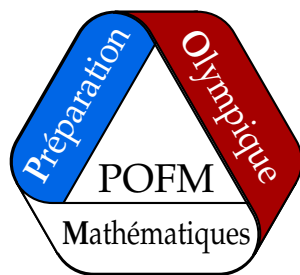


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 1ER AVRIL 2020

DURÉE : 4H

## Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Merci de respecter **impérativement** la numérotation des exercices.
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après. Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant. Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- ▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- ▷ Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

**Chaque exercice est noté sur 7 points.**

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique à l'adresse suivante :

`copies.ofm@gmail.com`

## Exercices Junior

*Exercice 1.* Soit  $a_1, a_2, \dots$  la suite d'entiers telle que  $a_1 = 1$  et, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1.$$

Démontrer, pour tout entier  $n \geq 1$ , que  $a_n^2 + 1$  divise  $a_{n+1}^2 + 1$ .

*Exercice 2.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

*Exercice 3.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

*Exercice 4.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

## Exercices Senior

*Exercice 5.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

*Exercice 6.* Soit  $ABC$  un triangle acutangle tel que  $\widehat{CAB} > \widehat{BCA}$  et soit  $P$  le point du segment  $[BC]$  tel que  $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ . Soit  $Q$  le point d'intersection, autre que  $A$ , entre le cercle circonscrit à  $ABP$  et la droite  $(AC)$ . Soit ensuite  $D$  le point du segment  $[AP]$  tel que  $\widehat{QDC} = \widehat{CAP}$ , puis  $E$  le point de  $(BD)$ , autre que  $D$ , tel que  $CE = CD$ . Enfin, soit  $F$  le point d'intersection, autre que  $C$ , entre le cercle circonscrit à  $CQE$  et la droite  $(CD)$ , et soit  $G$  le point d'intersection des droites  $(QF)$  et  $(BC)$ .

Démontrer que les points  $B, D, F$  et  $G$  sont cocycliques.

*Exercice 7.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**