Mathématiques discrètes

DUT Informatique 1
— Examen 1 —

Année 2016-2017 — vendredi 4 novembre 2016

Nom : ....

Prénom : ....

Exercice 1. (Ensembles de nombres et diviseurs)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit l'ensemble E_n par

$$E_n := \{x \in \mathbb{N} : n|x\},$$

où l'on rappelle que la propriété « $n|x$ » signifie que « le nombre n divise le nombre x ». Dans ce cas, il existe un entier k tel que $nk = x$.

1. Démontrer que pour tous $n \geq 1$ et $m \geq 1$, les ensembles E_n et E_m ne sont pas disjoints.

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Exprimer l'ensemble $E_2 \cap E_3$ en utilisant une notation par compréhension, la plus simple possible.

   ....

   ....

3. Exprimer l'ensemble $E_3 \cap E_4$ en utilisant une notation par formule, la plus simple possible.

   ....

   ....

4. Démontrer, en utilisant le théorème de la double inclusion, que lorsque n et m sont deux entiers naturels tels que $n|m$, alors les ensembles $E_n \cap E_m$ et E_m sont égaux.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 2. (Ensembles de formules)

On définit les ensembles suivants :

— A, l'ensemble des formules sans quantificateur qui font intervenir les deux formules atomiques P et Q ;

— B, l'ensemble de toutes les formules sans quantificateur qui sont à la fois satisfiables et falsifiables ;

— C, l'ensemble des formules sans quantificateur de la forme $(F_1 \wedge F_2) \to F_3$, où F_1, F_2 et F_3 sont des formules de A ;

— D, l'ensemble des formules sans quantificateur de la forme $F_1 \to (F_1 \to F_1)$, où F_1 est une formule de A.

1. Démontrer que les ensembles A et B ne sont pas disjoints.

....

....

....

....

....

2. Justifier que l'ensemble C est inclus dans A.

....

....

....

....

3. Démontrer que les ensembles B et C ne sont pas disjoints.

....

....

....

4. Justifier que l'ensemble D est inclus dans A.

....

....

....

....

5. Démontrer que les ensembles B et D sont disjoints.

....

....

....

....

....

....

....

....

6. Représenter par un diagramme de Venn les ensembles A, B, C et D en utilisant les propriétés mises en évidence dans les questions précédentes.

Exercice 3. (Partitions ensemblistes)

1. Soit $E := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Expliquer précisément pourquoi $\{\{1, 2\}, \{0, 4\}, \{5\}\}$ n'est pas une partition ensembliste de E.

   ....

   ....

2. Soit $E := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Expliquer précisément pourquoi $\{\{1, 2, 3\}, \{0, 4\}, \{3, 5\}\}$ n'est pas une partition ensembliste de E.

   ....

   ....

3. Soit $E := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Expliquer précisément pourquoi $\mathcal{P}(E)$ n'est pas une partition ensembliste de E.

   ....

   ....

4. Définir une partition ensembliste de $E := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

   ....

   ....

   ....

5. Définir une partition ensembliste de $\mathbb{N}$ en trois parts toutes infinies.

. . . .

. . . .

. . . .

6. Expliquer si l'ensemble vide $\emptyset$ admet ou non une partition ensembliste. Si c'est le cas, la donner.

. . . .

. . . .

Exercice 4. (Opérations ensemblistes et cardinaux)

Soient A et B deux ensembles finis.

1. Justifier que $\#(A \cup B) \leq \#A + \#B$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Justifier que $\#(A \cap B) \leq \#A$ et $\#(A \cap B) \leq \#B$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

....

....

....

....

....

....

3. Justifier que $\#(A \setminus B) \geq \#A - \#B$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. On suppose que $\#A = n \geq 1$. Comparer les cardinaux de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ et de $(A \times A)^n$, en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Justifier.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....