + 1$, ce qui est mieux qu'avant (on vérifie aussi facilement que ceci ne pose pas de problème avec les autres observateurs). On peut donc supposer que chaque observateur voit au plus 1 observateur pendant son observation.

Alors, si o_1 et o_2 sont deux observateurs d'heures respectives $h_1 < h_2 < h_1+1$ qui observent Léo en même temps, alors Léo peut avancer de $1m$ entre h_1 et h_2, et $1m$ entre $h_1 + 1$ et $h_2 + 1$, et ainsi il avance de $2m$, et c'est clairement la distance maximale qu'il peut traverser entre h_1 et $h_2 + 1$. On peut donc remplacer o_1 et o_2 par un grand observateur O qui reste $1h + \epsilon$ avec $\epsilon = h_2 - h_1$ qui est entre 0 et 1, et qui voit Léo avancer d'au plus $2m$ (et cette borne est atteignable). Après que l'on ait remplacé tous les couples d'observateurs qui se voient par des grands observateurs, entre $8h$ et $18h$ il y a donc un certain nombre d'observateurs et de grands observateurs qui ne se voient jamais entre eux. Alors :

— S'il n'y a pas de grands observateurs, la distance maximale parcourue par Léo est clairement $10m$.

— S'il y a un grand observateur qui reste $1 + \epsilon$ heures, alors s'il y a k autres observateurs (potentiellement grands obsesrvateurs), Léo avance donc pendant une durée de $10h$, supérieure ou égale à $1 + \epsilon + k$ heures. Ainsi, comme $\epsilon > 0$, $k \leq 8$, on a donc une distance maximale parcourue de $2 + 2 \cdot 8 = 18m$.

On atteint la valeur de $18m$ en prenant 9 grands observateurs qui restent pour une durée de $\frac{10}{9} > 1$ heures et en faisant en sorte que Léo avance de $2m$ pendant la durée d'observation de chaque observateur.

Solution de l'exercice 67 (résolu par un élève resté anonyme)
Si $n = 1$, on fait un PGCD indexé sur l'ensemble vide, ce qui n'a pas de sens.

Soit n un entier strictement positif. On se propose de montrer que $PGCD\left(\binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}\right) > 1$ si et seulement s'il existe un nombre premier p et un entier naturel non nul k tel que $n = p^k$.

Soit $n = p^k$ de cette forme. Alors pour tout i entre 1 et $n - 1$, on a $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$. Notons v_p la valuation p-adique. Pour tout i entre 1 et $n - 1$, $p^k > i > 0$ donc $v_p(i) \leq k - 1$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} k-1+v_p\left(\binom{n}{i}\right) &\geq v_p(i)+v_p\left(\binom{n}{i}\right) \\ &= v_p\left(i\binom{n}{i}\right) = v_p\left(n\binom{n-1}{i-1}\right) \\ &\geq k \end{aligned}$$

donc $v_p\left(\binom{n}{i}\right) \geq 1$, et $p \mid \binom{n}{i}$, ce qui conclut en passant au PGCD.

Réciproquement, supposons par l'absurde que n ne soit pas la puissance non nulle d'un nombre premier, et que pourtant le PGCD étudié soit > 1. On note q un diviseur premier du PGCD. On pose $n = \overline{n_a \dots n_1}$ l'écriture de n en base q, avec $n_a > 0$. On distingue deux cas :

— Supposons que $n = \overline{n_a 0 \dots 0}$. Par hypothèse, $n_a \neq 1$. Par le théorème de Lucas, on a

$$\binom{n}{q^{a-1}} = \binom{n_a q^{a-1}}{q^{a-1}} \equiv \binom{n_a}{1}\prod_{i=1}^{a-1}\binom{n_i}{0} \equiv n_a \not\equiv 0 \pmod{q}$$

absurde.

— Dans l'autre cas, il existe un entier j entre 1 et $a-1$ tel que $n_j > 0$. On a alors, par le théorème de Lucas,

$$\binom{n}{n_j p^{j-1}} \equiv \binom{n_j}{n_j} \prod_{1\leq i\leq a, i\neq j}\binom{n_i}{0} \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod{q}$$

encore une absurdité.

Ainsi, les seuls n qui marchent sont ceux de la forme $n = p^k$ avec p premier et k entier positif.

Solution de l'exercice 72 (résolu par Lucas Nistor)
Pour $n = m = 0$ on obtient $f(f(0)) = f(f(0)) + f(0)$ donc $f(0) = 0$. Prendre $n = 0$ donne $f(m) = f(f(m))$ pour tout entier positif m, en particulier si x est dans l'image de f, $f(x) = x$. Notons E l'image de f. Si $E = \{0\}$ f est nulle. Réciproquement la fonction nulle étant solution on peut supposer $E \neq \{0\}$.

En prenant n, m dans E on obtient que $f(m+n) = m+n$, E est donc stable par somme : une récurrence immédiate montrer que si k et l sont des entiers positifs et a et b sont dans E, $ka + lb$ est dans E. De plus en prenant n dans E, k un entier positif, comme kn est dans l'image, on obtient $f(m+nk) = f(f(m)) + nk = f(m) + nk$.

Soit d l'entier minimal non nul appartenant à E et e des éléments dans E. Par le théorème de Bézout, il existe u, v des entiers tels que $ue + vd = PGCD(d, e)$. Quitte à rajouter des multiples de k positifs à u et v, on en déduit l'existence de deux entiers positifs u', v', l tels que $u'e + v'd = PGCD(d, e) + kl$. Comme $u'e + v'd$ est dans E car e et d le sont, il vient $f(u'e + v'd) = u'e + v'd = kl + f(PGCD(d, e))$ donc $f(PGCD(d, e)) = PGCD((d, e))$. En particulier, on obtient que d divise e. Ainsi E est constitué de multiple de d.

Posons g la fonction de $\{0, \dots, d-1\}$ dans $\mathbb{N}$ telle que si $0 \leqslant n \leqslant d-1$, $g(n) = f(n)$. Soit m un entier positif, on fait la division euclidienne de m par n : $m = qn + r$, on a alors

$f(m) = f(qn + r) = qn + f(r) = qn + g(r)$. De plus $g(0) = f(0) = 0$ et pour tout x dans $\{0, \dots, d-1\}$, d divise $g(x)$.

Réciproquement montrons que toute fonction vérifiant les conditions précédente vérifie l'énoncé. Soit $d \geqslant 1$ g une fonction de $\{0, \dots, d-1\}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $g(0) = 0$ et pour tout x dans $\{0, \dots, d-1\}$, d divise $g(x)$ et f définie par si on note la division euclidienne de m par n $m = qn + r$ avec q le quotient et r le reste, on a alors $f(m) = qn + g(r)$. Soit m, n des entiers on note $m = qd + r$ et $n = q'd + r'$ les divisions euclidiennes de m et n par d, on a : $f(f(m)) + f(n) = f(qn + g(r)) + q'n + g(r') = qn + g'r) + q'n + g(r')$ car $g(r)$ est divisible par q et $g(0) = 0$. On a aussi $f(m + f(n)) = f(qn + r + q'n + g(r')) = qn + q'n + g(r') + g(r)$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 73 (résolu par Simon Poirson)
La réponse est oui. On pose

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j} \quad \text{et} \quad b = p_1^{\beta_1} \dots p_j^{\beta_j}$$

avec $p_1, \dots, p_j$ les nombres premiers qui divisent a ou b et α_i (resp β_i) l'exposant de p_i dans a (resp b), pour $i \in [\![1, j]\!]$.

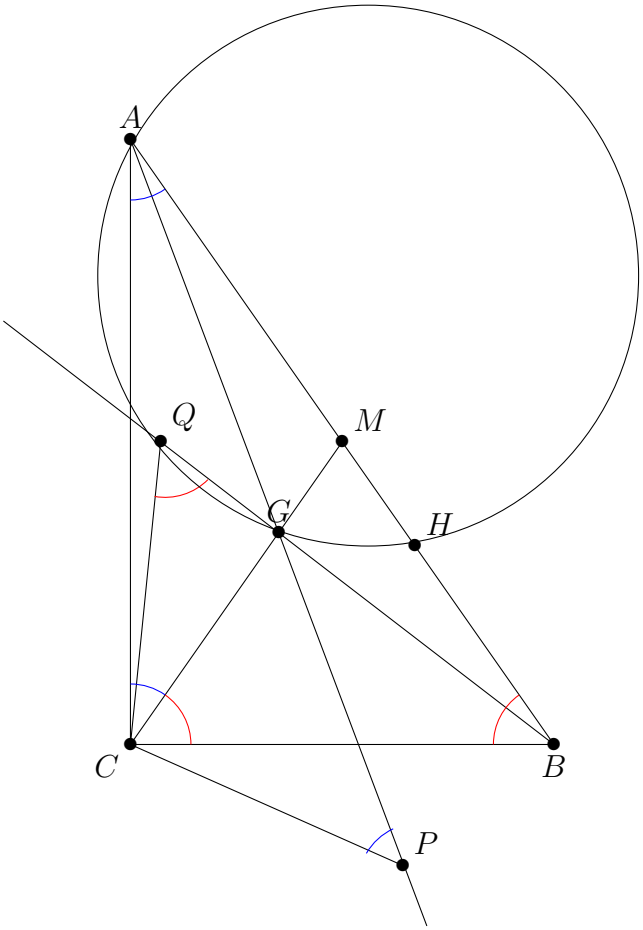
Si il existe $n, k, l \in \mathbb{N}^*$ tel que $an = k^3$ et $bn = l^5$, en notant $n = p_1^{x_1} \dots p_j^{x_j}$, il faut et il suffit d'avoir :

— $\forall i \in [\![1, j]\!], 3 | \alpha_i + x_i$

— $\forall i \in [\![1, j]\!], 5 | \beta_i + x_i$

Si on prend $x_i \equiv -10\alpha_i - 6\beta_i$, ces conditions sont satisfaites : $x_i \equiv -\alpha_i [3]$ et $x_i \equiv -\beta_i [5]$. Ceci démontre bien l'existence d'un entier satisfaisant les conditions voulues.

Solution de l'exercice 82 (résolu par Anatole Bouton)



Soit H le point d'intersection du cercle circonscrit de AGQ avec (AB). On a $BH \cdot AB = BG \cdot BQ$. ABC est rectangle donc $[AB]$ est le diamètre du cercle circonscrit à ABC, donc M est le milieu de ce cercle et $\widehat{MBC} = \widehat{MCB}$ et $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$. Par le théorème de l'angle tangentiel, le cercle circonscrit à QGC est tangent à (BC) en C, donc $BC^2 = BG \cdot BQ = BH \cdot AB$. Par Pythagore,

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = AB^2 - AB \cdot BH = AB(AB - BH) = AB \cdot AH.$$

De même, le cercle circonscrit à CGP est tangent à (AC) en C donc $AC^2 = AG \cdot AP$. Ainsi, $AG \cdot AP = AB \cdot AH$. Par la réciproque de la puissance du point A, le cercle circonscrit à GPB passe par H, et donc il intersecte le cercle circonscrit à AGQ sur (AB).

Solution de l'exercice 84 (résolu par Brieux Madeline-Derou)
Soit k un entier positif et q un entier premier impair. Posons $n = 2^k q$, on a n qui divise $P(2^n)$. Or $2^n = 2^{(2^k} \times 2^q$. On a donc par petit Fermat $0 \equiv P(2^n) \equiv P(2^{2^k} 2^q) \equiv P(2^{2^k} \times 2) \equiv P(2^{2^k+1})$ $(\mathrm{mod}\ q)$. Ainsi tout entier premier impair q divise $P(2^{2^k}+1)$ donc comme il admet un nombre infini de facteurs premiers, $P(2^{2^k+1}) = 0$ pour tout entier positif k. Ainsi P admet une infinité de zéros donc par rigidité $P = 0$. Réciproquement $P = 0$ convient car pout tout n positif n divise 0.

Solution de l'exercice 90 (résolu par Alexandre Ittah et Pierre-Andréa Silvente)
On calcule les premières valeurs de f. Posons $P(m, n)$ la propriété de l'énoncé.

$P(0, 0)$ donne $f(0) = 2f(0)^2$ donc comme $f(0)$ est entier, $f(0) = 0$. $P(0, 1)$ donne $f(1) = f(1)^2$, comme $f(1) > 0$, on a forcément $f(1) = 1$. Ensuite, $P(1, 1)$ donne $f(2) = 2f(1)^2 = 2$. De

plus, $P(0,2)$ donne $f(4) = f(2)^2 = 4$. $P(1,2)$ donne $f(5) = f(1)^2 + f(2)^2 = 5$. Avec $P(2,2)$, on a $f(8) = 2f(2)^2 = 8$. $P(5,0)$ donne $f(25) = f(5)^2 = 25$. $P(3,4)$ donne $f(25) = f(3)^2 + f(4)^2$ ce qui donne $f(4) = 4$. Avec $P(5,5)$, on trouve $f(50) = 2f(5)^2 = 50$, puis avec $P(1,7)$, $f(50) = f(1)^2 + f(7)^2 = 50$ donc $f(7) = 7$. Ensuite, avec $P(1,3)$, on a $f(10) = f(1)^2 + f(3)^2 = 10$ donc avec $P(10,0)$, $P(100) = P(10)^2 = 100$. On a ensuite $P(6,8)$ qui donne $f(100) = f(6)^2 + f(8)^2$ donc $f(6) = 6$. Ainsi, pour tout n entre 0 et 8, $f(n) = n$.

On remarque que si u, v, w sont des entiers quelconques, on a

$$(u + vw)^2 + (u - vw)^2 = (v - uw)^2 + (u + vw)^2.$$

Cette relation permet d'écrire, pour $n \geq 4$,

$$\begin{cases} (2n+1)^2 + (n-2)^2 &= (2n-1)^2 + (n+2)^2 \\ (2n+2)^2 + (n-4)^2 &= (2n-2)^2 + (n+4)^2 \end{cases}$$

où tous les entiers dans les parenthèses sont positifs ou nuls. De plus, on vérifie aisément que $2n+1$ et $2n+2$ sont strictement supérieurs aux autres entiers de leur ligne. On travaille donc par récurrence. On a vu que pour $n = 4$, pour tout $k \leq 2n$, $f(k) = k$. On suppose donc que pour un certain entier $n \geq 4$, pour tout $k \leq 2n$, $f(k) = k$. On a donc

$$\begin{cases} f(2n+1)^2 &= f((2n+1)^2 + (n-2)^2) - f(n-2)^2 = f((2n-1)^2 + (n+2)^2) - (n-2)^2 \\ f(2n+2)^2 &= f((2n+2)^2 + (n-4)^2) - f(n-4)^2 = f((2n-2)^2 + (n+4)^2) - (n-4)^2 \end{cases}$$

par hypothèse de récurrence

$$\begin{cases} f(2n+1)^2 &= f(2n-1)^2 + f(n+2)^2 - f(n-2)^2 = (2n-1)^2 + (n+2)^2 - (n-2)^2 = (2n+1)^2 \\ f(2n+2)^2 &= f(2n-2)^2 + f(n+4)^2 - f(n-4)^2 = (2n-2)^2 + (n+4)^2 - (n-4)^2 = (2n+2)^2 \end{cases}$$

par hypothèse de récurrence

$$\begin{cases} f(2n+1) = 2n+1 \\ f(2n+2) = 2n+2 \end{cases}$$

donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n+1$, ce qui conclut.

Ainsi, la seule solution est l'identité, qui marche bien.

Solution de l'exercice 93 (résolu par un élève resté anonyme)
Soit S un ensemble de $n \geq 2$ entiers distincts et strictement positifs. S admet n éléments donc S est fini. Soit m le plus grand éléménent de S. $|m-m| = 0 \notin S$ et $m+m > m$ donc $m+m \notin S$, ce qui conclut

Solution de l'exercice 94 (résolu par Anatole Bouton et Brieux Madeline-Derou/Georges Teze)
On considère que "distincts" signifie "deux-à-deux distincts" car sinon l'exercice est faux en prenant $a_n = 0$ si n est pair et $a_n = 1$ si n est impair.

On suppose par l'absurde que pour tout $1 \leq i \leq 100$, $a_i + a_{i+3} \leq a_{i+1} + a_{i+2}$. Si on somme les membres de gauche pour i entre 1 et 100, on obtient $2\sum_{i=1}^{100} a_i$, et de même à droite. Ainsi, pour tout i, on a $a_i + a_{i+3} = a_{i+1} + a_{i+2}$.

Soit j tel que a_j soit maximal. Comme les a_i sont deux-à-deux distincts, on a $a_j > a_{j-2}$ et $a_j > a_{j+2}$. Or, on a, en prenant les indices modulo 100,

$$a_{j-2} + a_{j+1} = a_{j-1} + a_j$$

donc

$$a_{j-2} + a_{j+2} = a_j + (a_{j-1} - a_{j+1} + a_{j+2})$$

donc

$$a_{j-2} + a_{j+2} = 2a_j.$$

C'est absurde car $2a_j > a_{j-2} + a_{j+2}$. La supposition de départ était donc fausse, ainsi il existe un i entre 1 et 100 tel que $a_i + a_{i+3} > a_{i+1} + a_{i+2}$.

Solution de l'exercice 96 (résolu par un élève resté anonyme)
Posons $f(k,n) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$. Nous avons alors $f(k,n) = \dfrac{f(k-1,n-1) + f(k,n-1)}{2}$.
On note également $S_{a,b} = \sum_{i=0}^{b} f(a, a+i) + \sum_{i=0}^{a} f(b, b+i)$, on veut donc montrer que $S_{a,b} = 2$.

On a

$$\begin{aligned} 2S_{a,b} &= \sum_{i=0}^{b} f(a-1, a-1+i) + f(a, a-1+i) + \sum_{i=0}^{b} f(b-1, b-1+i) + f(b, b-1+i) \\ &= \sum_{i=0}^{b} f(a-1, a-1+i) + \sum_{i=0}^{b-1} f(a, a+i) + \sum_{i=0}^{a} f(b-1, b-1+i) + \sum_{i=0}^{a-1} f(b, b+i) \text{ (car } f(x, x-1) \\ &= S_{a-1,b} + Sa, b-1 \end{aligned}$$

Comme de plus $S_{a,0} = f(a,a) + (f(0,0) + f(1,0) + \dots f(a,0) = 2^{-a} + (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots 2^{-a} = 2$, et de même $S_{0,b} = 2$.
Par récurrence immédiate sur $a+b$, on a bien $S_{a,b}$.

Solution de l'exercice 99 (résolu par Aurélien Fourré)
On considère le graphe G dont les sommets sont les points de S et dont deux sommets sont reliés si et seulement si ils ont à distance exactement d. On veut montrer que $|V| \leqslant |S|$ (où V est l'ensemble des arêtes du graphe). Il suffit en fait de le montrer pour chaque composante connexe, donc on peut supposer G connexe.

Si l'on a un arbre, c'est vrai. Sinon, il existe un cycle de longueur $n \geqslant 3$.

Lemme 1.
À une permutation près, ces n points forment un polygone convexe.

Démonstration. Considérons deux de ces points, A et B, où A est stictement à l'intérieur de l'enveloppe convexe formée par les autres. Soit A' un point, pas nécessairement dans S, sur le bord de l'enveloppe convexe et sur $[BA)$. Alors $A'B > AB$. Si $A' \in S$, $A'B > AB = d$. C'est une contradiction. Si $A' \notin S$, $\exists P, Q \in S$, tel que $A' \in [PQ]$ (et $[PQ]$ est un segment de l'enveloppe convexe). Alors sans perte de généralité, $\widehat{BAP} \leqslant 90^\circ$. Puis

$$\begin{aligned} BQ^2 &= BA'^2 + A'Q^2 - 2BA' \cdot A'Q \cos(\widehat{BA'P}) \\ &= BA'^2 + A'Q^2 - 2BA' \cdot A'Q \cos(\widehat{BA'Q}) \\ &> BA'^2 \end{aligned}$$

D'où $BQ > BA' = d$. C'est encore contradictoire. □

On a donc une figure dans laquelle les n sommets forment une espèce d'étoile, et l'on peut relier deux points adjacents par un arc de cercle centré sur le sommet en face. Comme d est la distance maximale entre deux sommets, tous les autres sommets sont à l'intérieur de cette figure F. Lorsqu'on rajoute un sommet sur le cycle, il n'y a qu'une seule façon de le faire : il est relié à au plus un sommet et situé sur l'arc de cercle lui faisant face. Comme le cercle centré en ce nouveau sommet et de rayon d n'intersecte F qu'en un point exactement, le nouveau sommet n'est pas relié à plus d'un point dans le graphe. Ainsi, le graphe est constitué d'un cycle, plus des sommets connectés par une unique arête à un unique sommet du cycle. Dans un tel graphe, on remarque que $|V| = |S|$ (chaque sommet rajouté sur le cycle rajoute exactement une arête aussi).

Solution de l'exercice 101 (résolu par Vladimir Ivanov)
Soit A un point sur le cercle. On introduit la fonction f telle que $f(\phi)$ est l'aire balayée par le segment $[PA]$ quand A se déplace d'un angle ϕ. Montrons que la dérivée de f en 0 est proportionnelle à AP^2.

En effet, si on a un point A' sur le cercle tel que $\widehat{APA'} = \epsilon$, l'aire de la région entre $[PA]$, $[PA']$ et le cercle est comprise entre les aires des triangles PAH_A et $PA'H_{A'}$ où H_A (resp $H_{A'}$) est le point de (PA') (resp de (PA)) tel que $(AH_A) \perp (PA)$ (resp $(A'H_{A'}) \perp (PA)$).

On a donc que l'aire du cette région est entre $\frac{1}{2}PH_{A'} \cdot A'H_{A'} = \frac{1}{2}PH_{A'}^2 \tan\epsilon$ et $\frac{1}{2}PA \cdot AH_A = \frac{1}{2}PA^2 \tan\epsilon$.

Or,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{PH_{A'}^2 \tan\epsilon}{2\epsilon} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\epsilon\to 0} PH_{A'}\right)^2 \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\tan\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{2}PA^2$$

De même,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{PA^2 \tan\epsilon}{2\epsilon} = \frac{1}{2}PA^2$$

D'après le théorème des gendarmes, f est dérivable en 0 de dérivée $\frac{1}{2}PA^2$.

Il est maintenant nécessaire et suffisant de montrer que, dans l'énoncé original, si A, B, C, D sont les intersections de d et d' avec le cercle dans cet ordre, la dérivée de l'aire balayée est constante. En effet, la constante de proportionnalité $\pi R^2 \frac{4\phi}{360}$ vient du fait que le cercle entier est balayé en un quert de tour. Ceci équivaut à montrer que $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ est constante, mais d'après le théorème de Pythagore, cette quantité vaut $AB^2 + DC^2$, et si A' est le symétrique de A par rapport à la médiatrice de $[DB]$, c'est encore égal à $A'D^2 + CD^2$. Or par chasse aux angles, on trouve que $\widehat{CDA'} = 90°$et la somme $A'D^2 + CD^2$ vaut le carré du diamètre du cercle. Ceci termine la preuve.

Solution de l'exercice 106 (résolu par Justin Cahuzac)
On appelle F_n le n-ième nombe de Fibonacci pour tout $\in \mathbb{N}^*$. On va montrer par récurrence sur $n \geqslant 3$ que si on a $0 \leqslant u_1, u_2 < F_n$, alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_k = 0$ (déjà u est à termes positifs).

Initialisation Si $n = 1$ ou $n = 2$, $0 \leqslant u_1, u_2 < 1$ et la suite est nulle. Si $n = 3$, $0 \leqslant u_1, u_2 < 2$ donc soit u_1 ou u_2 est nul, soit u_3 est nul.

Hérédité Soit $n \geqslant 4$ un entier tel que la propriété soit vraie aux rang $n-1$ et $n-2$. On prend $u_1, u_2 \in [\![0, F_n - 1]\!]$.

Si $u_1, u_2 < F_{n-1}$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Si $F_{n-1} \leqslant u_1, u_2 < F_n$, $|u_2 - u_1| < F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$, donc u_3 puis u_4 sont plus petits que F_{n-2}. Les termes suivants seront plus petits que ceux de la suite u commençant par u_3 et u_4, et l'hypothèse de récurrence assure qu'il existe $k \in [\![2, n]\!]$ tel que $u_k = 0$.

Si enfin $u_1 < F_{n-1} \leqslant u_2 < F_n$, on a deux cas.

— Si $u_3 < F_{n-1}$, les termes suivants sont plus petits que ceux de la suite qui commence par u_1 et u_3, tous deux plus petits que F_{n-1}. L'hypothèse de récurrence s'applique directement.

— Si $u_3 \geqslant F_{n-1}$, cela signifie que $u_2 - u_1 \geqslant F_{n-1}$. En particulier, $u_1 \leqslant u_2 - F_{n-1} < F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$.
De plus, $u_4 \leqslant |u_2 - u_3| < F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$ (on a $u_3 < F_n$). On peut alors appliquer notre hypothèse avec $0 \leqslant u_1, u_4 < F_{n-2}$ comme premiers termes de la suite, pour conclure. On raisonne de la même façon lorsque $u_2 < F_{n-1} \leqslant u_1 < F_n$.

Ceci achève la preuve de l'hérédité.

Il reste à calculer $F_{21} = 10946 > 10000$. Ainsi, la propriété étant vraie au rang 21, il existe un entier k entre 1 et 21 tel que $u_k = 0$. Ceci signifie en fait que deux des nombres u_i pour $i \in [\![1, k-1]\!]$ sont égaux, donc que pour tout $m \geqslant k$, $u_m = 0$. En particulier $u_{21} = 0$.

Solution de l'exercice 110 (résolu par Yaël Dillies)

On pose $a_1 < \cdots < a_{2n+1}$ les nombres inscrits sur les tickets.

On a directement $a_i \leqslant a_j + (i-j)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2n+1$. Donc pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$,

$$a_i = \frac{na_i}{n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=n+2}^{2n+1} (a_j + i - j) = \frac{a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1}}{n} + i - \frac{3}{2}n(n+1)$$

En appliquant cela à $i = 1, \ldots, n+1$, on trouve :

$$\begin{aligned} 2330 &\leqslant \sum_{i=1}^{2n+1} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{2n+1} a_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1}}{n} + i - \frac{3}{2}(n+1) \right) + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1} \\ &\leqslant 1165 \left(2 + \frac{1}{n}\right) + -(2n+1)\frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

D'où l'on tire $n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) \leqslant 1165$, puis $n \leqslant 10$ puisque $1165 < 1331 = 11^3 < 11 \cdot \left(11+\frac{1}{2}\right)(11+1)$ et que la quantité $n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$ est croissante en n. Réciproquement, $n = 10$ est possible en prenant $a_i = 100 + i$ pour tout $i \in [\![1, 21]\!]$:

— $a_1 + \cdots + a_{21} = 21a_{11} = 21 \cdot 111 = 2331 \geqslant 2330$

— $a_{i_1} + \cdots + a_{i_{10}} \leqslant a_{12} + \cdots + a_{21} = 10 \cdot \frac{121+112}{2} = 1165$

Le maximum cherché est donc 10.

Solution de l'exercice 111 (résolu par Justin Cahuzac)

Si $2 \leqslant k \leqslant n-1$, Théodore peut gagner de la façon suivante :

— Il commence par retourner les cartes de 1 à k, donc connaît leur ensemble.

— Ensuite, il retourne les cartes de 2 à $k+1$, et en déduit la valeur de la carte en position 1.

— En continuant ainsi, il peut deviner la valeur de toutes les cartes entre les positions 1 et $2n-k$. Comme $2n-k \geqslant n+1$, il y en a deux égales par le principe des tiroirs et il n'a plus qu'à les choisir pour gagner.

Si $k=n$, Théodore n'a pas de stratégie gagnante. En effet, quitte à réordonner les cartes, celles que retourne Théodore au premier coup sont aux n premières positions et sont numérotées $1,\dots,n$. Au tour suivant, Théodore choisit en fait $A \subset [\![1,n]\!]$ et $B \subset [\![n+1,2n]\!]$ tel que $|A|+|B|=n$ et retourne les cartes dont les positions sont dans $A \cup B$.

Il n'y a pas de doublons dans les cartes de B, donc il est possible que les cartes de A contiennent le complémentaire de B. Il retourne donc encore l'ensemble $[\![1,n]\!]$ et quitte à réordonner à nouveau, tout se passe comme s'il avait retourné encore une fois les n premières positions. Il n'obtient aucune information et n'est jamais certain de gagner.

Solution de l'exercice 113 (résolu par Justin Cahuzac et Yaël Dillies)
On va montrer par récurrence forte sur n que si Martin et Olivier jouent sur une ligne de n cases, et que Martin ne peut pas jouer dans un des bords et Olivier ne peut pas jouer dans l'autre, alors Olivier (qui joue en deuxième) gagne.

Initialisation : $n=0$ Martin ne peut pas jouer, Olivier gagne.

$n=1$ Marint ne peut pas jouer sur l'unique bord, donc Olivier gagne.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons la propriété vraie pour tout $m<n$.

Olivier peut toujours jouer dans le bord dans lequel Martin n'a pas pu jouer, sans perdre de généralités le bord gauche numéroté 1. Si Martin a joué dans la case $k>1$ (en effet, 1 étant le coin dans lequel il n'a pas pu jouer, donc $k>1$), on peut appliquer l'hypothèse sur la sous-ligne de 2 à $k-1$ contenant $k-2$ cases, et où Martin ne peut pas jouer au bord droit et Olivier au bord gauche. On peut également appliquer l'hypothèse sur la sous-ligne de $k+1$ à n contenant $n-k<n$ cases, et où Martin ne peut pas jouer dans le bord gauche (et Olivier peut choisir de ne pas jouer dans le bord droit). Olivier peut appliquer ses deux stratégies en tant que 2^{eme} joueur en parallèle, et ainsi gagner pour n cases. Ce qui achève la récurrence.

Si $n=1$, alors Martin gagne.

Maintenant, si $n \geqslant 2$, Olivier peut toujours jouer, son premier coup dans un bord et appliquer la stratégie de l'hérédit pour gagner, donc Olivier gagne.

Solution de l'exercice 114 (résolu par Elias Caeiro)

On vérifie par récurrence que pour tout entier n, $a_n = nF_n$ avec (F_n) la suite de Fibonacci.
• C'est évident pour les premiers termes.
• Supposons le résultat vrai jusqu'à $n+3$ avec $n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
a_{n+4} &= 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n && \text{(IX.1)}\\
&= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - nF_n && \text{(IX.2)}\\
&= (n+4)F_{n+3} + (n+2)F_{n+3} - (n+2)F_{n+1} - n(F_{n+1}+F_n) + (n+2)F_{n+2} && \text{(IX.3)}\\
&= (n+4)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - nF_{n+2} + (n+2)F_{n+2} && \text{(IX.4)}\\
&= (n+4)(F_{n+3}+F_{n+2}) = (n+4)F_{n+4} && \text{(IX.5)}
\end{aligned}$$

Il est donc suffisant de montrer que $n \mid F_n$ pour une infinité de n.

En notant α, β les deux racines (irrationnelles) de $X^2 - X - 1$, il est classique que pour tout n, $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$.

Notons $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $N : a + b\sqrt{5} \mapsto |a^2 - 5b^2|$ sa norme.
On a $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ où $\sqrt{5}$ est premier (sa norme, $5 = |0^2 - 5 \cdot 1^2|$, étant un nombre premier).
On a $\alpha - \beta = \sqrt{5}$.
On aura alors, en appliquant LTE dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, pour tout n :

$$v_{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) = 2v_{\sqrt{5}}(n)$$

Il suffit de montrer que si $\sqrt{5} \mid a - b$ et $\sqrt{5}$ ne divise ni a ni b, alors $v_{\sqrt{5}}\left(\frac{a^5 - b^5}{a-b}\right) = 2$

et que $v_{\sqrt{5}}\left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right) = 0$ si 5 ne divise pas n (le reste étant la même récurrence que pour LTE dans $\mathbb{Z}$).

Pour le premier point, on écrit $a - b = w\sqrt{5}$ avec $w \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ et on a :

$$\sum_{i=0}^{4} a^i b^{4-i} = \sum_{i=0}^{4} (b + w\sqrt{5})^i b^{4-i} \equiv \sum_{i=2}^{4} \left(b^4 + iwb^3\sqrt{5} + 5\frac{i(i-1)}{2}b^2w^2\right) + (b^4 + b^4 + b^3w\sqrt{5})[\sqrt{5}^3]$$

Donc

$$\sum_{i=0}^{4} a^i b^{4-i} \equiv 5b^4 + b^3w \cdot 10 \cdot \sqrt{5} + 50b^2w^2 \equiv 5b^4[\sqrt{5}^3]$$

Pour le second point, si 5 ne divise pas n, comme $a \equiv b[\sqrt{5}]$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1} \equiv nb^{n-1} \neq 0[\sqrt{5}]$$

On conclut en prenant $n = 5^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et on a $v_{\sqrt{5}}(F_n) = 2v_{\sqrt{5}}(n) = 4k$ Donc dans $\mathbb{Z}$, $v_5(F_n) = 2k \geq k$ donc $n = 5^k \mid F_n$.

Solution de l'exercice 116 (résolu par Pierre-Andréa Silvente et Alexandre Ittah)

Comme pour tout i,

$$a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 = (a_{i+1} - a_{i+2})^2 + 2a_{i+1}a_{i+2} > 2a_{i+1}a_{i+2} > 0$$

on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2} &< \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{a_{i+1}a_{i+2}} && \text{(IX.6)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2016} \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{a_{i+1}a_{i+2}} && \text{(IX.7)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_{i+2}} && \text{(IX.8)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{2018}}\right) && \text{(IX.9)}\\
&< \frac{1}{2\cdot a_2} \leq \frac{1}{2\cdot(1+a_1)} = \frac{1}{2016} && \text{(IX.10)}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 117 (résolu par Yaël Dillies)

1. Considérons $(n, a) \in \mathbb{N}^2$ une solution de $n^2 - 10a^2 = -1$, avec $a > 5$. C'est une équation de Pell qui possède une infinité de solutions puisque $3^2 - 10 \cdot 1^2 = -1$. On a alors $5 < a < 2a \leqslant 2\sqrt{\frac{n^2+1}{10}} < \sqrt{n}$, donc $n^2 + 1 = 5 \cdot a \cdot 2a | n!$.
2. Prenons $p \equiv 1[4]$ un nombre premier. Comme $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 \equiv -11[p]$. De plus, on peut choisir $n < p$, de sorte que $\not| n!$ mais $p | n^2 + 1$. Comme il existe une infinité de tels p, on peut trouver une infinité d'entiers tels que $n^2 + 1 \not| n!$.

Solution de l'exercice 118 (Résolu par Brieux Madeline-Derou)
La permutation

$$(1, 3, 5, \ldots, 95, 97, 99, (100, 98, 6), (96, 94, 22), (92, 90, 38), (88, 86, 54),$$

$$(84, 82, 70), (80, 78, 76, 10), (74, 72, 70, 36), (68, 66, 64, 62), (60, 58, 56, 44, 40, 8, 2),$$

$$(52, 50, 48, 46, 42, 26, 12), 34, 32, 30, 28, 24, 20, 18, 16, 14, 4)$$

permet d'obtenir 60 carrés parfaits. En effet, on vérifie facilement que l'on obtient 50 carrés parfaits de la forme $1 + 3 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$, et 10 autres carrés en additionnant à $1 + \ldots + 99 = 50^2$ les termes entre parenthèses successivement.

Supposons par l'absurde que l'on ait une permutation $(a_1, \ldots, a_{100})$ permettant d'obtenir 61 carrés parfaits. On commence par remarquer que $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$ donc le carré maximum atteignable est $71^2 = 5041$.

Il est clair que si une des sommes $a_1 + \ldots + a_i$ est un carré, le carré suivant que l'on obtient est strictement supérieur à ce dernier, car tous les a_i sont strictement positifs.

Or, pour passer de a^2 à $(a + 1)^2$, il faut ajouter $2a + 1$, et donc il faut sommer au moins un nombre impair. Comme il n'y a que 50 nombres impairs entre 1 et 100, on ne peut passer de a^2 à $(a + 1)^2$ que 50 fois au plus.

Ainsi, les autres "transitions" entre deux carrés nécessitent de passer de a^2 à $(a + k)^2$ avec $k \geq 2$. Ainsi, le 61e carré vaudra au moins $50 + 2 \cdot (61 - 50) = 72$. Mais $72^2 > 5050$, ce qui est absurde.

Le nombre cherché est donc 60.

Solution de l'exercice 121 (résolu par Lucas Nistor)
Sans perte de généralité , on prendra les x_i dans l'ordre croissant.
Posons

$$P(x_1) = c.$$

On appellera un entier $r \in [\![1, r]\!]$ *référent* ssi $P(x_r) = c$. On notera R l'ensemble des entiers référents.

Lemme 2.
On a $k \in R$.

Démonstration. Comme les x_i sont tous distincts et rangés par ordre croissant, pour tout i $x_{i+1} \geqslant x_i$, ce qui donne par récurrence immédiate, pour tout i, $x_i \geqslant x_1 + i - 1$.
Dès lors, $x_x - x_1 \geqslant k - 1$.
De plus $P(x_1) \in [\![1, k-1]\!]$ et $P(x_k) \in [\![1, k-1]\!]$, donc

$$|P(x_k) - P(x_1)| = \max(P(x_1, P(x_k))) - \min(P(x_k), P(x_1)) \geqslant (k-1) - 1 = k - 2.$$

On a donc $|x_k - x_1| > |P(x_k) - P(x_1)|$.
Or comme $P \in \mathbb{Z}[X]$ on a $|x_k - x_1| \mid |P(x_k) - P(x_k)|$.
Donc $P(x_1) - P(x_k)| = 9$ i.e $P(x_k) = P(x_1) = c$. □
Notons

$$Q(X) = P(X) - c$$

et

$$A(X) = \prod_{r \in R} (X - x_r).$$

Comme A est unitaire, on peut écrire

$$Q(X) = A(X)U(X) + B(X)$$

avec $U, B \in \mathbb{Z}[X]$ et $\deg(B) < \deg(A)$.
Pour tout $r \in R$, $P(x_r) = c$, $Q(x_r) = 0$ et $A(x_r) = 0$ donc $B(x_r) = 0$.
Si $B \neq 0$ cela implique que $\deg(B) \geqslant |R|$ (car les x_r, $r \in R$ sont deux à deux distincts).
Or $\deg(B) < \deg(A) = |R|$.
Donc $B = 0$ et $Q(X) = A(X)U(X)$, donc

$$P(X) = A(X)U(X) + c.$$

Lemme 3.
Pour tout $i \in [\![2, k-1]\!]$, $|x_i - x_1| \geqslant \dfrac{k-1}{2}$ ou $|x_i - x_k| \geqslant \dfrac{k-1}{2}$.

Démonstration. Si $x_i - x_1 \geqslant \frac{k-1}{2}$, alors $|x_i - x_1| \geqslant \frac{k-1}{2}$.
Sinon $x_i - x_1 < \frac{k-1}{2}$, donc $x_k - x_1 = (x_k - x_1) - (x_i - x_1) > x_k - x_1 - \left(\frac{k-1}{2}\right)$.
Or, comme vu précédemment $x_k - x_1 \geqslant k - 1$.
Donc $x_k - x_i > \frac{k-1}{2}$, i.e $|x_k - x_i| > \frac{k-1}{2}$. □
Supposons par l'absurde qu'il existe $i \in [\![1, k]\!] \backslash R$.
On a donc $P(x_i) \neq 0$ et $P(x_i) - c = A(x_i)U(x_i)$, donc $U(x_i) \neq 0$. Donc $|U(x_i)| \geqslant 1$.

Et $P(x_i)$ et c sont dans $[\![1, k-1[\![$ donc $|P(x_i) - c| \leqslant (k-1) - 1 = k-2$.
D'autre part, $|P(x_i) - c| = |A(x_i)U(x_i)| \geqslant |A(x_i)$.
Donc

$$A(x_i) \leqslant k-2.$$

Posons $e = 1$ si $|x_i - x_1| \geqslant \frac{k-1}{2}$ et $e = k$ sinon.
Par le lemme 3, $|x_i - x_e| \geqslant \dfrac{k-1}{2}$.
Par le lemme 2, $1 \in R$ et $k \in R$, donc $(X - x_e)|A(X)$.
Ainsi comme

$$|A(x_i)| = |x_i - x_e| \times \left| \prod_{r \in R\setminus\{e\}} (x_i - x_r) \right|$$

on a

$$k-2 \geqslant \left(\frac{k-1}{2}\right) \times \left| \prod_{r \in R\setminus\{e\}} (x_i - x_r) \right|.$$

Donc $\left|\prod_{r\in R\setminus\{e\}}(x_i - x_r)\right| < 2$, i.e $\left|\prod_{r\in R\setminus\{e\}}(x_i - x_r)\right| \leqslant 1$.
Comme $P(x_i) \neq c$ alors $A(x_i) \neq 0$ donc $A(x_i) \neq 0$.
Donc

$$\left| \prod_{r \in R\setminus\{e\}} (x_i - x_r) \right| = 1.$$

Comme le x_i est le même dans tour des termes mais que x_r change chaque fois, les termes de ce produit sont 2 à 2 distincts.
D'autre part, ce sont des entiers qui divisent 1, i.e ± 1. Il y a donc au plus 2 termes.
On a donc $|R| \leqslant |R\setminus\{e\}| + 1 \leqslant 2 + 1 = 3$.
Comme $\left|\prod_{r\in R\setminus\{e\}}(x_i - x_r)\right| = 1$ on a $|x_i - x_1| = 1$ ou $x_i - x_k| = k$, i.e $x_i = x_1 + 1$ ou $x_i = x_i = x_k + 1$ (car $x_1 \leqslant x_i \leqslant x_k$), donc $|[\![1, k]\!]\setminus R| \leqslant 2$.
Ainsi, on a

$$k = |[\![1, k]\!]| = |[\![1, k]\!]\setminus R| + |R| \leqslant 2 + 3 = 5.$$

Or $k \geqslant 6$.
Absurde.

Solution de l'exercice 126 (résolu par Justin Cahuzac)
On va montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$, que si on a n entiers $a_1, a_2, ..., a_n$ non nuls, tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on ait $k_i = \dfrac{a_{i+1} + a_{i-1}}{a_i}$ avec k_i entier, alors $2n \leqslant k_1 + ... + k_n < 3n$. Avec $a_0 = a_n$ et $a_1 = a_{n+1}$.
Initialisation : $n = 1$: on a $k_1 = \frac{a_1+a_1}{a_1} = 2$, donc $2 \leqslant k_1 < 3$.
Hérédité : On prend $n \geqslant 2$ et on suppose la propriété vraie pour n. On prend a_k le plus grand des $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (pas forcément strictement. On a $a_k \geqslant a_{k-1}, a_{k+1}$.
Si $a_k = a_{k-1}$, alors $a_k \mid a_{k+1}$, donc $a_k = a_{k+1} = a_{k-1}$, ainsi $k_k = 2$. On peut ensuite supprimer a_k du cercle et utiliser l'hypothèse sur $a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n$. Les voisins de a_{k-1}

et de a_{k+1} ne changeant pas. $2(n-1) \leqslant k_1 + ... + k_{k-1} + k_{k+1} + ... + k_n < 3(n-1)$, donc : $2n \leqslant k_1 + ... + k_n < 3(n-1) + 2 < 3n$.

Si $a_k > a_{k-1}$, comme $2a_k > a_{k-1} + a_{k+1}$, on a forcément $a_{k-1} + a_{k+1} = a_k$, et $k_k = 1$. On a $a_{k-1} \mid a_k + a_{k-2} = a_{k-1} + a_{k+1} + a_{k-2}$, donc $a_{k-1} \mid a_{k+1} + a_{k-2}$. De même, $a_{k+1} \mid a_{k-1} + a_{k+2}$. On a aussi $k'_{k-1} = \frac{a_{k+1}+a_{k-2}}{a_{k-1}} = k_{k-1} - 1$ et $k'_{k+1} = \frac{a_{k+2}+a_{k-1}}{a_{k+1}} = k_{k+1} - 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence sur $a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n$ et on obtient $2(n-1) \leqslant k_1 + ... + k'_{k-1} + k'_{k+1} + ... + k_n < 3(n-1)$. Il suit $2n \leqslant 2n+1 \leqslant k_1 + ... + k_n < 3(n-1) + 3 = 3n$. Ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 127 (Résolu par Vladimir Ivanov)
Ici les indices seront considérés modulo n. On note $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n | x_1 + \cdots + x_n = -1\}$. On dit, pour deux éléments de S $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$, que $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ s'il existe un entier d tel que $x_i = y_{i+d}$ pour tout entier i. Cette relation est une relation d'équivalence. Notons deux plus que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est dans S et $(y_1, \ldots, y_n)$ est tel que $x_i = y_{i+d}$, par n périodicité, $y_1 + \cdots + y_n$ est dans S.

Montrons que

— Chaque classe d'équivalence de $\sim$ sur S a une taille de n, ce qui équivaut à montrer que pour tout élément $(x_1, \ldots, x_n)$ de S la plus petite période de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est n.

— Chaque classe d'équivalence contient exactement un élément $(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifie pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $x_1 + \cdots + x_i \geqslant 0$ (on dira qu'un tel élément est "à sommes positives").

Pour le premier point, soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un élément de S et d sa plus petite période strictement positive. Comme une somme de période est une période, et une multiple d'une période est une période, on en déduit que pour tout entier u, v, $un+vd$ est une période. En particulier, par Bézout, le pgcd de n et d et une période strictement positive, valant au plus d : on en déduit que $PGCD(d, n) = d$ donc d divise n. En particulier, si on note $S = x_1 + \cdots + x_d$, par d périodicité, on a $-1 = x_1 + \cdots + x_n = \frac{n}{d}S$, donc $\frac{n}{d}$ divise 1, donc $d = n$ ce qui conclut.

Pour le second point, soit une classe d'équivalence de $\sim$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ un élément de cette classe on pose pour $1 \leqslant i \leqslant 2n$, $y_i = x_1 + \cdots + x_i$ et $y_0 = 0$. On représente graphiquement les points (i, y_i) dans un repère orthonormé et on relie les points d'abcisse consécutive. Prenons une droite de pente $\frac{-1}{n}$ placée en dessous de la figure précédente, on la remonte jusqu'à qu'elle touche un point de la forme (i, y_i). Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$ tel que (i, y_i) soit sur la droite, notons que $(i+n, y_{i+n})$ y est aussi car c'est la translation du point précédent par le vecteur $(n, -1)$. Considérons l'élément $(x_{i+1}, \ldots, x_{n+i})$ qui est dans la même classe d'équivalence que $(x_1, \ldots, x_n)$. Si $1 \leqslant j \leqslant n-1$, alors $y_{i+j} - y_i \geqslant -\frac{j}{n}$ car (j, y_j) est au dessus de la droite. Comme les (y_k) sont entiers, on a donc $y_{i+j} - y_i > -1$ donc $y_{i+j} - y_i \geqslant 0$, donc $x_{i+1} + \cdots + x_{i+j} \geqslant 0$ pour tout j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Ainsi $(x_{i+1}, \ldots, x_{n+i})$ vérifie le deuxième point : il existe donc un élément à sommes positives dans chaque classe d'équivalence.

De plus, il y a unicité : en effet soit j un entier vérifiant $0 \leqslant j \leqslant n-1$ tel que $(x_{j+1}, \ldots, x_{n+j})$ soit à sommes positives. Soit k l'entier entre 1 et n tel que $j + k \equiv i \pmod{n}$, si $k \neq 0$, on a $y_j - y_{j+k} \geqslant \frac{k}{n}$ donc $y_j - y_{j+k} \geqslant 1$. En particulier, $x_{j+1} + \cdots + x_{j+k} \leqslant -1$ ce qui est absurde. En particulier on a forcément $k = 0$, donc $j \equiv i \pmod{n}$ ce qui par n périodicité prouve l'unicité.

En particulier, si on regarde les classes d'équivalence de la relation, elles sont de cardinal n et contiennent exactement un n uplet à sommes positives : ce qui prouve que $M = \dfrac{N}{n}$.

Solution de l'exercice 133 (Résolu par Elias Caeiro)

Notons que par Zsigmondy, si $n \neq 3$, 2^n+1 admet un facteur premier primitif qui est donc congru à 1 modulo $2n$. En effet si on note q ce facteur, $q \neq 2$ et l'ordre de 2 modulo q divise $2n$, mais ne divise pas n. En particulier l'ordre s'écrit $2a$ avec a qui divise n. On sait donc que p divise $\frac{2^{2a}-1}{2^a-1} = 2^a+1$ ainsi on a forcément $a = n$ car q est primitif.

En particulier $\sigma(2^n+1) > 2n$. Or si on note $p_1, \dots, p_k$ les facteurs premiers de n, on a $n \geqslant p_1 \dots p_k$ et $\sigma(n) = p_1 + \dots + p_k \leqslant 2p_1 \times \dots \times p_k$ (on montre cela facilement par récurrence sur k car tous les p_i valent au moins 2).

Il reste donc à regarder le cas $n = 3$: on a $2^n + 1 = 9$ donc $\sigma(2^n+1) = \sigma(n) = 3$. Ainsi seul $n = 3$ est solution.

Solution de l'exercice 137 (Résolu par Anna Luchnikova)
Nous allons montrer que le milieu J de $[O_1O_2]$ est le centre du cercle circonscrit de P, Q et D. La preuve se fera en 3 étapes :

Lemme 1 : On note M le milieu de $[BC]$. Alors P, Q, D et M sont cocycliques.

Lemme 2 : J est sur la médiatrice de $[DM]$.

Lemme 3 : J est sur la médiatrice de $[PQ]$.

Conclusion

Lemme 1 : Les points P, Q, D et M sont cocycliques.

Preuve : Soit X le point d'intersection de (BC) et (FE). Prouvons que X, D, B et C sont harmoniques. (fig 1)

Soit (ω) le cercle inscrit dans ABC. D, E et F sont alors les points de tangence de (ω) avec $(BC), (CA)$ et (AB) respectivement. Puis on note aussi Y l'intersection de (FE) et (AD). Comme X est sur la polaire de A par rapport à (ω), qui est (FE), A est sur la polaire de X par rapport à (ω). Le point D est également sur cette polaire. Ainsi, la polaire de X est (AD) et Y y appartient. Ainsi, par la définition de la polaire :

$$b_{X,Y,F,E} = -1 \Longrightarrow b_{(AX),(AY),(AF),(AE)} = -1 \Longrightarrow b_{X,D,B,C} = -1 \quad \text{(par projection de } A \text{ sur } (BC))$$

Mais alors, par relation de Mac-Laurin :

$$XB \cdot XC = XD \cdot XM$$

Or, comme B, C, P, Q sont cocycliques :

$$XB \cdot XC = XP \cdot XQ$$

Donc, on a $XP \cdot XQ = XD \cdot XM$, ce qui prouve le lemme 1.

Lemme 2 : J est sur la médiatrice de $[DM]$.

Preuve : Soit H_1 (resp H_2) le projeté orthogonalde O_1 (resp O_2) sur (BC). On définit également R et S comme sur la fig. 2. On définit aussi $\widehat{ABC} = 2\beta$ et $\widehat{ACB} = 2\gamma$. Puis, il est classique que O_1 (resp O_2) est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas C (resp de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ ne contenant pas B). Montrons que $DH_1 = MH_2$. Nous avons par définition de O_1 : $O_1I = O_1B$

$$\Longrightarrow \widehat{O_1IB} = \widehat{O_1BI} = \widehat{O_1BA} + \widehat{ABI} = \widehat{O_1CA} + \widehat{ABI} = \gamma + \beta$$

De plus $\widehat{BID} = 90 - \widehat{IBD} = 90 - \beta$. D'où $\widehat{O_1IR} = \widehat{O_1ID} - 90 = \gamma + \beta + 90 - \beta - 90 = \gamma$. Ainsi, comme $\widehat{O_1RI} = 90$, $IR = \cos\gamma \cdot O_1I = \cos\gamma \cdot O_1B$. D'où $DH_1 = \cos\gamma \cdot O_1B$.

On continue. Soit O le centre du cercle circonscrit de ABC. (O_2O) est la médiatrice de $[AC]$, et donc on a : $(O_2O) \perp (AC)$ et :

$$\widehat{SO_2O} = 90 - \widehat{ASO_2} = 90 - \widehat{CSH_2} = \widehat{ACB} = 2\gamma$$

Donc, comme $\widehat{O_2SO} = 90$, on a $SO = \sin 2\gamma \cdot O_2O = 2\cos\gamma \cdot \sin\gamma \cdot O_2O$. Cependant, par la loi des sinus, comme $O_1B = O_1A$, $\widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB} = \gamma$ et O_2O est un rayon du cercle circonscrit à A_1O_1B, on a par loi des sinus :

$$SO = 2O_2O \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma = \frac{O_1B}{\sin\gamma} \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma = O_1 \cdot \cos\gamma = DH_1$$

Donc $DH_1 = MH_2$.

Cf fig. 3. Soit N le milieu de $[DM]$. Comme $H_1D = H_2M$, on a $NH_1 = NH_2$. Puis comme $(O_2H_2) \perp (H_1H_2)$ et $(O_1H_1) \perp (H_1H_2)$, ainsi que N est le milieu de $[H_1H_2]$ et J est le milieu de $[O_1O_2]$, on a $(JN) \perp (H_1H_2)$, ce qui implique que (JN) est la médiatrice de $[H_1H_2]$.

Comme $ND = NM, NH_1 = NH_2$, on en déduit (JN) est aussi la médiatrice de $[DM]$, ce qui achève la preuve du lemme 2.

Lemme 2 : J est sur la médiatrice de $[PQ]$ (fig. 4).

Preuve : Tout d'abord on note que (AI) étant l'axe radical des cercles circonscrits à AIB et AIC, on a $(AI) \perp (O_1O_2)$. De plus, il est classique que $(AI) \perp (FE)$. Donc $(O_1O_2)//(PQ)$.

Les médiatrices de $[PQ]$ et $[O_1O_2]$ passent par O et sont parallèles ou confondues. Ainsi, ces dernières sont confondues, et donc la médiatrice de $[PQ]$ passe par la milieu de $[O_1O_2]$.

Le lemme 3 est prouvé.

Conclusion : Puisque P, Q, D et M sont cocycliques, le centre du cercle circonscrit de PQD se situe sur les médiatrices de $[DM]$, et $[PQ]$. Or, on sait que celles-ci s'intersectent en J. Donc J est le centre du cercle circonscrit de PQD, et $J \in (O_1O_2)$.

Solution de l'exercice 138 (Résolu par Elias Caeiro)

Soit p un nombre premier, r_p une racine rationnelle de $pP + Q$. Comme $deg(P) > deg(Q)$, il existe un entier M tel que pour tout x vérifiant $|x| > M$, on a $|P(x)| > |Q(x)|$ donc $p|P(x)| > |Q(x)|$. Par inégalité triangulaire, $|pP(x) - Q(x)| > 0$.

En particulier on obtient que $|r_p| \leqslant M$. Le théorème de Bolzano Weierstrass affirme que qu'il existe ϕ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{P}$ telle que $(r_{\phi(p)})$ converge vers une limite r. On souhaite montrer que r est rationnel. Supposons $r \neq 0$,, il suffit de montrer que les dénominateurs irréductibles de $r_{\phi(n)}$ sont bornés. En effet, s'ils sont borné par un entier positif k, la suite $k!r_{\phi(n)}$ est à valeurs entières et converge, donc stationne à partir d'un certain rang. Ainsi $(r_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ est stationnaire et à valeurs rationnelles, sa limite r est rationnelle. Supposons que les dénominateurs irréductibles de $r_{\phi(n)}$ ne sont pas bornés. Quitte à réextraire, le dénominateur de $r_{\phi(n)}$ tend vers $+\infty$.

Soit p un nombre premier, comme r_p est une racine de $pP+Q$, si on note $a \neq 0$ le coefficient dominant de P, on sait que le dénominateur de r_p divise $p \times a$. En particulier, comme le dénominateur de $r_{\phi(n)}$ tend vers $+\infty$, il ne peut diviser a pour n grand, donc est multiple de p. De plus si on note b et c les termes constants de P et Q, le dénominateur de r_p divise $bp + c$.

On pose $p = \phi(n)$

Soit s_p entier tel que $r_p = \frac{s_p}{pf_n}$. Vu la remarque précédente r_p divise $f_n \times (bp + c)$. On pose donc t_p l'entier tel que $s_pt_p = (bp+c)f_n$. On a donc $t_{\phi(n)} = \frac{(bp+c)f_n}{s_p} = \frac{(pb+c)}{pr_p} = \frac{1}{r_p\phi(n)}(b+\frac{c}{\phi(n)})$ qui

tend vers $\frac{b}{r}$. Ainsi la suite $(t_{\phi(n)})$ est une suite entière convergente, elle est donc stationnaire, ainsi $\frac{b}{r}$ est entier, donc r est rationnel ce qui conclut.

Solution de l'exercice 139 (Résolu par Vladimir Ivanov)
Soient M_A, M_B, M_C les milieux de $[BC], [CA]$ et $[AB]$.
Lemme 1 : l_A est symétrique de (AI) par rapport à M_A (pareil pour l_B et l_C).
Preuve : (Cf. fig. **??**). Soient H et H' les orthocentres respectifs de IBC et I_ABC. On a :

$$BH \perp IC, CI_A \perp IC \Longrightarrow BH \parallel CI_A$$

De même, $CH \parallel BI_A, BH' \parallel CI, CH' \parallel CI$. Soit S la symétrie de centre M_A. On a $S : B \leftrightarrow C$, donc d'après les parallélismes mentionnées ci-dessus :

$$\begin{aligned} S\colon CH &\leftrightarrow BI_A \\ BH &\leftrightarrow CI_A \\ BH' &\leftrightarrow CI \\ CH' &\leftrightarrow BI \end{aligned}$$

Donc $S : CH \cap BH \leftrightarrow BI_A \cap CI_A$, soit $S : H \leftrightarrow I_A$, et $S : CH' \cap BH' \leftrightarrow BI \cap CI$, soit $S : H' \leftrightarrow I$, d'où $S : HH' \leftrightarrow II_A$, soit $S : l_A \leftrightarrow II_A$, ce qui conclut la preuve du lemme.

(Cf. fig. **??**). Maintenant, soit I'_A, I'_B, I'_C les symétriques de I par rapport à M_A, M_B, M_C resp. Par Thalès, $I'_CI'_B \parallel M_BM_C \parallel BC$ de même que $I'_AI'_B \parallel AB$ et $I'_CI'_A \parallel AC$. Donc, ABC et $I'_AI'_BI'_C$ sont homothétiques (ou translatés). Mais, par le même Thalès : $I'_BI'_C = 2M_CM_B = 2(\frac{1}{2}BC) = BC$, donc ils sont même centralement symétriques (homothétiques de rapport -1).

Cette symétrie envoie A sur I'_A, donc AI sur la parallèle à AI par I'_A, c'est à dire l_A (en effet c'est le symétrique de AI par rapport à M_A).

Mais donc, l_A, l_B, l_C sont les images de AI, BI, CI par cette même symétrie, ce qui conclut car la symétrie conserve la concourance.

Solution de l'exercice 141 (Résolu par un élève resté anonyme)

Si q est premier et que $q \mid \frac{p^p-1}{p-1} = \Phi_p(p)$, alors $p \mid q-1$ par polynômes cyclotomiques. Clairement $p \nmid 1$, donc $q \neq 2$.
Ainsi p et q sont impairs, donc $2p \mid q-1$.

Ainsi, $\dfrac{pn+1}{\operatorname{pgcd}(pn+1, \Phi_p(p)} \equiv pn+1 \equiv p+1 \pmod{2p}$.
Or $\dfrac{pn+1}{\operatorname{pgcd}(pn+1, \Phi_p(p)} \mid p-1 < p+1$, contradiction.

Solution de l'exercice 142 (résolu par Justin Cahuzac)
On note a_i le nombre de la première ligne de la i-ème colonne et b_i le nombre de la deuxième ligne de cette même colonne.

On a $a_i + b_i = 1$.

Quitte à réordonner les colonnes, on peut supposer que $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ e t donc $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n$. On veut maintenant trouver un indice l tel que $a_1 + \cdots + a_l \leqslant \frac{n+1}{4}$ et $b_{l+1} + \cdots + b_n \leqslant \frac{n+1}{4}$.

Pour cela, on prend le plus grand entier tel que $a_1 + \cdots + a_l \leqslant \frac{n+1}{4}$. On échoue si et seulement si $a_1 + \cdots + a_{l+1} > \frac{n+1}{4}$ et $b_{l+1} + \cdots + b_n > \frac{n+1}{4}$. Mais alors $(l+1)a_{l+1} \geqslant a_1 + \cdots + a_{l+1} > \frac{n+1}{4}$, ce qui implique $a_{l+1} > \frac{n+1}{4(l+1)}$, et $(n-l)b_{l+1} \geqslant b_{l+1} + \cdots + b_n > \frac{n+1}{4}$ donc $b_{l+1} > \frac{n+1}{4(n-l)}$.

Dans ce cas, on se retrouve avec $1 = a_{l+1} + b_{l+1} > \frac{n+1}{4}\left(\frac{1}{l+1} + \frac{1}{n-l}\right) \geqslant \frac{n+1}{4}\frac{4}{n+1}$ d'après l'inégalité du mauvais élève, ce qui est impossible.

Donc si $l = n$, c'est bon, et sinon, on a bien $a_1 + \cdots + a_l + 1 > \frac{n+1}{4}$, donc $b_{l+1} + \cdots + b_n \leqslant \frac{n+1}{4}$, et l'on obtient bien :

$$a_1 + \cdots + a_l + b_{l+1} + \cdots + b_n \leqslant \frac{n+1}{2}$$

Solution de l'exercice 143 (résolu par Elias Caeiro)

On se place dans $\mathbb{F}_{p^2}$ l'ensemble des racines de polynômes quadratiques à coefficients dans $\mathbb{F}_p$: si $P \in \mathbb{F}_p[X]$ est irréductible de degré 2, $\mathbb{F}[X]/\langle P\rangle$ est un corps de cardinal p^2 et P y admet une racine (X). Par unicité (à isomorphisme près) du corps à p^2 éléments, on peut l'identifier à $\mathbb{F}_{p^2}$. Pour le degré 1, c'est évident.

Si $X^2 - aX - b$ a une racine double, $x_n = P(n)\alpha^2$ avec α la racine double et $P \in \mathbb{F}_p[X]$ de degré 1. La période divise alors $p(p-1)$ et en particulier $t_p \leqslant p^2 - 1$.

Si $X^2 - aX - b$ a deux racines distinctes α et β, alors $x_n = \mu\alpha^n + \nu\beta^n$ avec $\mu, \nu \in \mathbb{F}_{p^2}^*$. Par le théorème de Lagrange (dans $(\mathbb{F}_{p^2}, \cdot)$ de cardinal $p^2 - 1$), la période divise $p^2 - 1$).

Enfin, montrons que la période peut valoir $p^2 - 1$ (ce sera donc le maximum).

Comme $(\mathbb{F}_{p^2}^*, \cdot)$ est cyclique, il existe un élément α d'ordre $p^2 - 1$. Mais comme l'ordre de α ne divise pas $p - 1$, $\alpha \notin \mathbb{F}_p$. On pose $x_n = \alpha^n + \bar{\alpha}^n$ où $\bar{\alpha}$ est le conjugué de α (l'autre racine de son polynôme minimal dans $\mathbb{F}_p[X]$). C'est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de période t divisant $p^2 - 1$.

On a $\alpha^t + \bar{\alpha}^t = 2$, $\alpha^{t+1} + \bar{\alpha}^{t+1} = \alpha + \bar{\alpha}$. Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \bar{\alpha} \end{vmatrix} = \alpha - \bar{\alpha} \neq 0$, il existe une unique solution au système

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ \alpha x + \bar{\alpha} y = \alpha + \bar{\alpha} \end{cases}$$

Donc $x = a^t = 1$ et $y = \bar{\alpha}^t = 1$. Mais α est d'ordre $p^2 - 1$ donc $p^2 - 1 | t | p^2 - 1$, ce qui conclut : $t = p^2 - 1$.

X. Citations mémorables

— *Martin* : « Donc pour faire ça... je propose qu'on change l'énoncé. »

— *Rémi* : « La définition des équatons fonctionelles c'est bidouiller. »

— *Aline* : « On devrait faire un club d'élèves à qui j'ai donné des exos faux... »

— *Aline* : « Il ne faut pas essayer d'être plus intelligent que celui qui a crée l'exo. »

— *Paul*, en plein cours : fait l'avion

— *Théo*, sur un exo parlant de de parisiens : « Il y a donc 600 000 cas. »
Une élève : « 600 001 si on compte les chauves. »
Théo : « Merci Mathieu Barré. »

— *Tristan*, alors qu'un hélico passe au loin : « Il y a une différence entre sauver des vies et tourner autour de ma salle. »

— *Mathieu* vient parler à un groupe d'élèves, puis repart
Lise : « Ah. Je croyais qu'il allait nous dire un truc intéressant. »

— *Yaël*, pendant une preuve particulièrement bidouillée d'Aurélien : « T'as des remises chez Castorama pour faire autant de bricolage ? »

— *Justin*, sur ce même exercice : « Je suis à peu près convaincu que je ne serai pas convaincu. »

— Martin essaye de motiver Hannah : « Alors, que penses tu de cet exo ? »
Hannah : « Ben, il a l'air vrai. »

— *Paul* : « Votre défi, c'est pas de faire des maths, c'est de parler plus fort qu'Auguste. »

— *Paul* : « Laissez moi penser que je sers à quelque chose. »

— *Théo* : « Étrange. Quand il s'agit de comprendre les maths, vous y arrivez, mais quand il s'agit de comprendre mes blagues j'en vois juste deux qui se forcent à rire. »

— *Tristan*, quand le tex a réussi à compiler : « Vive la vie. »