Opérades ⊔ combinatoire

Samuele Giraudo
LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Journées du GT CombAlg

21 juin 2017

Plan

Plan

Opérations

Structures algébriques en combinatoire

En combinatoire, on travaille souvent avec des ensembles (ou espaces) d'objets structurés :

- monoïdes ;
- groupes ;
- posets ;
- treillis ;
- algèbres associatives ;
- bigèbres de Hopf ;
- algèbres de Lie ;
- algèbres pré-Lie ;
- algèbres dendriformes ;
- algèbres dupliciales.

Structures algébriques en combinatoire

En combinatoire, on travaille souvent avec des ensembles (ou espaces) d'objets structurés :

- monoïdes ;
- groupes ;
- posets ;
- treillis ;
- algèbres associatives ;
- bigèbres de Hopf ;
- algèbres de Lie ;
- algèbres pré-Lie ;
- algèbres dendriformes ;
- algèbres dupliciales.

Paradigme :

$$\textbf{objets} + \textsc{opérations} \times \textit{axiomes}.$$

Travailler avec des opérations

Niveau d'indirection : ensembles d'opérations munis de leur composition.

Travailler avec des opérations

Niveau d'indirection : ensembles d'opérations munis de leur composition.

Nouveau paradigme :

$$(\textbf{opérations} + \textsc{composition d'opérations}) \times \textit{relations}.$$

Travailler avec des opérations

Niveau d'indirection : ensembles d'opérations munis de leur composition.

Nouveau paradigme :

$$(\textbf{opérations} + \textsc{composition d'opérations}) \times \textit{relations}.$$

Opérades : structures algébriques qui s'inscrivent dans ce paradigme.

Travailler avec des opérations

Niveau d'indirection : ensembles d'opérations munis de leur composition.

Nouveau paradigme :

$$(\textbf{opérations} + \textsc{composition d'opérations}) \times \textit{relations}.$$

Opérades : structures algébriques qui s'inscrivent dans ce paradigme.

Avantages :

- formalisme pour calculer sur les opérations ;
- travail général sur toutes les structures algébriques d'un type donné ;
- découverte d'objets combinatoires sous-jacents à certaines structures.

Algèbres dupliciales

Une algèbre dupliciale [**Brouder, Frabetti**, 2003] est un espace $\mathcal{A}$ muni de deux opérations binaires linéaires

$$\ll, \gg : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

vérifiant les axiomes

$$(x \ll y) \ll z = x \ll (y \ll z),$$
$$(x \gg y) \ll z = x \gg (y \ll z),$$
$$(x \gg y) \gg z = x \gg (y \gg z).$$

Algèbres dupliciales

Une algèbre dupliciale [Brouder, Frabetti, 2003] est un espace $\mathcal{A}$ muni de deux opérations binaires linéaires

$$\ll, \gg \, : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

vérifiant les axiomes

$$(x \ll y) \ll z = x \ll (y \ll z),$$
$$(x \gg y) \ll z = x \gg (y \ll z),$$
$$(x \gg y) \gg z = x \gg (y \gg z).$$

Exemple

Sur $\mathbb{K}\left\langle \mathbb{N}^* \right\rangle$, soient $\ll$ et $\gg$ définis par

$$u \ll v := u \left(v \uparrow_{\max(u)} \right), \qquad u \gg v := u \left(v \uparrow_{|u|} \right).$$

Algèbres dupliciales

Une algèbre dupliciale [**Brouder, Frabetti**, 2003] est un espace $\mathcal{A}$ muni de deux opérations binaires linéaires

$$\ll, \gg \; : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

vérifiant les axiomes

$$(x \ll y) \ll z = x \ll (y \ll z),$$
$$(x \gg y) \ll z = x \gg (y \ll z),$$
$$(x \gg y) \gg z = x \gg (y \gg z).$$

Exemple

Sur $\mathbb{K}\langle \mathbb{N}^* \rangle$, soient $\ll$ et $\gg$ définis par

$$u \ll v := u \left(v \uparrow_{\max(u)} \right), \qquad u \gg v := u \left(v \uparrow_{|u|} \right).$$

P.ex.,

$$0211 \ll 14 = 021136$$
$$0211 \gg 14 = 021158.$$

Algèbres dupliciales

Une algèbre dupliciale [**Brouder, Frabetti**, 2003] est un espace $\mathcal{A}$ muni de deux opérations binaires linéaires

$$\ll, \gg \; : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

vérifiant les axiomes

$$(x \ll y) \ll z = x \ll (y \ll z),$$
$$(x \gg y) \ll z = x \gg (y \ll z),$$
$$(x \gg y) \gg z = x \gg (y \gg z).$$

Exemple

Sur $\mathbb{K}\langle \mathbb{N}^* \rangle$, soient $\ll$ et $\gg$ définis par

$$u \ll v := u\left(v \uparrow_{\max(u)}\right), \qquad u \gg v := u\left(v \uparrow_{|u|}\right).$$

P.ex.,

$$0211 \ll 14 = 021136$$
$$0211 \gg 14 = 021158.$$

$(\mathbb{K}\langle \mathbb{N}^* \rangle, \ll, \gg)$ est une algèbre dupliciale [**Novelli, Thibon**, 2013].

Opérations dupliciales

Considérons l'ensemble des opérations que l'on peut construire dans toute algèbre dupliciale.

On les représente par des arbres syntaxiques.

Opérations dupliciales

Considérons l'ensemble des opérations que l'on peut construire dans toute algèbre dupliciale.

On les représente par des arbres syntaxiques.

Exemple

L'arbre syntaxique

code l'opération dupliciale

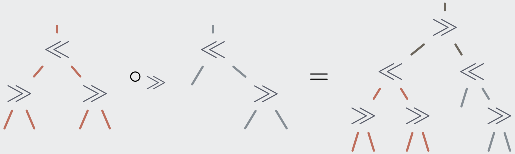
$$x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 \otimes x_5 \mapsto (x_1 \gg x_2) \ll ((x_3 \gg x_4) \ll x_5).$$

Composition d'opérations dupliciales

On peut associer des arbres syntaxiques dupliciaux de plusieurs façons :

1. en se basant sur une opération racine existante :

Exemple

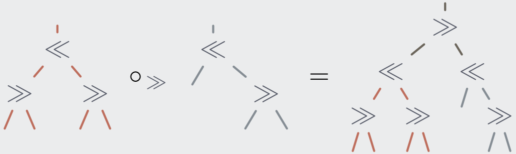


Composition d'opérations dupliciales

On peut associer des arbres syntaxiques dupliciaux de plusieurs façons :

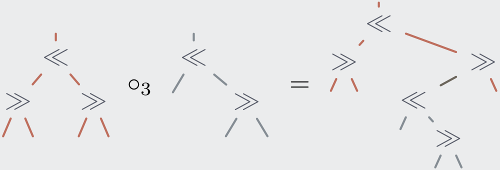
1. en se basant sur une opération racine existante :

Exemple



2. En substituant une opération à une entrée d'une autre :

Exemple



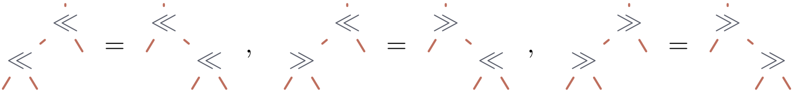
Opérations dupliciales et relations

Une question classique consiste à fournir une réalisation des opérations de sorte à capturer les relations qu'ils vérifient.

Opérations dupliciales et relations

Une question classique consiste à fournir une réalisation des opérations de sorte à capturer les relations qu'ils vérifient.

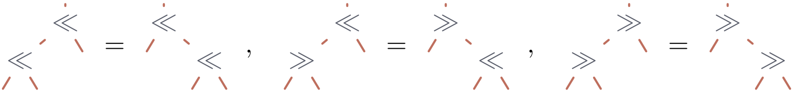
Pour y répondre, on part des relations dupliciales sur les arbres syntaxiques



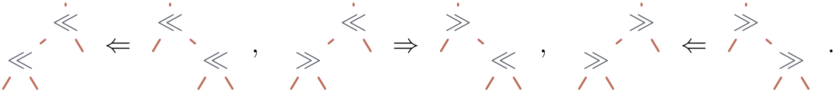
Opérations dupliciales et relations

Une question classique consiste à fournir une réalisation des opérations de sorte à capturer les relations qu'ils vérifient.

Pour y répondre, on part des relations dupliciales sur les arbres syntaxiques



et on les oriente selon



de sorte à obtenir une règle de réécriture convergente $\Rightarrow$ sur l'ensemble des arbres syntaxiques dupliciaux.

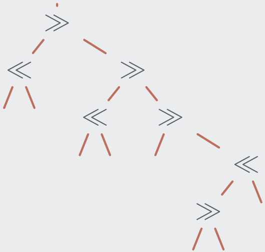
Opérations dupliciales et arbres binaires

Les formes normales de $\Rightarrow$ sont en bijection avec les classes d'équivalence d'arbres syntaxiques dupliciaux.

Opérations dupliciales et arbres binaires

Les formes normales de $\Rightarrow$ sont en bijection avec les classes d'équivalence d'arbres syntaxiques dupliciaux.

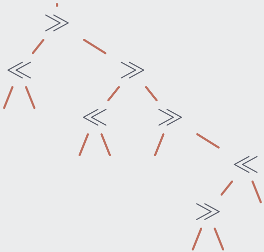
Exemple



Opérations dupliciales et arbres binaires

Les formes normales de $\Rightarrow$ sont en bijection avec les classes d'équivalence d'arbres syntaxiques dupliciaux.

Exemple

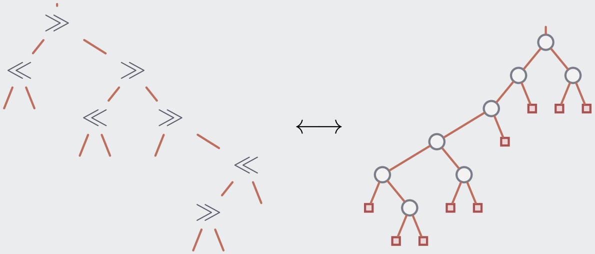


Dénombrées par $1, 2, 5, 14, 42, \ldots$.

Opérations dupliciales et arbres binaires

Les formes normales de $\Rightarrow$ sont en bijection avec les classes d'équivalence d'arbres syntaxiques dupliciaux.

Exemple



Dénombrées par $1, 2, 5, 14, 42, \ldots$.

Conséquence tout opérateur duplicial à n entrées peut être coté par un arbre binaire à n nœuds internes.

Algèbres dendriformes

Une algèbre dendriforme [**Loday**, 2001] est un espace $\mathcal{A}$ muni de deux opérations binaires linéaires

$$\prec, \succ \, : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

vérifiant les axiomes

$$\begin{aligned}
(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z),\\
(x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z),\\
(x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z).
\end{aligned}$$

Algèbres dendriformes

Une algèbre dendriforme [**Loday**, 2001] est un espace $\mathcal{A}$ muni de deux opérations binaires linéaires

$$\prec, \succ : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

vérifiant les axiomes

$$\begin{aligned}
(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z), \\
(x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z), \\
(x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z).
\end{aligned}$$

Exemple

Sur $\mathbb{K}\langle\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\rangle$, soient $\prec$ et $\succ$ définis par

$$u \prec v := u \sqcup\!\sqcup_{\leftarrow} v, \qquad u \succ v := u \sqcup\!\sqcup_{\rightarrow} v,$$

Algèbres dendriformes

Une algèbre dendriforme [**Loday**, 2001] est un espace $\mathcal{A}$ muni de deux opérations binaires linéaires

$$\prec, \succ : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

vérifiant les axiomes

$$\begin{aligned}(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z),\\ (x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z),\\ (x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z).\end{aligned}$$

Exemple

Sur $\mathbb{K}\langle\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\rangle$, soient $\prec$ et $\succ$ définis par

$$u \prec v := u \sqcup\!\sqcup_{\leftarrow} v, \qquad u \succ v := u \sqcup\!\sqcup_{\rightarrow} v,$$

P.ex.,

$$\mathtt{ab} \prec \mathtt{ba} = \mathtt{abab} + \mathtt{baab} + \mathtt{baab}$$

$$\mathtt{ab} \succ \mathtt{ba} = \mathtt{abba} + \mathtt{abba} + \mathtt{baba}.$$

Algèbres dendriformes

Une algèbre dendriforme [Loday, 2001] est un espace $\mathcal{A}$ muni de deux opérations binaires linéaires

$$\prec, \succ \; : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

vérifiant les axiomes

$$\begin{aligned}(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z),\\ (x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z),\\ (x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z).\end{aligned}$$

Exemple

Sur $\mathbb{K}\langle\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\rangle$, soient $\prec$ et $\succ$ définis par

$$u \prec v := u \sqcup\!\sqcup_{\leftarrow} v, \qquad u \succ v := u \sqcup\!\sqcup_{\rightarrow} v,$$

P.ex.,

$$\mathtt{ab} \prec \mathtt{ba} = \mathtt{abab} + \mathtt{baab} + \mathtt{baab}$$

$$\mathtt{ab} \succ \mathtt{ba} = \mathtt{abba} + \mathtt{abba} + \mathtt{baba}.$$

$(\mathbb{K}\langle\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\rangle, \prec, \succ)$ est une algèbre dendriforme [Loday, 2001].

Opérations dendriformes associatives

Calcul sur les arbres syntaxiques pour décrire toutes les opérations dendriformes associatives.

Opérations dendriformes associatives

Calcul sur les arbres syntaxiques pour décrire toutes les opérations dendriformes associatives.

Une opération binaire $\mathfrak{t}$ est associative si $\mathfrak{t} \circ_1 \mathfrak{t} = \mathfrak{t} \circ_2 \mathfrak{t}$.

Opérations dendriformes associatives

Calcul sur les arbres syntaxiques pour décrire toutes les opérations dendriformes associatives.

Une opération binaire $\mathfrak{t}$ est associative si $\mathfrak{t} \circ_1 \mathfrak{t} = \mathfrak{t} \circ_2 \mathfrak{t}$.

Soit

$$\mathfrak{t} := \lambda_1 \prec + \lambda_2 \succ$$

une opération binaire dendriforme générique.

Opérations dendriformes associatives

Calcul sur les arbres syntaxiques pour décrire toutes les opérations dendriformes associatives.

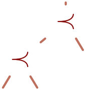
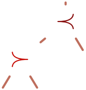
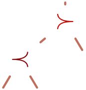
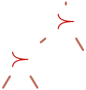
Une opération binaire $\mathfrak{t}$ est associative si $\mathfrak{t} \circ_1 \mathfrak{t} = \mathfrak{t} \circ_2 \mathfrak{t}$.

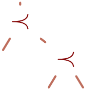
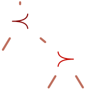
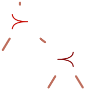
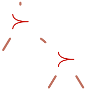
Soit

$\mathfrak{t} := \lambda_1$  $+ \lambda_2$ 

une opération binaire dendriforme générique.

Quand $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$,

$\mathfrak{t} \circ_1 \mathfrak{t} - \mathfrak{t} \circ_2 \mathfrak{t} = \lambda^2$  $+ \lambda^2$  $+ \lambda^2$  $+ \lambda^2$ 

$- \lambda^2$  $- \lambda^2$  $- \lambda^2$  $- \lambda^2$ 

Opérations dendriformes associatives

Calcul sur les arbres syntaxiques pour décrire toutes les opérations dendriformes associatives.

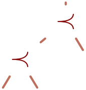
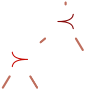
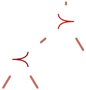
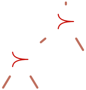
Une opération binaire $\mathfrak{t}$ est associative si $\mathfrak{t} \circ_1 \mathfrak{t} = \mathfrak{t} \circ_2 \mathfrak{t}$.

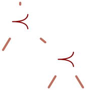
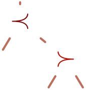
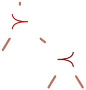
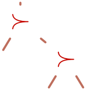
Soit

$\mathfrak{t} := \lambda_1$  $+ \lambda_2$ 

une opération binaire dendriforme générique.

Quand $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$,

$\mathfrak{t} \circ_1 \mathfrak{t} - \mathfrak{t} \circ_2 \mathfrak{t} = \lambda^2$  $+ \lambda^2$  $+ \lambda^2$  $+ \lambda^2$ 

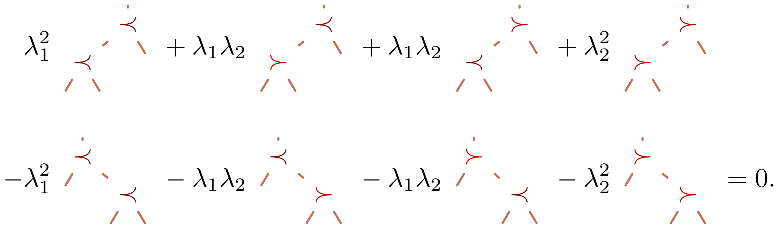
$- \lambda^2$  $- \lambda^2$  $- \lambda^2$  $- \lambda^2$ 

$= 0,$

$\mathfrak{t}$ est associative.

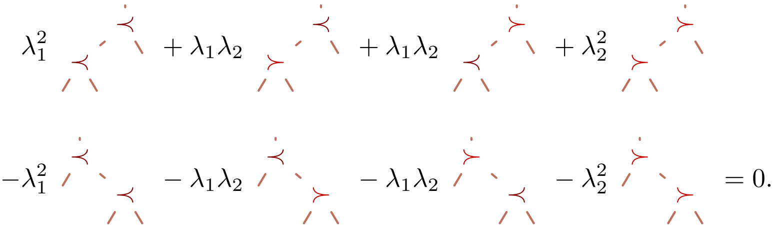
Opérations dendriformes associatives

Réciproquement, si $\mathfrak{t}$ est associative, alors $\mathfrak{t} \circ_1 \mathfrak{t} - \mathfrak{t} \circ_2 \mathfrak{t} = 0$ et ceci implique



Opérations dendriformes associatives

Réciproquement, si $\mathfrak{t}$ est associative, alors $\mathfrak{t} \circ_1 \mathfrak{t} - \mathfrak{t} \circ_2 \mathfrak{t} = 0$ et ceci implique



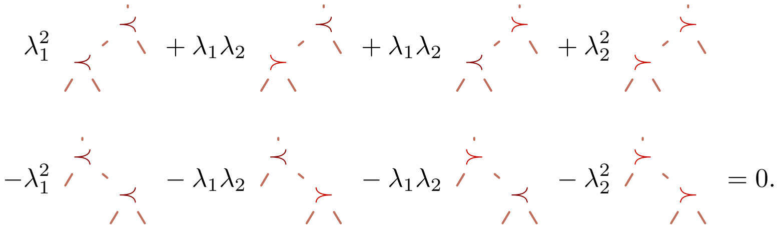
On a donc

$$\lambda_1^2 = \lambda_1 \lambda_2, \qquad \lambda_2^2 = \lambda_1 \lambda_2$$

et ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Opérations dendriformes associatives

Réciproquement, si $\mathfrak{t}$ est associative, alors $\mathfrak{t} \circ_1 \mathfrak{t} - \mathfrak{t} \circ_2 \mathfrak{t} = 0$ et ceci implique



On a donc

$$\lambda_1^2 = \lambda_1 \lambda_2, \qquad \lambda_2^2 = \lambda_1 \lambda_2$$

et ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Proposition

Toute opération dendriforme associative est proportionnelle à $\prec + \succ$.

Dupliciale $\neq$ dendriforme

Théorème (que l'on va montrer)

Toute classe d'équivalence d'opérateurs dendriformes à n entrées est codée par un arbre binaire à n nœuds internes.

Dupliciale $\neq$ dendriforme

Théorème (que l'on va montrer)

Toute classe d'équivalence d'opérateurs dendriformes à n entrées est codée par un arbre binaire à n nœuds internes.

Question immédiate

Les catégories des algèbres duplciales et des algèbres dendriformes sont-elles équivalentes ?

Dupliciale $\neq$ dendriforme

Théorème (que l'on va montrer)

Toute classe d'équivalence d'opérateurs dendriformes à n entrées est codée par un arbre binaire à n nœuds internes.

Question immédiate

Les catégories des algèbres duplciales et des algèbres dendriformes sont-elles équivalentes ?

On peut montrer que toute opération dupliciale associative est proportionnelle à $\ll$ ou à $\gg$ (ce qui fait deux opérations associatives linéairements indépendantes).

Dupliciale $\neq$ dendriforme

Théorème (que l'on va montrer)

Toute classe d'équivalence d'opérateurs dendriformes à n entrées est codée par un arbre binaire à n nœuds internes.

Question immédiate

Les catégories des algèbres duplciales et des algèbres dendriformes sont-elles équivalentes ?

On peut montrer que toute opération dupliciale associative est proportionnelle à $\ll$ ou à $\gg$ (ce qui fait deux opérations associatives linéairements indépendantes).

Comme il n'y en a qu'une $\prec + \succ$ pour le cas dendriforme, on en déduit que la réponse est

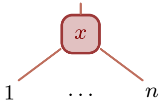
Non !

Plan

Opérades

Opérateurs

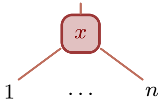
Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



Son arité est son nombre n d'entrées.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



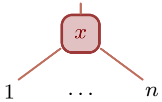
Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x, identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.

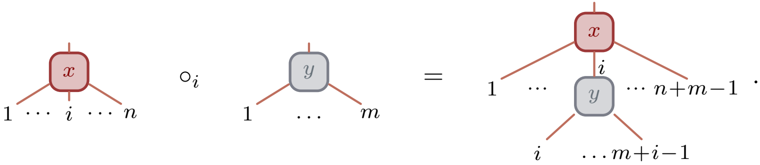


Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x, identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$:



Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \ ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \ ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué
$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$
2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,
$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \; ;$$
3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué
$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \;;$$
2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,
$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \;;$$
3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$

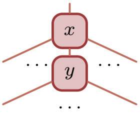
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



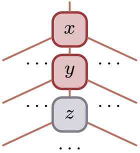
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



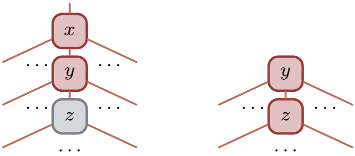
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad\qquad (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



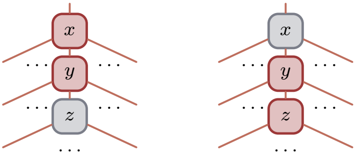
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \quad x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



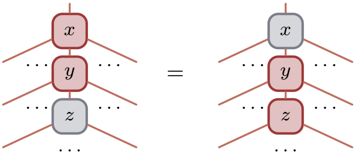
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

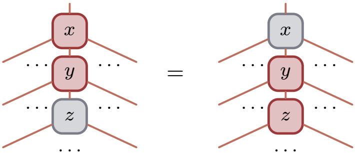
$i \in [n], j \in [m]$



Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



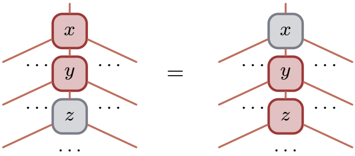
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$

Axiomes des opérades

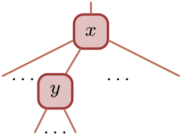
Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$
$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$
$i \in [n], j \in [m]$



Commutativité :

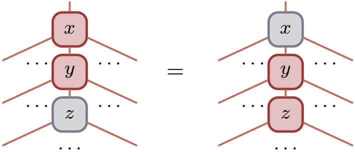
$(x \circ_i y)$
$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$
$1 \leqslant i < j \leqslant n$



Axiomes des opérades

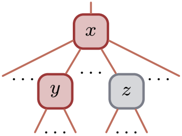
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

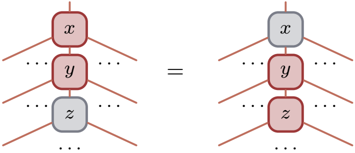
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

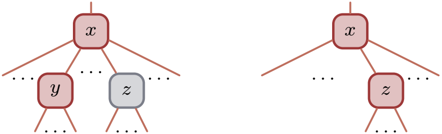
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

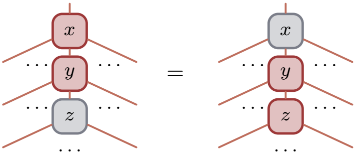
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

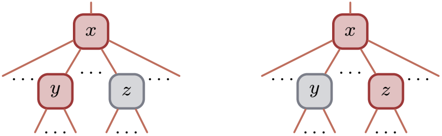
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

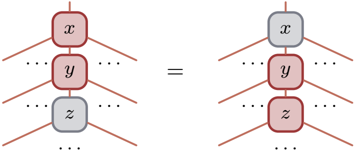
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

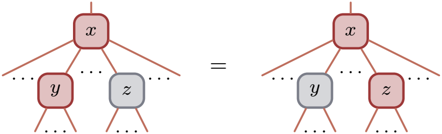
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

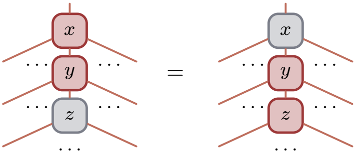
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

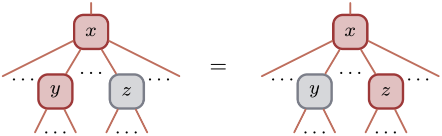
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



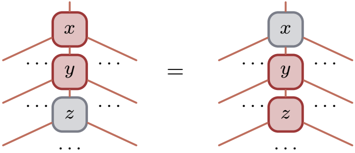
Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$

Axiomes des opérades

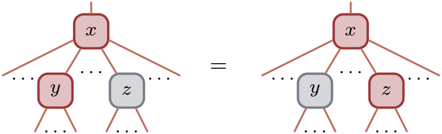
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



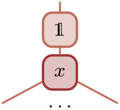
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



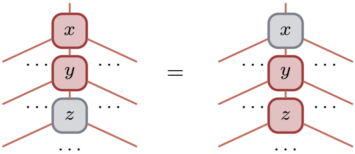
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

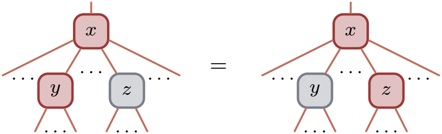


Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$



Unitalité :

$\mathbb{1} \circ_1 x \quad x$

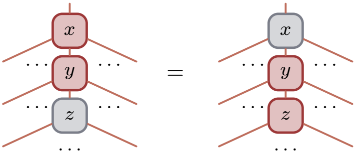
$x \in \mathcal{O}(n)$

$i \in [n]$

Axiomes des opérades

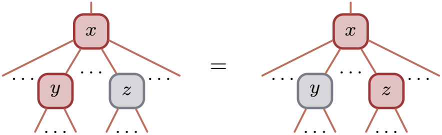
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



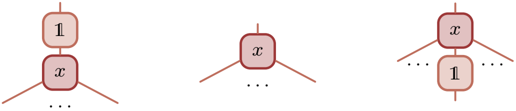
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

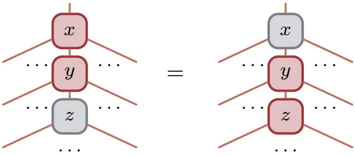
$$\mathbb{1} \circ_1 x \qquad x \qquad x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Axiomes des opérades

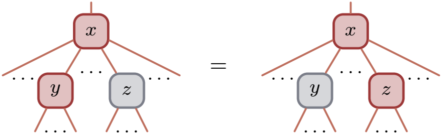
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



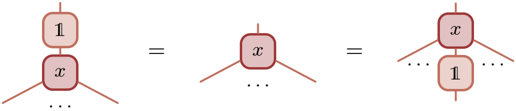
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Axiomatisation alternative

Une opérade est aussi un triplet $(\mathcal{O}, \circ, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

Axiomatisation alternative

Une opérade est aussi un triplet $(\mathcal{O}, \circ, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

2. $\circ$ est une application de composition complète,

$$\circ : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(m_n) \to \mathcal{O}(m_1 + \cdots + m_n), \qquad n, m_1, \ldots, m_n \geqslant 1 \; ;$$

Axiomatisation alternative

Une opérade est aussi un triplet $(\mathcal{O}, \circ, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué
$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n)\ ;$$
2. $\circ$ est une application de composition complète,
$$\circ : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(m_n) \to \mathcal{O}(m_1 + \cdots + m_n),$$
$$n, m_1, \ldots, m_n \geqslant 1\ ;$$
3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Axiomatisation alternative

Une opérade est aussi un triplet $(\mathcal{O}, \circ, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

2. $\circ$ est une application de composition complète,

$$\circ : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(m_n) \to \mathcal{O}(m_1 + \cdots + m_n), \qquad n, m_1, \ldots, m_n \geqslant 1 \; ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

On note $x \circ [y_1, \ldots, y_n]$ pour $\circ(x_1 \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)$.

Axiomatisation alternative

Une opérade est aussi un triplet $(\mathcal{O}, \circ, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \ ;$$

2. $\circ$ est une application de composition complète,

$$\circ : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(m_n) \to \mathcal{O}(m_1 + \cdots + m_n), \qquad n, m_1, \ldots, m_n \geqslant 1 \ ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

On note $x \circ [y_1, \ldots, y_n]$ pour $\circ(x_1 \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)$.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomatisation alternative

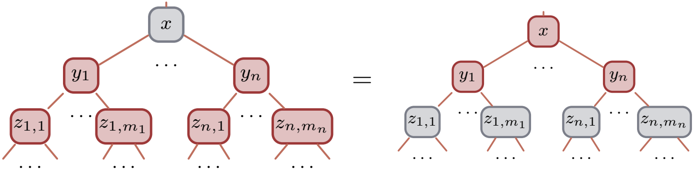
Associativité complète :

$$x \circ \left[y_1 \circ \left[z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}\right], \ldots, y_n \circ \left[z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}\right]\right] =$$
$$(x \circ [y_1, \ldots, y_n]) \circ \left[z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}, \ldots, z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}\right]$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y_i \in \mathcal{O}(m_i), z_{j,k} \in \mathcal{O}$$

Axiomatisation alternative

Associativité complète :

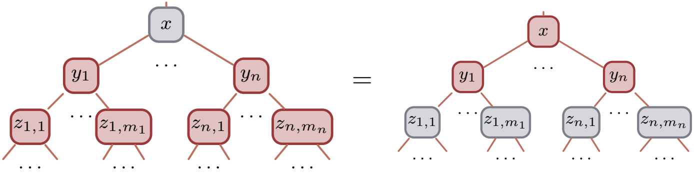
$$x \circ \left[y_1 \circ \left[z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}\right], \ldots, y_n \circ \left[z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}\right]\right] =$$
$$\left(x \circ [y_1, \ldots, y_n]\right) \circ \left[z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}, \ldots, z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}\right]$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y_i \in \mathcal{O}(m_i), z_{j,k} \in \mathcal{O}$$



Axiomatisation alternative

Associativité complète :

$$x \circ \left[y_1 \circ \left[z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}\right], \ldots, y_n \circ \left[z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}\right]\right] =$$
$$\left(x \circ \left[y_1, \ldots, y_n\right]\right) \circ \left[z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}, \ldots, z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}\right]$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y_i \in \mathcal{O}(m_i), z_{j,k} \in \mathcal{O}$$



Unitalité complète :

$$\mathbb{1} \circ [x] = x = x \circ [\underbrace{\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1}}_{n}]$$

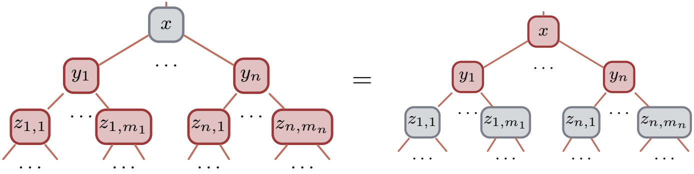
$$x \in \mathcal{O}(n)$$

Axiomatisation alternative

Associativité complète :

$$x \circ \left[y_1 \circ \left[z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}\right], \ldots, y_n \circ \left[z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}\right]\right] = \\ (x \circ [y_1, \ldots, y_n]) \circ \left[z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}, \ldots, z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}\right]$$

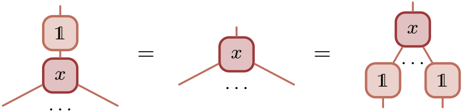
$$x \in \mathcal{O}(n), y_i \in \mathcal{O}(m_i), z_{j,k} \in \mathcal{O}$$



Unitalité complète :

$$\mathbb{1} \circ [x] = x = x \circ [\underbrace{\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1}}_{n}]$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$



Équivalence entre les deux axiomatisations

Étant donnée une opérade $(\mathcal{O}, \circ, \mathbb{1})$, on définit une application de composition partielle $\circ_i$ par

$$x \circ_i y := x \circ [\underbrace{\mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}}_{i-1}, y, \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}].$$

Équivalence entre les deux axiomatisations

Étant donnée une opérade $(\mathcal{O}, \circ, \mathbb{1})$, on définit une application de composition partielle $\circ_i$ par

$$x \circ_i y := x \circ [\underbrace{\mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}}_{i-1}, y, \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}].$$

Réciproquement, étant donnée une opérade $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$, on définit une application de composition complète $\circ$ par

$$x \circ [y_1, \dots, y_n] := (\dots((x \circ_n y_n) \circ_{n-1} y_{n-1}) \dots) \circ_1 y_1.$$

Équivalence entre les deux axiomatisations

Étant donnée une opérade $(\mathcal{O}, \circ, \mathbb{1})$, on définit une application de composition partielle $\circ_i$ par

$$x \circ_i y := x \circ [\underbrace{\mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}}_{i-1}, y, \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}].$$

Réciproquement, étant donnée une opérade $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$, on définit une application de composition complète $\circ$ par

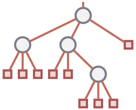
$$x \circ [y_1, \dots, y_n] := (\dots((x \circ_n y_n) \circ_{n-1} y_{n-1}) \dots) \circ_1 y_1.$$

Les axiomes vérifiés par l'un impliquent les axiomes vérifiés par l'autre et réciproquement.

Exemple : l'opérade des γ-arbres

L'opérade des k-arbres $\mathsf{FCat}^{(\gamma)}$, $\gamma \in \mathbb{N}$, est définie par :

- $\mathsf{FCat}^{(\gamma)}(n)$ est l'espace des arbres plan enracinés à n nœuds internes, tous d'arité $\gamma + 1$. P.ex.,

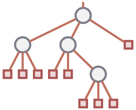


est un 2-arbre d'arité 4;

Exemple : l'opérade des γ-arbres

L'opérade des k-arbres $\mathsf{FCat}^{(\gamma)}$, $\gamma \in \mathbb{N}$, est définie par :

- $\mathsf{FCat}^{(\gamma)}(n)$ est l'espace des arbres plan enracinés à n nœuds internes, tous d'arité $\gamma + 1$. P.ex.,



est un 2-arbre d'arité 4;

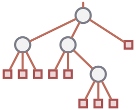
- la composition partielle $\mathfrak{s} \circ_i \mathfrak{t}$ se calcule en repérant le i^{e} nœud interne de $\mathfrak{s}$ suivant un parcours en profondeur et en le remplaçant par $\mathfrak{t}$;

Exemple

Exemple : l'opérade des γ-arbres

L'opérade des k-arbres $\mathsf{FCat}^{(\gamma)}$, $\gamma \in \mathbb{N}$, est définie par :

- $\mathsf{FCat}^{(\gamma)}(n)$ est l'espace des arbres plan enracinés à n nœuds internes, tous d'arité $\gamma + 1$. P.ex.,



est un 2-arbre d'arité 4;

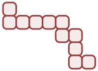
- la composition partielle $\mathfrak{s} \circ_i \mathfrak{t}$ se calcule en repérant le i^{e} nœud interne de $\mathfrak{s}$ suivant un parcours en profondeur et en le remplaçant par $\mathfrak{t}$;
- l'unité est la corolle à $\gamma + 1$ feuilles.

Exemple

Exemple : l'opérade des rubans

L'opérade des rubans Comp est définie par :

- Comp(n) est l'espace des diagrammes rubans des compositions d'entiers de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,

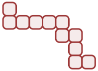


est un ruban d'arité 11 ;

Exemple : l’opérade des rubans

L’opérade des rubans Comp est définie par :

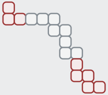
- $\mathsf{Comp}(n)$ est l’espace des diagrammes rubans des compositions d’entiers de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,

  est un ruban d’arité 11 ;

- la composition partielle $\mathfrak{r} \circ_i \mathfrak{s}$ de deux rubans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ s’obtient en insérant $\mathfrak{s}$ dans la i^{e} boite de $\mathfrak{r}$ lorsque celle-ci est la plus haute de sa colonne ;

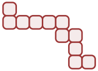
Exemple

 $\circ_4$  $=$  ,

Exemple : l'opérade des rubans

L'opérade des rubans Comp est définie par :

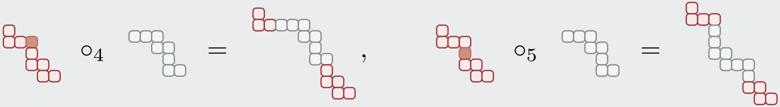
- Comp(n) est l'espace des diagrammes rubans des compositions d'entiers de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,



  est un ruban d'arité 11 ;

- la composition partielle $\mathfrak{r} \circ_i \mathfrak{s}$ de deux rubans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ s'obtient en insérant $\mathfrak{s}$ (resp. le transposé de $\mathfrak{s}$) dans la i^{e} boite de $\mathfrak{r}$ lorsque celle-ci est (resp. n'est pas) la plus haute de sa colonne ;

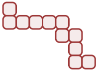
Exemple



Exemple : l’opérade des rubans

L’opérade des rubans Comp est définie par :

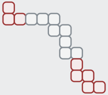
- Comp(n) est l’espace des diagrammes rubans des compositions d’entiers de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,

   est un ruban d’arité 11 ;

- la composition partielle $\mathfrak{r} \circ_i \mathfrak{s}$ de deux rubans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ s’obtient en insérant $\mathfrak{s}$ (resp. le transposé de $\mathfrak{s}$) dans la i^{e} boite de $\mathfrak{r}$ lorsque celle-ci est (resp. n’est pas) la plus haute de sa colonne ;

- l’unité est le ruban .

Exemple

 $\circ_4$  $=$  ,  $\circ_5$  $=$ 

L'opérade des fonctions rationnelles

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \ldots, \}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'opérade des fonctions rationnelles

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \ldots, \}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'opérade des fonctions rationnelles $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ [**Loday**, 2010] est définie par :

- $\mathbb{K}(\mathbb{U})(n)$ est l'espace des fonctions rationnelles sur u_1, …, u_n.

  P.ex., $u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \otimes u_4 \mapsto \frac{u_1}{u_1+u_3}$ est un élément d'arité 4;

L'opérade des fonctions rationnelles

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \dots, \}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'opérade des fonctions rationnelles $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ [**Loday**, 2010] est définie par :

- $\mathbb{K}(\mathbb{U})(n)$ est l'espace des fonctions rationnelles sur u_1, …, u_n.
  P.ex., $u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \otimes u_4 \mapsto \frac{u_1}{u_1+u_3}$ est un élément d'arité 4;
- la composition partielle $f \circ_i g$ est définie par

$$f \circ_i g := f\,(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \dots + u_{i+m-1}, u_{i+m}, \dots, u_{n+m-1})\, g\,(u_i, \dots, u_{i+m-1}),$$

  où $f \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_n)$ et $g \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_m)$.

Exemple

$$\underset{\in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3)}{\frac{1}{(u_1+u_2)u_2}} \circ_1 \underset{\in \mathbb{K}(u_1, u_2)}{\frac{1}{u_1}} = \underset{\in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\frac{1}{{u_1}^2 u_3 + u_1 u_2 u_3 + u_1 {u_3}^2}}$$

L'opérade des fonctions rationnelles

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \ldots, \}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'opérade des fonctions rationnelles $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ [**Loday**, 2010] est définie par :

- $\mathbb{K}(\mathbb{U})(n)$ est l'espace des fonctions rationnelles sur u_1, …, u_n.
  P.ex., $u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \otimes u_4 \mapsto \frac{u_1}{u_1+u_3}$ est un élément d'arité 4;
- la composition partielle $f \circ_i g$ est définie par

$$f \circ_i g := \\ f\,(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + \cdots + u_{i+m-1}, u_{i+m}, \ldots, u_{n+m-1})\, g\,(u_i, \ldots, u_{i+m-1})\,,$$

  où $f \in \mathbb{K}(u_1, \ldots, u_n)$ et $g \in \mathbb{K}(u_1, \ldots, u_m)$.
- l'unité est la fonction $\mathbb{1} \in \mathbb{K}(\mathbb{U})$ définie par $\mathbb{1}(u_1) := 1 \in \mathbb{K}$.

Exemple

$$\frac{1}{(u_1 + u_2)u_2} \quad \circ_1 \quad \frac{1}{u_1} \quad = \quad \frac{1}{{u_1}^2 u_3 + u_1 u_2 u_3 + u_1 {u_3}^2}$$

$$\in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3) \qquad \in \mathbb{K}(u_1, u_2) \qquad \in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Enrichissements

Il existe des structures plus riches, étendant les opérades non symétriques :

- les opérades symétriques, dans lesquelles une action

  $$\cdot : \mathcal{O}(n) \otimes \mathbb{K} \langle \mathfrak{S}(n) \rangle \to \mathcal{O}(n)$$

  change l'ordre des entrées des opérations ;

Enrichissements

Il existe des structures plus riches, étendant les opérades non symétriques :

- les opérades symétriques, dans lesquelles une action
$$\cdot : \mathcal{O}(n) \otimes \mathbb{K}\left\langle \mathfrak{S}(n) \right\rangle \to \mathcal{O}(n)$$
change l'ordre des entrées des opérations ;
- les opérades cycliques, dans lequelles une action
$$\rho : \mathcal{O}(n) \otimes \mathbb{K}\left\langle \mathbb{Z}/_{(n+1)\mathbb{Z}} \right\rangle \to \mathcal{O}(n)$$
transforme de manière cyclique la sortie en une entrée des opérations ;

Enrichissements

Il existe des structures plus riches, étendant les opérades non symétriques :

- les opérades symétriques, dans lesquelles une action

$$\cdot : \mathcal{O}(n) \otimes \mathbb{K}\left\langle \mathfrak{S}(n) \right\rangle \to \mathcal{O}(n)$$

  change l'ordre des entrées des opérations ;

- les opérades cycliques, dans lequelles une action

$$\rho : \mathcal{O}(n) \otimes \mathbb{K}\left\langle \mathbb{Z}/_{(n+1)\mathbb{Z}} \right\rangle \to \mathcal{O}(n)$$

  transforme de manière cyclique la sortie en une entrée des opérations ;

- les opérades colorées, dans lesquelles deux applications

$$\mathrm{s} : \mathcal{O}(n) \to \mathcal{C}, \qquad \mathrm{e} : \mathcal{O}(n) \to \mathcal{C}^n$$

  attribuent à chaque sortie et entrée des opérations une couleur prise dans un ensemble de couleurs $\mathcal{C}$. La composition devient partielle : les couleurs doivent correspondre.

Définitions élémentaires

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux opérades.

Définitions élémentaires

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux opérades.

Un morphisme d'opérades est une application $\phi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ qui vérifie

$$x \in \mathcal{O}_1(n) \quad \text{implique} \quad \phi(x) \in \mathcal{O}_2(n),$$

$$\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1},$$

$$\phi(x \circ_i y) = \phi(x) \circ_i \phi(y).$$

Définitions élémentaires

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux opérades.

Un morphisme d'opérades est une application $\phi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ qui vérifie

$$x \in \mathcal{O}_1(n) \quad \text{implique} \quad \phi(x) \in \mathcal{O}_2(n),$$

$$\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1},$$

$$\phi(x \circ_i y) = \phi(x) \circ_i \phi(y).$$

Un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathcal{O}_1$ est un idéal d'opérade de $\mathcal{O}_1$ si

$$x \in \mathcal{O}_1 \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

Définitions élémentaires

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux opérades.

Un morphisme d'opérades est une application $\phi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ qui vérifie

$$x \in \mathcal{O}_1(n) \quad \text{implique} \quad \phi(x) \in \mathcal{O}_2(n),$$

$$\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1},$$

$$\phi(x \circ_i y) = \phi(x) \circ_i \phi(y).$$

Un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathcal{O}_1$ est un idéal d'opérade de $\mathcal{O}_1$ si

$$x \in \mathcal{O}_1 \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'opérade quotient $\mathcal{O}_1/_{\mathcal{V}}$ est définie de manière habituelle.

Algèbres sur opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une $\mathcal{O}$-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ tel que tout $x \in \mathcal{O}$ d'arité n munit $\mathcal{A}$ d'une application linéaire

$$x : \mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathcal{A}.$$

Algèbres sur opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une $\mathcal{O}$-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ tel que tout $x \in \mathcal{O}$ d'arité n munit $\mathcal{A}$ d'une application linéaire

$$x : \mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathcal{A}.$$

La relation

$$(x \circ_i y)(e_1, \dots, e_{n+m-1}) = x(e_1, \dots, e_{i-1}, y(e_i, \dots, e_{i+m-1}), e_{i+m}, \dots, e_{n+m-1})$$

doit être vérifiée pour tous $x \in \mathcal{O}(n)$, $y \in \mathcal{O}(m)$ et $i \in [n]$.

Algèbres sur opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une $\mathcal{O}$-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ tel que tout $x \in \mathcal{O}$ d'arité n munit $\mathcal{A}$ d'une application linéaire

$$x : \mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathcal{A}.$$

La relation

$$(x \circ_i y)(e_1, \ldots, e_{n+m-1}) = x(e_1, \ldots, e_{i-1}, y(e_i, \ldots, e_{i+m-1}), e_{i+m}, \ldots, e_{n+m-1})$$

doit être vérifiée pour tous $x \in \mathcal{O}(n)$, $y \in \mathcal{O}(m)$ et $i \in [n]$.

Toute opérade $\mathcal{O}$ définit ainsi une catégorie d'algèbres. Ses objets sont les $\mathcal{O}$-algèbres et les flèches les applications $\phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ vérifiant

$$\phi(x(e_1, \ldots, e_n)) = x(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$$

pour tout $x \in \mathcal{O}(n)$.

Séries sur opérades

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q_0, q_1, \dots)$ suffit ici) et $\mathcal{O}$ une opérade ensembliste.

Séries sur opérades

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q_0, q_1, \dots)$ suffit ici) et $\mathcal{O}$ une opérade ensembliste.

Une $\mathcal{O}$-série est une application

$$\mathbf{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{K}.$$

Séries sur opérades

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q_0, q_1, \dots)$ suffit ici) et $\mathcal{O}$ une opérade ensembliste.

Une $\mathcal{O}$-série est une application

$$\mathbf{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{O}\rangle\rangle$. Muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{O}\rangle\rangle$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Séries sur opérades

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q_0, q_1, \dots)$ suffit ici) et $\mathcal{O}$ une opérade ensembliste.

Une $\mathcal{O}$-série est une application

$$\mathbf{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{O}\rangle\rangle$. Muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{O}\rangle\rangle$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in \mathcal{O}$ dans $\mathbf{f}$ est noté $\langle x, \mathbf{f}\rangle$.

Séries sur opérades

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q_0, q_1, \dots)$ suffit ici) et $\mathcal{O}$ une opérade ensembliste.

Une $\mathcal{O}$-série est une application

$$\mathbf{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle$. Muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in \mathcal{O}$ dans $\mathbf{f}$ est noté $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

La notation étendue de $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in \mathcal{O}} \langle x, \mathbf{f} \rangle \, x.$$

Produits sur séries sur opérades

Soient $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{K} \langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle$.

Produits sur séries sur opérades

Soient $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{K} \langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle$.

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{O} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

Produits sur séries sur opérades

Soient $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{K}\langle\langle\mathcal{O}\rangle\rangle$.

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}\rangle := \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{O} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f}\rangle \langle z, \mathbf{g}\rangle .$$

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g}\rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{O} \\ x = y \circ \left[z_1, \dots, z_{|y|}\right]}} \langle y, \mathbf{f}\rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g}\rangle .$$

Plan

Réécritures

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(3)$ sont

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

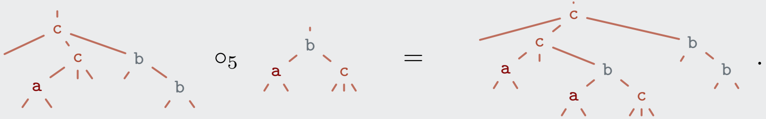
- $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(3)$ sont

Voici une composition partielle dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$:



Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;
- $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé espace des relations ;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;
- $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé espace des relations ;

tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})/_{\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle},$$

où $\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle$ est l'idéal d'opérade engendré par $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;
- $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathbb{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé espace des relations ;

tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathbb{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})/_{\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle},$$

où $\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle$ est l'idéal d'opérade engendré par $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

La présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ est

- binaire quand tous les élément de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ sont d'arité 2 ;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;
- $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé espace des relations ;

tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})/_{\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle},$$

où $\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle$ est l'idéal d'opérade engendré par $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

La présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ est

- binaire quand tous les élément de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ sont d'arité 2 ;
- quadratique quand toutes les éléments de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ ne font intervenir que des arbres syntaxiques à deux nœuds internes.

Exemples : présentation de Comp

Calculons une présentation de Comp.

Exemples : présentation de Comp

Calculons une présentation de Comp.

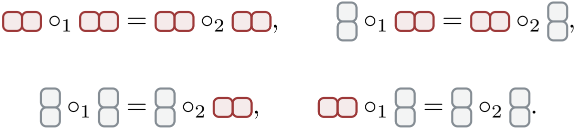
1. Famille génératrice minimale :

Exemples : présentation de Comp

Calculons une présentation de Comp.

1. Famille génératrice minimale :

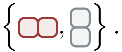
2. Relations non triviales (en degré 2) :



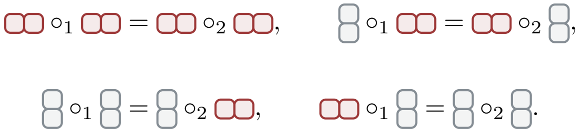
Exemples : présentation de Comp

Calculons une présentation de Comp.

1. Famille génératrice minimale :



2. Relations non triviales (en degré 2) :



Théorème

Comp admet la présentation binaire et quadratique $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Présentations et algèbres sur opérades

Présenter une opérade $\mathcal{O}$ permet de décrire facilement les $\mathcal{O}$-algèbres.

Présentations et algèbres sur opérades

Présenter une opérade $\mathcal{O}$ permet de décrire facilement les $\mathcal{O}$-algèbres.

En effet, si $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ est une présentation de $\mathcal{O}$,

Présentations et algèbres sur opérades

Présenter une opérade $\mathcal{O}$ permet de décrire facilement les $\mathcal{O}$-algèbres.

En effet, si $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ est une présentation de $\mathcal{O}$,

- les éléments de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ sont les opérations des $\mathcal{O}$-algèbres.

  Conséquence de l'axiome des algèbres sur opérades et du fait que tout élément de $\mathcal{O}$ s'obtient en composant des éléments de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$;

Présentations et algèbres sur opérades

Présenter une opérade $\mathcal{O}$ permet de décrire facilement les $\mathcal{O}$-algèbres.

En effet, si $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ est une présentation de $\mathcal{O}$,

- les éléments de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ sont les opérations des $\mathcal{O}$-algèbres.

  Conséquence de l'axiome des algèbres sur opérades et du fait que tout élément de $\mathcal{O}$ s'obtient en composant des éléments de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$;

- les relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ sont les relations axiomatiques des $\mathcal{O}$-algèbres que doivent vérifier les opérations de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$.

  Conséquence (en particulier) de la linéarité de l'action des éléments de $\mathcal{O}$ sur les $\mathcal{O}$-algèbres.

Exemple : algèbres sur As

L'opérade associative As est l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{As}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{As}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{As}} = \mathfrak{G}_{\mathsf{As}}(2) = \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{As}}$ est l'espace engendré par $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$.

Exemple : algèbres sur As

L'opérade associative As est l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{As}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{As}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{As}} = \mathfrak{G}_{\mathsf{As}}(2) = \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{As}}$ est l'espace engendré par $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$.

Toute As-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ muni d'une opération linéaire

$$\mathtt{a} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

Exemple : algèbres sur As

L'opérade associative As est l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{As}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{As}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{As}} = \mathfrak{G}_{\mathsf{As}}(2) = \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{As}}$ est l'espace engendré par $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$.

Toute As-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ muni d'une opération linéaire

$$\mathtt{a} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}$,

$$(\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) = 0.$$

Exemple : algèbres sur As

L'opérade associative As est l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{As}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{As}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{As}} = \mathfrak{G}_{\mathsf{As}}(2) = \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{As}}$ est l'espace engendré par $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$.

Toute As-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ muni d'une opération linéaire

$$\mathtt{a} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}$,

$$(\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) = 0.$$

Ainsi,

$$(\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a})(x, y, z) = \mathtt{a}(\mathtt{a}(x, y), z)$$

Exemple : algèbres sur As

L'opérade associative As est l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{As}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{As}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{As}} = \mathfrak{G}_{\mathsf{As}}(2) = \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{As}}$ est l'espace engendré par $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$.

Toute As-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ muni d'une opération linéaire

$$\mathtt{a} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}$,

$$(\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a})(x, y, z) &= \mathtt{a}(\mathtt{a}(x, y), z) \\ \| \quad & \\ (\mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) & \end{aligned}$$

Exemple : algèbres sur As

L'opérade associative As est l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{As}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{As}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{As}} = \mathfrak{G}_{\mathsf{As}}(2) = \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{As}}$ est l'espace engendré par $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$.

Toute As-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ muni d'une opération linéaire

$$\mathtt{a} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}$,

$$(\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{l} (\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a})(x, y, z) = \mathtt{a}(\mathtt{a}(x, y), z) \\ \qquad \| \\ (\mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) = \mathtt{a}(x, \mathtt{a}(y, z)). \end{array}$$

Exemple : algèbres sur As

L'opérade associative As est l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{As}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{As}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{As}} = \mathfrak{G}_{\mathsf{As}}(2) = \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{As}}$ est l'espace engendré par $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$.

Toute As-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ muni d'une opération linéaire

$$\mathtt{a} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}$,

$$(\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ccc} (\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a})(x, y, z) & = & \mathtt{a}(\mathtt{a}(x, y), z) \\ \| & & \| \\ (\mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) & = & \mathtt{a}(x, \mathtt{a}(y, z)). \end{array}$$

Exemple : algèbres sur As

L'opérade associative As est l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{As}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{As}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{As}} = \mathfrak{G}_{\mathsf{As}}(2) = \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{As}}$ est l'espace engendré par $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$.

Toute As-algèbre est un espace $\mathcal{A}$ muni d'une opération linéaire

$$\mathtt{a} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}$,

$$(\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ccc}
(\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a})(x, y, z) & = & \mathtt{a}(\mathtt{a}(x, y), z) \\
\| & & \| \\
(\mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a})(x, y, z) & = & \mathtt{a}(x, \mathtt{a}(y, z)).
\end{array}$$

En utilisant la notation infixe pour l'opération a, on obtient l'axiome

$$(x \,\mathtt{a}\, y) \,\mathtt{a}\, z = x \,\mathtt{a}\, (y \,\mathtt{a}\, z),$$

des algèbres associatives.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

Rappel : Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

Rappel : Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathrm{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathrm{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathrm{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathrm{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathrm{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

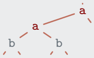
Rappel : Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

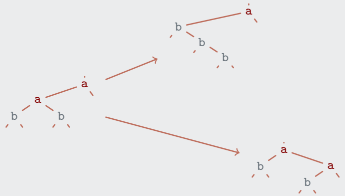
Rappel : Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

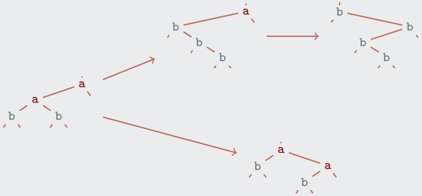
Rappel : Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathrm{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathrm{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathrm{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathrm{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathrm{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

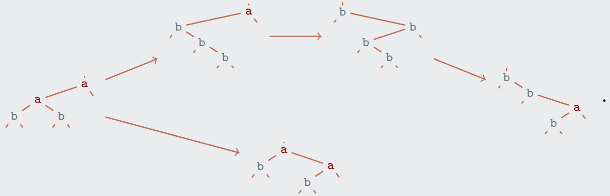
Rappel : Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

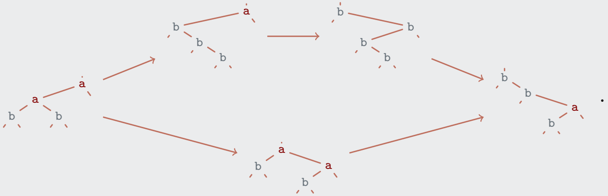
Rappel : Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le dual de Koszul [**Ginzburg, Kapranov**, 1994] de $\mathcal{O}$ est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$

Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le dual de Koszul [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994] de $\mathcal{O}$ est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle -, - \rangle : \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \to \mathbb{K}$$

Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le dual de Koszul [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994] de $\mathcal{O}$ est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle -, - \rangle : \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \to \mathbb{K}$$

défini linéairement pour tous $x, x', y, y' \in \mathfrak{G}_{\mathcal{O}}(2)$, par

$$\langle x \circ_i y, x' \circ_{i'} y' \rangle := \begin{cases} 1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 1, \\ -1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le dual de Koszul [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994] de $\mathcal{O}$ est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle -, - \rangle : \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \to \mathbb{K}$$

défini linéairement pour tous $x, x', y, y' \in \mathfrak{G}_{\mathcal{O}}(2)$, par

$$\langle x \circ_i y, x' \circ_{i'} y' \rangle := \begin{cases} 1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 1, \\ -1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, à partir d'une présentation de $\mathcal{O}$, on calcule une présentation de $\mathcal{O}^!$.

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade $\mathcal{O}$ admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!^!} = \mathcal{O}.$$

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade $\mathcal{O}$ admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!^!} = \mathcal{O}.$$

La série de Hilbert de $\mathcal{O}$ est

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(t) := \sum_{n \geqslant 1} \dim \mathcal{O}(n)\, t^n.$$

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg, Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade $\mathcal{O}$ admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!\,!} = \mathcal{O}.$$

La série de Hilbert de $\mathcal{O}$ est

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(t) := \sum_{n \geqslant 1} \dim \mathcal{O}(n)\, t^n.$$

Théorème [**Ginzburg, Kapranov**, 1994]

Lorsque $\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul admettant une présentation binaire et quadratique, les séries de Hilbert de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^!$ vérifient

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(-\mathcal{H}_{\mathcal{O}^!}(-t)) = t.$$

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg, Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade $\mathcal{O}$ admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!^!} = \mathcal{O}.$$

La série de Hilbert de $\mathcal{O}$ est

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(t) := \sum_{n \geqslant 1} \dim \mathcal{O}(n)\, t^n.$$

Théorème [**Ginzburg, Kapranov**, 1994]

Lorsque $\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul admettant une présentation binaire et quadratique, les séries de Hilbert de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^!$ vérifient

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(-\mathcal{H}_{\mathcal{O}^!}(-t)) = t.$$

Ainsi, lorsque $\mathcal{O}$ admet une présentation binaire et quadratique et est de Koszul, on peut calculer les dimensions de $\mathcal{O}^!$ à partir de celles de $\mathcal{O}$.

L'opérade diassociative

L'opérade diassociative Dias [**Loday**, 2001] est définie par :

- $\mathsf{Dias}(n)$ est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1\}$ avec exactement un 0 ;

L'opérade diassociative

L'opérade diassociative Dias [**Loday**, 2001] est définie par :

- Dias(n) est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1\}$ avec exactement un 0 ;
- la composition partielle de Dias vérifie

$$u \circ_i v := u_1 \ \ldots \ u_{i-1} \ (u_i \uparrow v_1) \ \ldots \ (u_i \uparrow v_m) \ u_{i+1} \ \ldots \ u_n,$$

où $\uparrow$ est l'opération $\max$ sur les entiers ;

Exemple

$$1101111 \circ_3 11101 = 11111011111$$

$$1101111 \circ_6 11101 = 11011111111$$

L'opérade diassociative

L'opérade diassociative Dias [**Loday**, 2001] est définie par :

- Dias(n) est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1\}$ avec exactement un 0 ;
- la composition partielle de Dias vérifie

$$u \circ_i v := u_1 \ \ldots \ u_{i-1} \ (u_i \uparrow v_1) \ \ldots \ (u_i \uparrow v_m) \ u_{i+1} \ \ldots \ u_n,$$

  où $\uparrow$ est l'opération $\max$ sur les entiers ;
- l'unité de Dias est le mot 0.

Exemple

$$1101111 \circ_3 11101 = 11111011111$$

$$1101111 \circ_6 11101 = 11011111111$$

Présentation de Dias

Théoreme

Dias admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}}(2) := \{\dashv, \vdash\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}$ est l'espace engendré par

$$\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv, \qquad \dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash,$$

$$\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv,$$

$$\vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash, \qquad \vdash \circ_1 \dashv - \vdash \circ_2 \vdash.$$

Présentation de Dias

Théoreme

Dias admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}}(2) := \{\dashv, \vdash\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}$ est l'espace engendré par

$$\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv, \qquad \dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash,$$

$$\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv,$$

$$\vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash, \qquad \vdash \circ_1 \dashv - \vdash \circ_2 \vdash.$$

Ceci se démontre à l'aide de l'orientation convergente $\Rightarrow$ de $\mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}$ vérifiant

$$\dashv \circ_1 \dashv \Leftarrow \dashv \circ_2 \dashv, \qquad \dashv \circ_1 \dashv \Leftarrow \dashv \circ_2 \vdash,$$

$$\dashv \circ_1 \vdash \Leftarrow \vdash \circ_2 \dashv,$$

$$\vdash \circ_1 \vdash \Rightarrow \vdash \circ_2 \vdash, \qquad \vdash \circ_1 \dashv \Rightarrow \vdash \circ_2 \vdash.$$

L'opérade dendriforme

L'opérade dendriforme Dendr [**Loday**, 2001] est définie comme étant l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dendr}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Dendr}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Dendr}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Dendr}}(2) := \{\prec, \succ\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Dendr}}$ est l'espace engendré par

$$\prec \circ_1 \prec - \prec \circ_2 \prec - \prec \circ_2 \succ,$$

$$\prec \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \prec,$$

$$\succ \circ_1 \prec + \succ \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \succ.$$

L'opérade dendriforme

L'opérade dendriforme Dendr [Loday, 2001] est définie comme étant l'opérade qui admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dendr}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Dendr}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Dendr}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Dendr}}(2) := \{\prec, \succ\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Dendr}}$ est l'espace engendré par

$$\prec \circ_1 \prec - \prec \circ_2 \prec - \prec \circ_2 \succ,$$

$$\prec \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \prec,$$

$$\succ \circ_1 \prec + \succ \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \succ.$$

Une réalisation de Dendr est fournie par le résultat suivant :

Théorème [Loday, 2010]

Dendr est isomorphe à la sous-opérade de $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ engendrée par $\frac{1}{u_1} \in \mathbb{K}(u_1, u_2)$ et $\frac{1}{u_2} \in \mathbb{K}(u_1, u_2)$.

Dual de Koszul de Dias

Théorème [**Loday**, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

Dual de Koszul de Dias

Théorème [**Loday**, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}^{\perp} = \mathbb{K} \left\langle y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}})(3) : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} \right\rangle .$$

Dual de Koszul de Dias

Théorème [**Loday**, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{R}^{\perp}_{\mathsf{Dias}} = \mathbb{K}\left\langle y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}})(3) : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} \right\rangle.$$

Soit

$$y := \sum_{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}})(3)} \lambda_{\mathfrak{t}} \mathfrak{t} \;\in\; \mathfrak{R}^{\perp}_{\mathsf{Dias}}.$$

Dual de Koszul de Dias

Théorème [Loday, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}^{\perp} = \mathbb{K}\left\langle y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}})(3) : \langle x, y\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}\right\rangle .$$

Soit

$$y := \sum_{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}})(3)} \lambda_{\mathfrak{t}} \mathfrak{t} \in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}^{\perp}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} \quad \text{implique} \quad \lambda_{\dashv \circ_1 \vdash} + \lambda_{\vdash \circ_2 \dashv} = 0,\\
\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} \quad \text{implique} \quad \lambda_{\dashv \circ_1 \dashv} + \lambda_{\dashv \circ_2 \dashv} = 0,\\
\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} \quad \text{implique} \quad \lambda_{\dashv \circ_1 \dashv} + \lambda_{\dashv \circ_2 \vdash} = 0,\\
\vdash \circ_1 \dashv - \vdash \circ_2 \vdash \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} \quad \text{implique} \quad \lambda_{\vdash \circ_1 \dashv} + \lambda_{\vdash \circ_2 \vdash} = 0,\\
\vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} \quad \text{implique} \quad \lambda_{\vdash \circ_1 \vdash} + \lambda_{\vdash \circ_2 \vdash} = 0.
\end{aligned}$$

Dual de Koszul de Dias

Théorème [Loday, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}^{\perp} = \mathbb{K}\left\langle y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}})(3) : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} \right\rangle.$$

Soit

$$y := \sum_{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathsf{Dias}})(3)} \lambda_{\mathfrak{t}} \mathfrak{t} \in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}^{\perp}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} && \text{implique} && \lambda_{\dashv \circ_1 \vdash} + \lambda_{\vdash \circ_2 \dashv} = 0,\\
\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} && \text{implique} && \lambda_{\dashv \circ_1 \dashv} + \lambda_{\dashv \circ_2 \dashv} = 0,\\
\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} && \text{implique} && \lambda_{\dashv \circ_1 \dashv} + \lambda_{\dashv \circ_2 \vdash} = 0,\\
\vdash \circ_1 \dashv - \vdash \circ_2 \vdash \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} && \text{implique} && \lambda_{\vdash \circ_1 \dashv} + \lambda_{\vdash \circ_2 \vdash} = 0,\\
\vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash \; &\in \mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}} && \text{implique} && \lambda_{\vdash \circ_1 \vdash} + \lambda_{\vdash \circ_2 \vdash} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, y est de la forme

$$y = \lambda_1(\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv) + \lambda_2(\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash) + \lambda_3(\vdash \circ_1 \dashv + \vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash).$$

Dual de Koszul de Dias

Théorème [**Loday**, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{R}_{\text{Dias}}^{\perp} = \mathbb{K}\left\langle y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3) : \langle x, y\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}\right\rangle.$$

Soit

$$y := \sum_{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3)} \lambda_{\mathfrak{t}} \mathfrak{t} \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}^{\perp}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv \; \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \quad & \text{implique} \quad \lambda_{\dashv \circ_1 \vdash} + \lambda_{\vdash \circ_2 \dashv} = 0,\\
\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv \; \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \quad & \text{implique} \quad \lambda_{\dashv \circ_1 \dashv} + \lambda_{\dashv \circ_2 \dashv} = 0,\\
\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash \; \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \quad & \text{implique} \quad \lambda_{\dashv \circ_1 \dashv} + \lambda_{\dashv \circ_2 \vdash} = 0,\\
\vdash \circ_1 \dashv - \vdash \circ_2 \vdash \; \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \quad & \text{implique} \quad \lambda_{\vdash \circ_1 \dashv} + \lambda_{\vdash \circ_2 \vdash} = 0,\\
\vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash \; \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \quad & \text{implique} \quad \lambda_{\vdash \circ_1 \vdash} + \lambda_{\vdash \circ_2 \vdash} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, y est de la forme

$$y = \lambda_1(\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv) + \lambda_2(\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash) + \lambda_3(\vdash \circ_1 \dashv + \vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash).$$

Ceci montre que $\mathfrak{R}_{\text{Dias}}^{\perp}$ est engendré par

$$\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv, \quad \dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash, \quad \vdash \circ_1 \dashv + \vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash,$$

et on reconnaît les relations dendriformes.

Dimensions de Dendr

On sait que

- grâce à sa réalisation, la série de Hilbert de Dias vérifie

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + \cdots \;;$$

Dimensions de Dendr

On sait que

- grâce à sa réalisation, la série de Hilbert de Dias vérifie

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + \cdots \;;$$

- grâce à sa présentation, Dias est binaire et quadratique ;

Dimensions de Dendr

On sait que

- grâce à sa réalisation, la série de Hilbert de Dias vérifie

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + \cdots ;$$

- grâce à sa présentation, Dias est binaire et quadratique ;
- grâce à l'existence de l'orientation convergente $\Rightarrow$ de $\mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}$, Dias est de Koszul ;

Dimensions de Dendr

On sait que

- grâce à sa réalisation, la série de Hilbert de Dias vérifie

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + \cdots \;;$$

- grâce à sa présentation, Dias est binaire et quadratique ;
- grâce à l'existence de l'orientation convergente ⇒ de $\mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}$, Dias est de Koszul ;
- Dias et Dendr sont duales de Koszul l'une de l'autre.

Dimensions de Dendr

On sait que

- grâce à sa réalisation, la série de Hilbert de Dias vérifie

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + \cdots \; ;$$

- grâce à sa présentation, Dias est binaire et quadratique ;
- grâce à l'existence de l'orientation convergente $\Rightarrow$ de $\mathfrak{R}_{\mathsf{Dias}}$, Dias est de Koszul ;
- Dias et Dendr sont duales de Koszul l'une de l'autre.

Ainsi,

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)) = t.$$

Dimensions de Dendr

On en déduit

Proposition

$$t + (2t - 1)\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t) + t\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t)^2 = 0 \tag{1}$$

Dimensions de Dendr

On en déduit

Proposition

$$t + (2t - 1)\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t) + t\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t)^2 = 0 \tag{1}$$

Démonstration.

En supposant (1) vraie, on a

$$t = \frac{-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)}{(1 + \mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t))^2}.$$

□

Dimensions de Dendr

On en déduit

Proposition

$$t + (2t - 1)\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t) + t\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t)^2 = 0 \tag{1}$$

Démonstration.

En supposant (1) vraie, on a

$$t = \frac{-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)}{(1 + \mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t))^2}.$$

Ainsi, comme

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2},$$

□

Dimensions de Dendr

On en déduit

Proposition

$$t + (2t - 1)\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t) + t\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t)^2 = 0 \tag{1}$$

Démonstration.

En supposant (1) vraie, on a

$$t = \frac{-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)}{(1 + \mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t))^2}.$$

Ainsi, comme

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2},$$

on obtient

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)) = \frac{-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)}{(1 + \mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t))^2} = t.$$

$\square$

Dimensions de Dendr

On en déduit

Proposition

$$t + (2t - 1)\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t) + t\,\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t)^2 = 0 \tag{1}$$

Démonstration.

En supposant (1) vraie, on a

$$t = \frac{-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)}{(1 + \mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t))^2}.$$

Ainsi, comme

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2},$$

on obtient

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)) = \frac{-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)}{(1 + \mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t))^2} = t.$$

En conséquence, $\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(t)$ est l'unique série de Hilbert vérifiant (1) et

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Dias}}(-\mathcal{H}_{\mathsf{Dendr}}(-t)) = t.$$

$\square$