Bijectivité — démonstration 2

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f(n) := \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, f est bijective. ».

Quelques exemples :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = -1$;
- $f(2) = 1$;
- $f(3) = -2$;
- $f(4) = 2$;
- $f(5) = -3$;
- $f(6) = 3$;
- $f(7) = -4$;
- $f(8) = 4$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$.

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$.

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Si x est strictement négatif, par définition de f, on a $f(-2x-1) = -\frac{(-2x-1)+1}{2} = x$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Si x est strictement négatif, par définition de f, on a $f(-2x-1) = -\frac{(-2x-1)+1}{2} = x$. De plus, on a que $-2x-1$ est bien un élément de $\mathbb{N}$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Si x est strictement négatif, par définition de f, on a $f(-2x-1) = -\frac{(-2x-1)+1}{2} = x$. De plus, on a que $-2x-1$ est bien un élément de $\mathbb{N}$. Ainsi, x admet au moins un antécédent. L'application f est donc surjective.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Si x est strictement négatif, par définition de f, on a $f(-2x-1) = -\frac{(-2x-1)+1}{2} = x$. De plus, on a que $-2x-1$ est bien un élément de $\mathbb{N}$. Ainsi, x admet au moins un antécédent. L'application f est donc surjective.

Nous avons montré que f est la fois et injective et surjective. Elle est donc bijective.