Version transparents : 7 avril 2003

Morphismes et mots sans répétition

t1

G. Richomme

LaRIA - Université de Picardie Jules Verne
http://www.laria.u-picardie.fr/~richomme
richomme@laria.u-picardie.fr

École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel
Marne-La-Vallée 31/03-04/04/2003

Plan exposé

1. Mots sans répétition (chevauchement, puissance entière)
2. Morphismes sans répétition, existence
3. Comment tester si un morphisme est sans répétition?
   - Base de morphismes
   - Test sur morphisme engendrant
   - Ensembles de test
   - Autres techniques
4. Conclusion

t2

Quelques définitions et notations

t3

- *mot vide* : ε
- u *facteur* de v si $v = pus$ pour des mots p et s
- u *préfixe* de v si $v = us$ $(p = \varepsilon)$
- u *suffixe* de v si $v = pu$ $(s = \varepsilon)$
- $|u|$: *longueur* de u

Quelques définitions et notations

t3

- *morphisme* de A^* vers B^* $f : \forall u, v \in A^*, \quad f(uv) = f(u)f(v)$
  entièrement défini par image des lettres
- *endomorphisme* $A = B$.
- *longueur d'un morphisme*
  = somme des longueurs des images des lettres
- $f^0 = Id$, $f^n = ff^{n-1}$
- $f^\omega(a) = \lim_{n\to\infty} f^n(a) =$ *mot engendré* par f en a.
- f *prolongeable* en a si $f(a) = ax$ avec $x \neq \varepsilon$
- morphismes *non-effaçants* : $\forall x \neq \varepsilon,\ f(x) \neq \varepsilon$

t4

I. Mots sans répétitions

$k \geq 2$ entier.

- Une *puissance* k est un mot de la forme u^k avec $u \neq \varepsilon$

  $k = 2$: carré $\qquad$ $k = 3$: cube

- Un mot *sans puissance* k est

  un mot dont aucun facteur n'est une puissance k.

  $k = 2$: sans carré $\qquad$ $k = 3$: sans cube

- Exemple :

$$abcbcabcabcabb$$

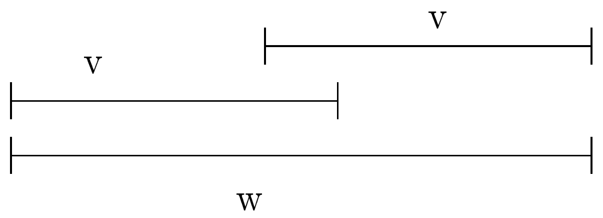
- Seuls mots sans carré sur $\{a, b\}$:

$$\varepsilon, a, ab, aba, b, ba, bab$$

t5

Chevauchements

- *chevauchement* = mot w ayant un bord de longueur $> \left\lfloor \frac{|w|}{2} \right\rfloor$.



Exemples :

- $w = auaua$, $\quad a$ lettre $\qquad (v = aua) \quad : ababa, aaa$
- $w = xuxux$, $\quad x \neq \varepsilon$ mot $\qquad (v = xux) \quad : aa\ b\ aa\ b\ aa$
- $w = abababa \qquad (v = ababa)$

t6

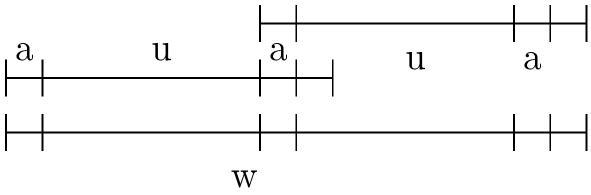
Mots sans chevauchement

- Un mot *sans chevauchement* est un mot dont aucun facteur n'est un chevauchement
- Propriété :

un mot est sans chevauchement

$\Leftrightarrow$

il n'a aucun facteur $auaua$ avec a lettre et u mot.



t7

Mot de Thue-Morse

$$\mu : \begin{cases} \mu(a) = ab \\ \mu(b) = ba \end{cases}$$

$\mu^\omega(a)$ mot infini sans chevauchement sur $\{a, b\}$ [Thue 1912]

$\mu^2(a) = abba$
$\mu^3(a) = abbabaab$
$\mu^4(a) = abbabaabbaababba$
...
$\mu^\omega(a) = abbabaabbaababbabaababbaabbabaabba...$

t8

Mots sans carré sur trois lettres

[Thue 1912]

- Le mot de Thue-Morse se décompose sur $\{a, ab, abb\}$.

$$\mu^\omega(a) = abb\ ab\ a\ abb\ a\ ab\ abb\ ab\ a\ ab\ ...$$

- Soit T t.q. $\mu^\omega(a) = \delta(T)$ avec $\delta \begin{cases} a \mapsto abb \\ b \mapsto ab \\ c \mapsto a \end{cases}$
- T est sans carré

  Preuve. Soit vv facteur de T avec $v \neq \varepsilon$

  T infini $\Rightarrow$ vvx facteur de T avec x lettre

  $\delta(vvx)$ commence par le chevauchement $\delta(v)\delta(v)a$

  $\Rightarrow$ contradiction avec $\mu^\omega(a)$ sans chevauchement

t9

Mots sans carré engendrés par morphisme

- [Hall 1964, Istrail 1977] T est engendré par

$$\begin{cases} a \mapsto abc \\ b \mapsto ac \\ c \mapsto b \end{cases}$$

- [Thue 1912] Le morphisme suivant engendre un mot sans carré

$$\begin{cases} a \mapsto abcab \\ b \mapsto acabcb \\ c \mapsto acbcacb \end{cases}$$

II - Morphismes sans répétition

Déf. Un morphisme $f : A^* \longrightarrow B^*$ est dit *sans puissance* k
s'il préserve les mots sans puissance k
c'est-à-dire, si, pour tout mot x,
x sans puissance k implique $f(x)$ sans puissance k

t10

Idem morphisme sans chevauchement

Ici :

- $Card(alphabets) \geq 2$ pour morphismes
  sans chevauchement ou sans puissance k avec $k \geq 3$
- $Card(alphabets) \geq 3$ pour morphismes sans carré
- Morphismes *non-effaçants* : $\forall x \neq \varepsilon,\ f(x) \neq \varepsilon$

Exemples (suite)

- [Thue 1912]

$$\left\{\begin{array}{l} a \mapsto abcab \\ b \mapsto acabcb \\ c \mapsto acbcacb \end{array}\right. \Bigg| \text{ préserve les mots sans carré.}$$

t11

Un des plus petits [Carpi 1983]

- [Hall 1964, Istrail 1977]

$$\left\{\begin{array}{l} a \mapsto abc \\ b \mapsto ac \\ c \mapsto b \end{array}\right. \Bigg|$$

engendre un mot sans carré,
mais ne préserve pas les mots sans carré.

$$f(aba) = ab\ caca\ bc$$

μ préserve les mots sans chevauchement [Thue 1912]

Preuve par contradiction

Soit w sans chevauchement, x lettre, u mot,

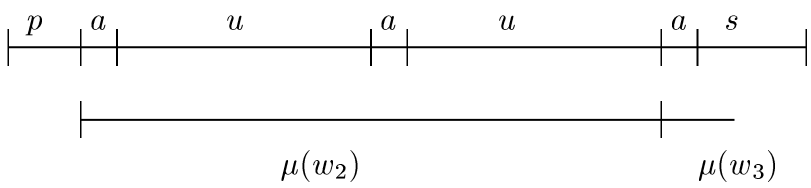
$$\mu(w) = pxuxuxs$$

Cas $x = a$ (cas $x = b$ par échange rôle a et b)

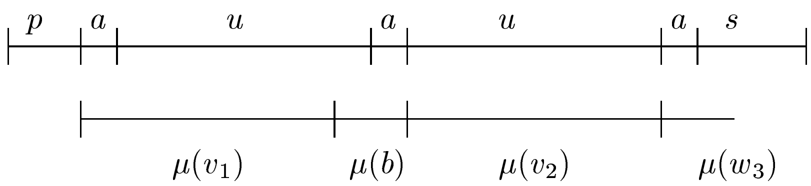
t12 *Remarque.* $|ps|$ impaire et donc $|p|$ ou $|s|$ paire

$|p|$ paire $\Rightarrow w = w_1 w_2 w_3$ avec

$$\mu(w_1) = p, \quad \mu(w_2) = auau, \quad \mu(w_3) = as$$

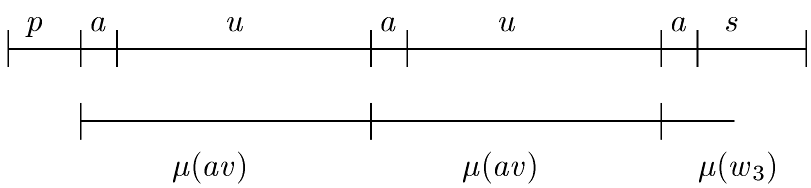


Si $|au|$ impaire, $w_2 = v_1 b v_2$ avec $au = \mu(v_1)b = a\mu(v_2)$



$$\left.\begin{array}{l} |au|_a = |v_1| = 1 + |v_2| \\ |au|_b = 1 + |v_1| = |v_2| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{impossible.}$$

t13 $|au|$ paire



$\Rightarrow$ $w_2 = avav$ pour un mot v

$\Rightarrow$ $avava$ facteur de w

$\Rightarrow$ contradiction avec w sans chevauchement

t14

Application

Propriété

f engendre un mot en a

$+$

f sans chevauchement

$\Rightarrow f^\omega(a)$ sans chevauchement

Idem sans puissance k.

Cor. [Thue 1912] $\mu^\omega(a)$ sans chevauchement

t15

Fortement bipréfixe

- *Déf.* Un morphisme f est *fortement bipréfixe* si pour toutes lettres a et b,

  $f(a)$ et $f(b)$ commencent par des lettres différentes, et

  $f(a)$ et $f(b)$ se terminent par des lettres différentes.

- Un morphisme sans chevauchement est fortement bipréfixe.

  Preuve. $f(a) = xu$, $f(b) = xv$

  $f(aab)$ contient un chevauchement : $xuxux$

  $\square$

- *Conséquence.*

  Il existe un morphisme sans chevauchement de A^* vers B^*

  $\Leftrightarrow Card(A) \leq Card(B)$.

Existence morphismes sans puissance k

[Bean-Ehrenfeucht-Mc Nulty 1979,Brandenburg 1983]

- Il existe un morphisme (uniforme) sans carré de A^* vers $\{a, b, c\}^*$
- Il existe un morphisme (uniforme) sans puissance k ($k \geq 3$) de A^* vers $\{a, b\}^*$

t16

Déf. Un morphisme est *uniforme* si $\forall a, b \in A$, $|f(a)| = |f(b)|$

Exemples :

Soient x_i, $i \in I$, mots sans carré sur $\{a, b, c\}$,

$$\left\{ \; a_i \mapsto dx_iex_i \;, \; i \in I \right.$$

est sans carré et sans cube

[Brandenburg 1983]

$$\left\{ \begin{array}{l} a \mapsto abacabcacbabcbacbc \\ b \mapsto abacabcacbacabacbc \\ c \mapsto abacabcacbcabcbabc \\ d \mapsto abacabcbacabacbabc \\ e \mapsto abacabcbacbcacbabc \end{array} \right.$$

t17

sans carré

$$g : \left\{ \begin{array}{l} a \mapsto aababb \\ b \mapsto aabbab \\ c \mapsto abbaab \end{array} \right.$$

sans cube

III. Tester si un morphisme est sans répétition

étude de trois solutions existantes pour
tester si un endomorphisme binaire est sans chevauchement

t18

Limites de ces solutions
pour morphismes de A^* vers B^*
en fonction de A et B éventuellement
pour tester si un morphisme est sans chevauchement
(resp. sans puissance k)

Solution 1. Base de morphismes

t19

- [Thue 1912] Pour f endomorphisme sur $\{a, b\}$,
  f sans chevauchement $\Leftrightarrow f \in \{E, \mu\}^*$
  où $E = \textit{échange} = \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a \end{cases}$
- $E\mu = \mu E = \begin{cases} a \mapsto ba \\ b \mapsto ab \end{cases}$
- *Algorithme* :
  - essayer de décomposer récursivement $f(a)$ et $f(b)$ sur $\{ab, ba\}$
  - f est sans chevauchement $\Leftrightarrow$ on obtient l'identité ou l'échange
  Complexité : $O(|f(a)| + |f(b)|)$

Généralisation impossible

- L'ensemble des endomorphismes sans chevauchement sur un alphabet A forme un monoïde :
  - f, g sans chevauchement $\Rightarrow$ fg sans chevauchement
  - identité sans chevauchement

t20
- Ce monoïde est non finiment engendré pour $\mathrm{Card}(A) \geq 3$ i.e.

pour tout ensemble fini $\mathcal{B}$ d'endomorphismes sans chevauchement
il existe un endomorphisme f sans chevauchement
qui ne se décompose pas sur $\mathcal{B}$

Idem sans puissance k

[Crochemore 1982] Cas sans carré, Card(alphabet) ≥ 3

[Richomme-Wlazinski 2002, Richomme 2003] Card(alphabet) ≥ 2
Cas sans puissance k ($k \geq 3$) et sans chevauchement

Technique preuve

Trouver une famille infinie de morphismes

- sans chevauchement (ou sans puissance k selon besoin)
- irréductibles : $f = gh \Rightarrow g$ ou h permutation

t21
Def. Permutation = endomorphisme défini par
une permutation de l'alphabet

[Richomme-Wlazinski 2002]
$V \in \{b, c\}^*$ t.q. $cVcb$ sans cube

$$f_V : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto bacVc \end{cases} \qquad \text{sans puissance } k, k \geq 3$$

gf_V irréductible.

t22

Solution 2. Test sur morphismes engendrant

Sur $\{a, b\}$, pour f endomorphisme $f \neq Id$, $f \neq E$,

$$f \text{ sans chevauchement}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f^{\omega}(a) \text{ ou } (Ef)^{\omega}(a) \text{ sans chevauchement}$$

Preuve. (rappel $E\mu = \mu E$)

- f sans chevauchement $\Leftrightarrow f \in \{E, \mu\}^* \Leftrightarrow f = \mu^p$ ou $f = E\mu^p$
- $f \neq Id$, $f \neq E \quad \Rightarrow \quad p \geq 1$
  $\Rightarrow f^{\omega}(a) = \mu^{\omega}(a)$ ou $(Ef)^{\omega}(a) = \mu^{\omega}(a)$
- [Séébold 1985] $\mu^{\omega}(a)$ = seul mot infini sans chevauchement commençant par a, engendré par morphisme
- [Pansiot 1981] $f^{\omega}(a) = \mu^{\omega}(a) \Leftrightarrow f = \mu^l$ $(l \geq 1)$

t23

[Karhumäki 1981]
Pour f endomorphisme sur $\{a, b\}$ prolongeable en a,
$f^{\omega}(a)$ est sans chevauchement
$\Leftrightarrow f^7(a)$ est sans chevauchement

Algorithme :
- Calculer $f^7(a)$
- Tester si sans chevauchement

[Kfoury 1988] il existe un algorithme permettant de tester en temps $O(|w|)$ si un mot binaire w est sans chevauchement

t24

Généralisation impossible

Rappel : [Hall 1964, Istrail 1977] $\begin{cases} a \mapsto abc \\ b \mapsto ac \\ c \mapsto b \end{cases}$

engendre un mot sans puissance k ($k \geq 2$) et sans chevauchement, mais morphisme non sans puissance k et non sans chevauchement.

$$f(ab^{k-1}a) = ab(ca)^k bc$$

$$f(abb) = abcacac$$

t25

Cas sans cube alphabet binaire [Keranen 1983]

f : $\begin{cases} a \mapsto aabaabbaabbabbaabaababbabbaabaabb \\ b \mapsto aabbabbaabaababbabbaabaabbaabbabb \end{cases}$

f engendre un mot sans cube en a mais

$f(baba)$ contient un cube

Cas sans puissance $k \geq 4$ alphabet binaire [Karhumaki 1983]

φ : $\begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$

Solution 3. Ensembles de test

[Berstel-Séébold 1993]

t26

$$\text{Un endomorphisme } f \text{ sur } \{a,b\} \text{ est sans chevauchement}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f(\{aab, aba, baa, abb, bab, bba\}) \text{ est sans chevauchement}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f(abbabaab) \text{ est sans chevauchement}$$

- $\{aab, aba, baa, abb, bab, bba\}$ ensemble de test
- $\{abbabaab\}$ ensemble de test
- $abbabaab$ mot de test

Algorithmes de complexité $O(|f(a)| + |f(b)|)$

Déf. Un ensemble T est un *ensemble de test*
pour morphismes sans chevauchement de A^* vers B^* si,
pour tout morphisme f de A^* vers B^* :

$$f \text{ est sans chevauchement}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f(T) \text{ est sans chevauchement}$$

t27 Idem sans puissance k

Exemples (endomorphismes sans chevauchement sur $\{a,b\}$) :

Berstel-Séébold 1993	Séébold-Richomme 1999
existence	caractérisation
$\{abbabaab\}$	$\{bbabaa\}$ (pas de plus petit mot)
$\{aab, aba, baa, bab, abb, bba\}$	$\{aab, aba, bab, abb\}$

Algorithmes

Quand il existe un ensemble *fini* de test T pour morphismes sans répétition R, un algorithme consiste à

regarder si chaque mot $f(x)$, pour x dans T, ne contient pas R.

Besoin d'algorithmes sur les mots (n = longueur mot)

t28

- Test naif en O(n^3) pour recherche chevauchement ou pour recherche puissance k
- [Kfoury 1988] temps $O(n)$ pour recherche chevauchement
- [Crochemore 1983] temps $O(n)$ pour recherche carré
- [Crochemore 1981, Apostolico-Preparata 1983, Main-Lorentz 1984] temps $O(nlog(n))$ pour recherche toutes "répétitions"
- [Kolpakov-Kucherov 1999] temps $O(n)$

Caractérisation

Un ensemble fini T est un ensemble de test pour endomorphismes sans chevauchement sur $\{a, b\}$

$\Leftrightarrow$

t29

1. T ne contient que des mots sans chevauchement,
2. $Fact(T)$ contient aa et bb,
3. $Fact(T)$ contient au moins un mot de chacun des ensembles

$\{ aba,\ bab \}$

$\{ aab,\ bba,\ ababb,\ babaa \}$

$\{ baa,\ abb,\ bbaba,\ aabab \}$

$\{ aba,\ abba,\ bbab,\ babb \}$

$\{ bab,\ baab,\ aaba,\ abaa \}$

t30

Au sujet de la preuve C.N.

Trouver des endomorphismes “presque” sans chevauchement

Exemple

$$g_1 : \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

Pour tout mot w sans chevauchement,

$$g_1(w) \text{ contient un chevauchement}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$aab,\ bba,\ ababb \text{ ou } babaa \text{ facteur de } w.$$

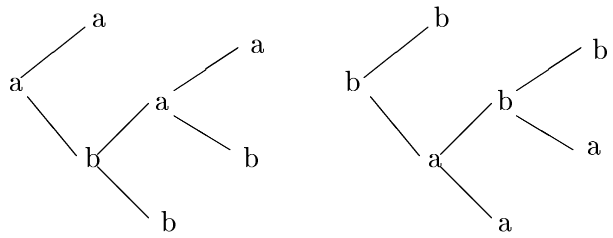
$\Rightarrow$ un ensemble de test doit contenir un des mots

$$aab,\ bba,\ ababb,\ babaa.$$

t31

- $g_1(aab) = ababa$, $\quad g_1(ababb) = a\ ba\ a\ ba\ a$,
  $g_1(bba) = aaa\ b$, $\quad g_1(babaa) = a\ ab\ a\ ab\ a\ \ b$

  contiennent un chevauchement.
- Mots sans chevauchement sans aab, bba, $ababb$, et $babaa$



Mots facteurs de $abaa$, $abab$, $baba$, $babb$

$g_1(abaa) = abaabab$, $\quad g_1(baba) = aabaab$,

$g_1(abab) = abaaba$, $\quad g_1(babb) = aabaa$

mots sans chevauchement

t32

Sans chevauchement, Card$(A) = 2$, card$(B) \geq 3$

[Richomme-Wlazinski 2002]

Un ensemble fini T de mots sans chevauchement
est un ensemble de test pour morphismes sans chevauchement
de $\{a, b\}^*$ vers B^*, card$(B) \geq 3$

$$\Leftrightarrow$$

$$\{\ aba,\ \ bab,\ \ abba,\ \ baab\ \} \subseteq Fact(T)$$

Mot de test pour morphismes binaires sans chevauchement :

$$abbabaab$$

t33

Sans chevauchement, Card$(A) \geq 3$

Pas d'ensemble de test finis

Preuve. Pour u sur $\{a, b\}$ avec aua sans chevauchement

$$f : \begin{cases} a \mapsto abc \\ b \mapsto bca \\ c \mapsto cab\ f(aua)\ caab \\ d \mapsto d \quad \forall d \notin \{a, b, c\} \end{cases}$$

Pour tout mot w sans chevauchement,

$$f(w) \text{ sans chevauchement}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$cauac \text{ non facteur de } w$$

Cas uniforme, Card$(A) \geq 3$

t34

Il existe des ensembles de test

- Il existe un ensemble T_U tel que,
  pour tout ensemble T de mots sans chevauchement,
  $$T \text{ est un ensemble de test} \quad \Leftrightarrow \quad T_U \subseteq Fact(T)$$
- Soit f uniforme de A^* vers B^* avec $\text{Card}(B) \geq \text{Card}(A) \geq 3$

  f sans chevauchement

  $\Leftrightarrow$

  $f(w)$ est sans chevauchement, pour tout w sans chevauchement avec $|w| \leq \text{Card}(A)+2$.
- Si mot de test existe, alors longueur $> (\text{Card}(A))!$

Ensembles finis de test et sans puissance k

t35

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">k</td></tr>
<tr><td>Card(A)</td><td>2</td><td>3</td><td>≥ 4</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>caractérisation</td><td>existence</td></tr>
<tr><td>3</td><td>existence</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>≥ 4</td><td colspan="3">inexistence</td></tr>
</table>

- Inexistence cas sans carré = [Crochemore 1982]
- Inexistence cas sans puissance k, $k \geq 3$ = [Richomme-Wlazinski 2002]

Sans carré, Card$(A) = 2$

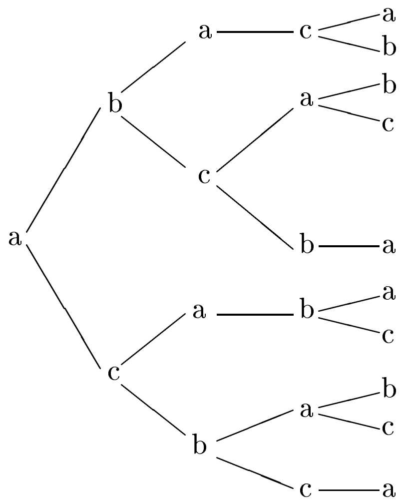
[Crochemore 1982]
Sur $\{a, b, c\}$,

t36

$$f \text{ sans carré} \iff (\forall w \text{ sans carré}, |w| = 5 \Rightarrow f(w) \text{ sans carré})$$

(Borne 5 optimale)

Remarque : tout mot sans carré de longueur < 5 prolongeable



[Thue 1912, Bean-Ehrenfeucht-McNulty 1979, De Luca 1983]

Soit $f : A^* \to A^*$ (Card$(A) \geq 3$)
t.q. $\quad \forall a, b \in A, \quad f(a)$ non facteur de $f(b)$

t37

$$f \text{ sans carré} \iff \forall w \text{ sans carré}, \quad |w| = 3 \quad \Rightarrow \quad f(w) \text{ sans carré.}$$

Remarque : [BEM79] si de plus pour toute lettre a, $f(a)$ n'a pas de bord à l'exception du mot vide
f sans carré $\Rightarrow$ f sans puissance k, $\forall k \geq 2$

Conséquence. Même borne pour morphismes uniformes

t38

Sans cube

Sur $\{a,b\}$, [Leconte 1985, Richomme-Wlazinski 2002]

$$f \text{ sans cube}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall w \text{ sans cube}, \quad |w| = 7 \quad \Rightarrow \quad f(w) \text{ sans cube}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f(T) \text{ sans cube avec}$$
$$T = \left\{ \begin{array}{llllll} abbabba, & ababba, & abbaba, & aabba, & abbaa, & ababa, \\ baabaab, & babaab, & baabab, & bbaab, & baabb, & babab \end{array} \right\}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f(abaabbabaabaabbaababaabbabaabaabbaababaab) \text{ sans cube}$$

Bornes pour morphismes uniformes [Leconte 1985] :

- 4 sur alphabet à deux lettres (optimal)
- 5 sur alphabet à trois lettres

t39

Cas sans puissance k, $k \geq 4$

- Uniquement existence ensembles de test [Wlazinski 2002]
- Sur $\{a,b\}$ avec $t_k = \frac{k(k+1)}{2} + 2$

$$f \text{ sans puissance } k$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall w \text{ sans puissance } k, \quad |w| \leq t_k \quad \Rightarrow \quad f(w) \text{ sans puissance } k$$

- $t_k = 2k+1$ si morphisme préserve mots primitifs
  mot primitif : $w = u^n \Rightarrow n = 1$
- [Brandenburg 1983]
  Nombre de mots sans cube sur $\{a,b\}$ croit exponentiellement

Morphismes uniformes : [Leconte 1985] 3 lettres : borne $3k+5$
2 lettres : borne $max(4, \lceil 2k/3 \rceil)$

t40

Autres solutions?

Définir, en fonction du morphisme, les mots à tester

- [Crochemore 1982]

$$\text{Un morphisme } f \text{ est sans carré}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall w \text{ sans carré}, \quad |w| \leq \quad \mathrm{b(f)} \quad \Rightarrow \quad f(w) \text{ est sans carré}$$

  où $\mathrm{b(f)} = \max(3, \left\lceil \frac{M(f)-3}{m(f)} \right\rceil + 1)$

  $\mathrm{M(f)} = \max\{|f(a)|, a \in A\}, \qquad \mathrm{m(f)} = \min\{|f(a)|, a \in A\}$

- [Leconte 1985] sans cube sur trois lettres,
  borne $\qquad 6(|f(a)| + |f(b)| + |f(c)|) + 1$

t41

Conclusion

- Est-il possible de tester si un morphisme est sans chevauchement ou sans puissance k?
  Sur la plupart des alphabets c'est une question ouverte.

- Ensembles de test
  pour morphismes uniformes sans puissance k :
  existence non connue pour certains alphabets.

- Il est possible de tester si un morphisme engendre un mot sans puissance k [Mignosi-Séébold 1993].
  Est-il possible de tester si un morphisme engendre un mot sans chevauchement? Une question ouverte dans le cas non binaire.

References

[1] A. Apostolico, and F.P. Preparata. Optimal off-line detection of repetitions in a string. *Theoretical Computer Science* 22:297–315, 1983.

[2] D. R. Bean, A. Ehrenfeucht, and G. F. McNulty. Avoidable patterns in strings of symbols. *Pacific J. of Math*, 85(2):261–294, 1979.

[3] J. Berstel. Mots sans carré et morphismes itérés. *Discrete Applied Mathematics*, 29:235–244, 1980.

[4] J. Berstel. Axel Thue's work on repetition in words. Technical Report 92.70, LITP, 1992. 4th Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Montréal 1992.

[5] J. Berstel. Axel Thue's papers on repetition in words: a translation. Technical Report 20, Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique, Université du Québec, Montréal, 1995.

[6] J. Berstel and P. Séébold. A characterization of overlap-free morphisms. *Discrete Applied Mathematics*, 46:275–281, 1993.

[7] F.-J. Brandenburg. Uniformly growing k-th power-free homomorphisms. *Theoretical Computer Science*, 23(1):69–82, 1983.

[8] A. Carpi. A solution to Berstel's problem n^{o}P1. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS)*, pages 2–4, 1983.

[9] A. Carpi. On the size of a square-free morphism on a three letter alphabet. *Information Processing Letters*, 16:231–235, 1983.

[10] M. Crochemore. An optimal algorithm for computing the repetitions in a word. *Information Processing Letters*, 12(5):244–250, 1981.

[11] M. Crochemore. Sharp characterizations of squarefree morphisms. *Theoretical Computer Science*, 18:221–226, 1982.

[12] M. Crochemore. A solution to Berstel's problem n^{o}P3. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS)*, 18:9–11, 1982.

[13] M. Crochemore. Régularités évitables (thèse d'état). Technical Report 83-43, LITP, November 1983.

[14] M. Hall. Generators and relations in groups - the Burnside problem. In T. L. Saaty (ed.) *Lecture Notes in Modern Mathematics* 2, pages 42-92, Wiley, 1964.

[15] S. Istrail On irreducible and non rational numbers. *Bull. Mat. Soc. Sci. Mat. RS Roumanie* 21, p301-308, 1977.

[16] J. Karhumäki. On strongly cube-free ω-words generated by binary morphisms. In *FCT'81*, volume 117 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 182–191, 1981.

[17] V. Keränen. On k-repetition freeness of length uniform morphisms over a binary alphabet. *Discrete Applied Mathematics*, 9:301–305, 1984.

[18] A. J. Kfoury. A linear-time algorithm to decide whether a binary word contains an overlap. *RAIRO Informatique Théorique et Applications*, 22(2):135–145, 1988.

[19] Y. Kobayashi. Enumeration of irreducible binary words. *Discrete Applied Mathematics*, 20:221–232, 1988.

[20] R. Kolpakov and G. Kucherov. Finding maximal repetitions in a word in linear time. In *Proceedings of Symposium in Foundations of Computer Science*, pages p596–604. IEEE Computer Society, 1999.

[21] M. Leconte. A characterization of power-free morphisms. *Theoretical Computer Science*, 38:117–122, 1985.

[22] M. Leconte. *Codes sans répétition.* PhD thesis, LITP Université Paris 6, october 1985.

[23] F. Mignosi and P. Séébold. If a D0L Language is k-Power Free then it is Circular. In A. Lingas, R. G. Karlsson and S. Carlsson, editors, *ICALP 1993*, volume 700 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 507-518, 1993.

[24] J. J. Pansiot. The Morse sequence and iterated morphisms. *Information Processing Letters*, 12(2):68–70, 1981.

[25] G. Richomme. Some non finitely generated monoids of repetition-free endomorphisms. *Information Processing Letters*, 85:61–66, 2003.

[26] G. Richomme and P. Séébold. Characterization of test-sets for overlap-free morphisms. *Discrete Applied Mathematics*, 98:151–157, 1999.

[27] G. Richomme and F. Wlazinski. Finite test-sets for overlap-free morphisms. In K. Diks and W. Rytter, editors, *MFCS'2002*, volume 2420 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 605–614, 2002.

[28] G. Richomme and F. Wlazinski. Some results on k-power-free morphisms. *Theoretical Computer Science*, 273:119–142, 2002.

[29] P. Séébold. Sequences generated by infinitely iterated morphisms. *Discrete Applied Mathematics*, 11:255–264, 1985.

[30] F. Wlazinski. A test-set for k-power-free binary morphisms. *Theoretical Informatics and Applications*, 35:437–452, 2001.

[31] F. Wlazinski. Ensembles de test et morphismes sans répétition, PhD thesis, LaRIA, Université de Picardie Jules Verne, septembre 2002.

[32] A. Thue. Uber die gegenseitige Lage gleigher Teile gewisser Zeichenreihen. *Kristiania Videnskapsselskapets Skrifter Klasse I. Mat.-naturv*, 1:1–67, 1912. (reprinted in: T. Nagell (Ed.), Selected Mathematical Papers of Axel Thue, Universitetsforlaget, Oslo, 1977, pp. 413-478). Voir aussi [4, 5].