CALCUL FORMEL et POLYNÔMES MULTIVARIÉS

Alain Lascoux
CNRS, Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée
77454 Marne-la-Vallée Cedex, France
Center for Combinatorics, Nankai University
Tianjin 300071, P.R. China
Alain.Lascoux@univ-mlv.fr

Résumé

Survol de quelques techniques de combinatoire algébrique sur les polynômes de plusieurs variables. Partant de polynômes symétriques, on aboutit inexorablement, au travers du jeu de taquin, à des fonctions non symétriques et non commutatives.

1 Division et Choix de bases

La division euclidienne est pratiquée depuis fort longtemps, ainsi que l'indique son nom. Appliquons la à deux polynômes P, Q d'une variable, de degrés consécutifs :

$$\begin{aligned} P &= \star Q + \mathcal{R}_1 \ , deg(\mathcal{R}_1) < deg(Q) \\ Q &= \star \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \ , deg(\mathcal{R}_2) < deg(\mathcal{R}_1) \\ \mathcal{R}_1 &= \star \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \, , deg(\mathcal{R}_3) < deg(\mathcal{R}_2) \ \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

les polynômes $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \ldots$ étant les *restes* successifs, et $\star$ désignant des facteurs du premier degré.

Bien entendu, les coefficients des restes sont des fonctions symétriques de chacun des ensembles de racines de P et Q, les coefficients des polynômes étant les *fonctions élémentaires*.

Pour simplifier et n'avoir qu'un seul ensemble de racines $\mathbb{A}$ de cardinal n, prenons la division de x^{n+1} par

$$\prod_a (x-a) = x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} + \cdots \pm e_n \ .$$

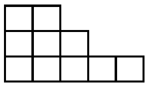
Maple accepte de faire le calcul :

```
  # division par un polynôme générique
Euclid:=proc(n)   local i,f1,f2,f3,q,res;  res:=NULL;
  f1:=x^(n+1);
  f2:=x^n +convert([seq( (-1)^i*x^(n-i)*e.i,i=1..n)],‘+‘);
  for i from 1 to n do
     f3:=rem(f1,f2,x);
     res:=res,f3;
   f1:=f2; f2:=f3;
  od;
  [res]
end:
ACE> Euclid(5);
  ................  Sortie = Quelques écrans illisibles
ACE> Euclid(6);
  ..........   Error, (in expand/bigprod) object too large
```

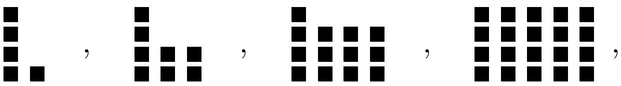
Dans ce cas, la solution est simple. Il faut prendre une autre base de fonctions symétriques, les *fonctions de Schur*, qui sont des déterminants en les fonctions élémentaires.

En fait toutes les bases linéaires de l'espace des polynômes symétriques sont indicées par des *partitions* (suites croissantes d'entiers positifs), et le calcul algébrique sur les fonctions symétriques va être pris en compte par des manipulations de partitions.

On représente celles-ci planairement, par un diagramme de boîtes :

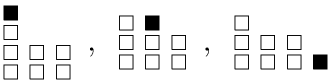
$I = [2, 3, 5] \;\Rightarrow$ diagramme  .

La division euclidienne, pour $n = 4$, va maintenant être *entièrement* décrite par la suite de diagrammes suivante :



les restes successifs étant des fonctions de Schur, le dernier diagramme, rectangulaire, codant le *résultant.*

La multiplication des polynômes symétriques est prise en compte par des opérations du type "adjonction de boîtes". Par exemple le produit de la fonction de Schur S_{133} par la fonction élémentaire e_1 consiste à énumérer toutes les partitions dont le diagramme est obtenu en ajoutant une boîte au diagramme de 133 :



2 Tableaux, algèbre libre

Disposant de boîtes, on ne peut s'empêcher de les remplir. On choisit de n'écrire que des objets planaires croissants (au sens large) dans les lignes, et strictement décroissants dans les colonnes. Un remplissage d'un diagramme respectant ces conditions est un *tableau de Young*. Le mot obtenu en le lisant à la mode occidentale le caractérise, mais l'usage de deux dimensions permet de mieux en comprendre les propriétés.

$$\text{tableau}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\cline{1-2} 3&4\\ \cline{1-3} 2&2&3\\ \hline 1&1&1&3\\ \hline\end{array} \quad\Rightarrow\quad \text{mot}\quad [3,4,2,2,3,1,1,1,3]$$

Puisque l'on a maintenant des mots, cela veut dire qu'on est passé d'un calcul de fonctions symétriques à des calculs dans l'algèbre libre. Il se trouve que la fonction de Schur S_I se remonte naturellement à la somme de tous les tableaux de forme le diagramme de I :

$$S_{12}(\mathbb{A}) = \sum_{i<j}\left(a_i^2 a_j + a_i a_j^2\right) + 2\sum_{i<j<k} a_i a_j a_k \Leftrightarrow$$

$$\begin{smallmatrix}\boxed{2}&\\ \boxed{1}&\boxed{1}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{2}&\\ \boxed{1}&\boxed{2}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\ \boxed{1}&\boxed{1}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\ \boxed{1}&\boxed{3}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\ \boxed{2}&\boxed{2}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\ \boxed{2}&\boxed{3}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\ \boxed{1}&\boxed{2}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{2}&\\ \boxed{1}&\boxed{3}\end{smallmatrix} + \cdots$$

la fonction de Schur commutative s'obtenant en considérant que les lettres figurant dans les tableaux sont des variables commutatives. Remarquons que le coefficient 2 peut maintenant être interprété :

$$2a_1a_2a_3 \;\leftrightarrow\; \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\ \boxed{1}&\boxed{2}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{2}&\\ \boxed{1}&\boxed{3}\end{smallmatrix}$$

Plus généralement, les tableaux sont la meilleure manière d'interpréter les multiplicités dans la décomposition des fonctions de Schur en termes de monômes.

Si l'on a défini ainsi des *fonctions de Schur non commutatives*, et donc plongé l'espace des polynômes symétriques, en tant qu'espace vectoriel, dans l'algèbre libre, on a perdu le produit.

C'est une construction de Robinson et Schensted qui permet de retrouver le dit produit :

$$S_1S_2 = \begin{smallmatrix}\boxed{1}&&\\ &\boxed{1}&\boxed{1}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{2}&&\\ &\boxed{1}&\boxed{1}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{1}&&\\ &\boxed{1}&\boxed{2}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{1}&&\\ &\boxed{2}&\boxed{2}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{3}&&\\ &\boxed{1}&\boxed{1}\end{smallmatrix} + \cdots = S_3 + S_{12}$$

$$S_2S_1 = \begin{smallmatrix}\boxed{1}&\boxed{1}&\\ &&\boxed{1}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{1}&\boxed{2}&\\ &&\boxed{1}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{1}&\boxed{1}&\\ &&\boxed{2}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{1}&\boxed{2}&\\ &&\boxed{2}\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\boxed{1}&\boxed{3}&\\ &&\boxed{1}\end{smallmatrix} + \cdots = S_3 + ?$$

La deuxième somme comporte des mots qui ne sont pas la lecture d'un tableau. La solution, pour retrouver le produit S_2S_1 en terme de tableaux, est l'*algorithme de Robinson-Schensted* qui transforme tout mot en un tableau. Mais c'est aussi, de manière plus visuelle, le *jeu de taquin*, dû à M.P. Schützenberger, qui déplace des boîtes horizontalement ou verticalement, de manière à ce que les conditions de croissance dans les lignes et les colonnes soient respectées.

Algébriquement, l'algorithme de Robinson-Schensted tout autant que le jeu de taquin se réduisent à des relations de commutation de degré 3, les *relations plaxiques* (dûes à Knuth [4]) :

$$\begin{aligned} xzy &\equiv zxy \quad (x \leq y < z)\,, \\ yxz &\equiv yzx \quad (x < y \leq z)\,. \end{aligned}$$

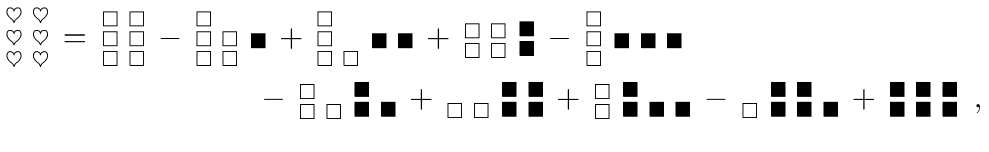
Le quotient du monoïde libre par les relations plaxiques est dit *monoïde plaxique*, et son algèbre associée, l'*algèbre plaxique* $\mathfrak{Plax}$. Il est facile de voir que dans $\mathfrak{Plax}$, on a non seulement retrouvé le produit S_2S_1, mais aussi le produit de toute fonction de Schur par une fonction symétrique élémentaire, et donc retrouvé le produit des fonctions symétriques [7].

En d'autres termes, l'algèbre $\mathfrak{Plax}$ contient comme sous-algèbre $\mathfrak{Sym}$. Ce plongement permet de donner de toute formule entre fonctions symétriques une version non commutative.

Reprenons par exemple le résultant

$$R(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \prod_{a \in \mathbb{A}} \prod_{b \in \mathbb{B}} (a - b)\ .$$

Il se développe comme une somme de produits de fonctions de Schur en $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ d'indices "complémentaires". Le résultant de deux polynômes de degré 3 et 2 est symbolisé par le diagramme de $[2, 2, 2]$, et son développement s'écrit



les boîtes □ codant des fonctions de Schur de $\mathbb{A}$, les boîtes ■ codant des fonctions de $\mathbb{B}$.

La version non commutative consiste à énumérer des paires de tableaux de forme complémentaire, la bijection avec les monômes dans le développement de $R(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ étant encore une fois obtenue par une variation sur l'algorithme de Robinson-Schensted.

Réciproquement, on peut faire découler toute la théorie des fonctions symétriques (commutatives) du développement du résultant (*formule de Cauchy*), de même que la théorie non commutative résulte de la bijection mentionnée ci-dessus [6].

Bien entendu, on peut rendre cet énoncé plus sublime en mentionnant que les caractères irréductibles du groupe symétrique ou linéaire sont les fonctions de Schur, que la formule de Cauchy traduit la dualité de Schur-Weyl, que les cycles de Schubert dans les grassmanniennes sont aussi des fonctions de Schur, la formule de Cauchy décrivant maintenant la classe du plongement diagonal de la grassmannienne, qu'il en existe une version quantique où la combinatoire a son mot à dire, que les espaces dont les bases sont naturellement indicés par des partitions sont des espaces de Fock &c.

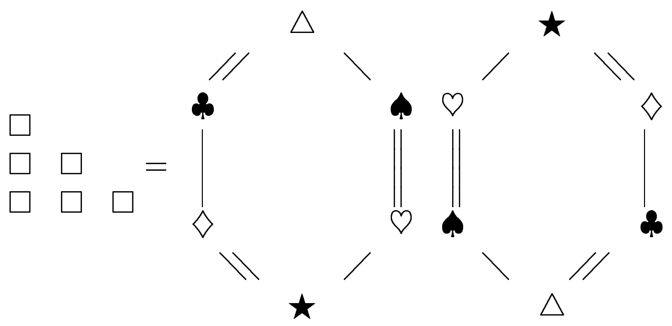
Signalons aussi d'autres théories de fonctions symétriques non commutatives plus élaborées, qui font l'objet d'une série d'études en cours, NCSF1 [3]... NCSFn ($n = 7$ pour le moment).

3 Polynômes non symétriques

Définissant les fonctions symétriques usuelles à partir du résultant, il est relativement aisé de passer au cas non symétrique, ainsi qu'au cas non symétrique et non commutatif. La contrainte que l'on s'impose est de remplacer le calcul algébrique par des manipulations d' objets combinatoires, en évitant de développer les fonctions en terme de leurs variables . Si je dois résumer en deux mon travail avec M.P. Schützenberger en ce domaine, c'est simplement d'avoir remplacé les partitions par les *permutations.*

Fixons n. Au lieu du résultant $\prod(a{-}b)$ de deux polynômes de degré n, il faut en prendre seulement la moitié, le *demi-noyau de Cauchy* $K(\mathbb{A},\mathbb{B}) := \prod_{i+j<n}(a_i{-}b_j)$. Tout comme dans le cas symétrique, ce noyau permet de définir un produit scalaire, et sa décomposition, une base orthonormée fondamentale, les *polynômes de Schubert*, qui remplace la base des fonctions de Schur (de fait les fonctions de Schur sont des polynômes de Schubert particuliers).

Les polynômes de Schubert X_σ sont indicés par les permutations σ. La décomposition du noyau, pour $n = 3$ se traduit par une sommation sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$:



i.e., plus explicitement,

$$\begin{aligned}(a_1{-}b_1)(a_1{-}b_2)(a_2{-}b_1) = X_{321}(\mathbb{A})X_{123}(\mathbb{B}) - X_{312}(\mathbb{A})X_{213}(\mathbb{B})\\ - X_{231}(\mathbb{A})X_{132}(\mathbb{B}) + X_{132}(\mathbb{A})X_{231}(\mathbb{B}) + X_{213}(\mathbb{A})X_{312}(\mathbb{B})\\ - X_{123}(\mathbb{A})X_{321}(\mathbb{B})\ .\end{aligned}$$

La sommation porte sur toutes les permutations dans $\mathfrak{S}_3$, “indices complémentaires” signifiant maintenant “couple de permutations retournées l'une de l'autre”.

L'espace des polynômes en trois variables a_1, a_2, a_3 va être considéré comme un module libre sur l'anneau des polynômes symétriques $\mathfrak{Sym}(a_1, a_2, a_3)$, de base les 6 polynômes de Schubert. On a donc toujours des techniques de fonctions symétriques à sa disposition, mais uniquement pour les coefficients. Il faut des outils supplémentaires pour la “partie non symétrique”. Les variables $b_1, b_2, \ldots$ doivent être considérées comme des paramètres supplémentaires, que l'on peut spécialiser en 0, ou en $1, q, q^2, \ldots$, en particulier pour utiliser des techniques d'interpolation, qui sont une approche possible englobant le cas classique (Newton, Lagrange, Hermite, ...).

4 Algèbre des différences divisées

Pratiquement tous les outils sur les fonctions symétriques s'étendent au cas non symétrique, la base Schur étant remplacée par Schubert. Mais on dispose d'un outil supplémentaire, les *différences divisées de Newton* :

$$f(x,y) \to \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ ,$$

version discrète du calcul différentiel.

De fait, on n'utilise que des différences divisées sur des variables consécutives :

$$f(a_1,\ldots,a_n) \to f\partial_i := \frac{f(\ldots a_i, a_{i+1}\ldots) - f(\ldots a_{i+1}, a_i\ldots)}{a_i - a_{i+1}} \ .$$

L'ensemble des polynômes de Schubert est stable par les différences divisées. Ainsi les 6 polynômes ci-dessus sont-ils obtenus par différences divisées à partir d'un seul d'entre eux, $(a_1{-}b_1)(a_1{-}b_2)(a_2{-}b_1)$.

Le calcul polynomial va maintenant résulter de propriétés de l'algèbre engendrée par les ∂_i. Celle-ci est une déformation de l'algèbre usuelle du groupe symétrique, les différences divisées satisfaisant aux *relations de tresse* :

$$\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i \text{ si } |i-j|\geq 2 \quad , \quad \partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1} \ .$$

Par contre $\partial_i^2 = 0$, contrairement aux transpositions simples s_i (échangeant a_i, a_{i+1}), qui vérifient $s_i^2 = 1$.

D'autres déformations sont possibles, et c'est en fait l'*algèbre de Hecke du groupe symétrique*[1] qu'il faut étudier : algèbre engendrée par $T_1,\ldots,T_{n-1}$ satisfaisant aux relations de tresse, ainsi qu'à une relation quadratique

$$(T_i - q_1)\,(T_i - q_2) = 0 \ .$$

L'algèbre "zéro-Hecke" (c'est-à-dire $q_1 = -1$, $q_2 = 0$) est l'objet d'études intensives de l'équipe de combinatoire algèbrique de l'IGM. Elle permet entre autres de comprendre les fonctions quasi-symétriques non commutatives [2].

Au lieu de faire agir les éléments de l'algèbre de Hecke sur un polynôme du type "noyau de Cauchy", on peut engendrer des polynômes par une approche différente, dûe à Yang[8], en mettant des paramètres dans les relations de tresse. La relation $\partial_1\partial_2\partial_1 = \partial_2\partial_1\partial_2$ est remplacée par la *relation de Yang-Baxter* :

$$(\partial_1 + \frac{1}{\alpha})\,(\partial_2 + \frac{1}{\alpha+\beta})\,(\partial_1 + \frac{1}{\beta}) = (\partial_2 + \frac{1}{\beta})\,(\partial_1 + \frac{1}{\alpha+\beta})\,(\partial_2 + \frac{1}{\alpha}) \ ,$$

c'est-à-dire, plus visuellement,

$$\begin{tikzcd}
 & 123 \arrow[dl, equal, "\partial_1"'] \arrow[dr, dash, "\partial_2"] & \\
213 \arrow[d, dash, "\partial_2"'] & & 132 \arrow[d, equal, "\partial_1"] \\
231 \arrow[dr, equal, "\partial_1"'] & & 312 \arrow[dl, dash, "\partial_2"] \\
 & 321 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & {[1\,2\,3]} \arrow[dl, equal, "\partial_1+\frac{1}{\alpha}"'] \arrow[dr, dash, "\partial_2+\frac{1}{\beta}"] & \\
{[2\,1\,3]} \arrow[d, dash, "\partial_2+\frac{1}{\alpha+\beta}"'] & & {[1\,3\,2]} \arrow[d, equal, "\partial_1+\frac{1}{\alpha+\beta}"] \\
{[2\,3\,1]} \arrow[dr, equal, "\partial_1+\frac{1}{\beta}"'] & & {[3\,1\,2]} \arrow[dl, dash, "\partial_2+\frac{1}{\alpha}"] \\
 & {[3\,2\,1]} &
\end{tikzcd}$$

Les coefficients dans le développement de tels produits de Yang-Baxter seront maintenant les fonctions de base. En fait, on va par exemple ainsi retrouver les polynômes de Schubert [5], et l'équation de Yang-Baxter est donc un outil à ajouter à la panoplie non symétrique non commutative de calcul de polynômes multivariés.

Références

[1] G. Duchamp, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, T. Scharf and J.-Y. Thibon. *Euler-Poincaré characteristic and polynomial representations of Iwahori-Hecke algebras*, Publ. RIMS Kyoto **31** (1995), 179-201.

[2] G. Duchamp, F. Hivert, J.-Y. Thibon. *Noncommutative symmetric functions VI : free quasi-symmetric functions and related algebras*, Internat. J. Alg. Comput. **12** (1999)671–717.

[3] I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh et J.Y. Thibon. *Noncommutative symmetric functions*, Advances in Math, **112** (1995)218–348.

[4] D. Knuth. *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*, Pacific J.M. **34** (1970) 709–727.

[5] A. Lascoux, B. Leclerc and J.Y. Thibon. *Flag Varieties and the Yang-Baxter Equation* , Letters in Math. Phys., **40** (1997) 75–90.

[6] A. Lascoux, B. Leclerc et J.Y. Thibon. *The Plactic Monoid*, Combinatorics on Words, ed. by M. Lothaire, Cambridge Univ. Press (2001).

[7] A. Lascoux & M.P. Schützenberger. *Le monoïde plaxique*, Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics, Napoli 1978, Quaderni de "La Ricerca Scientifica", **109**, C.N.R., Roma (1981) 129–156.

[8] C.N. Yang. *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312– 1315.