

MÉMOIRE DE DEA

Entrelacs, cartes et polytopes : énumération en tenant
compte des symétries

Eric FUSY

Directeur : Gilles Schaeffer
Filière : Combinatoire
Laboratoire : LIX

Table des matières

0.1	Introduction	4
0.2	Définitions générales sur les cartes	5
1	Etude des symétries des entrelacs premiers alternés	7
1.1	Définitions et présentation des entrelacs premiers alternés	7
1.2	Représentation des entrelacs premiers alternés à l'aide d'arbres	11
1.2.1	Décomposition en arbre des quadrangulations simples	11
1.2.2	Action des flypes sur les arbres	12
1.3	Définition des symétries non triviales d'un arbre articulé et démonstration du fait que les arbres articulés à n faces ayant une symétrie non triviale sont en proportion exponentiellement négligeable	12
2	Enumération précise de cartes non enracinées en tenant compte des symétries	24
2.1	Formule de comptage	24
2.2	La bijection de Tutte entre cartes et quadrangulations	26
2.3	Décomposition en arbre	29
2.3.1	Décomposition par arête multiple	29
2.3.2	Décomposition d'une quadrangulation simple en arbre	30
2.4	Utilisation de la première décomposition en arbre pour obtenir les SG des quadrangulations simples k -enracinées	33
2.4.1	Introduction	33
2.4.2	Calcul des quadrangulations k -enracinées de type a	34
2.4.3	Calcul de la SG des quadrangulations k -enracinées de type b	36
2.4.4	Calcul de la SG des quadrangulations simples k -enracinées de type sommet-sommet	38
2.4.5	Calcul des SG des quadrangulations simples 2-enracinées de type face-sommet et face-face	38
2.4.6	Obtention des cartes 2-connexes à orientation positive près	39
2.5	Calcul des SG des quadrangulations irréductibles k -enracinées en utilisant la deuxième décomposition en arbre	39
2.5.1	Calcul de la SG des quadrangulations irréductibles bicolourées pour $k \geq 3$	40
2.5.2	Calcul des SG des quadrangulations irréductibles 2-enracinées	44

2.5.3	Calcul de la SG des cartes 3-connexes à orientation positive près	56
2.6	Cas non orienté	56
3	Présentation de deux bijections entre une famille d'arbres et une famille de cartes enracinées en utilisant la théorie des α-orientations	59
3.1	Une nouvelle approche pour la bijection entre cartes eulériennes et arbres bourgeonnants équilibrés	59
3.1.1	Introduction	59
3.1.2	Algorithme de clôture (rappels)	60
3.1.3	Présentation de la théorie des α -orientations	62
3.1.4	Présentation de l'algorithme d'ouverture	63
3.1.5	Les applications de clôture et d'ouverture sont réciproques l'une de l'autre	65
3.1.6	Conclusion	68
3.2	Bijection entre les cartes non séparables enracinées et une famille d'arbres bourgeonnants	69
3.2.1	Introduction et définitions	69
3.2.2	Algorithme de clôture	70
3.2.3	Algorithme d'ouverture	73
3.2.4	Preuve du lemme 9 en utilisant les orientations bipolaires	74
3.2.5	La clôture et l'ouverture sont deux applications réciproques	78
3.2.6	Codage et comptage des arbres bourgeonnants	79
3.3	Conclusion	81

0.1 Introduction

Mon mémoire de DEA se compose de trois parties assez indépendantes. Dans la première partie, on étudie des objets topologiques appelés entrelacs premiers alternés que l'on peut aussi définir de manière combinatoire. L'article [14] donne un équivalent asymptotique pour les entrelacs premiers alternés comptés en fonction du nombre de croisements d'un de leurs diagrammes premiers alternés ¹. Pour obtenir cet équivalent asymptotique, il faut établir une propriété très souvent vraie pour des objets combinatoires géométriques groupés selon la valeur que prend un de leurs paramètres (nombre de sommets, d'arêtes, etc...), à savoir qu'une proportion exponentiellement négligeable de ces objets admettent une symétrie non triviale. Avec mon directeur de stage Gilles Schaeffer, nous avons corrigé, réécrit et rendu rigoureuse la démonstration de cette propriété. Ensuite, dans la deuxième partie, on s'intéresse à l'énumération de cartes planaires non enracinées à orientation positive près ² comptées en fonction de leur nombre d'arêtes et on obtient une énumération précise pour deux familles de cartes : les cartes 2-connexes et les cartes 3-connexes. La méthode mise en œuvre utilise la notion de décomposition géométrique en arbre d'une carte planaire, et on utilise deux telles décompositions pour énumérer respectivement les cartes 2-connexes et 3-connexes à orientation positive près. Enfin, la troisième partie traite de la notion de bijection entre des familles de cartes enracinées et des familles d'arbres. De telles bijections sont très utiles pour coder de manière optimale des familles de cartes enracinées. L'article [16] présente une notion, appelée théorie des α -orientations, qui permet d'établir proprement de telles bijections, et en utilisant toujours le même raisonnement. Une bijection utilisant cette théorie avait déjà été trouvée dans [15]. Il s'avère que la même méthode s'applique aussi pour la bijection entre les cartes eulériennes enracinées et les arbres dits bourgeonnants eulériens équilibrés, alors que, dans l'article original [12], la validité de la bijection et la description de l'algorithme dit d'ouverture (un des deux sens de la bijection) étaient présentées d'une manière différente. Ensuite, avec Dominique Poulalhon et Gilles Schaeffer, nous avons appliqué le même raisonnement utilisant les α -orientations pour trouver une bijection avec une nouvelle famille de cartes, à savoir les quadrangulations enracinées sans arête multiple (qui sont aussi en bijection avec les cartes non séparables enracinées).

Je tiens à remercier mon directeur de stage Gilles Schaeffer pour sa disponibilité et sa gentillesse. En particulier, il m'a beaucoup aidé à comprendre comment mettre en œuvre la méthode qui est présentée dans la deuxième partie qui est la partie qui m'a le plus intéressé et m'a pris le plus de temps. Je remercie aussi Dominique Poulalhon qui a relu et corrigé une partie de mon mémoire.

¹ce paramètre est licite car tous les diagrammes premiers alternés d'un entrelacs premier alterné ont le même nombre de croisements

²i.e. on identifie deux cartes vues comme des objets géométriques sur la sphère si on peut passer de l'une à l'autre par un homéomorphisme positivement orienté de la sphère

0.2 Définitions générales sur les cartes

La notion de carte est très liée à celle de graphe mais il s'avère qu'il est plus facile en combinatoire d'obtenir des propriétés sur les cartes et de les énumérer. On ne va s'intéresser ici qu'à des cartes sur la sphère mais on peut très bien adopter la définition adoptée ici pour d'autres surfaces.

Définition 1 *On appelle carte sur la sphère le plongement sur la sphère d'un graphe non étiqueté³. On note bien qu'un tel plongement est possible ssi⁴, par définition, le graphe est planaire. Plus précisément, on distingue trois niveaux sur les cartes sur la sphère (voir figures 1 et 2) :*

- *Si on identifie deux plongement de graphe sur la sphère quand on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue de la sphère (qui correspond sur la sphère à la notion d'homéomorphisme positivement orienté), alors on appelle une telle classe d'équivalence de plongements une carte sur la sphère à orientation positive près.*
- *Si on identifie deux plongement de graphe sur la sphère quand on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue éventuellement précédée d'une réflexion (de telles opération sur la sphère correspondent à la notion d'homéomorphisme quelconque de la sphère), alors on appelle une telle classe d'équivalence de plongements une carte sur la sphère à tout homéomorphisme près.*
- *On parle de plongement enraciné d'un graphe si on marque une demi-arête du plongement. La demi-arête marquée est appelée la racine du plongement. Si on identifie deux plongements enracinés d'un graphe quand on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue de la sphère, alors on appelle une telle classe d'équivalence de plongements enracinés une carte enracinée sur la sphère.*

Remarque On parle souvent de cartes planaires pour parler des cartes sur la sphère. En effet, on peut dessiner de telles cartes sur le plan en ayant choisi au préalable une face infinie. Cette manière de dessiner une carte sur le plan à partir d'une carte sur la sphère correspond aussi à la notion de projection stéréographique.

³Le terme plongement signifie qu'on étale le graphe sur la sphère sans que deux arêtes du graphe ne se croisent ou que un sommet ne soit superposé sur une arête ou autres dégénérescences

⁴la notation *ssi* signifie si et seulement si

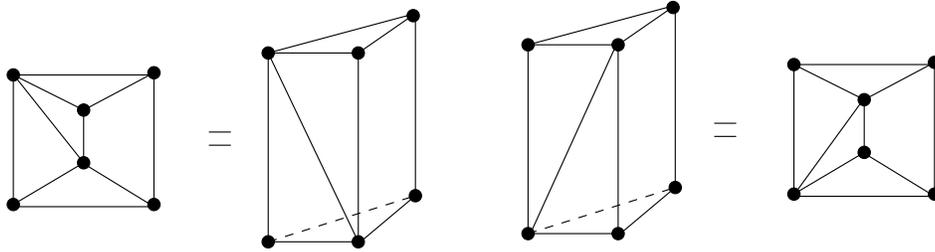


FIG. 1 – Deux cartes non enracinées (pour chacune, on la dessine dans le plan et sur un équivalent topologique de la sphère). Elles sont égales à tout homéomorphisme près mais pas à orientation positive près

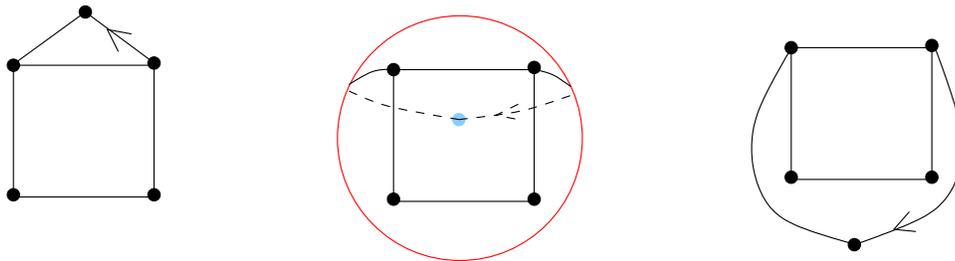


FIG. 2 – Deux représentations dans le plan de la même carte enracinée

Chapitre 1

Etude des symétries des entrelacs premiers alternés

Introduction Dans cette partie, nous définissons les entrelacs premiers alternés puis nous reprenons tout le début de l'article [14] où on observe que les entrelacs premiers alternés peuvent être visualisés à l'aide d'une structure dite d'arbre articulé.

Ensuite, nous détaillons la démonstration du fait qu'une proportion exponentiellement faible d'entrelacs premiers alternés à n croisements possèdent une symétrie non triviale (nous définirons précisément la notion de symétrie sur ces objets).

1.1 Définitions et présentation des entrelacs premiers alternés

Définition 2 *Un nœud géométrique peut être défini comme le plongement homéomorphe injectif du cercle C^1 dans l'espace à trois dimensions (ou plutôt dans la boule bornée $B = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$). Intuitivement, il s'agit d'un lacet fermé sur lui-même dans l'espace et cela correspond à l'opération qui consiste à prendre les deux bouts d'un nœud physique et à les fusionner.*

Définition 3 *Un nœud topologique peut être défini comme une classe d'équivalence de nœuds géométriques où deux nœuds géométriques sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue (homéomorphisme positivement orienté de l'espace qui envoie la courbe formée par le premier nœud sur la courbe formée par le second nœud). Si on autorise aussi les homéomorphismes changeant l'orientation (comme les réflexions) on parle de nœud topologique non orienté. Une définition purement topologique plus rigoureuse peut être donnée mais celle-ci suffit à l'intuition et nous ferons surtout un traitement combinatoire de ces objets.*

Définition 4 On peut définir de même un entrelacs géométrique comme le plongement homéomorphe injectif dans B de plusieurs exemplaires de C^1 et un entrelacs topologique (resp. un entrelacs topologique non orienté) est une classe d'équivalence d'entrelacs géométriques selon le fait que l'on peut passer d'un entrelacs à l'autre par un homéomorphisme positivement orienté (resp. par un homéomorphisme quelconque) de B . Un entrelacs peut être vu comme plusieurs nœuds emmêlés les uns avec les autres. Quand nous parlerons d'entrelacs désormais, il s'agit d'entrelacs topologiques.

Définition 5 L'entrelacs trivial est la classe d'équivalence de $\{(x, y, z)/x^2+y^2 = 1, z = 0\}$ qui est une courbe à une composante sans emmêlement de l'espace.

Définition 6 Un entrelacs E est dit premier si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Pour aucun des représentants géométriques de E , on ne peut séparer cet entrelacs géométrique en deux parties disjointes séparées par une sphère (qui renferme une des deux parties dans son intérieur)
- Pour aucun des représentants géométriques de E , on ne peut trouver une sphère qui coupe cet entrelacs géométrique en deux points seulement et tel que, pour chacun des deux entrelacs formés respectivement à partir de la composante située à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de la sphère en joignant ses deux points d'intersection avec la sphère, cet entrelacs soit non trivial.

Il est assez difficile de traiter géométriquement des objets de l'espace. En conséquence, on réalise l'opération de projection de la courbe formée par un entrelacs sur le plan $\{z = 0\}$ de l'espace. On obtient ainsi une sorte de graphe dessiné sur le plan dont les sommets correspondent aux points (x, y) tel qu'il existe deux brins de l'entrelacs qui passent l'un en (x, y, z) et l'autre en (x, y, z') pour $z \neq z'$. On suppose qu'on a avant de faire la projection pu procéder à de petites déformations géométriques infimes sur l'entrelacs géométrique pour éviter qu'il y ait trois points de brins différents qui se projettent sur le même point du plan ou autres cas pathologiques.

L'opération de projection sur le plan peut aussi se visualiser en imaginant qu'on aplatit physiquement l'entrelacs sur le plan $\{z = 0\}$, les différents brins étant alors plaqués sur le plan sauf au voisinage des points où un brin passe au dessus de l'autre.

Plus précisément, on obtient par la projection une carte dessinée sur le plan dont tous les sommets sont de degré 4 car ils sont traversés par la projection de deux brins de l'entrelacs. On peut indiquer en chaque sommet lequel des deux brins dont la projection le traverse est au dessus ou en dessous de l'autre. On obtient ainsi une carte tétravalente avec des indications sur chaque sommet pour savoir quel brin est au dessus de l'autre. Une telle figure du plan est appelée un diagramme d'entrelacs (voir figure 1.1). Par définition, le nombre de croisements d'un entrelacs est le nombre de sommets de la carte tétravalente sous-jacente.

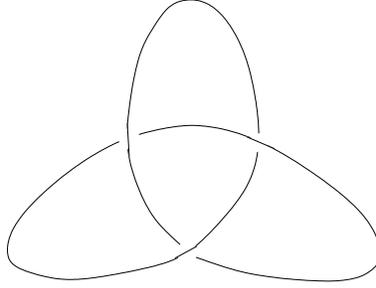


FIG. 1.1 – Diagramme d'entrelacs du nœud de trèfle

Il est important de se convaincre qu'un tel diagramme peut être vu sur la sphère plutôt que sur le plan. On pourrait penser que la face infinie joue un rôle particulier pour le diagramme mais si on prend une autre face du diagramme dessiné sur la sphère comme face infinie et qu'on dessine le diagramme sur le plan avec cette face comme face infinie, cela correspond à la projection du même entrelacs topologique. Voici comment s'en convaincre : on peut imaginer que, pour faire la projection, plutôt que de plaquer l'entrelacs sur le plan $\{z = 0\}$, on va le plaquer sur l'hémisphère nord d'une sphère (dont on suppose pour mieux y voir qu'elle est située en dessous de l'entrelacs sur l'axe des z), puis on peut étirer les brins sur la surface de la sphère, les faire glisser les uns au dessus des autres, en faire glisser certains vers l'hémisphère sud, etc... de telle sorte qu'on se convainc ainsi qu'en changeant la face infinie, on garde un diagramme équivalent (i.e. décrivant le même entrelacs topologique).

Propriété 1 *Tout entrelacs premier admet au moins un diagramme, dit premier, qui a les propriétés suivantes :*

- *La carte tétravalente sous-jacente du diagramme est connexe*
- *On ne peut pas avoir un couple d'arêtes e_1 et e_2 de la carte qui sépare la carte en deux sous-composantes connexes disjointes. Un tel couple d'arêtes séparateur induit un 2-cycle sur les faces de la carte ou, par dualité, une arête double sur la quadrangulation duale.*

Définition 7 *Un diagramme est alterné si chaque arête du diagramme passe en dessous d'une de ses deux extrémités et passe au dessus de son autre extrémité (par exemple, le diagramme de la figure 1.1 est alterné).*

Remarque Il est facile de voir en utilisant la bicoloration des faces d'une carte tétravalente qu'il n'existe que deux manières de la munir d'une structure de diagramme alterné (en choisissant la nature du croisement du premier sommet et en appliquant ensuite un algorithme itératif). De plus, si on s'intéresse aux entrelacs topologiques non orientés, les deux choix correspondent à deux entrelacs géométriques qui se déduisent l'un de l'autre par une réflexion par rapport au plan $\{z = 0\}$, donc les deux choix pour déterminer quel brin passe

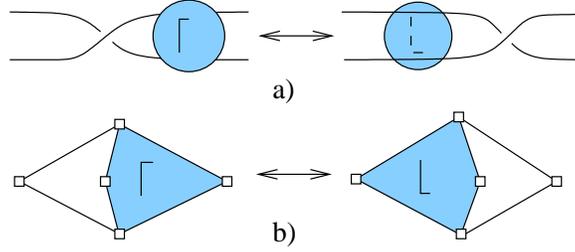


FIG. 1.2 – Effet d’un flype sur un diagramme d’entrelacs et sur la quadrangulation associée

au dessus de quel autre donnent deux diagrammes équivalents. En conséquence, dans ce cas là, seule la carte tétravalente sous-jacente (définie sur la sphère à homéomorphisme quelconque de la sphère près) suffit à décrire un diagramme alterné.

Définition 8 *Un entrelacs premier alterné est un entrelacs qui admet au moins un diagramme premier alterné.*

Proposition 1 – *Tout diagramme premier alterné d’un entrelacs premier alterné a le même nombre de croisements.*
– *Un entrelacs premier alterné est premier*

Théorème 1 *Ce théorème est démontré dans [9]. Soit deux diagrammes d_1 et d_2 alternés et représentant le même entrelacs. On peut passer géométriquement de d_1 à d_2 par une suite d’opérations locales appelées flypes dont on observe géométriquement l’effet sur la figure 1.2 a.*

Remarque L’effet d’un flype est plus facile à visualiser sur la quadrangulation duale de la carte tétravalente sous-jacente au diagramme, voir figure 1.2 b.

Définition 9 *Un diagramme premier alterné est dit enraciné si on choisit sur la carte tétravalente sous-jacente (vue comme une carte sur la sphère) un sommet, une demi-arête incidente à ce sommet et une face incidente à la demi-arête (celle à droite ou à gauche), le choix étant tel que la demi-arête passe en dessous du sommet si la face est à droite de la demi-arête et au dessus du sommet si la face est située à gauche de la demi-arête. L’enracinement de la carte tétravalente induit un enracinement de la quadrangulation duale et ce de manière non ambiguë (le sommet et la face racine de l’un deviennent la face et le sommet racine de l’autre). En n’autorisant que les flypes qui ne font pas intervenir le sommet racine (ou la face racine sur la quadrangulation duale) on obtient une relation d’équivalence sur les diagrammes premiers alternés restreinte de celle définie précédemment où on autorisait tous les flypes. On appelle une telle classe d’équivalence un entremêlement premier alterné.*

Remarque On observe que la racine permet de connaître exactement la nature de tous les croisements du diagramme alterné en vertu de la définition ci-dessus. En conséquence, la racine suffit à décrire le diagramme premier alterné de manière non ambiguë. On en déduit que les diagrammes premiers alternés enracinés sont exactement les cartes tétravalentes enracinées sans pont ou, par dualité, les quadrangulations enracinées sans arête multiple.

Remarque Visuellement, un entremêlement premier alterné peut être vu de la manière suivante : on prend un entrelacs premier alterné qu'on aplatit sur le plan $\{z = 0\}$ tel qu'on a un diagramme premier alterné. Ensuite, on choisit un endroit où deux brins se croisent et on les colle l'un avec l'autre au niveau du croisement (le collage respectant le fait qu'un brin passe au dessus de l'autre). Ensuite, on libère la figure obtenue dans l'espace et on peut faire bouger les brins l'un par rapport à l'autre mais le collage de deux brins diminue la flexibilité de ces mouvements (à un entrelacs premier alterné correspondent plusieurs entremêlements premiers alternés).

1.2 Représentation des entrelacs premiers alternés à l'aide d'arbres

1.2.1 Décomposition en arbre des quadrangulations simples

Nous venons de voir que les diagrammes premiers alternés enracinés sont exactement les quadrangulations simples enracinées. On peut décomposer en arbre une telle quadrangulation avec des sommets qui sont des quadrangulations dont tous les 4-cycles délimitent une face (dites aussi irréductibles) et des sommets de type axe qui sont des quadrangulations dont toutes les faces sont incidentes à deux mêmes sommets N et S diagonalement opposés dans chacune des faces.

Cette décomposition en arbre est détaillée à la section 2.3. On peut voir un tel arbre comme un objet en trois dimensions avec des sommets qui sont des cartes quadrangulaires des deux types introduits ici connectées entre elles au niveau de faces qu'elles partagent, dites faces d'interconnection. De telles faces ne sont pas des faces de la quadrangulation globale associée à l'arbre mais elles participent à sa structure d'arbre. De plus, une des faces libres de l'arbre porte la racine et il est assez facile de se convaincre que, bien que la décomposition en arbre se fasse récursivement depuis la racine, si on a deux arbres enracinés qui correspondent à deux quadrangulations enracinées obtenues en enracinant en deux endroits différents la même quadrangulation, alors ces deux arbres enracinés sont eux aussi obtenus à partir du même arbre dont on a placé la racine à deux endroits différents.

1.2.2 Action des flypes sur les arbres

Comme l'illustre la figure 1.2, un flype intervient à l'intérieur d'un axe. Plus précisément, l'opération consiste, pour un axe donné (sommet de l'arbre), à prendre une face libre de cet axe et à lui faire franchir une succession de faces d'interconnection de l'axe, le franchissement d'une face d'interconnection par la face libre entraînant une réflexion par rapport au plan équatorial de l'axe de la composante connectée à la face d'interconnection (voir figure 1.3).

On peut donc définir une relation d'équivalence sur les arbres (resp. sur les arbres enracinés) définis précédemment en autorisant tous les flypes possibles (resp. tous les flypes possibles sauf ceux qui font intervenir la face racine) et on appelle arbres articulés (resp. arbres articulés enracinés) les classes d'équivalence d'arbres pour ces deux relations d'équivalence.

Par construction, on se convainc facilement que les entrelacs premiers alternés non orientés sont en bijection avec les arbres articulés et que les entremêlements premiers alternés sont en bijection avec les arbres articulés enracinés.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude des symétries de tels arbres articulés.

1.3 Définition des symétries non triviales d'un arbre articulé et démonstration du fait que les arbres articulés à n faces ayant une symétrie non triviale sont en proportion exponentiellement négligeable

Dans cette partie, nous allons définir les symétries d'un arbre articulé et, pour cela, nous aurons besoin d'être plus précis dans notre manière de les visualiser en adoptant une manière de modéliser les axes qui permet d'y placer un étiquetage de localisation sans ambiguïté.

En vue des démonstrations suivantes, on autorise aussi les arbres articulés à avoir des faces libres rigides sur les axes, de telles faces libres ne participant pas aux flypes (le terme face libre signifie que la face n'est pas d'interconnection).

On distingue donc sur les nœuds de l'arbre articulé (qui sont des axes ou des quadrangulations irréductibles) les faces libres flexibles sur les axes pouvant bouger et participer aux flypes, les faces libres rigides sur les axes, les faces libres (forcément rigides) sur les quadrangulations irréductibles, et les faces d'interconnection, une interconnection de l'arbre articulé réalisant un appariement de deux faces d'interconnection sur deux nœuds différents.

Pour placer un étiquetage de localisation qui permet de localiser les différentes faces (sauf les faces libres flexibles) d'un arbre articulé de manière non ambiguë, il est plus commode de considérer que les interconnections sont invariantes et que les axes ont une structure flexible, un peu comme un ruban de Möbius sur

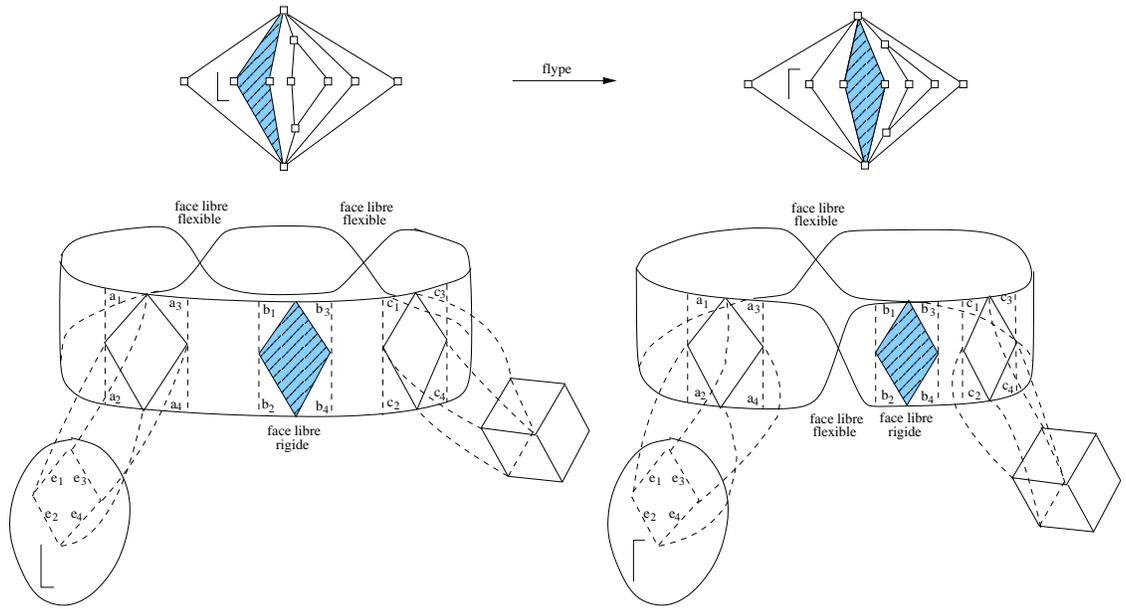


FIG. 1.3 – Visualisation de l’action d’un flype sur un axe avec la structure de ruban

lequel on aurait placé un étiquetage de localisation et sur lequel le twist (non étiqueté) symboliserait une face libre flexible pouvant se translater. Cette structure ressemble à celle des flypes sur les entrelacs vus comme cartes tétravalentes, mais il faut ici la voir surtout comme une commodité permettant de conserver une manière cohérente de visualiser l’étiquetage de localisation malgré les flypes.

Plus précisément, un axe avec i faces libres flexibles et j faces non flexibles peut être vu comme un ruban de Moëbius avec i twists et j faces dessinées dessus ou plutôt (car il n’y a pas lieu ici de donner une orientation aux twists) comme un ruban circulaire plat sur lequel les deux lignes de contour délimitant le ruban ont la contrainte de se croiser i fois, les croisements pouvant se translater, engendrant des flypes des faces rigides que le croisement traverse lorsqu’il se translate (voir figure 1.3)

Bien évidemment, il est plus commode d’imaginer que le croisement se translate de manière continue mais, comme un croisement représente une face flexible, une configuration acceptable est telle que le croisement n’est pas à cheval sur l’emplacement d’une face rigide dessinée sur le ruban. On peut maintenant placer quatre étiquettes de localisation aux quatre coins de chaque face non flexible de l’axe et aussi bien sûr sur les faces des nœuds irréductibles, mais pas sur les faces libres flexibles qui peuvent se déplacer.

Par commodité et pour bien voir que les interconnexions sont rigides dans

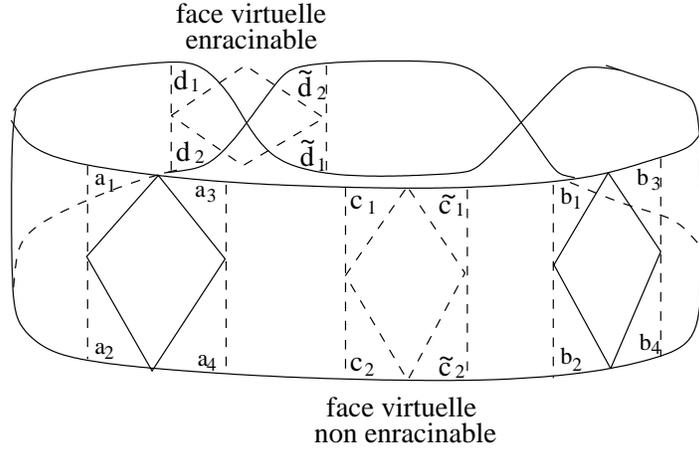


FIG. 1.4 – Représentation des faces virtuelles sur le ruban

notre modélisation, si on a une face x et une face y connectées, l'appariement des étiquettes est $x_1 \leftrightarrow y_1, x_2 \leftrightarrow y_2, x_3 \leftrightarrow y_3, x_4 \leftrightarrow y_4$ (voir figure 1.3).

Mais pour être complet, il faut aussi être capable de localiser les candidats face racine sur un axe ayant au moins une face libre flexible. Les candidats face racine d'un tel axe sont les faces libres rigides de cet axe mais aussi les emplacements entre les faces non flexibles de l'axe, la zone d'un axe entre deux faces non flexibles fixées consécutives étant par la suite appelée un secteur.

Chaque secteur d'un axe est appelé à être occupé par une face libre flexible, l'enracinement en cette face libre flexible engendrant un arbre articulé enraciné. On peut donc ménager sur le ruban une face virtuelle z sur chaque secteur d'un axe ayant au moins une face libre flexible et on y place quatre étiquettes de localisation $z_1, z_2, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2$, avec z_1 et \tilde{z}_1 (resp z_2 et \tilde{z}_2) placées de manière adjacente sur la même ligne de contour (en fait, de même que sur le ruban de Moëbius, le ruban circulaire n'a qu'une ligne de contour si le nombre de croisements est impair, mais, si on ne s'intéresse qu'à un secteur de l'axe, alors on peut distinguer et numéroter deux lignes de contour distinctes, voir figure 1.5). Pour qu'un enracinement soit possible sur cette face virtuelle, il faut qu'un et un seul croisement correspondant à une face libre flexible soit à cheval sur cette face virtuelle.

Encore une fois, cette structure est commode pour visualiser l'axe, mais certaines configurations du ruban ne correspondent pas à des configurations réelles vues sur les quadrangulations. En conséquence, on impose que, s'il y a au moins un croisement dans un secteur d'un axe, alors un et un seul va venir se placer à cheval sur la face virtuelle, correspondant au fait qu'on peut enraciner l'arbre articulé dans le secteur et que l'endroit désigné pour cet enracinement correspond à la face libre qui chevauche la face virtuelle, voir figure 1.4.

De plus, s'il n'y a aucune face libre flexible dans un secteur d'un axe, on

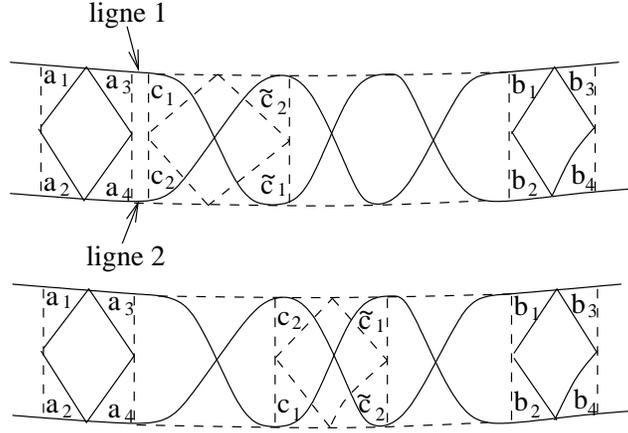


FIG. 1.5 – Déplacement d'une face virtuelle dans un secteur d'un axe

impose un emplacement canonique à la face virtuelle, toujours dans le souci que notre représentation des axes avec un ruban n'engendre pas plus de configurations qu'il n'y en a dans la réalité sur les vrais arbres articulés.

En revanche, s'il y a $j \geq 1$ faces libres flexibles dans un secteur d'un axe, alors la face virtuelle du secteur peut se déplacer pour être chevauchée par chacune des j faces flexibles du secteur, avec le souci que son déplacement engendre des fypes au niveau du ruban et que son étiquetage ne se translate pas mais reste bien en correspondance avec les deux lignes de contour délimitant le secteur, voir figure 1.5.

Il y a donc une certaine flexibilité dans la mesure où, s'il y a $j \geq 1$ faces libres flexibles dans un secteur, alors la face virtuelle du secteur peut occuper j positions. Cette flexibilité permet d'avoir la correspondance bijective suivante entre arbres articulés enracinés et arbres articulés enracinés avec faces virtuelles.

Lemme 1 *Soit a_1 et a_2 deux arbres articulés enracinés avec faces virtuelles (i.e. il y a une face en pointillés dans chaque secteur d'un axe ayant au moins une face libre flexible) éventuellement enracinés au niveau d'une face virtuelle (si la face racine est une face libre flexible). On note a'_1 et a'_2 les arbres articulés obtenus à partir de a_1 et a_2 en oubliant les faces virtuelles. Si a'_1 et a'_2 sont égaux, alors a_1 et a_2 sont égaux.*

Preuve Comme a'_1 et a'_2 sont égaux, on peut fixer canoniquement la même manière pour a'_1 et a'_2 de répartir les faces libres flexibles sur les axes, ce qui fixe la même représentation géométrique pour a'_1 et a'_2 , qui en fait des objets superposables (a'_1 et a'_2 sont vus comme des objets non étiquetés, l'étiquetage de localisation introduit précédemment n'intervenant pas dans le comptage des objets). Il se peut alors que les faces virtuelles ne soient pas superposées sur a_1 et a_2 pour cette représentation géométrique, mais en utilisant la remarque

précédente sur la flexibilité des faces virtuelles (voir aussi la figure 1.5), on voit qu'on peut aussi déplacer les faces virtuelles pour les rendre superposables sur a_1 et a_2 . Comme a_1 et a_2 ont une représentation géométrique qui les rend superposables, ils sont égaux.

On est maintenant armé pour définir de manière rigoureuse les candidats face racine d'un arbre articulé. Soit A un arbre articulé. Le nombre de candidats face racine de A est égal à la somme du nombre de faces libres non flexibles et du nombre de faces virtuelles de A . Grâce à l'étiquetage de localisation de A que l'on a défini, on a pour chaque candidat face racine 8 possibilités d'enracinement (correspondant au fait que $\text{Card}(D_4) = 8$), ce qui donne le nombre de candidats racine. L'observation suivante est importante :

Observation En remarquant que la configuration d'un axe est déterminée par la manière dont les faces libres flexibles sont réparties dans les différents secteurs, il est facile de voir que, si on fixe un candidat racine r et si on effectue une série de flypes sur A avant d'enraciner A en r , on peut obtenir la même configuration en enracinant d'abord A en r et en effectuant une série de flypes bien choisis sur l'arbre articulé (pourtant moins flexible), et ce même si r est sur une face virtuelle.

Remarque Il est important, pour se convaincre que cette observation est vraie, de noter la subtilité suivante qui a motivé notre représentation des axes : si on fait faire un tour complet sur un axe à une face libre flexible, alors toutes les composantes reliées à chaque face d'interconnection de l'axe (et donc l'arbre articulé dans son ensemble) subit une réflexion. On pourrait donc penser que si on réenracine A en un candidat racine r d'une face non flexible de l'axe fixé au départ, on obtient la réflexion de l'arbre enraciné en r avant d'avoir fait faire le tour complet à la face libre flexible. Cependant, lorsque la face libre flexible a fait son tour, les faces non flexibles de l'axe ont subi aussi la réflexion et leurs étiquettes de localisation ont donc subi aussi cette réflexion. En conséquence, r qui est associé à une permutation fixée des quatre étiquettes d'une face fixée de l'axe, a aussi subi géométriquement cette réflexion, donc si on réenracine A en r , on obtient bien le même arbre articulé enraciné que celui enraciné en r avant que la face libre flexible ait fait le tour de l'axe.

L'observation implique que le nombre d'arbres articulés enracinés différents pouvant être obtenus à partir de A est inférieur ou égal au nombre de candidats racine de A et cette observation permet aussi de pouvoir parler de manière non ambiguë de l'arbre articulé enraciné obtenu en enracinant un arbre articulé A en un candidat racine r fixé.

Définition 10 Soit A un arbre articulé. On dit que A admet une symétrie non triviale s'il existe deux candidats racine $r \neq r'$ tels que les arbres articulés enracinés obtenus en enracinant A en r et r' soient égaux. En conséquence, le nombre d'arbres articulés enracinés obtenus à partir de A est différent du nombre de candidats racine de A ssi A admet une symétrie non triviale.

En vue du lemme 2, nous aurons besoin des deux lemmes suivant :

Lemme 2 *Si une symétrie d'un arbre articulé fixe les quatre étiquettes de la face racine, alors elle fixe toutes les étiquettes de localisation de A*

Preuve Remarquons d'abord que les symétries considérées ici ne sont pas non triviales au sens de la définition donnée précédemment, mais on a surtout besoin ici d'être fixé sur la rigidité de l'emplacement des étiquettes de localisation une fois qu'on a fixé un représentant géométrique de l'objet et qu'on connaît les quatre étiquettes de la face racine.

Il convient de préciser ce qu'on entend par le fait de fixer les étiquettes de localisation. Pour cela, on énonce une formulation équivalente mais plus rigoureuse et précise du lemme : si on fixe un candidat racine r d'un arbre articulé A et qu'on considère l'arbre articulé enraciné a obtenu en enracinant A en r , si on choisit une représentation géométrique de a (obtenue en choisissant une manière de répartir les faces libres flexibles sur les axes et en choisissant la position des faces virtuelles dans les secteurs ayant plusieurs faces libres flexibles) alors les étiquettes de localisation y sont disposées de manière non ambiguë et ce quels que soit les flypes qu'on a effectués pour obtenir ce représentant géométrique de a .

Il est facile de se convaincre que ce lemme est vrai en procédant par récurrence sur la profondeur h de l'arbre articulé enraciné.

Si $h = 0$, deux cas se présentent :

- Si le nœud est un axe, alors comme le nombre de faces libres et la position de l'éventuelle face virtuelle suivant la racine dans le sens trigonométrique autour de l'axe sont fixés par le choix de la représentation géométrique, on se convainc facilement en regardant la figure 1.5 que la place des étiquettes de localisation de l'éventuelle face virtuelle du secteur et de la face rigide consécutive à la face racine dans le sens trigonométrique autour de l'axe sont fixées de manière non ambiguë. En poursuivant itérativement le parcours dans le sens trigonométrique autour de l'axe, on en déduit que la position des étiquettes de localisation sur l'axe est fixée de manière non ambiguë
- Si le nœud est un nœud irréductible, la racine de la quadrangulation irréductible permet de localiser de manière non ambiguë tous les coins des faces de la quadrangulation (résultat connu) donc la place des étiquettes de localisation est là aussi non ambiguë.

Pour passer de h à $h + 1$ dans la récurrence, il suffit de remarquer en utilisant le cas $h = 0$, déjà prouvé, que la position des étiquettes sur le nœud racine de l'arbre articulé enraciné est fixée de manière non ambiguë. Comme les interconnexions sont rigides dans notre modélisation, les quatre étiquettes de localisation des faces racines des différentes composantes ¹ accrochées au nœud

¹qui sont aussi des arbres articulés enracinés, c'est ici qu'on utilise le fait qu'il faut pour que la récurrence se passe bien autoriser les arbres articulés enracinés à avoir des faces libres rigides sur les axes

racine (et de profondeur strictement plus petite) sont fixées de manière non ambiguë. On applique l'hypothèse de récurrence à ces composantes pour conclure que toutes les étiquettes de localisation de l'arbre articulé enraciné sont fixées de manière non ambiguë.

Lemme 3 *Une symétrie non triviale d'un arbre articulé ne peut pas fixer les quatre étiquettes d'une face d'interconnection.*

Preuve On raisonne par l'absurde. Soit A un arbre articulé ayant une symétrie non triviale fixant les quatre étiquettes d'une face d'interconnection. Cela veut dire la chose suivante : il existe $r \neq r'$ deux candidats racine de A tel que, si on note a_1 et a_2 les arbres articulés enracinés obtenus en enracinant A en r et r' , on a $a_1 = a_2$ (en oubliant pour le moment les étiquettes de localisation). De plus, comme la symétrie fixe une face d'interconnection, il existe une représentation géométrique commune à a_1 et a_2 (obtenue en choisissant une même manière pour a_1 et a_2 de répartir les faces libres flexibles sur les axes et de fixer la position des faces virtuelles dans chaque secteur des axes ayant au moins une face libre flexible) qui les rend superposables en tant qu'objets géométriques (non étiquetés) et qui superpose aussi les quatre étiquettes de localisation (placées sur A au début) d'une face d'interconnection. Mais comme les interconnections sont rigides dans notre représentation (alors que la structure des axes est flexible), les quatre étiquettes de la face qui est située de l'autre côté de l'interconnection sont elles aussi fixées par la symétrie.

On fait alors l'opération qui consiste à séparer a_1 (resp a_2) au niveau de l'interconnection en deux arbres articulés enracinés a'_1 et a''_1 (resp. a'_2 et a''_2) enracinés en la face d'interconnection de manière canonique². La symétrie globale entre a_1 et a_2 induit une symétrie entre a'_1 et a'_2 (et entre a''_1 et a''_2) qui fixe la racine, i.e. qui superpose les quatre étiquettes de localisation de la face racine. En utilisant le lemme 2, on en déduit que la symétrie entre a'_1 et a'_2 (resp. entre a''_1 et a''_2) superpose a'_1 et a'_2 (resp. a''_1 et a''_2) mais superpose aussi les étiquettes de localisation qui avaient été placées sur A et donc, comme la symétrie fait correspondre aux quatre étiquettes de r les quatre étiquettes de r' , on arrive à la contradiction que $r = r'$, ce qui conclut la preuve.

A partir de maintenant, on ne considère plus que des arbres articulés n'ayant pas de face libre rigide sur les axes, car l'utilité de cette définition plus générale était de rendre plus commode la démonstration récursive des deux lemmes précédents.

En vue de démontrer que la proportion d'arbres articulés admettant une symétrie non triviale est exponentiellement négligeable, on aura besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 4 *Le nombre de candidats racine d'un arbre articulé ayant n faces libres est inférieur ou égal à $8 \cdot 3n = 24n$*

²cette face d'interconnection est devenue une face libre rigide pour chacun des deux arbres séparés, on utilise ici le fait qu'il faut autoriser les arbres articulés à avoir des faces libres rigides sur les axes

Preuve Il est clair que le nombre de faces virtuelles est plus petit que 2 fois le nombre d'interconnexions de l'arbre articulé. Il est facile de voir par récurrence sur le nombre de nœuds de l'arbre articulé que le nombre d'interconnexions est plus petit que le nombre de faces libres. En conséquence, le nombre de candidats face racine (égal à la somme du nombre de faces virtuelles et du nombre de faces libres) est inférieur ou égal à $3n$ et donc le nombre de candidats racine est inférieur ou égal à $8 \cdot 3n$.

Lemme 5 *Soit I une quadrangulation enracinée irréductible ayant $q + 2$ faces libres, alors il existe $c > 0$ tel que la proportion d'arbres articulés enracinés ayant n faces libres et moins de $c \cdot n$ feuilles portant un exemplaire de I est exponentiellement négligeable.*

Preuve On s'inspire ici de [8]. On considère $\forall n \geq 1$ l'ensemble \mathcal{H}_n des arbres articulés enracinés ayant n faces libres dont au moins $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ sont sur les nœuds irréductibles et ayant moins de $c \cdot n$ feuilles portant un exemplaire de I , i.e. une des 8 manières d'enraciner cette feuille au niveau de sa face d'interconnection avec le reste de l'arbre donne I . On note $H(z) = \sum h_n z^n$ la SG comptée par nombre de faces libres de ces objets. On construit à partir d'un objet a de \mathcal{H}_n des objets composés en choisissant $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ faces libres de a qui sont sur des nœuds irréductibles (c'est possible car $a \in \mathcal{H}_n$), puis les objets composés sont obtenus en choisissant pour chacune de ces faces libres si on y enracine (de manière canonique) ou pas un exemplaire de I que l'on colore pour que l'objet composé ainsi obtenu garde la trace des endroits où on a ajouté un exemplaire de I . On note $\mathcal{G} = \cup_n \mathcal{G}_n$ la famille de ces objets composés où n est le nombre de faces libres et on note $G(z) = \sum g_n z^n$ la SG associée à la famille \mathcal{G} . On peut facilement exprimer $G(z)$ par rapport à $H(z)$. En effet, $H(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$H(z) = H_0(z^3) + zH_1(z^3) + z^2H_2(z^3)$$

et il est facile de voir que

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum h_{3i} \left(\frac{z + z^{q+1}}{z} \right)^i z^{3i} + h_{3i+1} \left(\frac{z + z^{q+1}}{z} \right)^i z^{3i+1} + h_{3i+2} \left(\frac{z + z^{q+1}}{z} \right)^i z^{3i+2} \\ &= H_0 \left(\frac{z + z^{q+1}}{z} z^3 \right) + zH_1 \left(\frac{z + z^{q+1}}{z} z^3 \right) + z^2H_2 \left(\frac{z + z^{q+1}}{z} z^3 \right) \end{aligned}$$

On note $r(H)$ le rayon de convergence de $H(z)$. Comme les coefficients de $H(z)$ et des $H_i(z)$ sont positifs, il ne peut pas y avoir de compensation des singularités des $H_i(z)$ donc, forcément, un de ces $H_i(z)$ a pour rayon de convergence $r(H)^3$. Puis, en utilisant des considérations élémentaires d'analyse de singularités expliquées dans [8], on en déduit que $G(z)$ atteint sa singularité au point z tel que $\frac{z+z^{q+1}}{z} z^3 = r(H)^3$ donc $r(G)^3(1 + r(G)) = r(H)^3$ donc $r(G) < r(H)$. Mais pour montrer le lemme, on veut que $r(H) > r(M)$ où $M(z) = \sum m_n z^n$ est la SG des arbres articulés enracinés. On peut définir une application ϕ de \mathcal{G}_n

vers les arbres articulés enracinés ayant n faces libres en décolorant les exemplaires de I qui ont été enracinés sur un objet de \mathcal{G}_n . Il faut alors borner le nombre d'antécédants d'un arbre articulé enraciné pour cette application. Soit b un arbre articulé enraciné ayant n faces libres. On note j le nombre d'exemplaires de I sur b (ce sont des feuilles de l'arbre telles qu'une des 8 manières de les enraciner donne I) qui sont enracinés sur une face d'interconnexion d'un nœud irréductible de b . Il est clair que $j \leq n$ et aussi qu'on sait bien localiser de manière rigide l'emplacement de ces exemplaires dans b et que ces caractéristiques de localisation ne changent pas quelles que soient les articulations (flypes) que l'on peut faire subir à b , c'est pourquoi on a bien pris soin d'obtenir des objets composés en n'enracinant les exemplaires de I que sur des faces libres rigides des objets de \mathcal{H} . Pour deviner un objet de \mathcal{G}_n antécédant de b par ϕ , il faut colorier i exemplaires de I avec la condition que $i \geq j - cn$. En effet, si $i < j - cn$, l'objet de \mathcal{H} à partir duquel on a fait la composition aurait au moins cn exemplaires de I et il est clair qu'il aurait moins de n faces libres, ce qui est impossible en vertu de la contrainte imposée aux objets de \mathcal{H} . On a donc

$$|\phi^{-1}(b)| \leq \sum_{i=\lfloor j-cn \rfloor} \binom{j}{i} \leq \sum_{i \leq cn} \binom{j}{i} \leq n \binom{n}{cn} \leq n \frac{n^{cn}}{(cn)!} \leq n \frac{n^{cn}}{\left(\frac{cn}{e}\right)^{cn}} \leq n \left(\frac{e}{c}\right)^{cn}$$

On a donc $\forall n, g_n \leq m_n t_n$ avec $t_n = n \left(\frac{e}{c}\right)^{cn}$. Comme $\lim_{c \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{1/n}\right) = 1$, on a $\liminf_{c \rightarrow 0} \frac{r(G)}{r(M)} \geq 1$ donc, pour c suffisamment petit, $r(H) > r(M)$. Comme $m_n \sim c_2 \frac{\lambda^n}{n^{5/2}}$ selon [13], m_n croît régulièrement donc $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{1/n} = r(M)$ donc $\limsup h_n^{1/n} = \frac{1}{r(H)} < \frac{1}{r(M)} = \lim m_n^{1/n}$ donc les objets de \mathcal{H}_n sont en proportion exponentiellement négligeable par rapport aux arbres articulés enracinés. Reste pour achever la preuve du lemme à considérer les arbres articulés enracinés ayant moins de cn feuilles portant un exemplaire de I et ayant moins de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ faces libres sur les nœuds irréductibles. Mais en particulier, les objets ayant moins de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ faces libres sur les nœuds irréductibles sont en proportion exponentiellement négligeable par rapport aux arbres articulés enracinés selon le lemme 6. Ceci conclut la preuve du lemme.

Lemme 6 *La proportion d'arbres articulés enracinés à n faces libres ayant au plus $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ faces libres sur les nœuds irréductibles est exponentiellement négligeable.*

Preuve Soit a un arbre articulé enraciné ayant n faces libres dont au plus $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ sont sur des nœuds irréductibles. On va associer à a un arbre articulé enraciné à $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ faces libres de la manière suivante : on prend le représentant géométrique canonique de a qui consiste à caler les faces libres d'un axe dans le secteur qui succède dans l'ordre trigonométrique³ à l'interconnexion qui va vers la racine. On supprime ensuite les $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ premières faces libres flexibles sur les axes que l'on rencontre en faisant par exemple un parcours en profondeur de l'arbre

³on est capable de distinguer les deux ordres cycliques possibles de parcours de l'axe grâce à la racine

de gauche à droite. On obtient ainsi un arbre articulé enraciné a' ayant $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ faces libres. Il s'agit maintenant de borner le nombre d'antécédants d'un arbre articulé enraciné a' ayant $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ faces libres. Si on note k le nombre de nœuds de type axe de a' et si on note $i = n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, cela revient à placer i faces libres dans les k secteurs de chaque axe qui succèdent dans le sens trigonométrique à l'interconnection allant vers la racine. Il y a donc au plus $\binom{k+i-1}{i}$ antécédants à a' par cette application. Comme le nombre d'axes de a' est plus petit que le nombre de nœuds de a' qui est lui même borné par le nombre de faces libres de a' (comme on peut facilement le voir par récurrence sur le nombre de nœuds de l'arbre), on en déduit que $k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ donc $k + i - 1 \leq n$, donc on est sûr que le nombre d'antécédants de a' par cette application est inférieur à 2^n . Si on note m_n le nombre d'arbres articulés enracinés à n faces libres et \tilde{m}_n le nombre d'arbres articulés enracinés à n faces libres ayant au plus $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ faces libres sur les nœuds irréductibles, on a donc $\tilde{m}_n \leq 2^n m_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$. L'ordre exponentiel asymptotique de m_n existe et est connu cf [13]. On le note λ . L'ordre exponentiel de m_n est donc inférieur ou égal à $(8\lambda)^{\frac{1}{3}}$. Comme $(8\lambda)^{\frac{1}{3}} < \lambda$ selon [13], on en déduit le résultat du lemme.

On peut maintenant énoncer le lemme suivant :

Théorème 2 – *La proportion d'arbres articulés enracinés dont l'arbre articulé sous-jacent (i.e. obtenu en enlevant la racine) admet une symétrie non triviale est exponentiellement négligeable.*
– *En conséquence, la proportion d'arbres articulés admettant une symétrie non triviale est exponentiellement négligeable.*

Preuve Etablissons d'abord le fait que la première assertion de l'énoncé du lemme entraîne la seconde. On peut associer à chaque arbre articulé A ayant n faces libres une classe d'équivalence $C(A)$ d'arbres articulés enracinés (ceux dont l'arbre articulé obtenu en enlevant la racine est A). Selon le lemme 4, $1 \leq |C(A)| \leq 24n$. En conséquence, le nombre d'arbres articulés est polynomialement minoré (non négligeable) par rapport au nombre d'arbres articulés enracinés. Comme de plus, le nombre d'arbres articulés admettant une symétrie non triviale est de manière évidente plus petit que le nombre d'arbres articulés enracinés dont l'arbre articulé sous-jacent admet une symétrie non triviale, on en déduit que la première assertion du lemme entraîne la seconde.

Montrons maintenant la première assertion du lemme. Soit I une quadrangulation enracinée asymétrique en sa face racine (i.e. les 8 manières d'enraciner la face racine de I donnent des quadrangulations enracinées différentes) et ayant $q + 1$ faces sans compter la face racine. On ne s'intéresse qu'aux arbres articulés ayant $k \geq cn$ feuilles dont un des 8 enracinements donne I (on appelle ces feuilles des exemplaires de I). On peut associer à un tel arbre articulé enraciné M un arbre articulé enraciné H en enlevant tous les exemplaires de I sur M (sauf l'exemplaire qui porte la racine si la racine de M se trouve sur un exemplaire de I) et en coloriant les faces d'interconnection ainsi libérés. L'arbre H ainsi construit est donc articulé comme M ⁴ et a $n - kq$ ou $n - (k - 1)q$ faces

⁴avec éventuellement des faces d'interconnection avec des exemplaires de I enlevés qui

libres et k ou $k - 1$ faces libres coloriées selon que la racine de M se trouve sur un exemplaire de I ou pas. On peut ensuite décider de replacer les exemplaires de I enlevés sur les faces libres coloriées en les réenracinant de manière différente (il y a 8 manières d'enraciner I qui est asymétrique). Selon qu'un exemplaire de I portait la racine ou non, on obtient donc respectivement 8^{k-1} et 8^k arbres articulés enracinés différents en réenracinant les exemplaires de I de toutes les manières possibles. On peut donc regrouper les arbres articulés enracinés par classes d'équivalence selon qu'on obtient le même arbre articulé avec faces colorées rigides en enlevant les exemplaires de I ne portant pas la racine. On se place maintenant dans une classe d'équivalence \mathcal{C} fixée d'arbres articulés enracinés ayant n faces libres et plus de cn exemplaires de I où on prend $c > 0$ fixé suffisamment petit pour que le lemme 5 s'applique. \mathcal{C} est associée à un arbre articulé enraciné h fixé ayant $k \geq cn$ faces coloriées. Si un élément a de \mathcal{C} a une symétrie non triviale (i.e. l'arbre articulé A obtenu en enlevant la racine de a a une symétrie non triviale), il est clair que cette symétrie fait permuter les feuilles de A portant un exemplaire de I et que la permutation est sans point fixe. En effet, s'il y en avait un, comme I est asymétrique à la racine, cela impliquerait que les 4 coins de la face d'interconnection engagée dans la connection avec cet exemplaire de I seraient fixées par la symétrie, ce qui est impossible selon le lemme 3. On note H l'arbre articulé avec faces colorées rigides obtenu en enlevant la racine de h et on considère la symétrie τ induite sur H par la symétrie non triviale de A . Il est donc clair que τ réalise une permutation sans point fixe des faces colorées de H . On note $\mathcal{C}(\tau)$ l'ensemble des arbres articulés dans la classe d'équivalence de \mathcal{C} ayant une symétrie non triviale dont la symétrie induite sur H est τ . Il est clair que, pour chaque cycle de la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$ des faces colorées de H associée à la symétrie τ , l'enracinement d'un exemplaire de I sur la première face libre colorée du cycle détermine l'enracinement des autres exemplaires de I sur les autres faces du cycle si on veut que l'arbre articulé enraciné ainsi construit ait lui aussi la symétrie non triviale déterminée par τ . En conséquence, si on note c le nombre de cycles de σ , il y a 8^c arbres articulés enracinés dans \mathcal{C} ayant une symétrie non triviale dont la symétrie induite sur H est τ . Comme tous les cycles de σ sont de longueur ≥ 2 , on a $c \leq \frac{k}{2}$. De plus, H a au plus $\binom{24n}{2} = \frac{24n(24n-1)}{2}$ symétries non triviales selon le lemme 4, donc le nombre d'arbres articulés enracinés de \mathcal{C} ayant une symétrie non triviale est de cardinal inférieur ou égal à $\frac{1}{2}(24n)^2 8^{k/2}$ donc la proportion d'arbres articulés enracinés de \mathcal{C} ayant une symétrie non triviale est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}(24n)^2 8^{k/2} 8^{1-k} \leq (24n)^2 4 \cdot 8^{-\frac{cn}{2}}$. En sommant sur toutes les classes d'équivalence ayant plus de cn exemplaires de I , on en déduit que la proportion d'arbres articulés enracinés ayant plus de cn exemplaires de I et dont l'arbre articulé sous-jacent a une symétrie non triviale est inférieure ou égale à $(24n)^2 4 \cdot 8^{-\frac{cn}{2}}$ donc exponentiellement négligeable. On n'a traité ici que le cas des symétries pour les arbres articulés enracinés ayant n faces libres et plus de cn exemplaires de I mais, comme la proportion d'arbres articulés enracinés ayant moins de cn exemplaires de I est de toute manière

deviennent des faces libres rigides sur des axes

exponentiellement négligeable selon le lemme 5, on en déduit finalement que la proportion d'arbres articulés enracinés dont l'arbre articulé sous-jacent admet une symétrie non triviale est exponentiellement négligeable, ce qui conclut la preuve de la première assertion du lemme.

Chapitre 2

Énumération précise de cartes non enracinées en tenant compte des symétries

Introduction Dans cette partie, nous essayons de trouver une méthode assez générale pour énumérer des familles de cartes non enracinées. Cette méthode donne comme premiers résultats concluants de pouvoir énumérer les cartes 2-connexes et les cartes 3-connexes à orientation positive près. Pour exposer cette méthode, nous donnons d'abord la formule fondamentale expliquée dans [3] permettant d'énumérer les cartes non enracinées à orientation positive près d'une famille de cartes à partir des cartes k -enracinées de cette famille.

2.1 Formule de comptage

Définition 11 Soit $\mathcal{M} = \cup_n \mathcal{M}_n$ une famille de cartes comptées par leur nombre d'arêtes (par exemple la famille des cartes 2-connexes). On note $\mathcal{M}' = \cup_n \mathcal{M}'_n$ l'ensemble des cartes enracinées de \mathcal{M} et, pour $k \geq 2$, on définit $\mathcal{M}^{(k)} = \cup_n \mathcal{M}_n^{(k)}$ comme l'ensemble des cartes de \mathcal{M} dont k demi-arêtes différentes (aussi appelées racines) sont marquées et, de plus, ces k racines sont indistinguables, i.e. les k cartes enracinées obtenues en ne gardant qu'une seule de ces k racines sont les mêmes. On appelle de telles cartes des cartes k -enracinées.

Remarque On reprend ici [3]. Un automorphisme positivement orienté et différent de l'identité d'une carte sur la sphère (la carte étant définie au départ comme un objet topologique) a la propriété suivante : il a un ordre k tel que tous les cycles de la permutation des demi-arêtes qu'il induit sont de longueur

k . De plus, il existe une manière de dessiner la carte sur la sphère telle que l'automorphisme se voit géométriquement comme la rotation d'angle $\frac{2\pi}{k}$ et les deux points d'intersection de l'axe des pôles avec la sphère sont tous deux le centre d'une face de la carte ou un sommet de la carte si $k \neq 2$. On a alors 3 cas possibles pour l'axe : face-face, sommet-sommet, et sommet-face. Si $k = 2$, on peut avoir une arête axiale dite singulière invariante par la rotation et dont le milieu est un des deux pôles. On a alors 6 cas possibles pour l'axe : face-face, sommet-sommet, arête-arête, sommet-face, sommet-arête, et arête-face. Enfin, un automorphisme positivement orienté d'ordre k fait permuter les faces, arêtes et sommets par cycles de longueur k , sauf en ce qui concerne les deux cellules axiales.

Théorème 3 *On a la formule suivante permettant d'énumérer les cartes à n arêtes de \mathcal{M} , où ϕ est l'indicatrice d'Euler :*

$$|\mathcal{M}_n| = \frac{1}{2n} \left(|\mathcal{M}'_n| + \sum_{k \geq 2} \phi(k) |\mathcal{M}_n^{(k)}| \right)$$

Preuve On s'inspire ici de [4] Théorème 1. On note \mathcal{M}_n^* la famille des objets bi-enracinés symétriques de \mathcal{M}_n définis comme étant les cartes de \mathcal{M}_n dont une demi-arête est marquée en bleu et une demi-arête (éventuellement la même) est marquée en rouge de telle manière que les deux cartes enracinées obtenues en ne gardant qu'un seul des deux marquages sont les mêmes. Soit m une carte de \mathcal{M}_n et \mathcal{M}'_m l'ensemble des cartes enracinées obtenues en marquant une demi-arête de m (il n'y en a pas forcément $2n$ à cause des symétries de m). Soit $m' \in \mathcal{M}'_m$. La multiplicité de m' dans \mathcal{M}'_m , notée $c(m')$, est définie comme le nombre de demi-arêtes de m telle que, si on marque une telle demi-arête, on obtient m' . On a donc, comme il y a $2n$ demi-arêtes dans m , $2n = \sum_{m' \in \mathcal{M}'_m} c(m')$. D'autre part, il est clair que $c(m')$ est aussi égal au nombre d'objets bi-enracinés symétriques de \mathcal{M} dont la carte enracinée sous-jacente est m' . La formule $2n = \sum_{m' \in \mathcal{M}'_m} c(m')$ et cette remarque assurent que $2n|\mathcal{M}_n| = |\mathcal{M}_n^*|$. Considérons un tel objet bi-enraciné symétrique. Il définit soit une carte enracinée si les deux demi-arêtes marquées sont égales, soit un automorphisme positivement orienté de m ayant un certain ordre k , et ce de manière non ambiguë, i.e. le fait de savoir que l'image de la demi-arête bleue est la demi-arête rouge permet de déterminer les images de toutes les autres demi-arêtes. En effet, si on fixe une demi-arête, on sait la localiser de manière non ambiguë par rapport à la demi-arête bleue et son image est donc la demi-arête qui est localisée de la même manière par rapport à la demi-arête rouge.

Mettons en relation les objets bi-enracinés symétriques dont les deux demi-arêtes sont différentes et les objets k -enracinés. On définit une surjection qui, à un objet bi-enraciné symétrique d'ordre $k \geq 2$, associe la carte k -enracinée obtenue en marquant les k demi-arêtes qui sont dans l'orbite des deux demi-arêtes marquées et en oubliant la différence de couleur des deux demi-arêtes de l'objet bi-enraciné (les k demi-arêtes sont donc indistingables). Il est clair

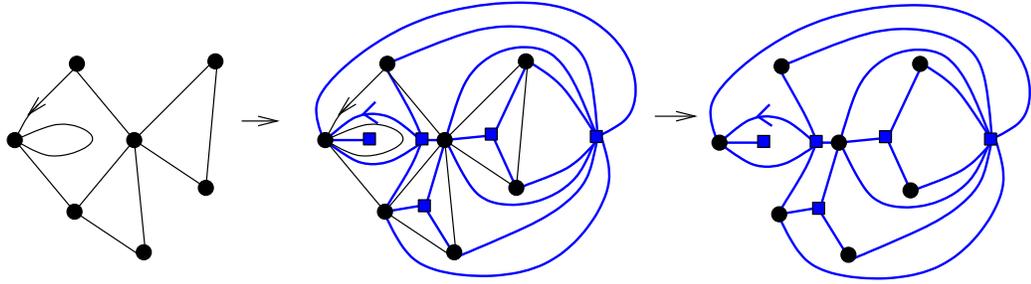


FIG. 2.1 – Application de la bijection de Tutte sur un exemple

que cette application est surjective et que le cardinal de l'image réciproque d'un objet k -enraciné est $\phi(k)$. Comme on a $2n|\mathcal{M}_n| = |\mathcal{M}_n^*|$, on a $2n|\mathcal{M}_n| = |\mathcal{M}'_n| + \sum_{k \geq 2} \phi(k)|\mathcal{M}_n^{(k)}|$

2.2 La bijection de Tutte entre cartes et quadrangulations

Tutte [1] définit la notion de carte dérivée d'une carte, notion dont on déduit facilement qu'il existe une bijection associant à une carte quelconque m' enracinée à n arêtes une quadrangulation enracinée à n faces de la manière suivante (voir figure 2.1) : on place un sommet au milieu de chaque face de m' puis on relie par une arête un sommet v_f placé dans une face f et un sommet v_s de m' si v_s est incident à la face f , et on place autant d'arêtes de liaison qu'il y a de chemins homotopiquement inéquivalents entre v_s et v_f dans f . Une telle multiplicité apparaît s'il y a des sommets séparateurs dans la carte. La quadrangulation est ensuite obtenue en ne gardant que les arêtes de liaison face-sommet et en supprimant les arêtes initiales de m' . On choisit pour la racine de la quadrangulation la demi-arête incidente au même sommet que la racine de m' et lui succédant dans l'ordre anti-trigonométrique autour de ce sommet. Cette bijection présente l'avantage de pouvoir se restreindre à des familles de cartes intéressantes telles que les cartes 2-connexes et 3-connexes.

Définition 12 – Une carte est dite 2-connexe si elle est sans boucle et qu'il faut lui enlever au moins deux sommets pour la déconnecter. Par convention, la carte à une arête constituée d'une unique boucle est considérée comme 2-connexe.

– Une carte est dite 3-connexe si elle est sans boucle, sans arête multiple et qu'il faut lui enlever au moins trois sommets pour la déconnecter.

Théorème 4 – L'application de Tutte met en bijection les cartes 2-connexes enracinées à n arêtes et les quadrangulations enracinées à n faces sans

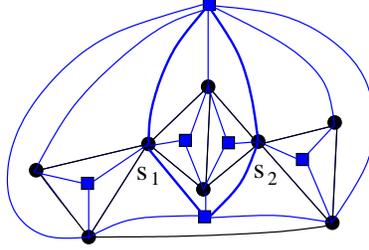


FIG. 2.2 – Illustration de la correspondance entre un couple de sommets séparateur et un 4-cycle séparateur sur la quadrangulation associée par la bijection de Tutte

arête multiple, une quadrangulation sans arête multiple étant par la suite dite simple.

- *L'application de Tutte met en bijection les cartes 3-connexes enracinées à n arêtes et les quadrangulations enracinées à n faces simples et sans 4-cycle séparateur, une quadrangulation simple sans 4-cycle séparateur étant par la suite dite irréductible.*

Preuve La présence d'un sommet séparateur s dans une carte c (i.e. tel que le fait d'enlever ce sommet déconnecte la carte) implique qu'à ce sommet sont accrochées deux cartes c_1 et c_2 qui s'intersectent en ce sommet et on peut imaginer que, pour obtenir c , on a fixé un point et une face marquée dans c_1 , et un point et une face marquée dans c_2 et qu'on a fusionné les deux cartes en fusionnant les deux points marqués en un seul point s et les deux faces marquées en une seule face f de c . Le contour de f dans c passe donc deux fois par le point s , ce dont on déduit facilement qu'il existe deux manières non homotopiquement équivalentes de relier v_s à v_f dans f , ce qui induit une arête double dans la quadrangulation. Réciproquement, s'il existe deux chemins non homotopiquement équivalents qui vont de v_f à v_s , alors le sommet s a forcément deux composantes qui lui sont accrochées dans c , donc s est séparateur. En ce qui concerne les cartes 3-connexes, la démonstration est analogue. Si une carte est 2-connexe et pas 3-connexe, alors elle a un couple de sommets s_1 et s_2 qui est séparateur, et les deux blocs séparés par ces deux sommets se traduisent sur la quadrangulation par un 4-cycle séparateur (voir figure 2.2), le 4-cycle étant formé par les deux sommets du couple de sommets séparateur et les deux faces f_1 et f_2 auxquelles s_1 et s_2 sont incidents. En effet, comme le couple $s_1 - s_2$ est séparateur et que la carte est 2-connexe, ce couple est incident à exactement deux faces f_1 et f_2 de la carte.

Le théorème précédent présente le corollaire suivant évident et très utile pour la suite, où on utilise le fait bien connu que les sommets d'une quadrangulation q sont coloriables en deux couleurs, de telle manière que les arêtes de q relient deux sommets coloriés différemment. De plus, ce coloriage est unique si on impose la

couleur d'un sommet au départ.

Corollaire 1 *Pour $k \geq 2$, les cartes k -enracinées à n arêtes sont en bijection avec les quadrangulations k -enracinées à n faces dont les k racines sont incidentes à des sommets de même couleur pour la bicoloration des sommets associée à la quadrangulation.*

Preuve Le seul point important à noter ici est que les sommets d'une des deux couleurs d'une quadrangulation enracinée q à n faces correspondent aux sommets de la carte enracinée c à n arêtes associée par la bijection de Tutte et que les sommets de l'autre couleur correspondent aux faces de c . Il est clair qu'une symétrie sur la quadrangulation induit une symétrie sur la carte associée par la bijection de Tutte ssi la symétrie de la quadrangulation n'envoie pas un sommet d'une couleur sur un sommet de l'autre couleur car cela équivaut à permuter un sommet de type face avec un sommet de type sommet, or on sait bien sûr distinguer géométriquement un sommet d'une face sur la carte c . Bien sûr, la restriction de cette bijection aux correspondances entre cartes 2-connexes et quadrangulations simples et entre cartes 3-connexes et quadrangulations irréductibles est toujours valable.

Proposition 2 *Les seules quadrangulations k -enracinées de type différent du type sommet-sommet (pour les deux cellules axiales) sont les quadrangulations 2-enracinées de type face-sommet, face-face, arête-arête, et les quadrangulations 4-enracinées de type face-face. Parmi celles-ci, les seules qui échangent les couleurs des sommets pour la bicoloration sont les 2-enracinées arête-arête et les 4-enracinées face-face.*

Preuve

- Montrons que s'il y a une arête singulière dans une quadrangulation, il y en a forcément deux (une à chaque pôle). S'il n'y en avait qu'une, alors il y aurait une seule arête invariante pour l'automorphisme associé à la 2-racine et toutes les autres arêtes seraient groupées par orbites de taille 2. Il y aurait donc un nombre impair d'arêtes, ce qui est impossible car une quadrangulation à n faces a $2n$ arêtes.
- S'il y a une seule face axiale dans une quadrangulation 4-enracinée, alors là aussi, le nombre total de faces est forcément congru à 1 modulo 4, donc le nombre d'arêtes (le double) est congru à 2 modulo 8. Mais comme les arêtes sont groupées par orbites de longueur 4, on arrive à une contradiction.
- Si $k \neq 2$ ou 4, on ne peut pas avoir de face axiale car le degré d'une face dans une quadrangulation est 4 et que l'ordre d'un automorphisme doit diviser le degré d'une face axiale.

La dernière assertion de la proposition est évidente.

Définition 13 *On appelle quadrangulations k -enracinées bicoloriées les quadrangulations k -enracinées telles que les k sommets incidents aux k racines sont de la même couleur pour la bicoloration des sommets associée à la quadrangulation.*

Remarque Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des quadrangulations k -enracinées qui sont des quadrangulations k -enracinées bicoloriées car notre but est d'obtenir les SG de cartes 2-connexes k -enracinées et de cartes 3-connexes k -enracinées.

2.3 Décomposition en arbre

Nous exposons ici une notion de décomposition en arbre bien connue (voir [6]). Cette décomposition permet de voir une carte à orientation positive près (resp. une carte enracinée) comme un arbre dont les sommets sont de deux types : des sommets de type liaison et des sommets de type -cartes d'une famille particulière-. Par exemple, nous allons voir qu'une quadrangulation quelconque à orientation positive près peut être vue comme un arbre ayant des sommets de type -arête multiple- et des sommets de type -quadrangulation simple-.

2.3.1 Décomposition par arête multiple

Le schéma pour se convaincre que la décomposition en arbre fonctionne est toujours le même ici : on le fait sur les objets enracinés et on voit que l'arbre obtenu aurait été le même (à la place de la racine près) si la racine avait été placée ailleurs au départ sur la quadrangulation.

On part d'une quadrangulation quelconque enracinée et on particularise la face située à droite de la racine, que l'on appelle face racine. On contracte ensuite toutes les arêtes multiples de la quadrangulation en contractant la partie qui ne contient pas la face racine. On obtient ainsi le nœud racine de l'arbre : une quadrangulation simple enracinée. Puis, au niveau de chaque arête multiple (que l'on avait juste contractée pour avoir le nœud racine mais que l'on ne considère plus comme contractée), on note i la multiplicité d'une telle arête. Il y a donc $i - 1$ quadrangulations (enracinables de manière canonique au niveau de l'arête racine) dont l'arête racine est simple, une pour chacun des $i - 1$ secteurs à l'intérieur de l'arête multiple de multiplicité i considérée. On fait alors l'opération qui consiste à relier les i quadrangulations (le nœud racine et les $i - 1$ quadrangulations intérieures à l'arête multiple) autour d'un nœud dit nœud-liaison de l'arbre, un tel nœud représentant une arête multiple. Les i quadrangulations sont reliées autour de ce nœud-liaison selon le sens cyclique de succession de ces quadrangulations autour de l'arête multiple.

On applique ensuite récursivement la décomposition en arbre à chacune des $i - 1$ quadrangulations, enracinées de manière canonique au niveau de l'arête multiple. Le fait que leur arête racine est simple assure que la décomposition se fait bien "vers l'avant" et que l'on obtient bien un arbre.

Une manière peut-être plus visuelle de voir la décomposition au niveau de l'arête multiple et de se convaincre que l'ordre cyclique autour de la liaison est non ambigu est d'imaginer que l'on souffle depuis l'intérieur de la sphère au niveau de chacun des $i - 1$ compartiments intérieurs délimités par l'arête multiple, et que l'on obtient i composantes dessinées chacune sur une sphère, les

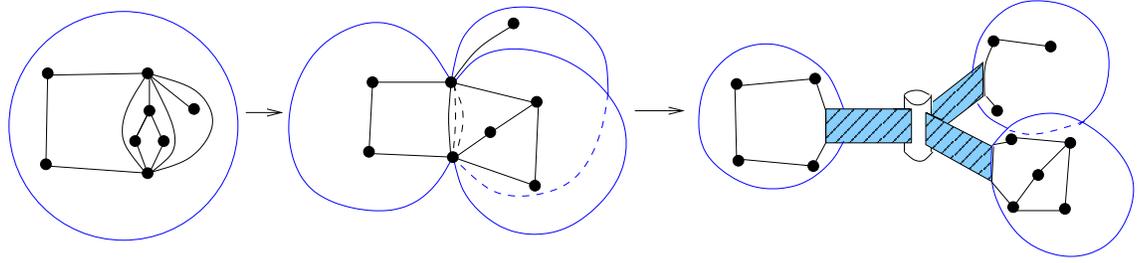


FIG. 2.3 – Décomposition en arbre d'une quadrangulation

i sphères étant reliées au niveau d'une arête multiple. On peut ensuite casser ce lien au niveau de l'arête multiple et le transformer en un lien de type cylindre auquel sont attachés via un ruban (pour marquer la rigidité du lien) i quadrangulations telles que l'arête reliée au lien est simple dans chacune des i quadrangulations (l'arête de multiplicité se distribue sur les i quadrangulations). La figure 2.3 illustre une telle décomposition, où l'on voit que l'on n'a pas besoin d'une racine pour effectuer la décomposition.

2.3.2 Décomposition d'une quadrangulation simple en arbre

Les trois cas possibles pour le nœud racine de l'arbre

Cette décomposition a déjà été exposée succinctement lors du chapitre 1. On y revient plus en détail ici. On fait ici le choix de ne pas considérer la quadrangulation à 2 arêtes comme une quadrangulation simple (il s'agit d'un cas dégénéré). On considère une quadrangulation enracinée simple g et on définit la face racine comme étant la face à droite de la racine (on prendra cette face comme face infinie sur les dessins). Trois cas se présentent pour la quadrangulation enracinée dessinée dans le plan de telle manière que l'arête racine soit en haut à droite (voir figure 2.4) :

- Elle se décompose horizontalement en au moins deux quadrangulations, i.e. il existe un chemin de longueur 2 (en plus des deux chemins appartenant au contour de la face infinie) entre le sommet vers lequel pointe la racine et le sommet qui lui est diagonalement opposé dans la face infinie.
- Elle se décompose verticalement en au moins deux quadrangulations, i.e. il existe un chemin de longueur 2 (en plus des deux chemins appartenant au contour de la face infinie) entre le sommet origine de la racine et le sommet qui lui est diagonalement opposé dans la face infinie.
- Aucun des deux cas précédents ne se présente.

Étudions le troisième cas pour une quadrangulation simple g enracinée non triviale, i.e. à au moins 3 faces. On reprend ici [2]. On définit un 4-cycle propre c de g comme étant un 4-cycle dont l'intérieur (celle des deux parties séparées par c qui ne contient pas la face infinie) est strictement inclus dans g privé de

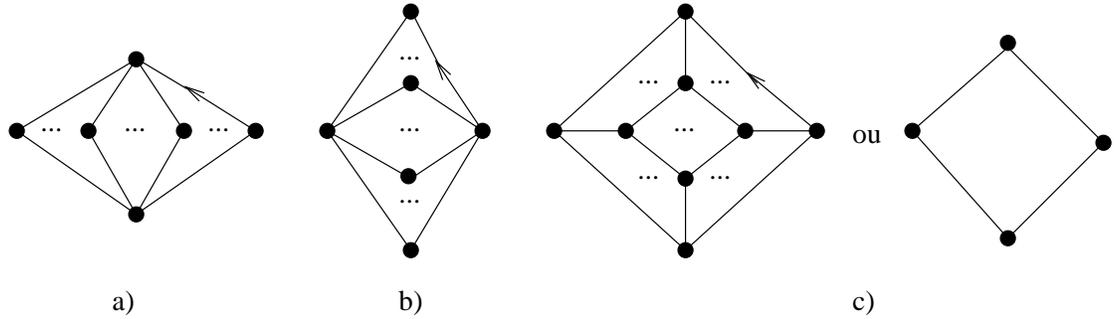


FIG. 2.4 – Les trois cas pour le nœud racine de la décomposition en arbre d’une quadrangulation simple enracinée

sa face racine, ce qui revient à dire que le contour de c est différent de celui de la face racine. On définit un 4-cycle propre maximal comme étant un 4-cycle qui n’est strictement inclus dans l’intérieur d’aucun autre 4-cycle propre. Nous allons montrer par l’absurde que les intérieurs des 4-cycles propres maximaux sont disjoints.

Soit q_1 et q_2 les intérieurs de deux tels 4-cycles tels que $q_1 \cap q_2 \neq \emptyset$. On note q cette intersection. Comme q délimite des faces quadrangulaires donc de degré pair, le degré extérieur de q (i.e. le nombre d’arêtes délimitant son contour) est pair (résultat classique) et il vaut donc 2, 4 ou 6. S’il est égal à 2 ou 6, cela implique la présence d’une arête multiple, d’où une contradiction (voir figure 2.5 a et b). S’il est égal à 4, alors il est facile de voir que, si le contour de q_1 contient 3 arêtes sur les 4 délimitant q , alors l’arête restante e (sur les quatre délimitant q) est dans q_2 mais qu’il existe une autre arête dans q_1 qui passe par l’intérieur de q et qui relie les deux mêmes points que e , en contradiction avec l’absence d’arête multiple. Si le contour de q_1 contient 4 arêtes sur les 4 délimitant q , alors $q_1 = q$ donc $q_1 \subset q_2$, en contradiction avec la maximalité de q_1 et q_2 . En conséquence, le contour de q_1 (et celui de q_2 aussi) contient deux arêtes du contour de q . Il est facile de montrer par l’absurde que les deux arêtes de q_1 (resp. de q_2) sont consécutives sur le contour de q , ce qui donne la figure 2.5 c, où l’on voit que $q_1 \cup q_2$ délimite un 4-cycle. C’est ici qu’on utilise le fait qu’on est dans le troisième cas pour être sûr que le contour de $q_1 \cup q_2$ n’est pas celui de la face racine car, si c’était le cas, on retomberait dans un des deux premiers cas. Le contour de q est donc ici un 4-cycle propre et le contour de q contient strictement deux 4-cycles propres maximaux qui sont les contours de q_1 et q_2 . En conséquence, le cas où le contour de q a deux arêtes de q_1 et deux arêtes de q_2 est contradictoire, et donc on conclut que tous les cas possibles impliquent une contradiction.

Finalement, les 4-cycles propres maximaux sont disjoints. Il est facile de voir qu’ils partitionnent la quadrangulation privée de sa face racine car, comme la quadrangulation considérée est non triviale, toute face différente de la face racine

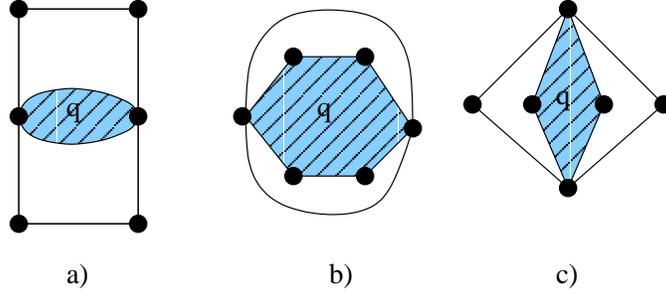


FIG. 2.5 – Les trois cas qui pourraient se présenter si q était non vide

a son contour différent de celui de la face racine, donc son contour délimite un 4-cycle propre de g , lui-même inclus dans un 4-cycle propre maximal.

On considère la quadrangulation \tilde{q} obtenue en ne gardant que les contours des 4-cycles propres maximaux et de la face racine. Cette quadrangulation est irréductible. En effet, soit c un 4-cycle séparateur de \tilde{q} . Par définition, c ne délimite aucune face de \tilde{q} donc ne délimite en particulier pas la face racine de \tilde{q} qui est aussi celle de g , donc c délimite bien un 4-cycle propre de g qui contient plusieurs faces de \tilde{q} , ou encore plusieurs 4-cycles propres maximaux de g , d'où une contradiction. La quadrangulation \tilde{q} est donc bien irréductible. Les trois cas possibles pour le nœud racine de l'arbre sont illustrés sur la figure 2.4.

Comment faire une décomposition en arbre unique en utilisant les trois cas traités précédemment

Soit g une quadrangulation simple enracinée dont on veut faire une décomposition complète en un arbre enraciné. Tout d'abord, on appelle v , t , u et s les quatre sommets de la face racine pris dans l'ordre indiqué par la racine quand on commence par le sommet origine de la racine.

Si on est dans le cas où le nœud racine de g est un axe horizontal, on fait une décomposition horizontale maximale (voir figure 2.6). On note c_0, c_1, \dots, c_k les chemins successifs de longueur 2 joignant les deux pôles s et t de l'axe, où c_0 (resp. c_k) est le chemin de la face racine entre s et t ne passant pas par la racine (resp. passant par la racine). On note, pour $1 \leq i \leq k$, g_i la quadrangulation située entre c_{i-1} et c_i et dont la racine a pour origine le milieu de c_i et pour extrémité t . On observe qu'il y a une seule manière d'effectuer une telle décomposition horizontale maximale et que les g_i ne peuvent pas avoir pour nœud racine un axe horizontal.

Si le nœud racine de g est un axe vertical, on peut faire un raisonnement exactement analogue au précédent en faisant cette fois une décomposition verticale maximale.

Si le nœud racine de g est une quadrangulation irréductible q , la racine suffit à numéroter et enraciner de manière canonique toutes les quadrangulations g_i

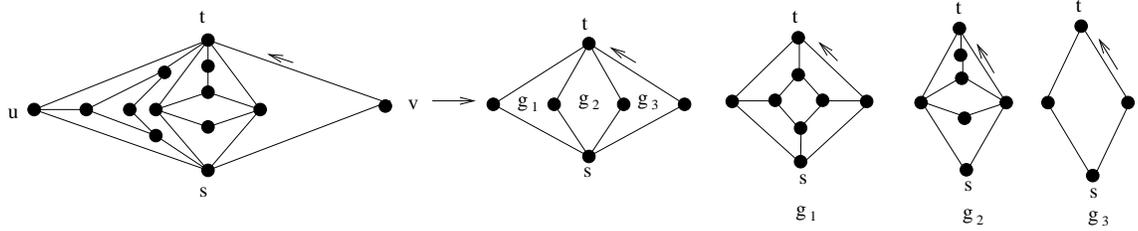


FIG. 2.6 – Décomposition horizontale maximale à la racine de l’arbre dans le cas où le nœud racine de l’arbre est un axe horizontal

de g incluses dans chaque face de g , et cette fois, aucune condition sur le nœud racine des g_i n’est imposée par la décomposition.

On construit l’arbre enraciné en appliquant récursivement la même décomposition aux g_i . On voit que l’arbre enraciné a des nœuds de type axe et des nœuds irréductibles et il est utile, en voyant les quadrangulations représentant les nœuds de l’arbre comme des quadrangulations dessinées sur la sphère, de voir un tel arbre comme un objet en 3 dimensions avec des quadrangulations de type axe ou irréductible reliées entre elles au niveau de faces d’interconnection, qui ne sont donc pas des faces de la quadrangulation g dont on fait la décomposition. Là aussi, on se convainc géométriquement que l’arbre obtenu (à la place de la racine près) ne dépend pas de la face racine dont on est parti et donc qu’on peut associer un tel arbre (vu comme un objet en 3 dimensions) à une quadrangulation non enracinée à orientation positive près. Pour le voir, il faut imaginer qu’on souffle à l’intérieur de la quadrangulation simple pour la “sculpter” en un arbre avec nœuds de type axe et nœuds irréductibles.

2.4 Utilisation de la première décomposition en arbre pour obtenir les SG des quadrangulations simples k -enracinées

2.4.1 Introduction

Nous allons voir que la symétrie de rotation d’une quadrangulation quelconque k -enracinée se répercute sur son arbre de décomposition et permet d’obtenir des équations liant la SG des quadrangulations quelconques k -enracinées à la SG des quadrangulations simples k -enracinées. Comme on connaît la SG des quadrangulations quelconques k -enracinées grâce à [3], on en déduira la SG des quadrangulations simples k -enracinées. Considérons une quadrangulation quelconque k -enracinée ($k \geq 2$) dont les deux cellules axiales sont des sommets. La k -racine induit une symétrie de rotation pour la quadrangulation mais aussi sur son arbre de décomposition (que l’on peut voir comme la quadrangulation que l’on a sculptée en un arbre en soufflant depuis l’intérieur) et donc l’axe de

rotation passe forcément par le centre de l'arbre et le centre est un sommet de l'arbre et non une arête car l'arbre est bicolorié (toute arête de l'arbre relie un sommet de type quadrangulation simple à un sommet de type arête multiple).

Deux cas se présentent :

- Le centre est un sommet de type arête multiple : on dit alors que la k -racine se répercute sur une arête multiple et qu'on a une quadrangulation k -enracinée de type a .
- Le centre est un sommet de type quadrangulation simple : on dit alors que la k -racine se répercute sur une quadrangulation simple et qu'on a une quadrangulation k -enracinée de type b .

Nous allons maintenant énumérer les objets k -enracinés des deux types en les considérant comme des objets composés, ce qui donnera une équation au niveau des SG. Dans toute cette partie, les SG sont comptées par nombre d'arêtes par secteur, où on appelle secteur le choix pour chaque orbite (d'arêtes, mais on peut aussi en parler pour des faces), d'un représentant de cette orbite. Si un objet k -enraciné est sans arête axiale, ce qui est le cas ici où les quadrangulations 2-enracinées avec arêtes singulières ne respectent pas le bicoloriage des sommets, il a l arêtes par secteur s'il a $k \cdot l$ arêtes.

2.4.2 Calcul des quadrangulations k -enracinées de type a

On commence par le cas où le centre de l'arbre est une arête multiple. On introduit quelques familles de cartes.

On note \mathcal{F}_s la famille des quadrangulations enracinées quelconques dont l'arête racine est simple et $f(z)$ la SG associée à cette famille. On remarque que $f(z)$ est connue car, si on note $F(z)$ la SG des quadrangulations enracinées quelconques comptée par nombre d'arêtes qui est connue cf [7], on a $F(z) = \frac{f(z)}{1-f(z)}$.

On note \mathcal{F}'_s la famille des quadrangulations bi-enracinées dont l'arête racine est simple. Un tel objet a une demi-arête marquée en bleu que l'on appelle sa racine et dont l'arête incidente est simple et a une deuxième demi-arête marquée en rouge qui peut être égale à la racine. La SG de cette famille est $2zf'(z)$ car pour chaque quadrangulation enracinée de \mathcal{F}_s ayant n arêtes, on a $2n$ choix possibles pour la demi-arête que l'on veut marquer en rouge.

On considère de plus la relation d'équivalence suivante groupant les objets de \mathcal{F}'_s deux par deux : deux objets q_1 et q_2 de \mathcal{F}'_s sont dits équivalents ssi, en notant q'_1 et q'_2 les quadrangulations enracinées en les demi-arêtes rouges respectives de q_1 et q_2 et en oubliant le marquage des demi-arêtes marquées en bleu, on a $q'_1 = q'_2$, et de plus, la demi-arête bleue de q_1 et la demi-arête bleue de q_2 sont situées sur la même arête par rapport à la demi-arête rouge et sont en sens inverse l'une de l'autre. On verra qu'il est important de considérer les objets composés que l'on va construire en tenant compte de cette relation d'équivalence pour éviter les redondances lors de leur construction. On considère $\tilde{\mathcal{F}}'_s$ la sous-famille de \mathcal{F}'_s obtenue en ne gardant qu'un seul des deux objets pour chaque classe d'équivalence de la relation d'équivalence introduite précédemment et en

faisant le choix canonique que, pour les objets de \mathcal{F}'_s tel que la demi-arête bleue et la demi-arête rouge sont sur la même arête, on garde pour $\tilde{\mathcal{F}}'_s$ les objets pour lesquels la demi-arête rouge est égale à la demi-arête bleue. La SG de la famille $\tilde{\mathcal{F}}'_s$ est $zf'(z)$.

On construit à partir des familles $\tilde{\mathcal{F}}'_s$ et \mathcal{F}_s des quadrangulations k -enracinées de type a de la manière suivante : on prend une quadrangulation bi-enracinée de $\tilde{\mathcal{F}}'_s$ que l'on enracine par sa racine bleue au niveau d'un cylindre de liaison (avec la convention que la racine pointe vers le haut) tel que celui représenté sur la figure 2.7, puis on enracine de manière canonique (i.e. avec la racine pointant vers le haut) une série de quadrangulations de \mathcal{F}_s au niveau du cylindre en suivant l'ordre trigonométrique autour du cylindre (ordre cyclique vu par un observateur placé au dessus du cylindre). Cela donne le premier des k quartiers de la quadrangulation k -enracinée que l'on veut construire.

On enracine ensuite $k - 1$ quartiers identiques à ce premier quartier, dans l'ordre trigonométrique autour du cylindre (chaque quartier contiendra une racine de la k -racine de l'objet composé obtenu) et enfin, pour obtenir la quadrangulation k -enracinée, on fait s'effondrer le cylindre en une arête multiple et on ne garde comme demi-arêtes marquées formant la k -racine de la quadrangulation obtenue que les demi-arêtes marquées en rouge de chaque quadrangulation bi-enracinée. On efface donc le marquage des demi-arêtes bleues des quadrangulations bi-enracinées et le marquage des racines des quadrangulations de la série des objets de \mathcal{F}_s dans chaque secteur. On obtient ainsi une quadrangulation k -enracinée de type a (voir figure 2.7).

Il est facile de voir que l'on a bien construit de manière bijective les quadrangulations k -enracinées de type a . En effet, partant d'une quadrangulation k -enracinée de type a , on colorie en rouge les k demi-arêtes marquées puis on décroche les différentes composantes de l'arête multiple (si l'arête est de multiplicité $k \cdot d$, il y a $k \cdot d$ telles composantes) pour les accrocher au niveau d'un cylindre assurant la liaison des $k \cdot d$ composantes. Reste alors une ambiguïté sur l'orientation à donner à l'arête multiple sur laquelle se répercute la k -racine. Mais la relation d'équivalence sur les objets de \mathcal{F}'_s a été justement introduite pour lever cette ambiguïté donc, là aussi, une seule orientation de l'arête multiple est possible pour que la quadrangulation k -enracinée ait bien été obtenue comme un objet composé tel qu'ils sont décrits ici. ¹.

On en déduit que la SG des quadrangulations k -enracinées de type a est

$$zf'(z) \frac{1}{1-f(z)}$$

On note encore qu'il faut composer cette SG par z^k pour avoir la SG comptée par nombre d'arêtes.

¹Pour bien se convaincre, il faut traiter séparément le cas où les demi-arêtes marquées sont sur l'arête multiple et on utilise la convention que l'on a mentionnée sur le choix des objets bi-enracinés que l'on garde pour $\tilde{\mathcal{F}}'_s$ parmi ceux dont les deux racines sont sur la même arête

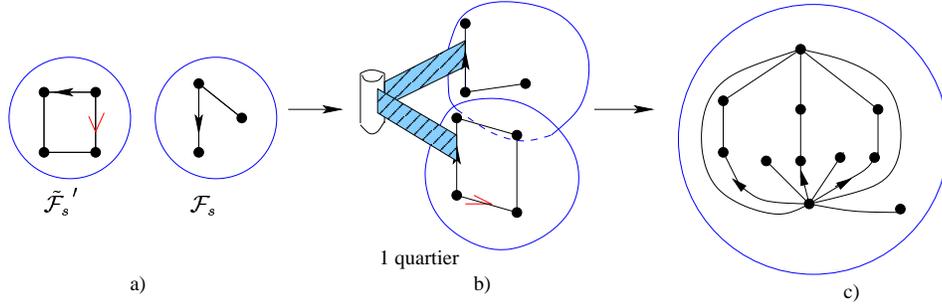


FIG. 2.7 – Construction d’une quadrangulation k -enracinée de type a

2.4.3 Calcul de la SG des quadrangulations k -enracinées de type b

Traisons maintenant le cas où la k -racine se répercute sur une quadrangulation simple. Là aussi, on construit une famille d’objets composés en bijection avec ces quadrangulations k -enracinées.

On part d’une quadrangulation simple k -enracinée ayant n arêtes par secteur (on note qu’une arête par secteur porte une racine).

On définit la famille \mathcal{F}_d comme la famille formée par les quadrangulations enracinées quelconques dont on double l’arête racine au niveau de la face située à droite de la racine et on adjoint aussi à cette famille la carte formée d’une seule arête dont les deux extrémités sont distinctes. La SG de la famille \mathcal{F}_d est donc $z(F(z) + 1) = \frac{z}{1-f(z)}$.

On note \mathcal{F}'_d la famille des objets bi-enracinés de \mathcal{F}_d , i.e. des objets dont la racine est marquée en bleu et une deuxième demi-arête est marquée en rouge. La SG de \mathcal{F}'_d est donc $2z \left(\frac{z}{1-f(z)} \right)'$.

Enfin, de même que précédemment, on introduit une relation d’équivalence groupant deux par deux les objets de \mathcal{F}'_d selon que les deux objets enracinés en la demi-arête rouge et en oubliant le marquage de la demi-arête marquée en bleu sont égaux, et selon que les demi-arêtes bleues forment un 2-circuit anti-trigonométrique si on les localise par rapport aux demi-arêtes rouges (voir figure 2.8). On note $\tilde{\mathcal{F}}'_d$ la famille obtenue à partir de \mathcal{F}'_d en ne gardant qu’un objet par classe d’équivalence. La SG de la famille $\tilde{\mathcal{F}}'_d$ est donc $z \left(\frac{z}{1-f(z)} \right)$. Là aussi, le but est d’éviter les redondances pour les objets composés que l’on va construire.

Voici comment on construit un tel objet composé à partir d’une quadrangulation simple k -enracinée g ayant n arêtes par secteur (voir figure 2.9) : on prend k exemplaires d’un même objet de $\tilde{\mathcal{F}}'_d$ et, pour chaque exemplaire, on l’accroche par sa double arête associée à la racine à chacune des k arêtes de la k -racine, de telle sorte que la racine de l’objet soit superposée à la demi-arête

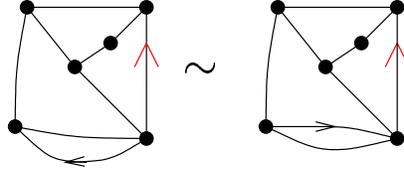


FIG. 2.8 – Deux quadrangulations de \mathcal{F}_d' équivalentes

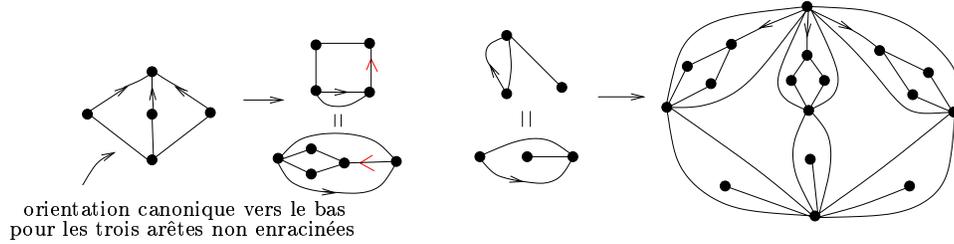


FIG. 2.9 – Construction d'une quadrangulation k -enracinée de type b

de la k -racine : il s'agit en fait d'une substitution de chacune des k racines de g par un même objet de $\tilde{\mathcal{F}}_d'$ dont la racine marquée en bleu vient superposer et remplacer chaque racine de la k -racine. En ce qui concerne les $n - 1$ autres orbites d'arêtes (chacune de cardinal k), pour chaque orbite, on note d'abord qu'on peut fixer de manière canonique une même orientation de chacune de ces k arêtes grâce à la k -racine de g , puis on choisit un élément de \mathcal{F}_d et on l'enracine par substitution à chacune des k arêtes de l'orbite, et on le fait de la même manière que précédemment (la seule différence étant que l'objet qu'on enracine n'a pas de deuxième demi-arête marquée en rouge et qu'il a fallu d'abord fixer canoniquement une orientation pour les k arêtes de l'orbite sur g). On obtient finalement la quadrangulation k -enracinée composée en ne gardant comme demi-arêtes marquées pour la k -racine que les demi-arêtes marquées en rouge des quadrangulations bi-enracinées enracinées sur la k -racine de g .

Là encore, il est facile de voir que la relation d'équivalence introduite fait en sorte que chaque quadrangulation k -enracinée de type b est obtenue une et une seule fois par une telle composition.

Si on note $g_{vv}^{(k)}(x)$ la SG des quadrangulations simples k -enracinées dont les deux axes sont des sommets, on obtient donc pour les quadrangulations k -enracinées de type b la SG

$$\sum_{n \geq 1} g_{vv,n}^{(k)} z \left(\frac{z}{1-f(z)} \right)' \left(\frac{z}{1-f(z)} \right)^{n-1} = \left(\frac{z}{1-f(z)} \right)' (1-f(z)) g_{vv}^{(k)} \left(\frac{z}{1-f(z)} \right)$$

2.4.4 Calcul de la SG des quadrangulations simples k -enracinées de type sommet-sommet

Si on note $F_{vv}^{(k)}(z)$ la SG des quadrangulations quelconques k -enracinées dont les deux cellules axiales sont des sommets, alors la réunion des cas de type a et b donne, pour $k \geq 2$, l'équation :

$$F_{vv}^{(k)}(z) = z f'(z) \frac{1}{1-f(z)} + \left(\frac{z}{1-f(z)} \right)' (1-f(z)) g_{vv}^{(k)} \left(\frac{z}{1-f(z)} \right) \quad (2.1)$$

Comme $F_{vv}^{(k)}(z)$ est connue, algébrique et indépendante de k pour $k \geq 2$ cf [3] et que $f(z)$ est aussi connue et algébrique, on en déduit que l'on peut obtenir $g_{vv}^{(k)}(x)$ en faisant le changement de variable $x = \frac{z}{1-f(z)}$ et que $g_{vv}^{(k)}(x)$ est algébrique et indépendante de k pour $k \geq 2$.

2.4.5 Calcul des SG des quadrangulations simples 2-enracinées de type face-sommet et face-face

Rappelons qu'en vue de compter les cartes 2-connexes à orientation positive près, on n'a pas besoin de compter les quadrangulations 2-enracinées avec arêtes singulières ni les quadrangulations 4-enracinées avec faces axiales selon la proposition 2. Mais il reste à connaître les SG $g_{fv}(x)$ et $g_{ff}(x)$ des quadrangulations 2-enracinées simples de type face-sommet et face-face. On exprime $g_{fv}(x)$ (resp. $g_{ff}(x)$) en fonction de la SG $F_{fv}(z)$ (resp. $F_{ff}(z)$) des quadrangulations quelconques 2-enracinées dont les deux cellules axiales sont une face et un sommet (resp. deux faces). Les deux SG $F_{fv}(z)$ et $F_{ff}(z)$ sont connues cf [3]. Il est facile de voir que les quadrangulations 2-enracinées de type face-sommet (resp. face-face) ont leur 2-racine qui se répercute forcément sur une quadrangulation simple g et que la 2-racine induit sur g une symétrie de type rotation d'ordre 2 dont les deux cellules axiales sont une face et un sommet (resp. deux faces). En effet, si la 2-racine se répercutait sur une arête multiple, elle induirait une symétrie de l'arête multiple qui peut être de deux types :

- Rotation autour de l'axe passant par les deux sommets de l'arête multiple : ce cas est exclus car on s'intéresse à des objets 2-enracinés dont au moins une des deux cellules axiales n'est pas un sommet.
- Rotation d'angle π retournant l'arête multiple autour d'un axe inclus dans le plan médiateur entre les deux sommets de l'arête multiple. Une telle rotation échange les deux sommets de l'arête multiple qui sont coloriés différemment pour le bicoloriage de la quadrangulation. De telles symétries ne correspondent pas à des symétries pour la carte 2-connexe associée à la quadrangulation par la bijection de Tutte et on ne doit donc pas les considérer ici.

On a donc montré que la répercussion se fait toujours sur une quadrangulation simple et on peut donc faire exactement la même construction composée que

précédemment (pour les objets k -enracinés de type b), ce qui permet d'obtenir les deux équations suivantes :

$$F_{fv}(z) = \left(\frac{z}{1-f(z)} \right)' (1-f(z))g_{fv} \left(\frac{z}{1-f(z)} \right) \quad (2.2)$$

$$F_{ff}(z) = \left(\frac{z}{1-f(z)} \right)' (1-f(z))g_{ff} \left(\frac{z}{1-f(z)} \right) \quad (2.3)$$

2.4.6 Obtention des cartes 2-connexes à orientation positive près

On a obtenu toutes les SG de quadrangulations simples k -enracinées dont la k -racine correspond à une k -racine pour la carte 2-connexe associée par la bijection de Tutte. On a besoin aussi de la SG $g(x)$ des quadrangulations simples enracinées comptées par nombre d'arêtes qui est connue cf [7]. Il reste à observer que, pour la bijection de Tutte, le nombre d'arêtes de la carte 2-connexe k -enracinée correspond au nombre de faces de la quadrangulation k -enracinée associée, et il est bien connu, en regardant les relations d'incidence entre faces et arêtes, que dans une quadrangulation le nombre d'arêtes est le double du nombre de faces. En conséquence, si on considère la SG g_{vv} obtenue par l'équation 2.1, la SG g_{fv} obtenue par l'équation 2.2 et la SG g_{ff} obtenue par l'équation 2.3, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 5 *Si on applique la substitution $x^2 \rightarrow x$ à la SG*

$$g(x) + g_{fv}(x^2) + g_{ff}(x^2) + \sum_{k \geq 2} \phi(k)g_{vv}^{(k)}(x^k)$$

on obtient, en vertu du théorème 3, la SG

$$\sum 2nc_n x^n$$

où c_n désigne le nombre de cartes 2-connexes à orientation positive près ayant n arêtes.

Les premiers termes de c_n sont donnés dans le tableau 2.1. Ces termes avaient déjà été obtenus dans [6] par une méthode différente.

2.5 Calcul des SG des quadrangulations irréductibles k -enracinées en utilisant la deuxième décomposition en arbre

On va dans cette partie utiliser la décomposition en arbre de la section 2.3.2 pour obtenir une équation liant les SG des quadrangulations simples k -enracinées

n	c_n
1	2
3	2
4	3
5	6
6	16
7	42
8	151
9	596
10	2605
11	12098
12	59166
13	297684
14	1538590

TAB. 2.1 – Les premiers termes pour le nombre de cartes non séparables à orientation positive près en fonction du nombre d’arêtes

bicoloriées aux SG des quadrangulations irréductibles k -enracinées bicoloriées et on en déduira la SG des cartes 3-connexes à orientation positive près par la bijection de Tutte. On traite d’abord le cas $k > 2$ car le cas $k = 2$ pose des problèmes et sera traité séparément.

2.5.1 Calcul de la SG des quadrangulations irréductibles bicoloriées pour $k \geq 3$

Rappelons, selon la proposition 2, que l’on s’intéresse aux quadrangulations k -enracinées bicoloriées car ce sont celles-là qui se transportent en des cartes k -enracinées par la bijection de Tutte. En conséquence, pour $k \geq 3$ et toujours selon la proposition 2, les quadrangulations k -enracinées qui nous intéressent sont celles de type sommet-sommet. Soit g une quadrangulation simple k -enracinée dont la k -racine respecte le bicoloriage des sommets. Comme dans la section précédente, on a la symétrie due à la k -racine de g qui se répercute en une symétrie de son arbre de décomposition avec nœuds de type axe et nœuds irréductibles. Comme $k \geq 3$, le centre de l’arbre est un nœud de l’arbre et, toujours parce que $k \geq 3$, le centre de l’arbre est le seul nœud de l’arbre invariant par la (ou plutôt par les $\phi(k)$) rotation d’ordre k induite par la k -racine et la symétrie globale sur g induite par la k -racine se répercute en une symétrie sur ce nœud dont les deux cellules axiales sont des sommets (qui sont aussi les sommets axiaux de g). Deux cas se présentent :

- Le centre de l’arbre est un nœud de type axe : on dit alors que la symétrie de g induite par la k -racine se répercute sur un nœud de type axe de l’arbre et que g est une quadrangulation simple enracinée de type a .
- Le centre de l’arbre est un nœud de type irréductible : on dit alors que la symétrie de g se répercute sur un nœud de type irréductible de l’arbre et

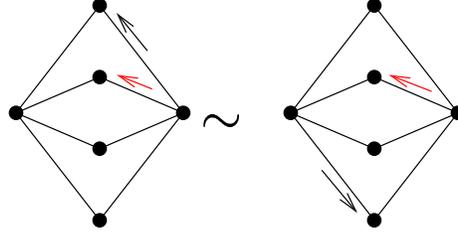


FIG. 2.10 – La relation d'équivalence entre objets de \mathcal{G}'

que g est une quadrangulation simple enracinée de type b .

Calcul de la SG des quadrangulations simples k -enracinées de type a

On va cette fois raisonner sur les faces et non sur les arêtes des objets considérés comme on le faisait dans la section précédente. En conséquence, on représentera toujours dans les dessins une racine comme une flèche placée non pas sur mais à droite de l'arête qui lui est incidente, et ce pour bien marquer l'appartenance de la racine à la face qui est à droite de son arête incidente (à droite par rapport à la direction indiquée par la racine).

On définit la famille $\mathcal{G} = \cup_n \mathcal{G}_n$ des quadrangulations simples enracinées comptées par nombre de faces sans compter la face racine et telles que, en reprenant le formalisme de la section 2.3.2, le nœud racine de leur décomposition en arbre ne soit pas un axe horizontal. On définit aussi la famille $\mathcal{W} = \cup_n \mathcal{W}_n$ des quadrangulations simples enracinées comptées par nombre de faces sans compter la face racine. On note $G(z)$ et $W(z)$ les SG associées aux familles \mathcal{G} et \mathcal{W} . On note que, comme on connaît $W(z)$ grâce à [7], on connaît aussi $G(z)$ car il est clair, en procédant à une décomposition horizontale maximale du nœud racine d'une quadrangulation simple enracinée, que $W(z) = \frac{G(z)}{1-G(z)}$. On note ensuite \mathcal{G}' la famille des objets de \mathcal{G} dont la racine est marquée en bleu et dont une deuxième demi-arête est marquée en rouge avec la contrainte que cette deuxième demi-arête n'appartient pas à la face racine. Comme il y a 4 demi-arêtes incidentes à chaque face d'une quadrangulation, la SG de \mathcal{G}' , comptée par nombre de faces sans compter la face racine, est $4zG'(z)$.

Comme précédemment et en vue d'éviter les redondances pour les objets composés qu'on va construire, on introduit une relation d'équivalence sur les objets de \mathcal{G}' les groupant deux par deux. Pour deux objets q_1 et q_2 de \mathcal{G}' , on dit que $q_1 \sim q_2$ ssi les quadrangulations q'_1 et q'_2 obtenues à partir de q_1 et q_2 en les enracinant en la demi-arête rouge et en oubliant le marquage des demi-arêtes bleues sont égales, et de plus, les deux demi-arêtes marquées en bleu de q_1 et q_2 sont diagonalement opposées dans la face racine si on considère leur localisation par rapport à la demi-arête marquée en rouge (voir figure 2.10). On note $\tilde{\mathcal{G}}'$ la famille des objets de \mathcal{G} où on n'a gardé qu'un seul objet par classe d'équivalence. La SG de $\tilde{\mathcal{G}}'$ est donc $2zG'(z)$.

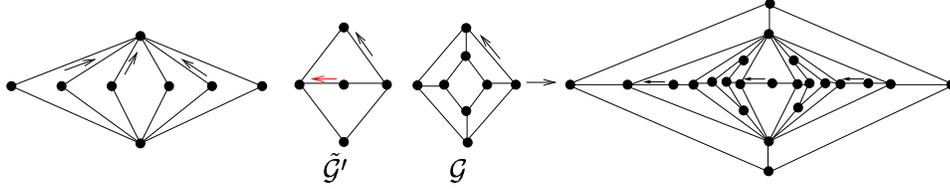


FIG. 2.11 – Construction d’une quadrangulation simple k -enracinée de type a

Pour construire une quadrangulation k -enracinée de type a , on construit des objets composés de la manière suivante : on prend un axe k -enraciné ayant $k \cdot l$ faces ($l \geq 1$) et tel que les k racines pointent vers un sommet axial de l’axe². On appelle ce sommet le sommet racine de l’axe. Ensuite, on enracine k exemplaires d’un même objet de $\tilde{\mathcal{G}}'$ sur les faces racines de l’axe, en prenant soin d’effectuer l’enracinement de sorte que l’arête racine (marquée en bleu) de l’objet de $\tilde{\mathcal{G}}'$ pointe vers le sommet racine de l’axe. On termine la construction de l’objet composé en prenant $l - 1$ objets de \mathcal{G} et, pour chacun de ces objets, on en prend k exemplaires que l’on enracine de la même manière canonique, avec la racine pointant vers le sommet racine de l’axe, sur les k faces de l’axe d’une orbite de faces non racines pour la symétrie induite par la k -racine de l’axe. On termine la construction en ne gardant pour la k -racine de l’objet final que le marquage des demi-arêtes marquées en rouge des objets bi-enracinés. On obtient ainsi une quadrangulation simple k -enracinée de type a . La figure 2.11 illustre une telle construction.

Il est facile de voir en effectuant un raisonnement semblable à celui de la section précédente que la relation d’équivalence est telle que l’on obtient chaque quadrangulation simple k -enracinée de type a une et une seule fois à partir d’un objet composé tel qu’on les a construits ici. On en déduit que, pour $k \geq 3$, la SG des quadrangulations k -enracinées de type a comptée par nombre de faces par secteur est

$$g_a^{(k)}(z) = 2zG'(z) \frac{1}{1 - G(z)}$$

Calcul de la SG des quadrangulations simples k -enracinées de type b

Traisons maintenant le cas des objets k -enracinés de type b pour $k \geq 3$. On introduit la famille \mathcal{W}' des quadrangulations simples enracinées dont une deuxième demi-arête non incidente à la face racine est marquée en rouge. La SG de \mathcal{W}' , comptée par nombre de faces sans compter la face racine, est $4zW'(z)$.

Pour éviter les redondances dans les objets composés que l’on va construire, on introduit encore une relation d’équivalence sur les objets de \mathcal{W}' . On groupe cette fois les objets de \mathcal{W}' quatre par quatre. Soit q_1 et q_2 dans \mathcal{W}' , on a

²Il y a deux tels sommets dans un axe, les autres sommets appartenant au plan équatorial de l’axe

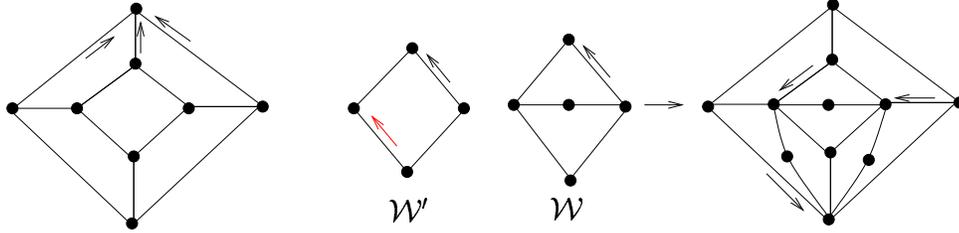


FIG. 2.12 – Construction d’une quadrangulation simple k -enracinée de type b

$q_1 \sim q_2$ ssi les objets enracinés en leur demi-arête rouge (et en oubliant le marquage bleu de la racine) sont égaux et, de plus, les racines de q_1 et q_2 sont situées sur le contour de la même face par rapport aux demi-arêtes marquées en rouge. On note $\tilde{\mathcal{W}}'$ la famille des objets de \mathcal{W}' où on n’a gardé qu’un objet par classe d’équivalence. La SG de la famille $\tilde{\mathcal{W}}'$, comptée par nombre de faces sans compter la face racine, est $zW'(z)$.

On construit les objets composés de la manière suivante (voir figure 2.12) : on part d’une quadrangulation irréductible k -enracinée q dont la k -racine respecte le bicoloriage des sommets. Comme $k \geq 3$, on sait que les deux cellules axiales de q sont des sommets, donc les k racines de q sont sur des faces différentes. On prend ensuite k exemplaires d’un même objet de $\tilde{\mathcal{W}}'$ et on les enracine sur les k faces de q contenant les k racines de la k -racine. L’enracinement des k exemplaires de l’objet se fait en attachant l’objet par sa face enracinée (celle incidente à la racine marquée en bleu) à une face portant une racine de q et en superposant les arêtes contenant les racines respectives des objets. Puis, de manière analogue à précédemment, on enracine, pour chaque orbite de faces non enracinée de q , k exemplaires d’un même objet de \mathcal{W} de la même manière canonique sur chacune des k faces de l’orbite. Enfin, on obtient la quadrangulation k -enracinée de type b à partir de l’objet composé en ne gardant que le marquage des demi-arêtes rouges des k objets bi-enracinés accrochés aux faces racines de q .

Là encore, il est facile de se convaincre que la relation d’équivalence fait en sorte d’éliminer toute redondance et de pouvoir à partir d’une quadrangulation simple k -enracinée de type b remonter sans ambiguïté à l’objet composé qui permet de l’obtenir. Si on note $q_{\cdot, n}^{(k)}(x)$ la SG des quadrangulations irréductibles k -enracinées comptées par nombre de faces par secteur ³, et si on note $g_b^{(k)}(z)$ la SG des quadrangulations simples k -enracinées de type b comptées par nombre de faces par secteur, on a l’équation suivante :

$$g_b^{(k)}(z) = \sum_{n \geq 1} q_{\cdot, n}^{(k)} zW'(z) (W(z))^{n-1} = \frac{zW'(z)}{W(z)} q_{\cdot, \cdot}^{(k)}(W(z))$$

³on rappelle qu’il y a k secteurs dans un objet k -enraciné

Calcul de la SG des quadrangulations irréductibles k -enracinées correspondant à des cartes 3-connexes k -enracinées

Comme les quadrangulations simples k -enracinées de type a et b partitionnent les quadrangulations simples k -enracinées, on obtient, pour $k \geq 3$, une équation liant la SG des quadrangulations simples k -enracinée comptée par nombre de faces par secteur et notée $g_{..}^{(k)}(z)$ à la SG des quadrangulations irréductibles k -enracinées comptée par nombre de faces par secteur et notée $q_{..}^{(k)}(x)$ ⁴. On note aussi que $g_{..}^{(k)}(z)$ s'obtient facilement en fonction de la SG $g_{vv}^{(k)}(x)$ obtenue à la section précédente par la relation $g_{..}^{(k)}(x^2) = g_{vv}^{(k)}(x)$ car il y a deux fois plus d'arêtes que de faces dans une quadrangulation. On obtient finalement l'équation

$$g_{..}^{(k)}(z) = g_a^{(k)}(z) + g_b^{(k)}(z) = 2zG'(z) \frac{1}{1-G(z)} + \frac{zW'(z)}{W(z)} q_{..}^{(k)}(W(z)) \quad (2.4)$$

Comme on connaît $g_{..}^{(k)}$ (qui ne dépend pas de k selon la section précédente), W et G et que ces SG sont algébriques, on en déduit, en faisant le changement de variable $x = W(z)$, que l'on peut obtenir la SG $q_{..}(x)$ et que celle-ci ne dépend pas de k et est algébrique.

2.5.2 Calcul des SG des quadrangulations irréductibles 2-enracinées

Introduction

Traisons maintenant le cas $k = 2$ qui est plus difficile car il peut y avoir des faces axiales et, de plus, quand la répercussion de la symétrie se fait sur un axe, l'axe de symétrie induit sur l'axe n'est pas forcément l'axe des pôles mais peut être inclus dans le plan équatorial de l'axe. En revanche, comme on ne s'intéresse qu'aux quadrangulations 2-enracinées dont la symétrie induite par la 2-racine respecte le bicoloriage des sommets, on n'a pas à considérer le cas où les deux cellules axiales sont des arêtes.

Définitions

Nous introduisons ici 5 familles de quadrangulations simples 2-enracinées et 5 familles de quadrangulations irréductibles 2-enracinées qui partitionnent respectivement les quadrangulations simples 2-enracinées bicoloriées et les quadrangulations irréductibles 2-enracinées bicoloriées. Les 5 inconnues sont ici les SG des 5 familles de quadrangulations irréductibles 2-enracinées et on va écrire un système de 5 équations mettant en relation les 5 SG des familles de quadrangulations simples 2-enracinées avec les 5 SG des familles de quadrangulations irréductibles 2-enracinées. Nous verrons de plus que ce système d'équations est triangulaire supérieur et donc facile à résoudre. On considère :

⁴On met deux points en indice pour marquer le fait que les deux cellules axiales sont des sommets, mais selon la proposition 2, il n'y a que ces cas qui nous intéressent pour $k \geq 3$

- Les familles $\mathcal{G}_{\cdot\cdot}^{(2)}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\cdot\cdot}^{(2)}$) des quadrangulations simples (resp. irréductibles) 2-enracinées dont les deux cellules axiales sont des sommets. On note leurs séries génératrices $g_{\cdot\cdot}^{(2)}(z)$ (resp. $q_{\cdot\cdot}^{(2)}(x)$) comptées par nombre de faces dans un secteur.
- Les familles $\mathcal{G}_{\diamond\cdot}^{(2)}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\diamond\cdot}^{(2)}$) des quadrangulations simples (resp. irréductibles) 2-enracinées dont les deux cellules axiales de la symétrie induite par la 2-racine sont une face et un sommet et telles que les deux racines de la 2-racine ne sont pas incidentes à la face axiale (et sont donc incidentes à deux faces différentes d'une orbite de deux faces pour la symétrie). On note leur série génératrice $g_{\diamond\cdot}^{(2)}(z)$ (resp. $q_{\diamond\cdot}^{(2)}(x)$) comptées par nombre de faces dans un secteur sans compter la face axiale, i.e. la SG de $\mathcal{G}_{\diamond\cdot}^{(2)}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\diamond\cdot}^{(2)}$) comptée par nombre de faces est $zg_{\diamond\cdot}^{(2)}(z^2)$ (resp. $xq_{\diamond\cdot}^{(2)}(x^2)$).
- Les familles $\mathcal{G}_{\diamond\diamond}^{(2)}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\diamond\diamond}^{(2)}$) des quadrangulations simples (resp. irréductibles) 2-enracinées dont les deux cellules axiales de la symétrie induite par la 2-racine sont une face et un sommet et telles que les deux racines de la 2-racine sont incidentes à la face axiale. On note leurs séries génératrices $g_{\diamond\diamond}^{(2)}(z)$ (resp. $q_{\diamond\diamond}^{(2)}(x)$) comptées par nombre de faces dans un secteur sans compter la face axiale.
- Les familles $\mathcal{G}_{\diamond\cdot\cdot}^{(2)}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\diamond\cdot\cdot}^{(2)}$) des quadrangulations simples (resp. irréductibles) 2-enracinées dont les deux cellules axiales de la symétrie induite par la 2-racine sont des faces et telles que les deux racines de la 2-racine ne sont pas incidentes à une des deux faces axiales (et sont donc incidentes à deux faces différentes d'une orbite de deux faces pour la symétrie). On note leurs séries génératrices $g_{\diamond\cdot\cdot}^{(2)}(z)$ (resp. $q_{\diamond\cdot\cdot}^{(2)}(x)$) comptées par nombre de faces dans un secteur sans compter les deux faces axiales, i.e. la SG de $\mathcal{G}_{\diamond\cdot\cdot}^{(2)}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\diamond\cdot\cdot}^{(2)}$) comptée par nombre de faces est $z^2g_{\diamond\cdot\cdot}^{(2)}(z^2)$ (resp. $x^2q_{\diamond\cdot\cdot}^{(2)}(x^2)$).
- Les familles $\mathcal{G}_{\cdot\cdot\diamond}^{(2)}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\cdot\cdot\diamond}^{(2)}$) des quadrangulations simples (resp. irréductibles) 2-enracinées dont les deux cellules axiales de la symétrie induite par la 2-racine sont des faces et telles que les deux racines de la 2-racine sont incidentes à une des deux faces axiales. On note leurs séries génératrices $g_{\cdot\cdot\diamond}^{(2)}(z)$ (resp. $q_{\cdot\cdot\diamond}^{(2)}(x)$) comptées par nombre de faces dans un secteur sans compter les deux faces axiales.

Notons d'abord que l'on connaît les SG des 5 familles de quadrangulations simples 2-enracinées considérées ici. Comme on connaît la SG $g_{vv}^{(2)}$ comptée par nombre d'arêtes par secteur grâce à la section précédente, on connaît bien sûr aussi $g_{\cdot\cdot}^{(2)}$ par la relation $g_{\cdot\cdot}^{(2)}(z^2) = g_{vv}^{(2)}(z)$ car il y a deux fois plus d'arêtes que de faces dans une quadrangulation. Mais on peut aussi déduire $g_{\diamond\cdot}^{(2)}$ de la connaissance de la SG $g_{fv}^{(2)}$. On note $g_{\diamond\cdot,n}^{(2)}$ le nombre d'objets de $\mathcal{G}_{\diamond\cdot}^{(2)}$ ayant n faces dans un secteur sans compter la face axiale (un tel objet a donc $4n + 2$ orbites de deux demi-arêtes par la symétrie induite par la 2-racine). On note $g_{fv,2n+1}$ le nombre de quadrangulations 2-enracinées de type face-sommet ayant $2n + 1$ arêtes dans un secteur donc $4n + 2$ orbites de deux demi-arêtes par la

symétrie induite par la 2-racine. Par un raisonnement classique, on construit une même famille d'objets bi 2-enracinés à partir des deux familles précédentes :

Soit on part d'un objet de $\mathcal{G}_{\blacklozenge, n}$ dont la 2-racine (qui est incidente à la face axiale) est marquée en bleu et on marque en rouge une 2-racine secondaire, i.e. un couple de deux demi-arêtes parmi les $4n + 2$ orbites de deux demi-arêtes qui sont sur la quadrangulation.

Soit on part d'un objet 2-enraciné de type face-sommet ayant $2n + 1$ arêtes dans un secteur et dont la 2-racine est marquée en rouge et on marque en bleu une 2-racine secondaire axiale, i.e. un couple de demi-arêtes d'une des deux orbites de deux demi-arêtes qui sont incidentes à la face axiale.

On en déduit la relation $(4n + 2)g_{\blacklozenge, n}^{(2)} = 2g_{fv, 2n+1}^{(2)}$ qui permet facilement d'obtenir la SG $g_{\blacklozenge}^{(2)}(z)$. On obtient facilement les SG $g_{\diamond\diamond}^{(2)}(z)$, $g_{\diamond\diamond}^{(2)}(z)$ et $g_{\blacklozenge\diamond}^{(2)}(z)$ par un raisonnement analogue.

Nous aurons de plus besoin de deux familles annexes que nous allons définir et dont nous allons calculer les SG. On considère :

- La famille \mathcal{L} des quadrangulations simples 2-enracinées ayant deux faces axiales, telles que la 2-racine appartient à une face axiale et telles que le nœud racine de l'arbre de décomposition de la quadrangulation enracinée (obtenue en ne gardant qu'une des deux racines de la 2-racine) ne soit pas un axe vertical. On note $l(z)$ la SG de la famille \mathcal{L} comptée par nombre de faces par secteur sans compter les deux faces axiales.
- La famille \mathcal{H} des quadrangulations simples 2-enracinées de type face-sommet, telles que la 2-racine appartient à la face axiale et telles que le nœud racine de l'arbre de décomposition de la quadrangulation enracinée (obtenue en ne gardant qu'une des deux racines de la 2-racine) ne soit pas un axe vertical. On note $h(z)$ la SG de la famille \mathcal{H} comptée par nombre de faces par secteur sans compter la face axiale.

Calcul des SG des familles \mathcal{H} et \mathcal{L}

On a une décomposition très simple pour les objets de $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$ (resp. $\mathcal{G}_{\blacklozenge\diamond}^{(2)}$) par rapport aux objets de \mathcal{L} (resp. \mathcal{H}). Les deux décompositions se font en regardant si le nœud racine de la décomposition en arbre est un axe horizontal ou pas (voir figure 2.13). Ces deux décompositions se traduisent par deux équations qui permettent d'obtenir les SG $h(z)$ et $l(z)$:

$$g_{\blacklozenge\diamond}^{(2)}(z) = l(z)(W(z) + 1) = l(z) \frac{1}{1 - G(z)}$$

$$g_{\blacklozenge}^{(2)}(z) = h(z)(W(z) + 1) + W(z) = h(z) \frac{1}{1 - G(z)} + \frac{G(z)}{1 - G(z)}$$

Calcul de la SG de la famille $\mathcal{Q}_{\blacklozenge\diamond}^{(2)}$

On va ici traiter la relation entre les familles $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$ et $\mathcal{Q}_{\blacklozenge\diamond}^{(2)}$. On a là aussi une décomposition très simple en regardant si le nœud racine de la décomposition

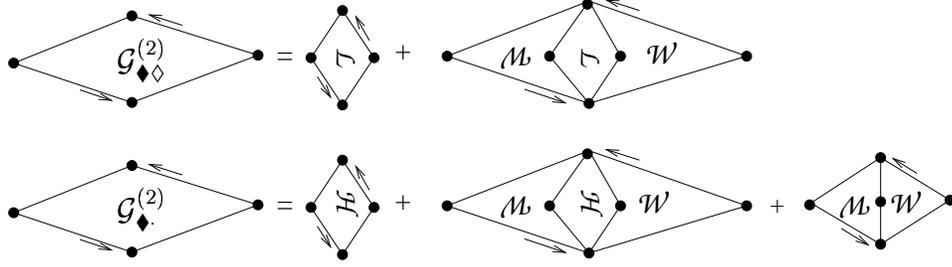


FIG. 2.13 – Les deux décompositions faisant intervenir les objets de \mathcal{L} et \mathcal{H}

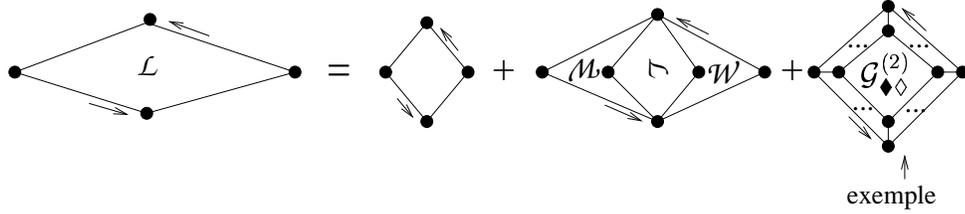


FIG. 2.14 – Décomposition d'un objet de \mathcal{L}

en arbre d'un objet de \mathcal{L} non trivial⁵ est un axe horizontal ou un nœud de type irréductible (voir figure 2.14). On obtient l'équation :

$$l(z) = 1 + l(z)W(z) + q_{\blacklozenge}^{(2)}(W(z))g_{\blacklozenge}^{(2)}(z) \quad (2.5)$$

Comme on connaît toutes les SG de l'équation sauf $q_{\blacklozenge}^{(2)}$, on obtient grâce à l'équation la SG $q_{\blacklozenge}^{(2)}(W(z))$ puis la SG $q_{\blacklozenge}^{(2)}(x)$ en faisant le changement de variable $x = W(z)$ (on note que $q_{\blacklozenge}^{(2)}(x)$ est algébrique).

Calcul de la SG de la famille $\mathcal{Q}_{\blacklozenge}^{(2)}$

On traite maintenant la relation entre la famille $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$ et les familles $\mathcal{Q}_{\blacklozenge}^{(2)}$ et $\mathcal{Q}_{\blacklozenge}^{(2)}$ (on note la propriété de triangularité supérieure du système). On décompose là aussi un objet de \mathcal{H} selon que le nœud racine de sa décomposition en arbre est un axe horizontal ou une quadrangulation irréductible (voir figure 2.15). On obtient l'équation :

$$h(z) = W(z) + h(z)W(z) + q_{\blacklozenge}^{(2)}(W(z)) + q_{\blacklozenge}^{(2)}(W(z))g_{\blacklozenge}^{(2)}(z) \quad (2.6)$$

⁵non trivial signifiant différent de la quadrangulation simple ayant deux faces

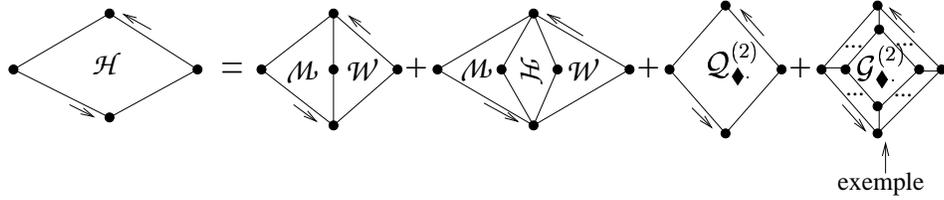


FIG. 2.15 – Décomposition d'un objet de \mathcal{H}

Toutes les SG de l'équation sont connues sauf $q_{\blacklozenge}^{(2)}$ (car on connaît maintenant $q_{\blacklozenge}^{(2)}$) donc on déduit de l'équation la SG $q_{\blacklozenge}^{(2)}(W(z))$ puis la SG $q_{\blacklozenge}^{(2)}(x)$ en faisant le changement de variable $x = W(z)$ et on note que $q_{\blacklozenge}^{(2)}(x)$ est algébrique.

Calcul de la SG de la famille $\mathcal{Q}_{\blacklozenge}^{(2)}$

On va maintenant trouver une équation liant $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$, $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$, $\mathcal{Q}_{\blacklozenge}^{(2)}$, $\mathcal{Q}_{\blacklozenge}^{(2)}$ et $\mathcal{Q}_{\blacklozenge}^{(2)}$ en essayant de trouver, comme on l'a fait plusieurs fois précédemment, une construction des objets de $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$ à partir d'objets composés.

Soit g un objet de $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$. La symétrie induite par la 2-racine de g induit une symétrie sur son arbre de décomposition qui laisse le centre de cet arbre invariant mais, ici, il peut y avoir d'autres nœuds ou arêtes de l'arbre que le centre qui restent invariants par la symétrie car on peut par exemple imaginer qu'on peut empiler plusieurs quadrangulations 2-enracinées avec deux faces axiales en les connectant par leurs faces axiales. On déduit de la remarque précédente qu'il faut introduire la définition suivante : si au moins un nœud de l'arbre de décomposition de g est invariant par la symétrie ⁶, on appelle tronc de l'arbre de décomposition de g la succession des nœuds de l'arbre x_0, \dots, x_k invariants par la symétrie induite par la 2-racine, tel que x_0 a deux faces axiales dont une libre, $\forall 1 \leq i \leq k-1$, x_i a deux faces axiales dont l'une est connectée à une face axiale de x_{i-1} et l'autre est connectée à une face axiale de x_{i+1} , et x_k a deux faces axiales dont une libre. Comme la 2-racine de g n'est pas sur une face axiale de g , on en déduit qu'il existe $0 \leq i \leq k$ tel que x_i porte, sur deux de ses faces qui forment une 2-orbite pour la symétrie induite par la 2-racine, les deux composantes identiques qui portent chacune une racine de la 2-racine de g . On dit alors que la symétrie induite par la 2-racine de g se répercute au niveau de son arbre de décomposition sur le nœud x_i et on note x_g ce nœud. On note que x_g n'est pas forcément le centre de l'arbre. Deux cas se présentent alors :

- Le nœud où se répercute la symétrie est un axe.

⁶Le seul cas où l'arbre n'a pas au moins un nœud invariant est le cas où le centre de l'arbre est une arête de l'arbre et où la symétrie retourne cette arête, cela correspond au fait qu'on retourne une face d'interconnection autour d'un axe passant par deux sommets s_1 et s_2 diagonalement opposés de cette face, en conséquence, les deux cellules axiales de g sont forcément deux sommets qui sont s_1 et s_2

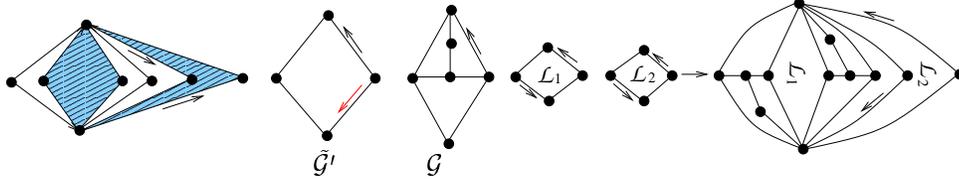


FIG. 2.16 – Construction d’une quadrangulation simple 2-enracinée dont la répercussion de la symétrie se fait sur un axe avec deux faces axiales

– Le nœud où se répercute la symétrie est un nœud irréductible.

Etudions le premier cas (x_g est un axe). La symétrie de type rotation d’ordre 2 de g se répercute en une symétrie de type rotation d’ordre 2 de l’axe x_g dont les deux cellules axiales sont des faces ⁷. En effet, si l’axe de rotation de x_g passait par au moins un sommet de x_g , ce sommet serait définitivement axial sur g , en contradiction avec le fait que les deux cellules axiales de g sont des faces. On en déduit, en considérant la géométrie d’un axe, que l’axe de la rotation passe par les centres de deux faces diamétralement opposées de l’axe et est inclus dans le plan équatorial de l’axe.

On va maintenant construire des objets composés qui permettent d’obtenir les objets de $\mathcal{G}_{\diamond\diamond}^{(2)}$ ayant ce type de répercussion. On part d’un axe 2-enraciné a tel que la 2-racine induit un axe de symétrie passant par les centres de deux faces diamétralement opposées de a , tel que les deux racines de la 2-racine ne sont pas incidentes à une des deux faces axiales de a et tel que les deux racines pointent vers le plan équatorial de l’axe. On enracine ensuite sur chacune des deux faces racines de a un exemplaire d’un même objet de $\tilde{\mathcal{G}}'$ en superposant l’arête portant la racine de $\tilde{\mathcal{G}}'$ sur l’arête portant la racine sur la face racine considérée de a . Puis, pour chaque orbite de deux faces non axiales non racines de a , on enracine de la même manière canonique un même objet de \mathcal{G} , i.e. si on considère conventionnellement que l’axe est horizontal, on enracine l’objet de \mathcal{G} “verticalement” de sorte qu’on est sûr que l’axe ne se décompose pas horizontalement en plus de faces après l’enracinement. Ensuite, on enracine sur chacune des deux faces axiales de a un objet de \mathcal{L} (pas forcément le même) en faisant là aussi un enracinement canonique “vertical”. On a donc les deux faces axiales de l’axe qui deviennent des faces d’interconnection ⁸ avec les objets de \mathcal{L} et les deux faces axiales de l’objet composé final obtenu sont les deux autres faces axiales à l’autre extrémité de chacun des objets de \mathcal{L} . L’objet 2-enraciné final est là aussi celui obtenu en ne gardant que les demi-arêtes marquées en rouge des deux objets bi-enracinés de $\tilde{\mathcal{G}}'$ qui ont été attachés aux deux faces racines de l’axe. La figure 2.16 illustre une telle décomposition.

Là encore, la relation d’équivalence sur les objets de \mathcal{G}' est telle que l’on

⁷Il s’agit de faces de x_g qui ne sont pas forcément des faces de g si elles sont engagées dans une interconnection

⁸à moins qu’on enracine l’objet trivial à deux faces de \mathcal{L}

peut retrouver sans ambiguïté l'objet composé qui a permis d'obtenir un objet de $\mathcal{G}_{\diamond\diamond}^{(2)}$ dont la symétrie induite par la 2-racine se répercute sur un axe. La SG de ce terme de répercussion comptée par nombre de faces par secteur sans compter les deux faces axiales est :

$$r_{\diamond\diamond}^{(2)}(z) = 2zG'(z)(1 + 2G(z) + 3G(z)^2 + \dots)l(z)^2 = 2zG'(z)\frac{1}{(1-G(z))^2}l(z)^2$$

où le 3 dans le terme $2zG'(z)3G(z)^2l(z)^2$ signifie que chacune des deux faces enracinées de l'axe de départ peut occuper la première, deuxième ou troisième place (la même place pour les deux par symétrie) par rapport aux deux faces non enracinées du secteur et si on considère sa position par rapport à la face axiale qui est la plus proche du sommet extrémité de sa racine. On constate que, comme $W(z) = \frac{G(z)}{1-G(z)}$, on a

$$r_{\diamond\diamond}^{(2)} = 2zW'(z)l(z)^2$$

Cette simplification n'arrive pas par hasard car on aurait pu construire les objets composés de la manière suivante, plus simple : on définit d'abord une relation d'équivalence sur les objets de \mathcal{W}' analogue à celle définie sur les objets de \mathcal{G}' , i.e. deux objets de \mathcal{W}' sont équivalents ssi ils sont égaux comme objets enracinés en leur demi-arête rouge et les demi-arêtes bleues sont diagonalement opposées dans la même face si on considère leur localisation par rapport à la demi-arête rouge. On note $\bar{\mathcal{W}}'$ la famille obtenue à partir de \mathcal{W}' en ne gardant qu'un objet par classe d'équivalence et on a donc que la SG de $\bar{\mathcal{W}}'$ par nombre de faces sans compter la face racine est $2zW'(z)$. Pour construire un objet composé, on part de l'axe 2-enraciné ayant quatre faces dont deux axiales et tel que les deux racines pointent vers le plan équatorial. On enracine deux exemplaires d'un même objet de $\bar{\mathcal{W}}'$ sur chaque face enracinée de l'axe en superposant l'arête racine de l'objet de $\bar{\mathcal{W}}'$ sur l'arête racine de la face enracinée de l'axe. On enracine ensuite canoniquement verticalement deux objets de \mathcal{L} sur les deux faces axiales de l'axe et on obtient la quadrangulation 2-enracinée en ne gardant que le marquage des demi-arêtes marquées en rouge des deux objets de $\bar{\mathcal{W}}'$.

Traisons maintenant le cas où la 2-racine de g se répercute sur une quadrangulation irréductible. Là aussi, on construit des objets composés en prenant un objet q de $\mathcal{Q}_{\diamond\diamond}^{(2)}$ puis en enracinant deux exemplaires d'un même objet de $\bar{\mathcal{W}}'$ sur chacune des deux faces racines de q , l'enracinement étant tel qu'on superpose les arêtes portant les racines de chaque côté de l'interconnection. Comme précédemment, on enracine canoniquement deux exemplaires d'un même objet de \mathcal{W} sur chaque orbite de deux faces non enracinées de q , et enfin on enracine un objet de $\mathcal{G}_{\diamond\diamond}^{(2)}$ sur chacune des deux faces axiales de q . On obtient ainsi une et une seule fois chaque objet de $\mathcal{G}_{\diamond\diamond}^{(2)}$ dont la répercussion se fait sur un nœud irréductible à partir de ces objets composés où on ne garde pour la 2-racine que le marquage rouge des demi-arêtes des deux objets de $\bar{\mathcal{W}}'$. En terme de SG, cela

se traduit par l'expression suivante :

$$\sum_n q_{\diamond\diamond,n}^{(2)} z W'(z) (W(z))^{n-1} g_{\diamond\diamond}^{(2)}(z)^2 = \frac{z W'(z)}{W(z)} q_{\diamond\diamond}^{(2)}(W(z)) g_{\diamond\diamond}^{(2)}(z)^2$$

En faisant la somme des deux SG représentant les deux types de répercussion, on obtient finalement l'équation suivante :

$$g_{\diamond\diamond}^{(2)}(z) = 2z W'(z) l(z)^2 + \frac{z W'(z)}{W(z)} q_{\diamond\diamond}^{(2)}(W(z)) g_{\diamond\diamond}^{(2)}(z)^2 \quad (2.7)$$

et on en déduit la SG $q_{\diamond\diamond}^{(2)}(W(z))$ puis la SG $q_{\diamond\diamond}^{(2)}(x)$ en faisant le changement de variable $x = W(z)$ et on note que $q_{\diamond\diamond}^{(2)}(x)$ est algébrique.

Calcul de la SG de la famille $\mathcal{Q}_{\diamond}^{(2)}$

On va ici trouver une équation liant les familles $\mathcal{G}_{\diamond}^{(2)}$, $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$, $\mathcal{G}_{\blacklozenge\diamond}^{(2)}$, $\mathcal{Q}_{\diamond\diamond}^{(2)}$ et $\mathcal{Q}_{\diamond}^{(2)}$ en effectuant une construction des objets de $\mathcal{G}_{\diamond}^{(2)}$ à l'aide d'objets composés dont notamment des objets de $\mathcal{Q}_{\diamond}^{(2)}$ et on en déduira la SG $q_{\diamond}^{(2)}$.

Considérons un objet g de $\mathcal{G}_{\diamond}^{(2)}$. Comme il a été remarqué précédemment, le fait qu'il n'existe aucun nœud invariant par la symétrie implique que les deux cellules axiales de g seraient des sommets, ce qui n'est pas le cas ici. En conséquence, on peut reprendre la sous-section précédente pour définir le tronc de g comme étant la chaîne de nœuds x_0, \dots, x_k ($k \geq 0$) invariants par la symétrie et reliés par leurs faces axiales. La différence ici est que l'un des nœuds extrémaux, disons x_0 , a un sommet axial et une face axiale. Là encore, on peut distinguer sur le tronc un nœud où se répercute la symétrie et que l'on appelle x_g . On a deux types de répercussion possibles : sur un axe ou sur une quadrangulation irréductible. Considérons le cas où x_g est un axe. On a à nouveau deux cas qui se présentent :

- x_g n'est pas le nœud x_0 du tronc, i.e. la symétrie de g se répercute en une symétrie de x_g tel que l'axe de la rotation est dans le plan équatorial de l'axe et passe par le centre de deux faces diamétralement opposées de l'axe (une telle configuration n'est possible que si l'axe a un nombre pair de faces).
- x_g est le nœud x_0 du tronc, i.e. la symétrie de g se répercute en une symétrie de x_g tel que l'axe de la rotation est dans le plan équatorial de l'axe et passe par le centre d'une face et par le sommet qui lui est diamétralement opposé dans le plan équatorial (une telle configuration n'est possible que si l'axe a un nombre impair de faces).

Traisons le premier cas en construisant des objets composés à la manière de la construction simplifiée de la sous-section précédente où on partait d'un axe ayant quatre faces. On réalise ici exactement la même construction à la différence près qu'au lieu d'enraciner verticalement deux objets de \mathcal{L} sur les deux faces axiales de l'axe, on enracine verticalement un objet de \mathcal{H} sur la première face

axiale et un objet de \mathcal{L} sur la deuxième face axiale ou un objet de \mathcal{L} sur la première face axiale et un objet de \mathcal{H} sur la deuxième face axiale. On obtient pour ce premier cas la SG :

$$4zW'(z)h(z)l(z)$$

Traitons le deuxième cas en faisant une construction d'objets composés un peu analogue, à savoir qu'on part de l'axe 2-enraciné ayant trois faces dont une axiale et tel que les deux racines de la 2-racine pointent vers le sommet axial de l'axe (diamétralement opposé à la face axiale dans le plan équatorial). On enracine en les deux racines de l'axe deux exemplaires d'un objet bi-enraciné de \mathcal{W}' , l'enracinement se faisant face racine contre face racine et de telle manière que la racine des deux exemplaires pointe vers le sommet axial de l'axe. On enracine ensuite verticalement un objet de \mathcal{L} sur la face axiale et on obtient un objet correspondant au deuxième cas en ne gardant que le marquage des deux demi-arêtes rouges des deux objets de \mathcal{W} . On obtient donc pour ce deuxième cas la SG :

$$4zW'(z)l(z)$$

Finalement, la SG des termes de $g_{\diamond}^{(2)}$ dont la 2-racine se répercute sur un axe est :

$$r_{\diamond}^{(2)}(z) = 4zW'(z)l(z)(1 + h(z))$$

Considérons le cas où x_g est un nœud irréductible. Là aussi, deux cas se présentent selon que x_g est le sommet x_0 du tronc qui est de type face-sommet ou que x_g n'est pas le sommet x_0 du tronc auquel cas x_g est de type face-face.

Si x_g est de type face-face, on peut obtenir ces termes à partir d'objets composés en faisant la construction suivante : on part d'un objet q de $\mathcal{Q}_{\diamond\diamond}^{(2)}$ et on enracine deux exemplaires d'un objet de \mathcal{W}' sur les deux faces racines de q et en superposant les arêtes portant la racine de chaque côté de l'interconnection, puis pour chaque orbite de deux faces non racines non axiales de q on enracine de la même manière canonique deux exemplaires d'un même objet de \mathcal{W} sur ces deux faces. Enfin, soit on enracine un objet de $\mathcal{G}_{\diamond\diamond}^{(2)}$ sur la première face axiale de q et un objet de $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$ sur la deuxième face axiale de q , soit on fait l'inverse (on note qu'on est capable de distinguer les deux faces axiales grâce à la 2-racine). On obtient pour ce terme la SG :

$$2z \frac{zW'(z)}{W(z)} q_{\diamond\diamond}^{(2)}(W(z)) g_{\blacklozenge}^{(2)}(z) g_{\blacklozenge}^{(2)}(z)$$

Supposons que x_g est de type face-sommet, on traite ce cas de manière analogue au précédent, à ceci près qu'à la fin, on enracine juste un objet de $\mathcal{G}_{\blacklozenge}^{(2)}$ sur l'unique face axiale de la quadrangulation irréductible dont on est parti. On obtient pour ce terme la SG :

$$\frac{zW'(z)}{W(z)} q_{\diamond}^{(2)}(W(z)) g_{\blacklozenge}^{(2)}(z)$$

La réunion de tous les cas permet finalement d'obtenir l'équation suivante correspondant à la décomposition des objets de $\mathcal{G}_{\diamond}^{(2)}$:

$$g_{\diamond}^{(2)}(z) = r_{\diamond}^{(2)}(z) + 2 \frac{zW'(z)}{W(z)} q_{\diamond}^{(2)}(W(z)) g_{\diamond}^{(2)}(z) g_{\diamond}^{(2)}(z) + \frac{zW'(z)}{W(z)} q_{\diamond}^{(2)}(W(z)) g_{\diamond}^{(2)}(z) \quad (2.8)$$

et on en déduit la SG $q_{\diamond}^{(2)}(W(z))$, qui est la seule inconnue de cette équation, puis la SG $q_{\diamond}^{(2)}(x)$ en faisant le changement de variable $x = W(z)$ et on note que $q_{\diamond}^{(2)}(x)$ est algébrique.

Calcul de la SG de la famille $\mathcal{Q}^{(2)}$

Il ne reste plus qu'une inconnue, la SG de la famille $\mathcal{Q}^{(2)}$, et on va ici trouver une équation liant cette SG aux SG des autres familles de cartes (toutes connues à ce point du raisonnement) en obtenant, de manière analogue à précédemment, une décomposition des objets de $\mathcal{G}^{(2)}$ à partir d'objets composés faisant notamment intervenir les objets de $\mathcal{Q}^{(2)}$.

Cette fois, beaucoup de cas peuvent se présenter selon la manière dont la symétrie induite par la 2-racine d'un objet g de $\mathcal{G}^{(2)}$ se répercute sur son arbre de décomposition. En effet, on peut cette fois avoir le cas où le centre de l'arbre est une arête et où la symétrie retourne cette arête (traité au cas 1 ci-dessous). Sinon, on peut définir le tronc de g comme la chaîne des nœuds x_0, \dots, x_k ($k \geq 0$) de son arbre de décomposition qui sont invariants par la symétrie, et tel que, si $k = 0$, x_0 est de type sommet-sommet tandis que, si $k \geq 1$, x_0 et x_k sont de type face-sommet et $\forall 1 \leq i \leq k-1$, x_i est de type face-face. Pour les cas où il y a au moins un nœud invariant par la symétrie dans l'arbre de décomposition et où on peut définir le tronc de l'arbre et le nœud x_g où se répercute la symétrie, on sépare les cas selon que le nœud x_g est un axe ou un nœud irréductible, puis si le nœud x_g est de type sommet-sommet (ssi le tronc de g est réduit à un nœud), de type face-sommet ou de type face-face (si le tronc a au moins trois nœuds). Il faut faire attention au fait que, si x_g est un axe, il y a deux manières pour qu'il soit de type sommet-sommet (traités dans les cas 2 et 3). On distingue donc les cas suivants :

1. Le centre de l'arbre est une arête de l'arbre qui correspond à une face d'interconnection et la symétrie est une rotation d'ordre 2 dont les deux cellules axiales sont deux sommets diagonalement opposés de cette face d'interconnection. Il est facile de voir que les deux nœuds de chaque côté de l'interconnection sont des nœuds irréductibles car, supposons que ce sont deux axes, alors l'un est horizontal si on considère que l'autre est vertical, i.e. ils sont étirés dans des directions perpendiculaires l'un par rapport à l'autre. Comme la rotation de demi-tour a lieu autour d'une diagonale de la face d'interconnection entre les deux axes, on arrive à la contradiction que l'axe horizontal est envoyé sur l'axe vertical par la symétrie, mais en même temps, il reste forcément horizontal par la symétrie puisque celle-ci

le fait pivoter autour d'une diagonale de la face d'interconnection. On a une contradiction et donc les deux nœuds de chaque côté de l'interconnection sont bien des nœuds irréductibles.

2. Le nœud x_g est un axe et la symétrie induite sur x_g par la 2-racine est une rotation d'ordre 2 dont l'axe passe par deux sommets diagonalement opposés dans le plan équatorial de x_g .
3. Le nœud x_g est un axe et la symétrie induite sur x_g par la 2-racine est une rotation d'ordre 2 dont l'axe passe par deux sommets qui sont les deux pôles de x_g . L'axe de la rotation est donc perpendiculaire au plan équatorial de x_g .
4. Le nœud x_g est un axe et la symétrie induite sur x_g par la 2-racine est une rotation d'ordre 2 et l'axe de cette rotation passe par un sommet du plan équatorial de x_g et par le centre de la face qui lui est diamétralement opposée dans le plan équatorial de x_g (l'axe x_g a donc un nombre impair de faces)
5. Le nœud x_g est un axe et la symétrie induite sur x_g par la 2-racine est une rotation d'ordre 2 et l'axe de cette rotation passe le centre de deux faces diamétralement opposées de x_g .
6. Le nœud x_g est une quadrangulation irréductible et la symétrie induite sur x_g est telle que les deux cellules axiales de x_g sont des faces.
7. Le nœud x_g est une quadrangulation irréductible et la symétrie induite sur x_g est telle que les deux cellules axiales de x_g sont une face et un sommet.
8. Le nœud x_g est une quadrangulation irréductible et la symétrie induite sur x_g est telle que les deux cellules axiales de x_g sont des sommets.

Les cas 1 et 2 peuvent se traiter ensemble en construisant les objets composés suivants : on part de la quadrangulation simple triviale à deux faces a qui est 2-enracinée de telle manière que les deux racines pointent vers le même sommet que l'on appelle sommet racine. On peut considérer la quadrangulation simple triviale comme une sorte d'axe dégénéré à deux faces et on peut lui appliquer exactement la même construction d'objets composés que l'on avait faite à la section 2.5.1, à savoir enraciner deux exemplaires d'un même objet g' de \mathcal{G}' sur chacune des deux faces de a de telle manière que les racines des objets enracinés pointent vers le sommet racine de a . g' est non étiré horizontalement à la racine. S'il est aussi non étiré verticalement, on est dans le cas 1 (car le nœud racine de la décomposition en arbre de g' est un nœud irréductible). S'il est étiré verticalement, on est dans le cas 2. Finalement, les cas 1 et 2 donnent la SG

$$2zG'(z)$$

Le cas 3 peut aussi se ramener à la section 2.5.1, mais il faut bien voir que l'axe sur lequel se répercute la symétrie est un vrai axe, i.e. il a un nombre de faces supérieur ou égal à 3 (il ne faut pas inclure ici le cas de l'axe dégénéré). La construction est la même que dans la section 2.5.1 à la différence que, cette fois,

on part d'un axe 2-enraciné ayant au moins une orbite de faces non racines. Le cas 3 donne la SG

$$2zG'(z)\frac{G(z)}{1-G(z)}$$

Finalement, la réunion des cas 1, 2 et 3 donne la SG

$$2zG'(z)\frac{1}{1-G(z)}$$

Le cas 4 se traite comme le cas analogue traité dans la sous-section précédente. On y construisait des objets composés à partir d'un axe à trois faces 2-enraciné dont une était axiale. On fait de même ici à la différence qu'on enracine verticalement sur la face axiale de l'axe non pas un objet de \mathcal{L} mais un objet de \mathcal{H} . Le cas 4 donne la SG :

$$4zW'(z)h(z)$$

Le cas 5 se traite aussi comme le cas analogue traité dans les deux sous-sections précédentes où on partait d'un axe 2-enraciné à quatre faces dont deux axiales. La différence est qu'ici, on enracine verticalement sur les deux faces axiales de l'axe des objets de \mathcal{H} . Le cas 5 donne la SG :

$$2zW'(z)h(z)^2$$

Finalement, on peut grouper les cinq premiers cas en une SG $r_{..}(z)$ des objets de $\mathcal{G}^{(2)}$ dont la symétrie se répercute sur un axe :

$$r_{..}(z) = 2zG'(z)\frac{1}{1-G(z)} + 4zW'(z)h(z) + 2zW'(z)h(z)^2$$

Les trois derniers cas représentent des objets de $\mathcal{G}^{(2)}$ dont la symétrie se répercute sur une quadrangulation irréductible. Ces cas se traitent en construisant des objets composés à partir de quadrangulations irréductibles 2-enracinées ayant respectivement deux faces axiales pour le cas 6, une face axiale et un sommet axial pour le cas 7, et deux sommets axiaux pour le cas 8. De telles constructions ont déjà été faites dans les sections précédentes.

On obtient pour le cas 6 la SG :

$$\frac{zW'(z)}{W(z)}q_{\diamond\diamond}^{(2)}(W(z))g_{\blacklozenge}^{(2)}(z)^2$$

On obtient pour le cas 7 la SG :

$$\frac{zW'(z)}{W(z)}q_{\diamond\blacklozenge}^{(2)}(W(z))g_{\blacklozenge}^{(2)}(z)$$

On obtient pour le cas 8 la SG :

$$\frac{zW'(z)}{W(z)}q_{\blacklozenge\blacklozenge}^{(2)}(W(z))$$

Finalement, on obtient l'équation suivante correspondant à la décomposition des objets de $\mathcal{G}_{\cdot}^{(2)}$ selon les huit cas traités :

$$g_{\cdot}^{(2)}(z) = r_{\cdot}(z) + \frac{zW'(z)}{W(z)} \left(q_{\diamond\diamond}^{(2)}(W(z))g_{\blacklozenge}^{(2)}(z)^2 + q_{\diamond\cdot}^{(2)}(W(z))g_{\blacklozenge}^{(2)}(z) + q_{\cdot}^{(2)}(W(z)) \right) \quad (2.9)$$

Là encore, comme tous les termes de cette équation sont connus sauf $q_{\cdot}^{(2)}(W(z))$, on en déduit la SG $q_{\cdot}^{(2)}(W(z))$ puis $q_{\cdot}^{(2)}(x)$ en faisant le changement de variable $x = W(z)$ et, là encore, on observe que $q_{\cdot}^{(2)}(x)$ est algébrique.

2.5.3 Calcul de la SG des cartes 3-connexes à orientation positive près

On a obtenu toutes les SG de quadrangulations irréductibles k -enracinées ($k \geq 2$) correspondant par la bijection de Tutte à des cartes 3-connexes k -enracinées. On note $q(x)$ la SG des cartes 3-connexes enracinées par nombre d'arêtes qui est connue cf [1]. Si on considère la SG $q_{\cdot}^{(k)}$ ($k \geq 3$) obtenue par l'équation 2.4, la SG $q_{\blacklozenge\diamond}^{(2)}$ obtenue par l'équation 2.5, la SG $q_{\blacklozenge}^{(2)}$ obtenue par l'équation 2.6, la SG $q_{\diamond\diamond}^{(2)}$ obtenue par l'équation 2.7, la SG $q_{\cdot}^{(2)}$ obtenue par l'équation 2.8 et la SG $q_{\cdot}^{(2)}$ obtenue par l'équation 2.9, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 6 *Si on note d_n le nombre de cartes 3-connexes non enracinées, aussi appelées polytopes, ayant n arêtes et prises à orientation positive près, on déduit du théorème 3 que :*

$$\sum 2nd_n x^n = q(x) + q_{\cdot}^{(2)}(x^2) + xq_{\diamond\diamond}^{(2)}(x^2) + xq_{\blacklozenge}^{(2)}(x^2) + x^2q_{\diamond\diamond}^{(2)}(x^2) + x^2q_{\blacklozenge}^{(2)}(x^2) + \sum_{k \geq 3} \phi(k)q_{\cdot}^{(k)}(x^k)$$

De plus, comme toutes les SG de quadrangulations irréductibles k -enracinées calculées ici sont algébriques, on dispose de méthodes permettant de calculer en temps linéaire leurs coefficients, et donc de calculer rapidement, en temps $n \log(n)$, les n premiers coefficients de d_n . Les premiers termes de d_n sont donnés dans le tableau 2.2. Ces termes avaient déjà été obtenus dans [5] par une méthode différente.

2.6 Cas non orienté

Il serait intéressant de mettre en œuvre la méthode de décomposition en arbre utilisée ici pour compter les cartes 3-connexes à tout automorphisme près même ceux qui changent l'orientation. En effet, selon le théorème de Whitney, les cartes 3-connexes à tout automorphisme près sont en bijection avec les graphes 3-connexes non étiquetés. On déduirait donc d'une telle énumération les graphes 3-connexes non étiquetés comptés par nombre d'arêtes. La formule utilisée ici est aussi de type Burnside et énumère les cartes à tout automorphisme près d'une

n	d_n
6	1
7	0
8	1
9	2
10	3
11	4
12	15
13	32
14	89
15	266
16	797
17	2496
18	8012
19	26028
20	85888
21	286608
22	965216

TAB. 2.2 – Les premiers termes des polytopes comptés par nombre d’arêtes

famille de cartes en fonction du nombre de cartes k -enracinées orientées et non orientées de cette famille. Il y a plusieurs types pour les cartes k -enracinées non orientées (voir [11] pour un traitement détaillé)

- La 2-racine induit une symétrie de la carte de type réflexion par rapport à un plan.
- La k -racine induit une symétrie de la carte de type réflexion par rapport à un plan composée avec une rotation d’ordre impair (k s’écrit alors forcément sous la forme $k = 2 \cdot (2j + 1)$).
- La 2-racine induit une symétrie de type projective (qui correspond à l’application $x \rightarrow -x$ dans l’espace \mathbf{R}^3).
- La k -racine induit une symétrie de la carte de type réflexion par rapport à un plan composée avec une rotation d’ordre pair (k s’écrit alors forcément sous la forme $k = 2j$).

La formule est alors la suivante. On note u_n le nombre de cartes à n arêtes de la famille à tout automorphisme près. On note m_n le nombre de cartes à n arêtes de la famille à orientation positive près. On note r_n le nombre de cartes 2-enracinées à n arêtes de type réflexion et $r_n^{2(2j+1)}$ le nombre de cartes à n arêtes $2(2j + 1)$ -enracinées telles que la symétrie induite est une réflexion composée avec une rotation d’ordre impair. On note p_n le nombre de cartes à n arêtes de type projective et on note r_n^{2j} le nombre de cartes à n arêtes $2j$ -enracinées de la famille dont la symétrie induite est une réflexion composée avec une rotation d’ordre pair. On a alors la formule suivante :

$$u_n = \frac{1}{4n} \left(2nm_n + r_n + \sum_{j \geq 1} \phi(2j+1)r_n^{(2(2j+1))} + p_n + \sum_{j \geq 1} \phi(2j)p_n^{(2j)} \right) \quad (2.10)$$

Il s'avère qu'il semble possible de mettre en œuvre la décomposition en arbre pour obtenir les cartes non séparables et 3-connexes à tout automorphisme près.

Chapitre 3

Présentation de deux bijections entre une famille d'arbres et une famille de cartes enracinées en utilisant la théorie des $\alpha - orientations$

3.1 Une nouvelle approche pour la bijection entre cartes eulériennes et arbres bourgeonnants équilibrés

3.1.1 Introduction

Nous présentons ici la bijection entre arbres bourgeonnants de degrés prédéterminés et cartes eulériennes de degrés prédéterminés, bijection qui est présentée dans [12] et nous donnons une nouvelle manière d'en voir la réciproque qui fait appel à la théorie des $\alpha - orientations$ d'un graphe dessiné dans le plan, théorie présentée dans [16]. On s'inspire ici de [15] où est expliquée une bijection entre triangulations et une certaine famille d'arbres, la démonstration de la bijection utilisant aussi la théorie des $\alpha - orientations$. Nous rappelons les principaux résultats sur la bijection.

3.1.2 Algorithme de clôture (rappels)

Définition 14 On appelle arbre bourgeonnant eulérien avec degrés prédéterminés un arbre ayant pour chaque $i \geq 1$ d_i sommets ayant i fils et portant sur chaque sommet ayant i fils $i - 1$ bourgeons qui sont représentés par des petites flèches quittant ce sommet. De plus, un tel arbre est dit enraciné si une de ses feuilles est marquée (il en a $k = 2 + \sum (i - 1)d_i$, soit deux de plus que de bourgeons). On peut flécher complètement un tel arbre en orientant les arêtes de l'arbre vers la racine.

Définition 15 On appelle carte eulérienne avec degrés prédéterminés une carte planaire ayant, pour chaque entier $i \geq 1$, d_i sommets de degré $2i$ (les degrés des sommets d'une telle carte sont pairs). Une telle carte est enracinée si une de ses arêtes porte une flèche et il existe alors une manière canonique de la dessiner sur le plan (sachant qu'une carte planaire est en fait un objet topologique défini sur la sphère) qui consiste à la dessiner sur le plan de telle sorte que la face infinie soit la face située sur la droite de la racine.

Résultat On peut appliquer, à un arbre bourgeonnant eulérien enraciné avec degrés prédéterminés, une opération de clôture locale qui consiste à considérer un bourgeon puis à parcourir le contour de l'arbre cycliquement et dans le sens trigonométrique à partir de ce bourgeon jusqu'à rencontrer une première feuille. On fusionne alors le bourgeon et l'arête joignant la feuille à son sommet incident et on élimine la feuille. L'application permettant d'obtenir une carte eulérienne consiste alors à itérer de manière gloutonne ¹ les clôtures locales jusqu'à ce que tous les bourgeons aient fusionné. Comme il y a deux feuilles de plus que de bourgeons dans un arbre bourgeonnant, il reste alors deux feuilles sur la face infinie de la figure obtenue. Si l'une des deux feuilles qui restent est la racine, on achève la clôture en ajoutant une arête joignant la racine à l'autre feuille libre et orientée de la racine vers l'autre feuille libre dans le sens trigonométrique, voir figure 3.1 pour un exemple d'exécution de l'algorithme de fermeture (les sommets sont représentés par des cercles et les feuilles par des carrés). On observe que les orientations des arêtes fusionnées ne sont jamais en conflit.

Définition 16 Un arbre bourgeonnant eulérien enraciné tel que l'une des deux feuilles laissées libres à la fin de l'application itérée des clôtures locales soit la racine est dit arbre bourgeonnant eulérien équilibré.

Proposition 3 L'algorithme précédent, dit de clôture, permet d'associer à un arbre bourgeonnant eulérien équilibré A avec degrés prédéterminés ($\forall i, A$ a d_i sommets ayant i fils et $i - 1$ bourgeons) une carte eulérienne M avec degrés prédéterminés ($\forall i, M$ a d_i sommets de degré $2i$). De plus, avec les orientations des arêtes induites sur M par l'algorithme de clôture, un sommet v de M de

¹on voit facilement en utilisant des mots de Dyck cycliques que le résultat obtenu ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les clôtures locales

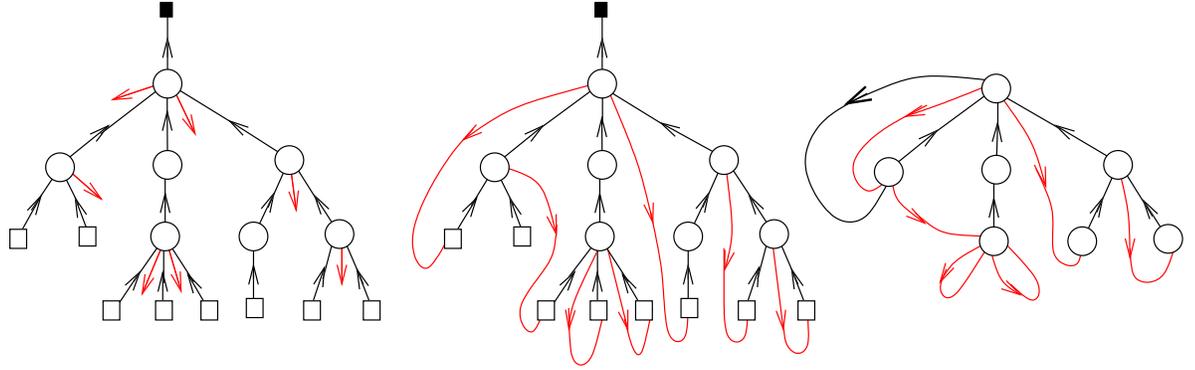


FIG. 3.1 – Clôture d'un arbre bourgeonnant en une carte eulérienne enracinée

degré $2i$ a i arêtes sortantes (les $i - 1$ bourgeons et l'unique arête sortante du sommet dans l'arbre, celle qui va vers la racine) et i arêtes rentrantes.

Proposition 4 – Le nombre d'arbres bourgeonnants eulériens enracinés avec degrés prédéterminés ayant d_i sommets ayant i fils $\forall i \geq 1$, $k = \sum_i (i-1)d_i$ feuilles et $n = \sum_i d_i + k - 1$ arêtes est égal à

$$\frac{(n-1)!}{k!} \prod_i \binom{2i-1}{i} \frac{1}{d_i!}$$

– Le nombre d'arbres bourgeonnants eulériens équilibrés avec les mêmes paramètres de degré est égal à

$$\frac{2(n-1)!}{(k-1)!} \prod_i \binom{2i-1}{i} \frac{1}{d_i!}$$

Preuve La première assertion de la proposition se démontre en utilisant les mots de Lukaciewicz puis multiplication par $\binom{2i-1}{i}$ en chaque sommet pour tenir compte des bourgeons.

La deuxième assertion se démontre en considérant des arbres bourgeonnants ayant deux feuilles marquées de manières distinctes (l'une bleue, l'autre rouge, les deux marques pouvant aussi éventuellement avoir lieu sur la même feuille) telles que la feuille marquée en bleu en fasse un arbre équilibré si on oublie le marquage de la deuxième feuille (le marquage rouge étant lui placé de manière quelconque sur une feuille). Il y a deux manières de compter de tels arbres : la première consiste à prendre un arbre bourgeonnant enraciné quelconque dont la racine est marquée en rouge et à marquer en bleu une des deux feuilles restant libres après application itérée des clôtures locales. La seconde consiste à prendre un arbre bourgeonnant équilibré quelconque dont la racine est marquée

en bleu et à marquer en rouge une des k feuilles. On en déduit que le rapport entre arbres bourgeonnants eulériens équilibrés et arbres bourgeonnants eulériens quelconques est de $\frac{2}{k}$, ce qui implique la deuxième assertion de la proposition.

3.1.3 Présentation de la théorie des α -orientations

Nous abordons maintenant la théorie des α -orientations dont nous aurons besoin pour décrire la réciproque de l'application de clôture décrite précédemment.

Définition 17 Soit $G = (V, E)$ un graphe dessiné dans le plan et $\alpha : V \rightarrow \mathbf{N}$ une application. Soit X une orientation de G , i.e. le choix pour chaque $e \in E$ d'une orientation de e . X est une α -orientation de G ssi $\forall v \in V$, le degré sortant de v pour l'orientation X est $\alpha(v)$

Proposition 5 Soit M une carte planaire enracinée² avec degrés prédéterminés, i.e. $\forall i \geq 1$, il y a d_i sommets de degré $2i$ dans M . Si on considère l'application α tel que $\alpha(v) = i$ si $\deg(v) = 2i$, alors il existe un algorithme glouton qui, partant d'une arête fixée e orientée de M (par exemple la racine) propage itérativement une orientation sur toutes les arêtes de M et permet d'obtenir une α -orientation de M dont l'orientation de e est telle qu'on l'a fixée au départ.

Preuve On procède par récurrence sur le nombre d'arêtes de M . On part de e orientée fixée. L'arête e appartient à un cycle C car M est eulérienne. On oriente alors toutes les arêtes de C de sorte que C soit un circuit qui respecte l'orientation de e . On enlève ensuite les arêtes de C de M pour obtenir une (ou plusieurs, ce qui ne complique pas la démonstration) carte eulérienne M' ayant moins d'arêtes que M . Si M' n'a pas d'arête, on a réussi. Sinon, on fixe une arête e' quelconque de M' et on applique l'hypothèse de récurrence à M' pour obtenir une α' -orientation de M' (où α' est définie par $\alpha'(v) = i$ si $\deg(v) = 2i$ dans M'). Il est clair que l'union X de l' α' -orientation et de l'orientation de C forment une α -orientation de M (car chaque sommet de M a autant d'arêtes sortantes que d'arêtes entrantes) qui respecte l'orientation de e fixée au départ.

Nous allons avoir besoin des résultats suivants sur les α -orientations qui sont tirés de [16] :

Proposition 6 Soit $G = (V, E)$ un graphe dessiné sur le plan et $\alpha : V \rightarrow \mathbf{N}$ une application tel qu'il existe au moins une α -orientation de G (par exemple, c'est le cas pour les cartes eulériennes et l'application α définie précédemment). On a les propriétés suivantes :

- Il existe une unique α -orientation X_0 de G tel que tous les circuits de G pour l'orientation X_0 soient trigonométriques.
- Dans le cas d'un graphe eulérien M et de l'application α définie précédemment, si on applique itérativement l'algorithme qui consiste à inverser le sens

²dont on a vu précédemment qu'il existe une manière canonique de la dessiner dans le plan

d'un circuit anti-trigonométrique délimitant une face bornée de M ³, alors on aboutit à X_0 en temps polynomial en le nombre de faces de M

- Dans le cas d'une carte eulérienne enracinée dessinée de manière canonique dans le plan et de l'application α définie précédemment, les arêtes incidentes à la face infinie sont orientées dans le sens trigonométrique dans X_0 , i.e. ont la face infinie sur leur droite. En particulier, l'arête racine de M est orientée de la même manière dans X_0 et en tant que racine de M .

Preuve On démontre le troisième point en utilisant les deux premiers points (qui sont démontrés dans [16]). Soit e une arête incidente à la face infinie. En utilisant la proposition 6, il existe une α -orientation X de M tel que e soit orientée dans le sens trigonométrique dans M pour l'orientation X . Selon le deuxième point ci-dessus, on peut passer de X à X_0 en changeant les orientations de circuits anti-trigonométriques délimitant des faces bornées. Mais e est incidente à deux faces dont l'une est la face infinie, donc incidente à une seule face bornée f . Comme e est anti-trigonométrique par rapport à la face infinie, les arêtes délimitant f ne pourront jamais former un circuit anti-trigonométrique au cours des opérations faisant passer de X à X_0 . En conséquence, e n'est jamais flipé durant ces opérations donc e est orientée de la même manière dans X et dans X_0 , c'est à dire dans le sens trigonométrique.

3.1.4 Présentation de l'algorithme d'ouverture

On est maintenant armé pour décrire l'application réciproque de la fermeture, qui, à une carte eulérienne enracinée dont les degrés sont prédéterminés, va associer un arbre eulérien bourgeonnant équilibré dont les degrés des sommets sont prédéterminés.

Soit M une carte eulérienne enracinée tel que, $\forall i \geq 1$, M a d_i sommets de degré $2i$. L'application dite d'ouverture procède ainsi (voir figure 3.2) :

1. On dessine M sur le plan de la manière canonique définie précédemment
2. On oriente les arêtes de M avec l'unique orientation X_0 tel que tous les circuits sont trigonométriques
3. On coupe l'arête racine e de M orientée de v_1 à v_2 ⁴ en deux arêtes orientées e_1 et e_2 tel que e_1 est orientée de v_1 vers une nouvelle feuille que l'on a créée et que l'on marque (ce sera la racine de l'arbre) et e_2 pointe d'une nouvelle feuille qu'on a créée vers v_2
4. On réalise un parcours en profondeur de gauche à droite et en n'empruntant les arêtes que dans le sens inverse de leur orientation dans X_0 . Ce parcours dessine un arbre contenant des sommets de M . On affirme que cet arbre est couvrant (ce sera montré ultérieurement)

³on remarque que changer le sens d'un circuit conserve bien le degré sortant des sommets, donc fait passer d'une α -orientation à une autre α -orientation

⁴que ce soit en tant que racine ou dans X_0

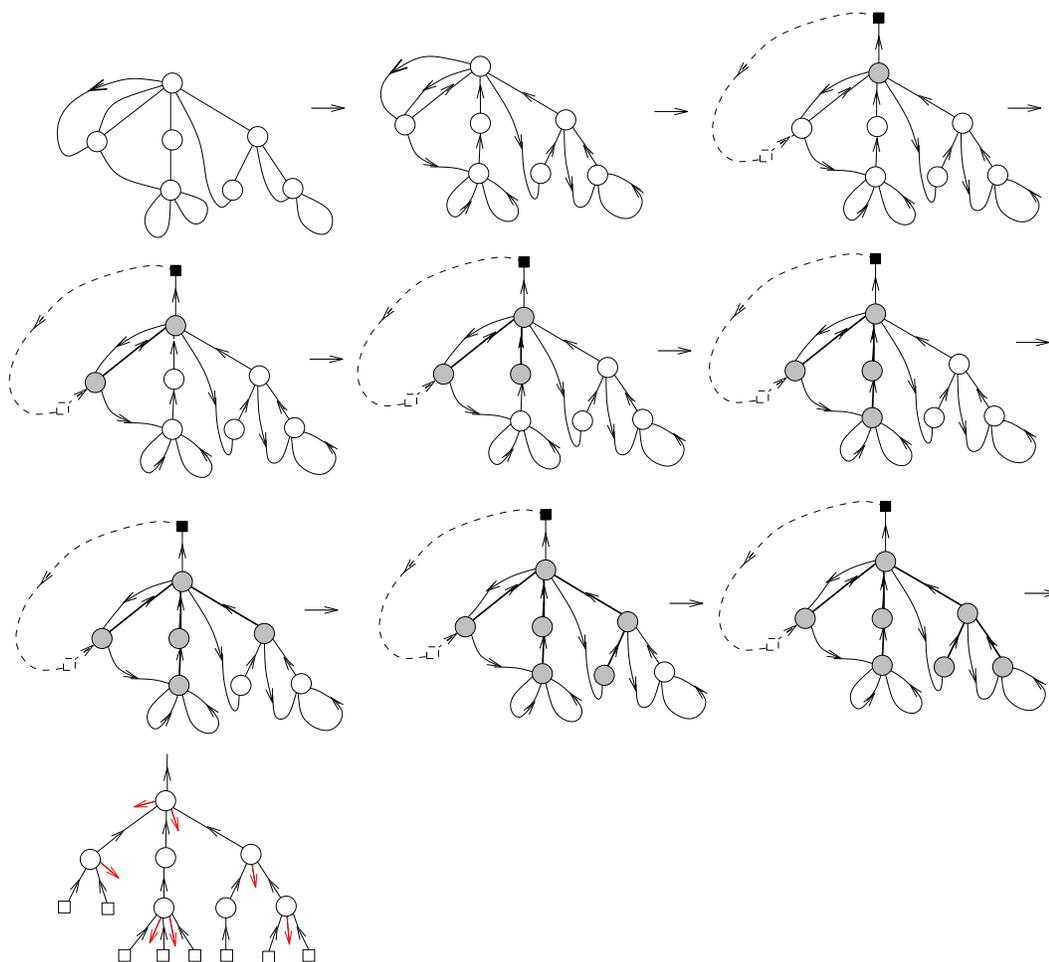


FIG. 3.2 – Ouverture d'une carte eulérienne enracinée en un arbre bourgeonnant

5. Pour toutes les arêtes de M qui ne sont pas la racine et n'ont pas été empruntées par le parcours précédent, on réalise l'opération suivante : soit e une telle arête orientée de v_1 à v_2 . On coupe e en deux arêtes e_1 et e_2 tel que e_1 est un bourgeon partant de v_1 et e_2 pointe d'une feuille nouvellement créée vers v_2

Lemme 7 *L'arbre dessiné par le parcours en profondeur de la quatrième étape de l'algorithme contient tous les sommets de M*

Preuve On raisonne ici sur la notion de flux d'un ensemble D de sommets de M pour l'orientation X_0 , qui est par définition la différence entre la somme des nombres d'arêtes sortantes des sommets de D avec la somme des nombres d'arêtes entrantes des sommets de D . On définit aussi le flux intérieur de D comme le flux de D limité aux arêtes intérieures à D (i.e. les deux extrémités de telles arêtes sont dans D) et le flux extérieur de D comme le flux de D limité aux arêtes dont une seule des deux extrémités est dans D .

On énonce maintenant une suite de propriétés triviales :

- Le flux de D est la somme des flux des points de D , or par définition de l'application α , chaque sommet de D a un flux nul, donc le flux de D est nul
- Le flux intérieur d'un ensemble de points est toujours nul (évident)
- Le flux de D est égal à la somme du flux intérieur de D et du flux extérieur de D

En conséquence, le flux extérieur de D est nul, i.e. il y a autant d'arêtes pointant de D vers D^c que d'arêtes pointant de D^c vers D . On s'intéresse maintenant à l'ensemble D des sommets de M non visités par le parcours en profondeur et on suppose $D \neq \emptyset$. Comme D n'a pas été visité par le parcours en profondeur, toutes les arêtes de M reliant D et D^c autres que la racine de M (qui a été enlevée au début) sont forcément orientées de D^c vers D . De plus, si par hasard la racine relie D et D^c , elle pointe aussi de D^c vers D (car elle est issue de la racine de l'arbre qui est trivialement dans D^c car c'est le premier sommet visité). On en déduit que toutes les arêtes de D^c sont orientées de D^c vers D . Comme D est non vide et que M est connexe, on en déduit que cet ensemble d'arêtes est non vide, donc que le flux extérieur de D est strictement négatif donc non nul, ce qui est impossible.

3.1.5 Les applications de clôture et d'ouverture sont réciproques l'une de l'autre

Proposition 7 *L'arbre obtenu par l'opération d'ouverture d'une carte M eulérienne enracinée est un arbre bourgeonnant eulérien équilibré A avec degrés prédéterminés*

⁵ *dont la clôture est M*

⁵i.e. si v est un sommet de degré $2i$ dans M , alors v aura i fils dans A

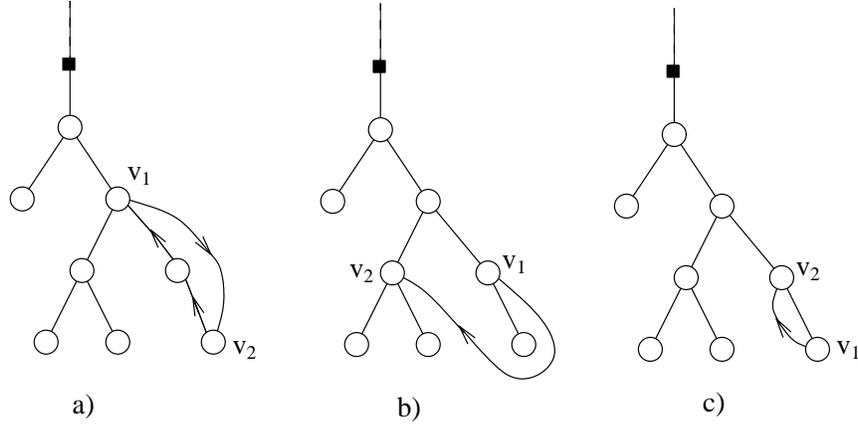


FIG. 3.3 – Les trois cas possibles pour qu’une arête soit orientée dans le sens anti-trigonométrique par rapport à l’arbre

Preuve Soit v de degré $2i$ dans M . Alors, par l’algorithme d’ouverture, une seule arête sortante de v sera dans A (celle qui pointe vers la racine) et donc les $i - 1$ autres arêtes sortantes seront traitées dans la cinquième étape de l’algorithme, devenant des bourgeons. Les i arêtes entrantes proviendront d’un sommet si elles sont découvertes durant la quatrième phase de l’algorithme ou d’une feuille si elles sont découvertes lors de la troisième ou cinquième étape de l’algorithme. Montrons maintenant que l’application itérée des clôtures locales de A permet d’obtenir la carte M dont l’arête racine est sectionnée, ce qui implique que A est équilibré et que sa clôture est M . Pour montrer cela, il suffit de montrer que la cinquième phase de l’algorithme coupe des arêtes qui sont orientées dans le sens trigonométrique autour du contour de l’arbre A dessiné par le parcours en profondeur. En conséquence, toute coupure d’une arête en un bourgeon et une feuille est telle que la feuille ferme le bourgeon pour le système de parenthésage cyclique dans le sens trigonométrique dont l’algorithme de clôture tient compte pour effectuer les appariements entre bourgeons et feuilles. Montrons par l’absurde qu’une arête e orientée de v_1 à v_2 et coupée lors de la cinquième étape de l’algorithme ne peut pas être orientée dans le sens anti-trigonométrique, i.e. passe sur la droite du contour de l’arbre pour aller de v_1 à v_2 . Supposons par l’absurde que e est orientée dans le sens anti-trigonométrique. Trois cas se présentent :

- Si v_1 est un ancêtre de v_2 (voir figure 3.3 a), alors il y a un chemin orienté de v_2 vers v_1 dans A (en suivant les arêtes de l’arbre de v_2 à v_1), donc il y a un circuit anti-trigonométrique formé par e et ce chemin. Comme X_0 ne contient que des circuits trigonométriques, on a une contradiction avec la supposition que e est orientée dans le sens anti-trigonométrique.
- Si v_1 n’est pas un ancêtre de v_2 et que v_2 n’est pas le père de v_1 (voir figure 3.3 b), alors on observe facilement que, comme e est orientée dans

le sens anti-trigonométrique et ne peut pas passer par dessus la racine (car celle-ci était incidente à la face infinie de la carte avant d'être enlevée à la troisième étape de l'algorithme), alors v_2 a été visité avant v_1 dans le parcours en profondeur de gauche à droite, et même avant le père de v_1 , donc l'arête e , orientée de v_1 à v_2 , aurait dû être suivie pour aller de v_2 à v_1 lors du parcours en profondeur car à ce moment là, v_1 n'avait pas encore été découvert, d'où une contradiction.

- Si v_2 est le père de v_1 (voir figure 3.3 c), alors comme e est anti-trigonométrique, e passe à gauche de l'arête e' de l'arbre allant de v_1 à v_2 , donc e aurait dû être suivie plutôt que e' pour aller de v_2 à v_1 car le parcours en profondeur se fait de gauche à droite, contradiction.

On a traité tous les cas et on en déduit que e est orientée dans le sens trigonométrique. Ceci conclut la preuve de la proposition.

Proposition 8 *L'algorithme de clôture permet d'associer à un arbre bourgeonnant A muni de son orientation naturelle⁶ avec degrés prédéterminés une carte eulérienne M avec degrés prédéterminés munie de son unique α – orientation sans cycle anti-trigonométrique. De plus, l'application de l'algorithme d'ouverture à M donne A*

Preuve Montrons que l'orientation de la carte obtenue par la clôture de l'arbre est sans cycle anti-trigonométrique. Un tel cycle serait forcément créé lors de la fusion d'un bourgeon avec une feuille (car au départ, on a juste un arbre qui est donc sans cycle), or par définition de l'algorithme de clôture, une telle fusion se fait toujours avec la face infinie à droite du bourgeon, ce qui est incompatible avec le fait que la fusion de ce bourgeon pourrait créer un cycle anti-trigonométrique. Pour montrer que l'ouverture de M donne A , il suffit de montrer que l'ensemble des arêtes parcourues par le parcours en profondeur est égal à l'ensemble des arêtes de l'arbre A auquel on a appliqué la clôture. Supposons que ce n'est pas le cas et considérons la première arête parcourue par le parcours en profondeur qui n'est pas dans A . On note cette arête e , orientée de v_2 à v_1 . L'arête e correspond donc dans M à une arête formée par la fusion d'un bourgeon avec une feuille et v_2 est le sommet découvert par e lors du parcours en profondeur. On note $B \subset A$ l'arbre qui a été dessiné par le parcours en profondeur avant d'emprunter e . Comme A est un arbre, il existe un chemin c dans A qui va de v_2 à la racine. On note v le point (éventuellement le sommet racine de l'arbre) où ce chemin rejoint B . Comme l'arête e correspond à la fusion d'un bourgeon avec une feuille lors de la clôture et que ces opérations s'effectuent dans le sens trigonométrique par rapport au contour de l'arbre A , on en déduit que le chemin c passe forcément à gauche de l'arête e avant de rejoindre B en v (voir figure 3.4). Mais dans ce cas, la dernière arête de c avant v aurait dû être empruntée par l'algorithme (avant le chemin qui va de v vers v_1 dans B) puisqu'il opère de gauche à droite, or cette dernière arête n'a pas encore été empruntée par l'algorithme puisqu'elle n'est pas dans B , d'où une contradiction. Ceci conclut la preuve de la proposition.

⁶i.e. celle pour laquelle les arêtes sont orientées vers la racine et les bourgeons sont sortants

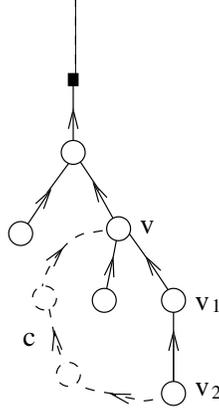


FIG. 3.4 –

Les deux propositions précédentes permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 7 *L'ensemble des arbres bourgeonnants équilibrés avec degrés prédéterminés et des cartes eulériennes enracinées avec degrés prédéterminés sont en bijection via les applications de clôture et d'ouverture décrites précédemment qui sont l'inverse l'une de l'autre.*

Corollaire 2 *Le nombre de cartes eulériennes enracinées avec degrés prédéterminés ($\forall i \geq 1$, il y a d_i sommets de degré $2i$) est*

$$\frac{2(n-1)!}{k!} \prod_i \binom{2i-1}{i} \frac{1}{d_i!}$$

3.1.6 Conclusion

Nous avons établi un lien entre, d'un côté, un algorithme de clôture permettant de mettre en bijection une famille d'arbres et une famille de cartes enracinées particulières et de l'autre côté la théorie des α -orientations permettant ici de trouver une autre formulation que dans [12] pour la réciproque de l'application de clôture, un tel lien pour la bijection entre une famille d'arbres bourgeonnants et les triangulations enracinées ayant déjà été trouvé dans [15]. Nous espérons que le parallélisme entre les deux théories se généralise et qu'il existe de nombreux autres exemples où la théorie des α -orientations permet de guider et faciliter la démonstration de la bijection entre une famille d'arbres et une famille de cartes enracinées. Il est encourageant de constater ici que les théories sont en parallèle sur leurs cas respectifs les plus simples : en effet, les cartes eulériennes sont la première famille de cartes pour lesquelles on a trouvé une bijection avec une famille d'arbres et les α -orientations ont une structure très simple et commode sur les cartes eulériennes.

Nous présentons maintenant un deuxième exemple plus nouveau avec une bijection entre une famille d'arbres et les cartes enracinées non séparables, cette bijection utilisant là aussi la théorie des α – orientations.

3.2 Bijection entre les cartes non séparables enracinées et une famille d'arbres bourgeonnants

3.2.1 Introduction et définitions

Définition 18 *Une carte est dite 2-connexe ou non séparable si elle est sans boucle et qu'il faut lui enlever au moins deux sommets pour la déconnecter.*

Rappels On peut associer à toute carte planaire c enracinée une quadrangulation q enracinée en mettant un sommet (appelé sommet de type face) dans chaque face de c et en reliant un sommet de type face et un sommet de type sommet si le sommet appartient à la face et en les reliant de toutes les manières non homotopiquement équivalentes. Pour obtenir la quadrangulation q , on efface les arêtes de c et on garde les arêtes reliant un sommet de type face à un sommet de type sommet. On constate qu'une face de la quadrangulation obtenue correspond à une arête de la carte c dont on est parti. Il faut ensuite choisir une convention pour placer la racine de q . On prend ici la convention qu'on prend comme arête racine de la quadrangulation l'arête incidente à la face qui correspond à l'arête racine e de c et incidente à l'origine s de e . On fait le choix de l'orienter vers s . Cette application qui à une carte enracinée associe une quadrangulation enracinée est une bijection (appelée bijection de Tutte) et la restriction de cette application aux cartes non séparables enracinées est une bijection avec les quadrangulations enracinées sans arêtes multiples ⁷.

Résultat On va construire une bijection qui à une famille d'arbres bourgeonnants associe par une opération de clôture des quadrangulations enracinées sans arêtes multiples (dites simples), et on aura besoin de la théorie des α – orientations (et surtout, ici, de la théorie des orientations bipolaires) pour décrire l'opération réciproque dite d'ouverture qui permet de retrouver un arbre à partir d'une carte non séparable enracinée (ou plutôt ici, d'une quadrangulation simple enracinée). Cette bijection permet d'une part de coder de manière optimale les quadrangulations simples enracinées qui correspondent aux cartes planaires biparties maximales, d'autre part de coder de manière optimale les cartes enracinées non séparables via la bijection de Tutte décrite ci-dessus.

⁷il n'y a jamais deux manières non homotopiquement équivalentes de relier un sommet de type face et un sommet de type sommet dans une carte non séparable

3.2.2 Algorithme de clôture

Définition 19 On note \mathcal{B}_n la famille des arbres plans à n nœuds tel que chacun des nœuds porte un unique bourgeon. Un tel arbre est dit enraciné si un de ses n bourgeons est marqué.

Clôture partielle Soit A un arbre de \mathcal{B}_n . On observe tout d'abord que A a n sommets donc a $n - 1$ arêtes et $2n - 2$ côtés d'arêtes. On va lui appliquer une opération de clôture locale de la manière suivante :

S'il existe dans le sens trigonométrique autour de l'arbre une succession formée par un bourgeon suivi de trois côtés d'arêtes e_1, e_2 et e_3 ⁸, on fusionne l'extrémité du bourgeon avec l'extrémité de e_3 pour former une face quadrangulaire. On obtient ainsi une figure connexe ayant une face intérieure et ayant $n - 1$ bourgeons non appariés tous orientés vers la face extérieure (dite face infinie). On constate aussi que cette figure a $(2n - 2) - 2 = 2n - 4$ côtés d'arêtes qui donnent sur la face infinie.

On peut continuer itérativement l'application des clôtures locales en cherchant une succession de un bourgeon et trois côtés d'arêtes successifs quand on parcourt le contour de la face infinie dans le sens trigonométrique. A chaque fois qu'une telle succession est trouvée, on fusionne l'extrémité du bourgeon avec l'extrémité de la dernière arête de la succession pour former une face quadrangulaire. On constate qu'au cours des clôtures locales, une relation est conservée, à savoir que si on note, à une étape donnée, k le nombre de bourgeons non appariés dans la figure et l le nombre de côtés d'arêtes donnant sur la face infinie, l'opération de clôture locale est telle que que l'on a toujours $l = 2k - 2$. On poursuit de manière gloutonne l'application des opérations de clôture locale jusqu'à ce qu'on ne puisse plus faire de clôture locale. On se convainc facilement que les clôtures locales effectuées sont les mêmes quel que soit l'ordre dans lequel on les effectue, cela peut se voir en codant le contour de l'arbre par une sorte de mot de Dyck cyclique en mettant un 0 pour chaque bourgeon et un 1 pour chaque côté d'arête. Il est alors facile de lire sur de tels mots les futurs appariements.

Quand on a effectué toutes les clôtures locales possibles, on obtient une figure telle que, si on regarde le contour de sa face infinie, il y a k bourgeons non appariés et $2k - 2$ côtés d'arêtes et, de plus, deux bourgeons sont séparés par au moins un côté d'arête (car il n'y a qu'un bourgeon par sommet dans les arbres considérés) mais ils ne sont jamais séparés par plus de deux côtés d'arête (sinon une clôture locale serait possible). Comme il y a k bourgeons, il y a sur le contour k intervalles de côtés d'arêtes (un intervalle étant un suite de côtés d'arêtes entre deux bourgeons successifs) et, comme il y a $2k - 2$ côtés d'arêtes, il y a $k - 2$ intervalles de longueur 2 et deux intervalles de longueur 1 (voir figure 3.5) que l'on note I_1 et I_2 . Si on considère un parcours de I_1 (resp de I_2) dans le sens trigonométrique autour du contour, on note s_1 (resp s_2) l'extrémité de I_1 (resp de I_2)

Définition 20 Un arbre enraciné de \mathcal{B}_n est dit équilibré si son bourgeon marqué

⁸pour le moment, rien ne nous dit que e_1, e_2 et e_3 sont trois côtés de trois arêtes différentes

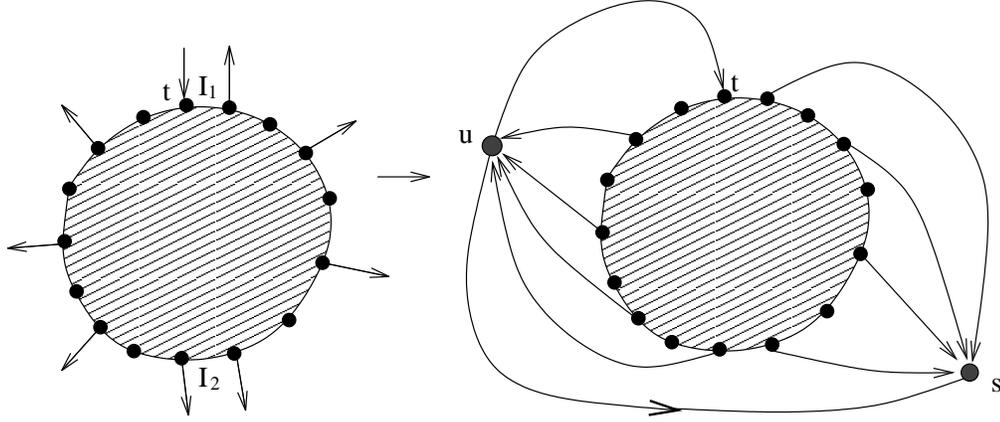


FIG. 3.5 – Figure obtenue par clôture partielle et achèvement de la clôture totale

est un des deux bourgeons incidents à s_1 ou à s_2 après la clôture partielle. on note \mathcal{B}_n^* l'ensemble des arbres enracinés équilibrés à n sommets.

Clôture totale Soit A un arbre enraciné équilibré à n sommets. On note t le sommet racine de A (i.e. celui qui porte le bourgeon marqué). On commence par orienter les arêtes et les bourgeons de A de la manière suivante :

- On oriente toutes les arêtes de A vers le sommet racine t ;
- On oriente tous les bourgeons non marqués vers l'extérieur ;
- On oriente le bourgeon marqué vers t .

On réalise ensuite la clôture partielle de A décrite précédemment ⁹. On ajoute ensuite sur la face infinie deux sommets u et s . On peut séparer en deux groupes les intervalles de longueur 2 de la face infinie (il y a ceux qui sont entre l'extrémité t de I_1 et l'origine de I_2 dans le sens trigonométrique et ceux qui sont entre l'extrémité de I_2 et l'origine de I_1 dans le sens trigonométrique). On relie les bourgeons du premier groupe d'intervalles à u et les bourgeons du deuxième groupe d'intervalles à s , créant ainsi autant de faces quadrangulaires incidentes à u (resp. à s) qu'il y a d'intervalles dans le premier groupe (resp. dans le deuxième groupe). A cette étape là de la clôture, on n'a que des faces quadrangulaires sauf une face hexagonale contenant u et t (voir figure 3.6). On achève la clôture en reliant u et s par une arête orientée de u à s et on prend comme arête racine de la quadrangulation obtenue cette arête avec l'orientation de u à s ¹⁰

Proposition 9 *L'application de clôture totale associée à un arbre enraciné équilibré à n sommets une quadrangulation enracinée à n faces (en comptant la face in-*

⁹l'orientation qu'on a mise sur les arêtes et les bourgeons ne change rien à cette opération

¹⁰On prend comme convention sur les dessins de prendre comme face infinie d'une quadrangulation la face située à droite de la racine

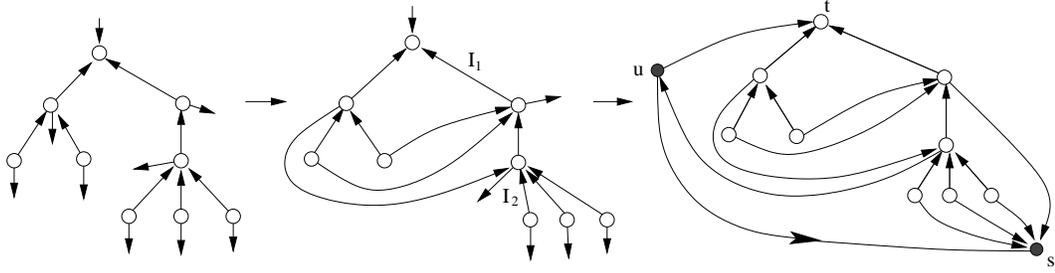


FIG. 3.6 – Clôture totale d'un arbre bourgeonnant équilibré

finie) et de plus, l'orientation donnée aux arêtes et bourgeons lors de la clôture munit q de son unique α – orientation sans cycle anti-trigonométrique pour la fonction $\alpha : V \rightarrow \mathbf{N}$ tel que :

- $\alpha(v) = 0$ pour deux sommets qui sont le sommet s extrémité de la racine et le sommet t qui lui est diagonalement opposé dans la face infinie (t correspond au sommet racine de l'arbre équilibré dont on est parti)
- $\alpha(v) = 2$ pour tous les autres sommets de la quadrangulation

De plus, la quadrangulation q est sans arêtes multiples.

Preuve Il est clair que l'opération de clôture totale permet d'obtenir à partir d'un arbre de \mathcal{B}_n^* une quadrangulation ayant $n + 2$ sommets et il est bien connu (en utilisant le relation d'Euler et le fait que chaque face a 4 côtés) qu'une quadrangulation quelconque (même avec arêtes multiples) ayant $n + 2$ sommets a n faces. L' α – orientation obtenue sur la quadrangulation découle trivialement de la manière dont on a orienté les arêtes de l'arbre et ses bourgeons et de la manière dont on achève la clôture totale. Il s'agit bien de l' α – orientation sans cycle anti-trigonométrique pour cette fonction α . En effet, il est clair qu'il est impossible de créer un circuit anti-trigonométrique lors de la dernière étape de l'algorithme car on y ajoute des arêtes dont l'extrémité est s ou t et que s et t sont des puits (i.e. ils n'ont pas d'arête sortante) dans l' α – orientation donc ils ne peuvent faire partie d'aucun circuit. De plus, si on crée un circuit anti-trigonométrique lors de la clôture partielle, ce circuit est créé lors d'une fusion d'un bourgeon avec un sommet incident à la face infinie et, par définition des opérations de clôture locale, une telle fusion se fait toujours avec la face infinie à droite du bourgeon, donc on ne peut pas créer de circuit anti-trigonométrique lors d'une clôture locale. On en déduit finalement que l' α – orientation de q obtenue est sans circuit anti-trigonométrique et c'est la seule α – orientation qui a cette propriété selon [16]. Montrons maintenant que la quadrangulation obtenue est sans arête multiple. Pour cela, il suffit de montrer qu'on ne peut pas créer d'arête multiple lors de la clôture partielle. En effet, on ne peut pas créer d'arête multiple lors de la dernière étape de la clôture totale car on y ajoute des arêtes entre u (resp s) et des sommets tous distincts puis on ajoute une unique

arête entre u et s . Supposons par l'absurde qu'on crée une arête multiple (i.e. au moins double) lors de la clôture partielle et considérons les sommets v_1 et v_2 et deux arêtes distinctes e_1 et e_2 reliant v_1 et v_2 . Considérons la figure à l'intérieur du 2-cycle formé par e_1 et e_2 ¹¹. On note k le nombre de points à l'intérieur du 2-cycle et l le nombre d'arêtes à l'intérieur du 2-cycle. Il est clair que le sommet t ne peut pas être à l'intérieur du 2-cycle. En effet, comme l'arbre dont on est parti est équilibré, à la fin de la clôture partielle, t est incident à la face infinie. On en déduit que chaque sommet à l'intérieur du 2-cycle a deux arêtes sortantes, donc on a $l \geq 2k$. D'autre part, si on note f le nombre de faces à l'intérieur du 2-cycle, on a en utilisant la relation d'Euler $(k+2) - (l+2) + (f+1) = 2$ donc $f = l - k + 1$. D'autre part, comme toutes les faces sont quadrangulaires, on a $4f = 2l + 2$. On déduit de ces deux relations que $l = 2k - 1$ en contradiction avec $l \geq 2k$ avec l'autre comptage. Finalement, la quadrangulation obtenue par la clôture totale est sans arête multiple.

3.2.3 Algorithme d'ouverture

On part cette fois d'une quadrangulation q sans arête multiple enracinée à n faces, que l'on dessine avec comme face infinie celle qui est à droite de la racine. On appelle u et s l'origine et l'extrémité de l'arête racine et on appelle t le sommet diagonalement opposé à s dans la face infinie. On note $\alpha : V \rightarrow \mathbf{N}$ la fonction tel que $\alpha(s) = \alpha(t) = 0$ et $\alpha(v) = 2$ pour tout autre sommet de q . La fonction α est réalisable¹² i.e. il existe une manière d'orienter les arêtes de q tel que tous les sommets différents de s et t ont deux arêtes sortantes et s et t sont des puits.

Description de l'algorithme

1. On munit q de son unique α -orientation sans cycle anti-trigonométrique.
2. On fait en quelque sorte la réciproque de la dernière étape de la clôture totale : on supprime l'arête racine puis on supprime u et s et on décroche toutes les arêtes incidentes à u et s pour en faire des bourgeons orientés comme l'arête décrochée et incidents à la face infinie de la figure obtenue¹³. Il est facile de se convaincre que, comme q est sans arête multiple, le contour est partitionné en intervalles (suite de côtés d'arêtes entre deux bourgeons) tous de longueur 2 sauf deux intervalles qui sont de longueur 1 et correspondent aux deux côtés opposés à l'arête racine dans les deux faces de q incidentes à l'arête racine.
3. On cherche à faire la réciproque de la clôture partielle de la manière suivante. On part du sommet t et on effectue un parcours en profondeur de gauche à droite en n'empruntant les arêtes¹⁴ que de l'extrémité à l'origine

¹¹on considère la partie qui ne contient pas la face infinie

¹²nous expliquerons comment dans la prochaine section

¹³le seul bourgeon entrant est celui incident à t

¹⁴on ne s'occupe pas des bourgeons donnant sur la face infinie

pour l'orientation de l'arête donnée par l' α -orientation. Ce parcours dessine un arbre et on va montrer dans la prochaine section qu'il est couvrant, i.e. il contient tous les sommets de q (sauf u et s qui ont été enlevés).

4. On décroche toutes les arêtes qui n'appartiennent pas à l'arbre obtenu par le parcours en profondeur de la troisième étape. Si une telle arête n'appartient pas à l'arbre, on note v_1 et v_2 son origine et son extrémité et on décroche l'arête qui devient un bourgeon sortant de v_1 . Enfin, on enracine l'arbre bourgeonnant obtenu en son bourgeon incident à t .

Un point délicat à démontrer dans l'algorithme précédent est le lemme suivant :

Lemme 8 *Le parcours en profondeur effectué lors de la troisième étape de l'algorithme visite tous les sommets.*

Pour montrer ce lemme, il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme 9 *Pour tout sommet v de la quadrangulation différent de u et s (qu'on enlève au début), on peut aller de v à t en suivant un chemin orienté (i.e on emprunte toutes les arêtes de leur origine à leur extrémité) ne passant ni par u ni par s .*

Preuve Supposons que ce lemme est vrai et que le lemme précédent est faux. Alors il existe un sommet v différent de u et s qui n'est pas visité par le parcours en profondeur de la troisième étape de l'algorithme. Considérons un chemin orienté c ne passant ni par u ni par s allant de v à t et soit r le dernier sommet du chemin qui n'est pas visité par le parcours en profondeur. Soit r' le sommet successif à r dans c (un tel sommet existe car l'extrémité du chemin est t qui est visité en premier lors du parcours en profondeur). r' est visité par l'algorithme et, lorsque r' a été découvert par le parcours, rien n'empêchait d'emprunter l'arête de c reliant r à r' puisqu'elle a son extrémité en r' , d'où une contradiction.

Reste à montrer que tout sommet de q différent de u et s peut être relié à t par un chemin orienté vers t . C'est l'objet de la prochaine section où nous abordons la relation entre les α -orientations d'une quadrangulation sans arête multiple (pour la fonction α qu'on a défini) et les orientations bipolaires de la carte non séparable qui lui est associée par la bijection de Tutte.

3.2.4 Preuve du lemme 9 en utilisant les orientations bipolaires

Présentation des orientations bipolaires

On utilise ici l'article [10] pour présenter des propriétés des orientations bipolaires qui vont nous être utiles ici (voir [10] pour des preuves détaillées)

Définition 21 *Une orientation des arêtes d'une carte plane enracinée en e (i.e. on choisit pour e une orientation) est dite bipolaire par rapport à sa racine si l'orientation est acyclique (i.e. sans circuit orienté) et il y a une seule*

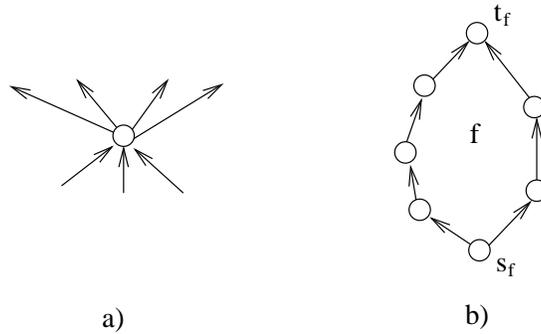


FIG. 3.7 – Orientation des arêtes incidentes à un sommet et à une face

source ¹⁵ s et un seul puits t et, de plus, s et t sont respectivement l'origine et l'extrémité de e (e est donc orientée de la même manière en tant que racine et dans l'orientation).

Proposition 10 *Comme une orientation bipolaire est acyclique, elle induit la relation d'ordre partiel suivante sur les sommets de la carte : $v_1 \leq v_2$ ssi il existe un chemin orienté allant de v_1 à v_2 . De plus, les minima (resp. les maxima) de cette relation d'ordre partiel sont les sources (resp. les puits) de l'orientation. Par définition d'une orientation bipolaire, une telle relation d'ordre partiel a une unique minimum et un unique maximum qui sont respectivement s et t*

Propriétés

- Si on considère un sommet v d'une carte et si v est différent de s et t , l'ensemble des arêtes entrantes en v et des arêtes sortantes de v forment deux intervalles d'arêtes incidentes à v (voir figure 3.7 a), ou encore, si on parcourt cycliquement les arêtes incidentes à v autour de v , il n'y a qu'à deux endroits que deux arêtes successives sont orientées différemment. Si on note e_1 et e_2 deux telles arêtes et qu'on considère la face f incidente à v qui contient e_1 et e_2 , on dit que v est un sommet latéral de f . Si on considère une face f incidente à v entre deux arêtes successives e_1 et e_2 autour de v tel que e_1 et e_2 sont orientées identiquement, on dit que v est un sommet extrémal de f . Plus précisément, si e_1 et e_2 sont sortantes, v est dit sommet minimal de f . Si e_1 et e_2 sont entrantes, v est dit sommet maximal de f .
- Si on considère une face f d'une carte non séparable munie d'une orientation bipolaire et qu'on se restreint à cette face, alors cette face a une unique source s_f et un unique puits t_f et les arêtes du contour de f sont partitionnées en deux chemins allant de s_f à t_f (voir figure 3.7 b). En conséquence, tous les sommets différents de s_f et t_f sont des sommets latéraux de f , s_f est l'unique sommet minimal de f et t_f est l'unique sommet maximal de f .

¹⁵sommet dont toutes les arêtes incidentes sont sortantes pour l'orientation

Les deux propriétés précédentes permettent d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 11 *Si on considère la quadrangulation des angles (celle de Tutte) q associée par la bijection de Tutte à une carte non séparable c munie de son orientation bipolaire, on peut facilement construire une α – orientation de q ($\alpha(s) = \alpha(t) = 0$ et $\alpha(v) = 2$ pour $v \neq s, t$) de la manière suivante : pour chaque sommet v de type sommet de q différent de s et t , on prend pour arêtes sortantes de v les deux arêtes de q reliant v à un sommet représentant une face dont v est un sommet latéral. Pour s (resp. t), on oriente toutes les arêtes incidentes vers s (resp. vers t).*

Preuve On a orienté toutes les arêtes de q de manière non ambiguë (car toute arête de q relie un sommet de type sommet à un sommet de type face). De plus, par construction, si on note $\alpha(v)$ le nombre d'arêtes sortantes d'un sommet v pour cette orientation, on a $\alpha(s) = \alpha(t) = 0$ et $\alpha(v) = 2$ pour tout sommet de type sommet différent de s et t . Reste à montrer que $\alpha(v) = 2$ pour tout sommet de type face de q . Mais la propriété précédente assure que toute face n'a que deux sommets incidents qui lui sont extrémaux, i.e. pour lesquels l'orientation de l'arête joignant le sommet de type sommet au sommet de type face est orientée vers le sommet de type sommet. En conséquence, on a bien $\alpha(v) = 2$ pour les sommets de type face de q .

Proposition 12 *L'application précédente est une bijection et il existe un algorithme réalisant la réciproque.*

Description de la réciproque On considère une quadrangulation enracinée q , on note s le sommet de q situé à l'extrémité de l'arête racine et on note t le sommet de q qui lui est diagonalement opposé dans la face située à droite de la racine. On considère la carte non séparable c associée à q et enracinée en e (où e est l'arête reliant s à t dans c) orientée de s à t . Alors on peut associer à une α – orientation de q une orientation bipolaire de c par rapport à sa racine. On part de s et on oriente toutes les arêtes de s dans c comme sortantes. Puis pour tout sommet v relié à s dans c , on peut séparer les arêtes incidentes à v en deux intervalles d'arêtes, les deux intervalles étant séparés par les deux arêtes sortantes de v pour l' α – orientation de q (ces deux arêtes sortantes n'appartiennent donc pas à c). Comme v est incident à s , au moins une de ses arêtes est alors orientée dans c (et entrante). On oriente alors comme entrantes toutes les arêtes qui sont dans le même intervalle et on oriente comme sortantes les arêtes de l'autre intervalle. On peut poursuivre itérativement l'algorithme en considérant les sommets reliés aux sommets dont les arêtes incidentes ont déjà été orientées et on peut montrer que cet algorithme glouton ne rencontre jamais de conflit lors de son exécution, que l'orientation sur c est bipolaire par rapport à la racine e et que cette orientation bipolaire ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a pris les sommets après avoir commencé en s (voir figure 3.8). De plus, cette application est la réciproque de l'application décrite précédemment qui, à une orientation bipolaire de c associait une α – orientation de q .

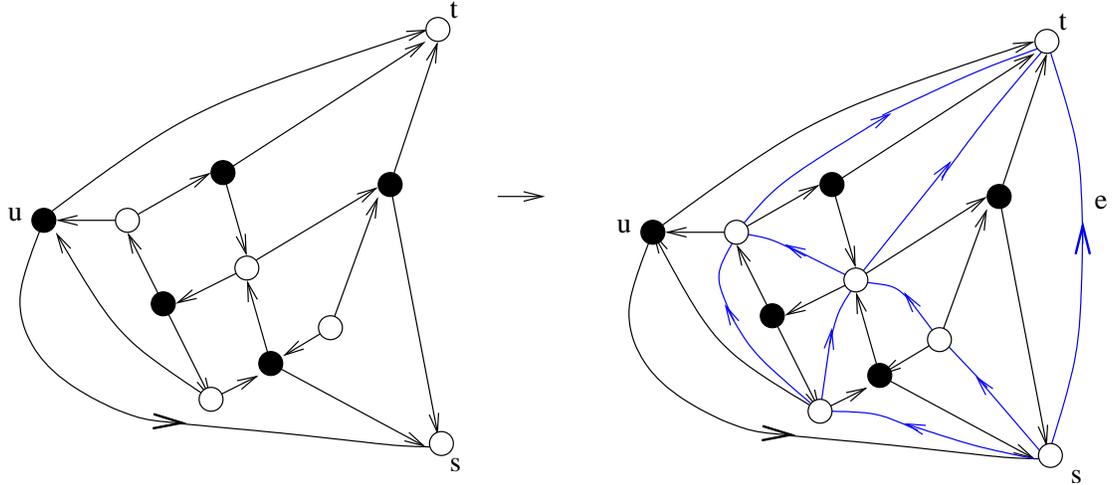


FIG. 3.8 – Obtention de l'orientation bipolaire d'une carte non séparable associée à l' α – orientation de sa quadrangulation associée

Preuve du lemme

Venons en maintenant au résultat que l'on cherche à établir dans cette section. On a une quadrangulation enracinée q munie d'une α – orientation avec les sommets s, t et u définis précédemment ($\alpha(s) = \alpha(t) = 0$ et $\alpha(v) = 2$ pour $v \neq s, t$) et on veut s'assurer qu'en partant d'un sommet v de q différent de s et u , on peut aller de v à t en suivant un chemin orienté de l' α – orientation. On va déjà montrer que c'est possible en partant d'un sommet de type sommet de q (ce sont les sommets de la même couleur que s et t pour la bicoloration des sommets associée à q). On superpose q et c la carte non séparable enracinée en e (de s vers t) associée à q par la bijection de Tutte. La quadrangulation q et la carte c sont munies de leur α – orientation (pour q) et de l'orientation bipolaire associée par la bijection définie précédemment (pour c). Le sommet v est relié à deux sommets de type face par les deux arêtes sortantes en v . On emprunte celle des deux (il y en a au moins une) qui n'est pas reliée à u pour arriver en un sommet de type face v_f de q tel que v est un sommet latéral de cette face. On emprunte ensuite celle des deux arêtes sortantes en v_f qui est reliée au sommet maximal de la face de c associée à v_f . On arrive à un sommet w de type sommet (donc un sommet de c) qui est strictement plus grand que v pour la relation d'ordre partiel induite par l'orientation bipolaire de c . En itérant cette procédure, on arrive finalement à un sommet de c qui est un maximum pour la relation d'ordre partiel sur les sommets, or, par définition d'une orientation bipolaire, ce maximum est unique et c'est t . On a donc décrit une procédure qui, partant d'un sommet de type sommet de q , permet de suivre un chemin orienté dans q de v jusqu'à t qui ne passe pas par u ou s . Si on part

d'un sommet v de type face différent de u , il suffit d'emprunter celle des deux arêtes sortantes en v (il y en a au moins une) qui n'est pas reliée à s puis on applique l'algorithme décrit précédemment pour aller jusqu'à t en suivant un chemin orienté ne passant pas par u ni s .

3.2.5 La clôture et l'ouverture sont deux applications réciproques

Proposition 13 *L'arbre A obtenu par l'ouverture d'une quadrangulation q à n faces enracinée et sans arête multiple est un arbre bourgeonnant équilibré à n nœuds dont la clôture globale est q .*

Preuve Le fait que l'arbre obtenu ait n nœuds découle du fait que les nœuds de l'arbre obtenu lors de l'ouverture sont les nœuds de q sans u et s . Comme il est bien connu (en utilisant la relation d'Euler) qu'une quadrangulation à n faces a $n + 2$ sommets, on en déduit que l'arbre obtenu a n nœuds. De plus, chaque sommet v de l'arbre obtenu par l'ouverture de q a un bourgeon. En effet, si $v \neq t$, comme toutes les arêtes de l'arbre dessiné par le parcours en profondeur de l'algorithme d'ouverture sont orientées vers t , et comme v a deux arêtes sortantes pour l' α -orientation dont on munit q au début de l'algorithme, on en déduit qu'une de ces deux arêtes sortantes est dans l'arbre et que l'autre est un bourgeon qui a été obtenu en décrochant une arête (soit lors de la deuxième étape de l'algorithme si cette arête est incidente à u ou à s , soit lors de la quatrième étape de l'algorithme). Le sommet t va recevoir un seul bourgeon entrant venant du décrochage de l'arête le reliant à u lors de la deuxième étape de l'algorithme, et il ne peut pas recevoir de bourgeon lors de la quatrième étape de l'algorithme car toutes ses arêtes incidentes sont sortantes. Pour montrer que la clôture totale de A est q , il suffit de montrer que la clôture partielle de A est la figure obtenue à partir de q après avoir effectué la deuxième étape de l'algorithme d'ouverture. En effet, par construction, cette deuxième étape est la réciproque de la dernière étape de la clôture totale (où on ajoutait deux sommets u et s ainsi que des arêtes incidentes à u et à s pour obtenir une quadrangulation). Pour montrer que la clôture partielle de A est la figure obtenue après avoir effectué la deuxième étape de l'ouverture de q , il suffit de reprendre très exactement la démonstration de la proposition 7 lors de la démonstration sur les cartes eulériennes. On y utilisait le fait que l'orientation est sans cycle anti-trigonométrique pour montrer par l'absurde que les arêtes décrochées lors de la quatrième étape de l'algorithme sont orientées de manière trigonométrique par rapport au contour de l'arbre dessiné par le parcours en profondeur (i.e. le contour de l'arbre est à gauche de l'arête si on la suit de son origine à son extrémité). On déduit du raisonnement qui précède que A est bourgeonnant et équilibré et que la clôture totale de A est q .

Proposition 14 *La quadrangulation q enracinée et sans arête multiple obtenue lors de la clôture totale d'un arbre équilibré A est telle que son ouverture est A*

Preuve Il est important aussi de noter l'observation suivante : l'orientation dont on munissait l'arbre équilibré A avant la clôture induisait une α -orientation sans cycle anti-trigonométrique de la quadrangulation q enracinée obtenue par la clôture totale de A . La première étape de l'algorithme d'ouverture consiste à munir q d'une α -orientation sans cycle anti-trigonométrique. Comme une telle α -orientation est unique (car maximale au sens de [16]), on en déduit que l'orientation des arêtes dont on munit q lors de l'ouverture est égale à l'orientation des arêtes de q induite par la clôture de l'arbre A dont on avait orienté les arêtes et les bourgeons. Pour montrer cette proposition, comme la deuxième étape de l'algorithme d'ouverture est par construction la réciproque de la dernière étape de la clôture totale, il suffit en fait de montrer que l'arbre dessiné par le parcours en profondeur de gauche à droite de la troisième étape de l'algorithme d'ouverture est égal à l'arbre A dont on est parti (i.e. les arêtes parcourues par ce parcours sont les arêtes de A et non des bourgeons de A qui ont été fusionnés). Pour montrer cela, on reprend la démonstration de la proposition 8 où on raisonnait par l'absurde en considérant la première arête empruntée par le parcours en profondeur et qui n'est pas dans A et où on utilisait ensuite le fait que le parcours en profondeur procède de gauche à droite.

On déduit des deux propositions précédentes et de la bijection de Tutte le théorème suivant :

Théorème 8 *Les quadrangulations simples enracinées à n faces sont en bijection avec les arbres bourgeonnants équilibrés à n nœuds où chaque nœud a un bourgeon. Les cartes non séparables enracinées à n arêtes sont en bijection, via leur bijection avec les quadrangulations simples enracinées à n faces, avec les arbres bourgeonnants équilibrés à n nœuds.*

3.2.6 Codage et comptage des arbres bourgeonnants

Comptage par une équation récursive

On note $A(z)$ la SG comptée par nombre de nœuds des arbres plans dont chaque nœud porte un bourgeon et enracinés en un bourgeon. On note $\theta(z)$ la SG comptée par nombre de nœuds des arbres plans dont tous les nœuds portent un bourgeon sauf un nœud qui porte deux bourgeons dont l'un est la racine de l'arbre. On a les équations :

$$A(z) = \frac{z\theta(z)}{1 - \theta(z)}$$

$$\theta(z) = z \frac{1}{(1 - \theta(z))^2}$$

On a donc, en utilisant l'équation de Lagrange

$$\begin{aligned}
[z^n]A(z) &= [z^{n-1}] \frac{A(z)}{z} \\
&= \frac{1}{n-1} \left([y^{n-2}] \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{1-y} \right) \frac{1}{(1-y)^{2n-2}} \right) \\
&= \frac{1}{n-1} [y^{n-2}] \frac{1}{(1-y)^{2n-1}} + \frac{1}{n-1} [y^{n-3}] \frac{1}{(1-y)^{2n}} \\
&= \frac{1}{n-1} \binom{3n-4}{n-2} + \frac{1}{n-1} \binom{3n-4}{n-3} \\
&= \frac{(3n-3)!}{(2n-1)!(n-1)!}
\end{aligned}$$

En appliquant un raisonnement avec des arbres bourgeonnants bi-enracinés tels que la racine bleue en fait toujours un arbre bourgeonnant équilibré, on en déduit que les arbres bourgeonnant équilibrés sont en proportion $\frac{2}{n}$ par rapport aux arbres bourgeonnants enracinés.

Corollaire 3 *Le cardinal des cartes non séparables enracinées à n arêtes est*

$$\frac{2(3n-3)!}{(2n-1)!n!}$$

Codage par des mots

Il existe un codage très simple des arbres plans à n nœuds tel que chaque nœud porte un bourgeon et enracinés en un bourgeon. On parcourt le contour de l'arbre dans le sens trigonométrique depuis la racine (chaque arête est donc empruntée deux fois) et on met un 1 dès qu'on suit une arête en descendant et on met un 0 si on rencontre un bourgeon (que l'on traverse) ou qu'on suit une arête en montant. A la fin du parcours, on retourne à la racine et on met un 0 final au mot qui représente le bourgeon en lequel l'arbre est enraciné. Il est facile de montrer par récurrence que les mots codant des arbres sont les mots contenant $2n-1$ lettres 0 et $n-1$ lettres 1 et tel que, si on associe un chemin de Dyck au mot en montant de deux unités quand on rencontre un 1 et en descendant de une unité quand on rencontre un 0, le chemin ne passe en dessous de l'axe des abscisses qu'à la dernière lettre du mot (le 0 final). Pour compter de tels mots, on regroupe les mots quelconques ayant $2n-1$ lettres 0 et $n-1$ lettres 1 par classes d'équivalence cyclique où deux mots u et v sont équivalents s'il existe w et w' tel que $u = w'w$ et $v = ww'$. Il est facile de se convaincre qu'un et un seul mot dans chaque classe d'équivalence vérifie les propriétés des mots codant les arbres bourgeonnants enracinés. Comme il y a $3n-2$ mots par classe d'équivalence, on retrouve que le nombre d'arbres bourgeonnants enracinés est $\frac{(3n-3)!}{(2n-1)!(n-1)!}$.

Génération aléatoire de cartes non séparables enracinées

On peut facilement tirer au hasard un mot de Dyck défini précédemment en tirant au hasard un mot ayant $n - 1$ lettres 1 et $2n - 1$ lettres 0 puis en prenant l'unique mot dans la classe d'équivalence cyclique de ce mot qui est un mot de Dyck.

On associe ensuite au mot de Dyck un arbre bourgeonnant enraciné par le codage défini précédemment. Là aussi, on peut définir une relation d'équivalence cyclique sur les arbres bourgeonnants enracinés où deux arbres sont équivalents s'ils ont été obtenus à partir du même arbre bourgeonnant non enraciné. On peut montrer à l'aide d'arbres bourgeonnants bi-enracinés qu'il y a toujours un rapport de $\frac{2}{n}$ entre arbres bourgeonnants équilibrés et arbres bourgeonnants enracinés dans chaque classe d'équivalence. Par un parcours du contour de l'arbre dans le sens trigonométrique à l'aide d'une pile, on peut déterminer les deux bourgeons tels que si on enracine A en un de ces bourgeons, il est équilibré. On choisit un de ces deux bourgeons au hasard et on enracine A en ce bourgeon pour en faire un arbre bourgeonnant A équilibré. On fait ensuite la clôture totale de A pour obtenir une quadrangulation q enracinée sans arête multiple à laquelle on peut associer par la bijection de Tutte une carte non séparable enracinée. Finalement, on peut par cette procédure faire de la génération aléatoire de quadrangulations simples enracinées (resp. de cartes non séparables enracinées) en un temps linéaire par rapport au nombre de faces (resp. d'arêtes).

3.3 Conclusion

Les deux bijections que nous avons présentées ici ont de grandes similitudes. Dans les deux cas, la clôture est telle que l'orientation naturelle des arêtes d'un arbre bourgeonnant ¹⁶ se transporte en une orientation des arêtes de la carte obtenue, et cette orientation est sans cycle anti-trigonométrique.

Ensuite, l'étape la plus importante de l'algorithme d'ouverture, à savoir l'opération qui consiste à dessiner l'arbre à partir de la carte, est la même dans les deux cas, à savoir qu'on y effectue un parcours en profondeur de gauche à droite en empruntant les arêtes dans le sens inverse de leur orientation. Ces similitudes nous encouragent à penser que l'on peut trouver d'autres exemples de familles de cartes enracinées où le même type d'algorithme fonctionne.

¹⁶les arêtes de l'arbre sont orientées vers la racine et les bourgeons sont sortants

Bibliographie

- [1] W.T. Tutte. A census of planar maps, *Canad. J. Math.*, 15 :249-271, 1963
- [2] R.C. Mullin, P.J. Schellenberg. The enumeration of c-nets via quadrangulations. *J. Combinatorial Theory*, 4 :259-276, 1968
- [3] V.A. Liskovets. A census of non-isomorphic planar maps, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Proc. Conf. Algebr. Meth. in Graph Th.* 25 :p. 2 479-494, 1981
- [4] N.C. Wormald. On the number of planar maps. *Canad. J. Math.* 33 :1-11, 1981
- [5] T.R.S. Walsh. Counting Non-isomorphic Three-Connected Planar Maps. *J. Combinatorial Theory Series B* 32 :33-44, 1982
- [6] V.A. Liskovets, T.R.S. Walsh. The enumeration of non-isomorphic 2-connected planar maps. *Canad. J. Math.* 3 :417-435, 1983
- [7] I.P. Goulden, D.M. Jackson. Combinatorial enumeration. John Wiley and Sons Inc., New York. 1983
- [8] Edward A. Bender, Zhi-Cheng Gao, L. Bruce Richmond. Submaps of maps. I. General 0-1 laws. *J. Combin. Theory Ser. B*, 55(1) :104-117, 1992.
- [9] W. Menasco, M. Thistlethwaite. The classification of alternating links. *Ann. of Math. (2)*,138(1) :113-171, 1993.
- [10] H. de Fraysseix, P. Ossona de Mendez, P. Rosenstiehl. Bipolar orientations revisited. *Disc. Appl. Math.*, 56 :157-179, 1995
- [11] V.A. Liskovets. A reductive technique for enumerating non-isomorphic planar maps. *Disc. Math.*, 156 :197-217, 1996
- [12] G. Schaeffer. Bijective census and random generation of Eulerian planar maps with prescribed vertex degrees. *Electron. J. Combin.*, 4(1) : 20 14 pp., 1997.
- [13] C. Sundberg, M. Thistlethwaite. The rate of growth of the number of prime alternating links and tangles. *Pacific J. Math.*, 182(2) :329-358, 1998.
- [14] S. Kunz-Jacques, G. Schaeffer. Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, local proceedings of the conference FPSAC'01 in Phoenix.
- [15] D. Poulalhon, G. Schaeffer. Counting, coding and sampling triangulations.
- [16] S. Felsner. Lattice structures from planar graphs