# Mathématiques discrètes

DUT Informatique 1
— Examen 1 —

*Année 2018-2019 — jeudi 8 novembre 2018*

**Nom :** ..........................................................................

**Prénom :** ......................................................................

**Exercice 1. (Contre-exemples)**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles. En construisant des contre-exemples, infirmer les propriétés suivantes. Justifier soigneusement.

1. $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (B \cup A)$.

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

2. $\{\emptyset\} \subset A$.

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

3. Quand $A$ est fini, $\#\mathscr{P}(A) \geqslant \#A^2$.

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

4. Quand $A$ et $B$ sont des sous-ensembles de $C$, $\mathscr{C}_C(A \cup B) = \mathscr{C}_C(A) \cup \mathscr{C}_C(B)$.

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

5. Si $A$ et $B$ sont infinis, alors $A \cap B$ est infini.

.........................................................................................

.........................................................................................

**Exercice 2. (Doubles ou simples inclusions)**

1. Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles. On considère les ensembles $X := (A \setminus B) \setminus C$ et $Y := A \setminus (B \setminus C)$.
   (a) Dessiner les diagrammes de Venn de $X$ et de $Y$ en faisant figurer les ensembles $A$, $B$ et $C$.

   (b) Démontrer que $X \subset Y$.

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   (c) Démontrer ou infirmer que $Y \subset X$.

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

   .........................................................................................

2. Soient $A$ et $B$ des ensembles. Démontrer, en utilisant le théorème de la double inclusion, l'égalité

$$\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B).$$

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**Exercice 3. (Si alors sinon)**

Pour toutes formules $F$, $G$ et $H$ sans quantificateur, on note $[F, G, H]$ la formule

$$(F \to G) \land ((\neg F) \to H).$$

1. Donner la table de vérité de la formule $[F, G, H]$, dans laquelle $F$, $G$ et $H$ sont considérées comme des formules atomiques.

2. Écrire la formule $[\neg F, H, G]$ en utilisant la définition donnée au début de l'exercice.

3. Démontrer que, pour toutes formules sans quantificateur $F$, $G$ et $H$, les formules $[F, G, H]$ et $[\neg F, H, G]$ sont équivalentes.

4. Écrire la contraposée de $[F, G, H] \to [F, H, G]$ puis exprimer une formule qui lui est équivalente dans laquelle les connecteurs de négation ne portent que sur des formules atomiques.

**Exercice 4. (Finesse)**

Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations binaires entre deux ensembles $E$ et $F$. Nous disons que $\mathcal{R}_1$ est *plus fine* que $\mathcal{R}_2$ si pour tout $(x, y) \in E \times F$, $x \mathcal{R}_1 y$ implique $x \mathcal{R}_2 y$.

1. Démontrer que $\mathcal{R}_1$ est plus fine que $\mathcal{R}_2$ si et seulement si $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$.

2. Soit pour tout $k \in \mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{R}_k$ sur $\mathbb{Z}$ dans laquelle $x \mathcal{R}_k y$ si $x + y \geqslant k$. Démontrer que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant \ell$, $\mathcal{R}_\ell$ est plus fine que $\mathcal{R}_k$.

3. Construire un exemple de relations binaires $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ sur un ensemble $E$ (à définir) tel que $\mathbb{Q}_1$ est plus fine que $\mathbb{Q}_2$, $\mathbb{Q}_1$ est transitive et $\mathbb{Q}_2$ ne l'est pas.

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

4. Soit $\mathbf{T}$ l'ensemble de toutes les relations binaires sur $E := \{0, 1\}$. Calculer le cardinal de $\mathbf{T}$.

.......................................................................................................................................

5. Démontrer que la relation « être plus fine que » sur $\mathbf{T}$ est antisymétrique.

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

**Compléments**

| | |
|---|---|
| ........................................................ | ........................................................ |
| ........................................................ | ........................................................ |
| ........................................................ | ........................................................ |
| ........................................................ | ........................................................ |
| ........................................................ | ........................................................ |
| ........................................................ | ........................................................ |
| ........................................................ | ........................................................ |
| ........................................................ | ........................................................ |
| ........................................................ | ........................................................ |
| ........................................................ | ........................................................ |