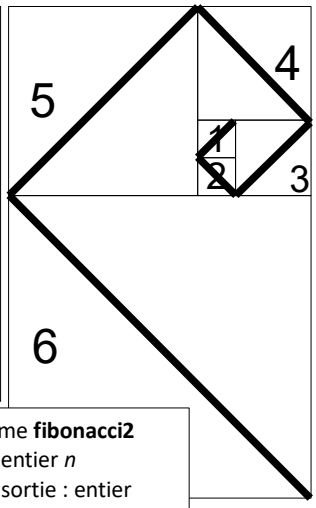
TD d'algorithmique M2202

TD1 – Récursivité

Le but de ce TD est de manipuler quelques fonctions récursives.

Exercice 1 (C1a, C1b, C2a, C2b)

```
Algorithme fibonacci
Entrée : entier n
Type de sortie : entier
Variable : entier resultat
Début
  Si n=1 ou n=2 alors :
    resultat ← 1
  Sinon :
    resultat ← fibonacci(n-1)+
               fibonacci(n-2)
  FinSi
  renvoyer resultat
Fin
```




```
Algorithme fibonacci2
Entrée : entier n
Type de sortie : entier
Variables : entiers i, j, k et l
Début
  i ← 1
  j ← 1
  Pour l de 3 à n faire :
    k ← i + j
    i ← j
    j ← k
  Fin Pour
  renvoyer j
Fin
```

- Q1. Quelle est la valeur renvoyée par **fibonacci**(7) ? Pour calculer cela, faites la trace du programme en dessinant son arbre d'exécution.
- Q2. Est-ce une méthode efficace en termes de nombre d'additions ? Indiquez sur l'arbre d'exécution, en les entourant d'une même manière, des calculs identiques qui sont faits plusieurs fois.
- Q3. L'algorithme **fibonacci2** ci-contre permet d'obtenir le même résultat pour $n \geq 2$, sans faire plusieurs fois le même calcul. Quel est le nombre d'additions de **fibonacci2**(*n*) en fonction de la valeur de *n* ?
- Q4. Prouvez de manière « visuelle », en utilisant l'arbre de la question Q1, que l'algorithme **fibonacci** fait toujours plus d'additions, pour toute entrée $n \geq 2$, que l'algorithme **fibonacci2**.

On va maintenant utiliser l'algorithme **fibonacci** pour dessiner la « spirale de Fibonacci » montrée à droite, de taille 6 ici, à partir de 6 carrés avec une diagonale, dessinés successivement.

- Q5. Écrivez un algorithme **ajouteCarre** qui prend en entrée les coordonnées *x* et *y* du coin en haut à gauche du prochain carré à ajouter, le numéro *n* du carré (indiqué dans le dessin à droite) et un code de la direction de la diagonale (0 si elle va vers le bas à gauche, 1 vers le bas à droite, 2 vers le haut à droite, 3 vers le haut à gauche) et qui dessine le prochain carré et sa diagonale à ajouter. Utilisez **dessineLigne** et **dessineRectangle**.
- Q6. Écrivez l'algorithme récursif **dessineSpirale** qui prend en entrée un entier *n* et dessine une spirale de Fibonacci de taille *n*.

Exercice bonus – Puissances de 2 (C2a, C2b)

- Q1. Écrivez une fonction récursive **deuxPuissance** qui prend en entrée un entier *n* et renvoie la valeur de 2^n, sans utiliser de boucle (ni **Pour**, ni **Tant que**). *Indications : quel est le cas de base (initialisation) ? Quelle est la formule d'hérédité ?*
- Q2. Vous allez écrire à la question Q3 une fonction récursive **termineTableauPuissancesDeDeux** qui prend en entrée un entier *n*, et un entier *i* compris entre 1 et *n*, et renvoie un tableau d'entiers de *n* cases, dont chaque case jusqu'à la *i*-ième incluse contient la puissance de 2 correspondante (la première case contient 2^1, la deuxième 2^2=4, la troisième 2^3=8, etc). Que renvoie **termineTableauPuissancesDeDeux**(5,4) ?
- Q3. Écrivez la fonction récursive **termineTableauPuissancesDeDeux** qui répond à la question précédente sans utiliser de boucle (ni **Pour**, ni **Tant que**).
- Q4. Écrivez la fonction **remplitTableauPuissanceDeDeux** qui prend en entrée un entier *n* et renvoie un tableau d'entiers de *n* cases dont la *i*-ième case contient 2^i (appelez la fonction **termineTableauPuissancesDeDeux**).

TD2&3 – Tris

Exercice 1 – Implémentation du tri à bulles

- Q1 (C1c). La fonction **etapeTriBulles** fait une étape du tri à bulles. Comme nous l'avons vu en cours, elle parcourt le tableau d'entiers fourni en entrée en vérifiant pour chaque case si elle est bien inférieure ou égale à la suivante, et échange leurs valeurs si ce n'est pas le cas. Elle renvoie le tableau ainsi obtenu. Que renvoie **etapeTriBulles**({4,5,1,2,2,9,8}) ?
- Q2 (C2b). Écrivez la fonction **etapeTriBulles**.
- Q3 (C2b). Pour savoir si on arrête l'algorithme à la fin d'une étape du tri à bulles, il faut savoir si le tableau est trié. Pour cela, écrivez un algorithme récursif **testTrieAvantCase**, qui prend en entrée un tableau d'entiers *tab* et un entier *i*, et renvoie VRAI si tab est trié jusqu'à la *i*-ième case incluse, et renvoie FAUX sinon.
  Indication pour l'initialisation : que renvoie **testTrieAvantCase** sur n'importe quel tableau *tab* en entrée si l'entrée *i* vaut 1 ?
  Indication pour l'hérédité : si le tableau *tab* en entrée de **testTrieAvantCase** est trié jusqu'à la (*i*-1)-ième case, comment savoir s'il est trié jusqu'à la *i*-ième ? Et s'il n'est pas trié jusqu'à la *i*-ième case ?
- Q4 (C2a, C2b). En utilisant **etapeTriBulles** et **testTrieAvantCase**, écrivez l'algorithme **triBulles** qui prend en entrée un tableau d'entiers et renvoie ce tableau trié par le tri à bulles.

Exercice 2 – Tri par insertion

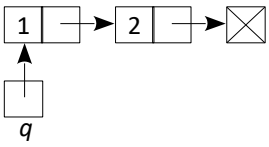
- Q1 (C2a, C2b). Écrivez un algorithme **decaleApresCase** qui prend en entrée un tableau d'entiers *tab* et un numéro de case *i* et recopie dans la case suivante la valeur de chaque case située après la *i*-ième case (non incluse). Que renvoie **decaleApresCase**({1,4,5,,,,},1) ?
- Q2 (C2a, C2b). Écrivez un algorithme **trouvePosition** qui prend en entrée un tableau d'entiers trié *tab* (dont les dernières cases sont éventuellement vides) et un entier *k*, et qui renvoie le numéro de case de *tab* après laquelle il faut insérer *k* pour que *tab* reste trié. Par exemple, **trouvePosition**({1,4,5,,,,},2) renvoie 1 car il faudrait insérer l'entrée *k*=2 après la première case pour obtenir le tableau trié {1,2,4,5,,,}.

• Q3 (C2a, C2b). En utilisant les algorithmes **decaleApresCase** et **trouvePosition**, écrivez un algorithme **insereDansTableauTrie** qui prend en entrée un tableau d'entiers trié *tab* et un entier *k*, et qui insère *k* dans *tab* à la bonne position pour que *tab* reste trié, et renvoie *tab*. Que renvoie **insereDansTableauTrie**({1,2,4,5,,,},2) ?
• Q4 (C2a,C2b). En utilisant l'algorithme **insereDansTableauTrie**, écrivez l'algorithme **triParInsertion** qui prend en entrée un tableau d'entiers *tab*, crée un tableau vide *tab2*, et le remplit progressivement avec les éléments de *tab* de telle sorte que *tab2* reste toujours trié. Finalement, **triParInsertion** renvoie le tableau *tab2* qui est trié et a été entièrement rempli par les éléments de *tab*.

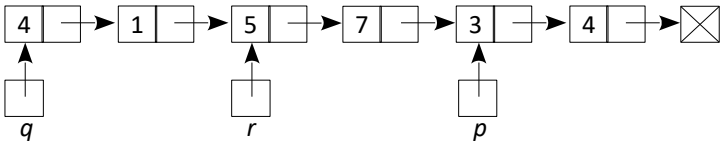
TD4 – Listes

Exercice 1 – Manipulation des fonctions de base sur les listes

Q1 (C1b). Dessinez l'ensemble des listes *p*, *q* et *r* après chaque instruction de l'algorithme **initialiseListes** ci-contre. Voici par exemple le dessin de la situation après la ligne 1 :



Q2. (C2b) Quelle instruction ajoutez-vous à la fin de l'algorithme pour obtenir les listes suivantes ?



Algorithme initialiseListes
Variables : *p*, *q*, *r*, listes d'entiers
Début
1. *q* ← **creeListe**(1,**creeListe**(2,NULL))
2. *p* ← **creeListe**(1,**creeListe**(2,**creeListe**(3,NULL)))
3. *q* ← **creeListe**(4,*p*)
4. **tete**(**suivant**(*p*)) ← 6
5. *r* ← **creeListe**(5,**suivant**(**suivant**(*p*)))
6. **suivant**(*p*) ← *r*
7. *p* ← **suivant**(*r*)
8. **suivant**(*p*) ← **creeListe**(**tete**(*q*),NULL)

Fin

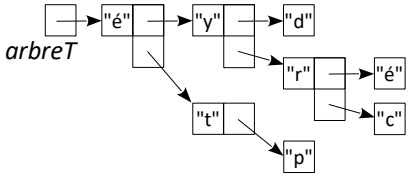
Exercice 2 – Écriture de fonctions sur les listes et implémentation d'une file (C2a, C2b)

• Q1. En utilisant une boucle **Tant que**, écrivez en pseudo-code un algorithme **afficheListe** qui prend en entrée une liste d'entiers et affiche le contenu de chaque case. Par exemple, **afficheListe**(**creeListe**(1,**creeListe**(2,NULL)) affichera 1 puis 2.
• Q2. Sans utiliser de boucle **Tant que**, écrivez en pseudo-code un algorithme récursif **afficheListe** qui prend en entrée une liste d'entiers et affiche le contenu de chaque case. Vous constatez qu'un parcours de liste peut s'effectuer de manière récursive, ou avec une boucle.
• Q3. Écrivez un algorithme **longueurListe** qui prend en entrée une liste *listeL* d'entiers et renvoie son nombre de cases. Si l'on exécute cette instruction juste après l'instruction 8 de l'algorithme **initialiseListes** de l'exercice 1, que renvoie **longueurListe**(*r*) ?
• Q4. Écrivez un algorithme **insereAvantCase** qui prend en entrée une liste *listeL* d'entiers et deux entiers *i* et *x*, et insère avant la *i*-ième case de la liste une case contenant l'entier *x*. La question Q2 de l'exercice 1 pourra vous être utile.
• Q5. En utilisant les algorithmes **longueurListe** et **insereAvantCase**, écrivez un algorithme **enfile** qui prend en entrée une liste *listeL* d'entiers et un entier *a*, et insère à la fin de *listeL* une nouvelle case contenant *a*.
• Q6. Écrivez un algorithme **defile** qui renvoie la valeur de la première case de la liste d'entiers en entrée, et supprime cette case.

TD5 – Arbres

Exercice 1 – Codage d'un arbre (C1a, C1b)

Que renvoie **ecritureParenthesee**(*arbreT*), si *arbreT* est l'arbre représenté à droite ?

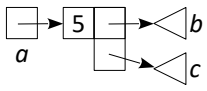


Algorithme ecritureParenthesee
Entrée : arbre de chaînes de caractères *a*
Type de sortie : chaîne de caractères
Variables : chaîne de caractères *resultat*, entier *i*
Début
1. Si **estFeuille**(*a*) alors :
2. resultat ← **racine**(*a*)
4. Sinon :
5. *resultat* ← "("
6. Pour *i* de 1 à **longueur**(**enfants**(*a*)) faire :
7. *resultat* ← **concatene**(*resultat*,**concatene**(**ecritureParenthesee**(**case**(**enfants**(a),*i*)),";"))
8. Fin pour
9. *resultat* ← **concatene**(**concatene**(*resultat*,")"),**racine**(*a*))
10. Fin si
11. renvoyer *resultat*

Fin

Exercice 2 – Comptages dans les arbres (C2a, C2b)

• Q1. On va compter les feuilles d'un arbre d'entiers. Pour cela on définit l'algorithme récursif **nombreFeuilles** qui prend en entrée un arbre d'entiers *a*, et renvoie le nombre de feuilles de l'arbre. Si l'arbre *a* a deux fils qui sont les arbres *b* et *c*, que **nombreFeuilles**(*b*) renvoie 4 et que **nombreFeuilles**(*c*) renvoie 6, quelle valeur renvoie **nombreFeuilles**(*a*) ? Quelle est l'initialisation de l'algorithme **nombreFeuilles** ?



• Q2. Déduisez-en l'écriture de l'algorithme récursif **nombreFeuilles**.
• Q3. En faisant de légères modifications de l'algorithme **nombreFeuilles**, écrivez un algorithme récursif **nombreNoeuds** qui calcule le nombre de nœuds de l'arbre d'entiers fourni en entrée (nœuds = toutes les cases de l'arbre qui contiennent un entier).
• Q4. En appelant les algorithmes **nombreFeuilles** et **nombreNoeuds**, écrivez un algorithme **nombreNoeudsInternes** qui renvoie le nombre de nœuds qui ne sont pas des feuilles dans l'arbre en entrée.

Exercice 3 – Recherche dans un arbre (C2a, C2b)

• Q1. Écrivez un algorithme récursif **recherche** qui prend en entrée un entier *i* et un arbre d'entiers *a*, et renvoie VRAI si *i* se trouve dans une des cases de *a*, et FAUX sinon.
• Q2. Écrivez un algorithme récursif **profondeur** qui prend en entrée un entier *i* et un arbre d'entiers *a*, et renvoie la profondeur de l'entier *i* (0 s'il est à la racine, 1 s'il est dans un fils de la racine, 2 s'il est dans un de leurs fils, etc.) s'il se trouve dans l'arbre, et -1 sinon.