Mathématiques discrètes

Examen 1

BUT Informatique 1 2021–2022

jeudi 28 octobre 2021

Exercice 1. (Calcul ensembliste)

Soient les quatre ensembles

$$A := \{0, 1, 2\}, \quad B := \{2x : x \in \mathbb{N}\}, \quad C := \{2x + 3 : x \in \mathbb{N}\}, \quad D := \{x \in \mathbb{Z} : x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 12\}.$$

Pour chacune des expressions suivantes, donner son résultat sous une forme la plus simple possible. Faire figurer les étapes du calcul quand cela est nécessaire.

1. $A \cap B$. **2.** $B \cap D$. **3.** $C \cup D$. **4.** $B \cup C$. **5.** $C \setminus D$. **6.** $\mathscr{P}(B)$.

Exercice 2. (Des opérations sur les ensembles)

Soient $\odot$ et $\boxdot$ deux opérations définies pour tous ensembles A et B par

$$A \odot B := (A \times B) \cup (B \times A) \qquad \text{et} \qquad A \boxdot B := (A \cup B) \times (B \cup A).$$

1. Calculer $\{1, 2\} \odot \{1, 2\}$ et $\{1, 2\} \boxdot \{1, 2\}$. Faire figurer les étapes intermédiaires des calculs.

2. Démontrer que pour tout ensemble A, on a $A \odot A = A \times A$.

3. Démontrer que pour tout ensemble A, on a $A \boxdot A = A \times A$.

4. Calculer $\{1, 2\} \odot \{2, 3\}$ et $\{1, 2\} \boxdot \{2, 3\}$. Faire figurer les étapes intermédiaires des calculs.

5. Démontrer que pour tous ensembles A et B, on a $A \odot B \subset A \boxdot B$.

6. Déterminer si, pour tous ensembles A et B, on a $A \odot B = A \boxdot B$. Justifier la réponse.

7. En utilisant les questions 2., 3. et 5. (que l'on pourra admettre si elles n'ont pas été traitées), démontrer que pour tous ensembles A et B, on a $(A \boxdot A) \odot (B \boxdot B) \subset (A \odot A) \boxdot (B \odot B)$.

Exercice 3. (Ensemble de sommes)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Nous définissons alors l'ensemble

$$S(A) := \{x + y : x \in A \text{ et } y \in A\}.$$

1. Calculer $S(A)$ lorsque $A := \{0, 1, 3, 4\}$. Le résultat doit être donné en notation par extension.

2. Donner deux exemples différents de sous-ensembles A de $\mathbb{N}$ tels que $S(A) = A$.

3. Démontrer que lorsque A ne contient que des nombres pairs, $S(A) \subset \{2z : z \in \mathbb{N}\}$.

4. Démontrer que pour $A := \{2z + 1 : z \in \mathbb{N}\}$, $S(A) = \{2t : t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. La démonstration de cette égalité doit se baser sur l'utilisation du théorème de la double inclusion.

5. Démontrer que la phrase « pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$, $S(A) \subset S(S(A))$ » est fausse.

6. Démontrer que lorsque A est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que $0 \in A$, alors $S(A) \subset S(S(A))$.

Exercice 4. (Formules et implications)

Soit la formule sans quantificateur

$$F := ((\neg P) \vee Q) \to ((\neg Q) \wedge (\neg R)).$$

1. Construire la table de vérité de F.

2. Exprimer la contraposée de F, puis la simplifier de sorte que les symboles de négation ne portent que sur des formules atomiques.

Exercice 5. (Formules en relation)

Soit E l'ensemble des formules sans quantificateur sur les formules atomiques P et Q (par exemple, $P \vee (\neg P)$ et $P \to (Q \to Q)$ sont des formules de E). On pose $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E dans laquelle pour tous $F_1 \in E$ et $F_2 \in E$, $F_1 \mathcal{R} F_2$ si et seulement si $F_1 \vee F_2$ est une formule valide.

1. Donner un exemple de couple $(F_1, F_2) \in \mathcal{R}$.

2. Donner un exemple de couple $(F_1, F_2) \in E^2 \setminus \mathcal{R}$.

3. Démontrer ou infirmer le fait que $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.

4. Démontrer ou infirmer le fait que $\mathcal{R}$ est une relation symétrique.

5. Démontrer ou infirmer le fait que $\mathcal{R}$ est une relation transitive.