KỶ YẾU HỘI THẢO QUỐC GIA

Huế , 9 - 11 tháng 6 năm 2000

MỘT SỐ VẤN ĐỀ CHỌN LỌC CỦA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Báo cáo toàn văn

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2001

T-CHUẨN CÓ NGƯỠNG TRONG LOGIC MỜ

BÙI CÔNG CƯỜNG, ĐINH TRỌNG HIẾU

Viện Toán học Hà Nội

TRẦN ĐẠI HOÀN, LÊ THANH QUANG

Đại học Bách Khoa Hà Nội

Tóm tắt. *t-chuẩn, t-đối chuẩn và quan hệ mờ đóng vai trò quan trọng trong logic mờ và lập luận xấp xỉ. Ngưỡng là một khái niệm tự nhiên xuất hiện trong nhiều vấn đề thực tiễn. Kết hợp những khái niệm này sẽ cho những lớp phép toán mới trong logic mờ: t-chuẩn có ngưỡng, t-đối chuẩn có ngưỡng và quan hệ mờ có ngưỡng.*

Báo cáo này trình bày nhanh vai trò của các phép toán logic trong logic mờ và trong các hệ tri thức. Sau đó giới thiệu định nghĩa và một vài mệnh đề. Một vài kết quả bước đầu có thể tìm thấy trong [1].

I. T-CHUẨN, T-ĐỐI CHUẨN TRONG LOGIC MỜ

Trước tiên chúng ta nhìn nhanh tới mấy phép toán cơ bản trong lý thuyết tập hợp và trong logic mệnh đề. Ít nhất chúng cũng xuất phát từ 3 phép toán cơ bản.

Định nghĩa 1.1. Cho A, B là hai *tập hợp* trong không gian nền X. Cho P, Q là các mệnh đề. Có 3 phép toán cơ bản

Lý thuyết tập hợp		Logic mệnh đề	
Phép giao	$A \cap B$	Phép hội	$P \wedge Q$
Phép hợp	$A \cup B$	Phép tuyển	$P \vee Q$
Phép lấy phần bù	$A^C = X - A$	Phép phủ định	$\neg P$

Trong các suy luận trong trí tuệ nhân tạo chúng ta cần xử lý các mệnh đề dạng:

Nếu P thì Q.

Như vậy chúng ta phải định nghĩa phép kéo theo $P \Rightarrow Q$. Tương tự, chúng ta cần làm việc với nhiều phép toán logic khác.

Tuy nhiên lần này với các suy luận mờ, những suy luận ở đó khó đảm bảo có thể khẳng định sự đúng đắn của mệnh đề một cách thật rõ ràng - tức là có thể đo giá trị chân lý của các mệnh đề $v(P) = 1$ (đúng) hoặc $v(P) = 0$ (sai).

Zadeh đã đề nghị cần làm việc với $0 \leq v(P) \leq 1$ và thay thế bằng 3 phép toán logic sau.

Chúng ta sẽ kí hiệu $x = v(P)$, $y = v(Q)$.

Trong logic mệnh đề cổ điển $x,y \in \{0,1\}$, còn trong logic mờ $x,y \in [0,1]$.

Khi đó sẽ có các phép toán

Logic cổ điển	Logic mờ
$v(P \wedge Q) = \min(x,y)$	t-chuẩn $T(x,y)$
$v(P \vee Q) = \max(x,y)$	t- đối chuẩn $S(x,y)$
$v(\neg P) = 1 - x$	Phép phủ định $n(x)$

Từ 3 phép liên kết logic mới này người ta tìm cách chọn định nghĩa phép kéo theo $P \Rightarrow Q$, hay chính xác hơn định nghĩa $v(P \Rightarrow Q)$ sao cho hợp lý. Sự đa dạng của logic mờ một phần nào được quyết định bởi sự đa dạng và lựa chọn hợp lý các phép toán này. Cùng với quan hệ mờ, các liên kết logic mờ vừa nhắc tạo nên bộ công cụ cơ bản cho logic mờ và cho các phương pháp lập luận xấp xỉ. Để tìm hiểu thêm mảng kiến thức này các bạn có thể tìm thấy trong [2- 4].

II. PHÉP HỘI MỜ CÓ NGƯỠNG

II.1. Phép hội mờ (t-chuẩn)

Hàm $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ là một phép hội mờ (chuẩn tam giác hay t-chuẩn) khi và chỉ khi thoả mãn các điều kiện sau:

C1: $T(1,x) = x$, với mọi $0 \leq x \leq 1$

C2: T có tính giao hoán : $T(x,y) = T(y,x)$ với mọi $0 \leq x,y \leq 1$

C3: T không giảm theo nghĩa

$T(x,y) \leq T(u,v)$, với mọi $x \leq u$, $y \leq v$

C4: T có tính kết hợp:

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x,y),z), \text{ với mọi } 0 \le x,y,z \le 1$$

Sau đây là một số t-chuẩn thông dụng

- Dạng min (Zadeh, 1965) $T(x,y) = \min(x,y)$
- Dạng tích $T(x,y) = x.y$
- t-chuẩn Lukasiewicz: $T(x,y) = \max\{x+y-1,0\}$
- min nilpotent (Fordor)

$$T(x, y) = \min_0\{x, y\} = \begin{cases} \min\{x,y\} & \text{, với } x + y > 1 \\ 0 & \text{, với } x + y \le 1 \end{cases}$$

- t-chuẩn yếu nhất (drastic product)

$$Z(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\}, \text{ với } \max(x,y) = 1 \\ 0 \quad\quad\quad , \max(x,y) < 1 \end{cases}$$

Từ các điều kiện trên, còn chứng minh được mỗi t-chuẩn T đều thỏa các tính chất:

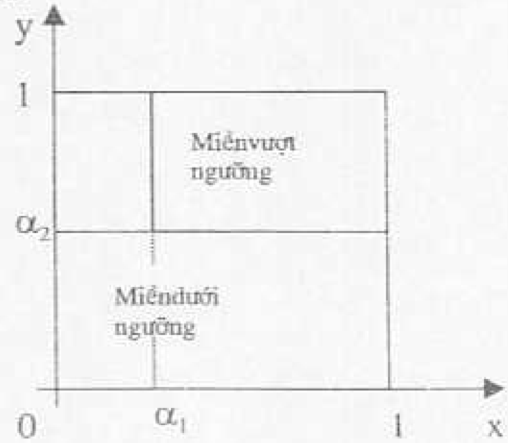
$$Z(x,y) \le T(x,y) \le \min(x,y), \text{ với mọi } 0 \le x,y \le 1$$

Và $\quad T(0,x) = T(x,0) = 0$, với mọi $0 \le x \le 1$

II.2. Phép hội mờ có ngưỡng

Miền xác định $[0, 1]^2$ của phép hội có ngưỡng được chia bởi ngưỡng theo x là α_1 và ngưỡng theo y là α_2 làm hai miền là:

- Miền vượt ngưỡng: $(\alpha_1 \le x) \wedge (\alpha_2 \le y)$
- Miền dưới ngưỡng: $(x < \alpha_1) \vee (y < \alpha_2)$



Ở đây chúng ta kí hiệu:

$\wedge$ - phép giao, $\vee$ - phép hợp

II.2.1. Định nghĩa [1]

Cho $T_2(x,y)$ là một t-chuẩn, phép hội có ngưỡng $T(x,y,\alpha)$ được định nghĩa bởi

$$T(x,y,\alpha) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{, với } \alpha_1 \le x \text{ và } \alpha_2 \le y \\ T_2(x,y) & \text{, với } x < \alpha_1 \text{ hoặc } y < \alpha_2 \end{cases}$$

Trong đó $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ là vectơ ngưỡng gồm hai thành phần α_1, α_2 lần lượt là ngưỡng theo x và y.

II.2.2. Các tính chất:

- Từ tính chất của t-chuẩn, ta có: $T_2(1, x) = T_2(x, 1) = x$, $\forall x: 0 \le x \le 1$. Kết hợp với $\min(1,x) = \min(x,1) = x$, $\forall x: 0 \le x \le 1$, chúng ta có :
  $T(1, x, \alpha) = T(x, 1, \alpha) = x$, $\forall x: 0 \le x \le 1$

- *Tương tự, do:* $T_2(0, x) = T_2(x, 0) = 0$, $\forall x: 0 \le x \le 1$

  $\min(0,x) = \min(x,0) = 0$, $\forall x: 0 \le x \le 1$

  Ta có : $T(0, x, \alpha) = T(x, 0, \alpha) = 0$, $\forall x: 0 \le x \le 1$

- *Tính liên tục*

Trong trường hợp đặc biệt, nếu $T_2(x,y)$ được chọn chính là $\min(x,y)$ thì $T(x,y,\alpha)$ là liên tục trên toàn miền $[0,1]^2$ và phép hội không còn có ngưỡng nữa.

Trong các trường hợp khác, tính liên tục của $T(x,y,\alpha)$ phụ thuộc tính liên tục và giá trị của $T_2(x,y)$ trên miền $(0 \le x < \alpha_1) \vee (0 \le y < \alpha_2)$. Tuy vậy, trên miền $(\alpha_1 \le x \le 1) \wedge (\alpha_2 \le y \le 1)$, $T(x,y,\alpha)$ (nhận giá trị của hàm $\min(x,y)$) vẫn liên tục. Tại các ngưỡng $x = \alpha_1$, $y = \alpha_2$ thì $T(x,y,\alpha)$ thoả mãn tính chất nửa liên tục trên.

- *Tính không giảm*

  Từ tính không giảm của các t-chuẩn và tính chất $T_2(x,y) \le \min(x,y)$ với mọi x, y nên phép hội có ngưỡng $T(x,y,\alpha)$ cũng thoả mãn tính không giảm

  $$T(x,y,\alpha) \le T(u,v,\alpha), \text{ với mọi } x \le u,\ y \le v$$

- *Tính giao hoán*

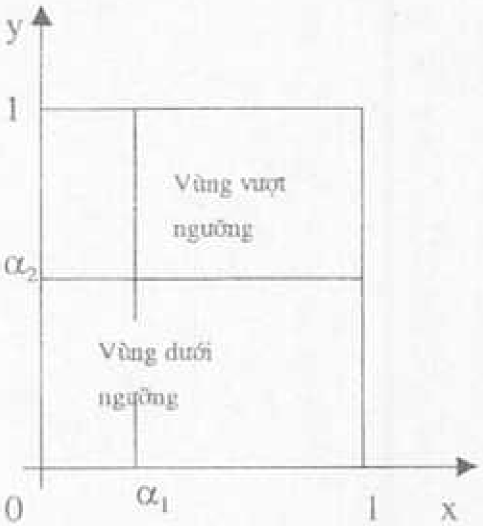
  Ta có $\min(x,y)$ và $T_2(x,y)$ đều thoả mãn tính chất giao hoán:

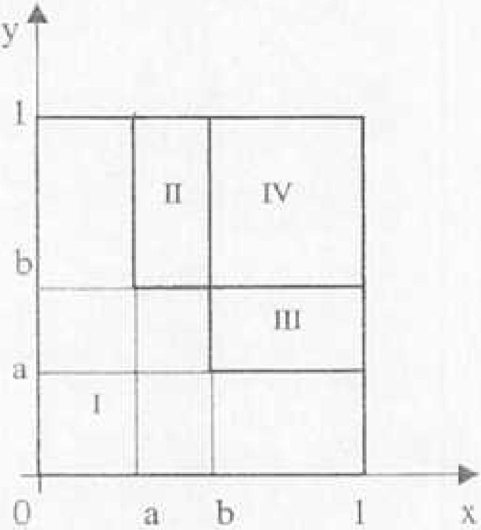
  $$\min(x, y) = \min(y, x), \text{ với mọi cặp } (x, y) \in [0, 1]^2$$

và $T_2(x, y) = T_2(y, x)$, với mọi cặp $(x, y) \in [0, 1]^2$

Với α_1 là ngưỡng của biến x, và α_2 là ngưỡng của biến y

Đặt $a = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ và $b = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$





Chia miền $[0, 1]^2$ thành bốn miền, được ký hiệu lần lượt là I, II, III và IV như hình vẽ.

Từ đó, miền I ở dưới ngưỡng, miền IV nằm trong vùng vượt ngưỡng, còn một trong hai miền II và III trong vùng dưới ngưỡng, miền còn lại trong vùng vượt ngưỡng.

Nhận xét:

Nếu (x,y) thuộc miền II thì (y,x) thuộc miền III và ngược lại, nếu (x,y) thuộc miền III thì (y,x) thuộc miền II. Do đó trên hai miền II và III phép hội có ngưỡng $T(x,y,\alpha)$ không thoả tính giao hoán.

Nếu (x,y) thuộc miền I thì cũng có (y,x) thuộc miền I, nếu (x,y) thuộc miền IV thì cũng có (y,x) thuộc miền IV do đó trên hai miền I và IV, phép hội có ngưỡng thoả tính giao hoán.

Trường hợp đặc biệt, khi $\alpha_1 = \alpha_2$, chỉ còn lại hai miền là miền I cũng chính là vùng dưới ngưỡng và miền IV chính là vùng vượt ngưỡng. Cả hai miền này đều đối xứng qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất. Vì vậy, phép hội có ngưỡng thoả tính giao hoán: $T(x, y, \alpha) = T(y, x, \alpha)$, với mọi cặp $(x, y) \in [0, 1]^2$.

- *Phép hội có ngưỡng $T(x,y,\alpha)$ thoả mãn tính chất :*

$$Z(x,y) \le T(x,y,\alpha) \le \min(x,y), \text{ với mọi } 0 \le x, y \le 1$$

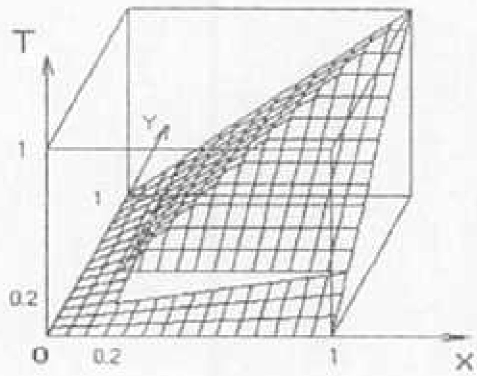
Chứng minh: Bạn đọc tự kiểm tra

Bây giờ chúng ta sẽ cho vài ví dụ

- *Ví dụ 1:* Chọn $T_2(x,y) = x.y$, với ngưỡng $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.2$, ta được một phép hội có ngưỡng:

$$T_1(x,y,\alpha) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{, với } 0.2 \le x \text{ và } 0.2 \le y \\ x.y & \text{, với } x < 0.2 \text{ hoặc } y < 0.2 \end{cases}$$

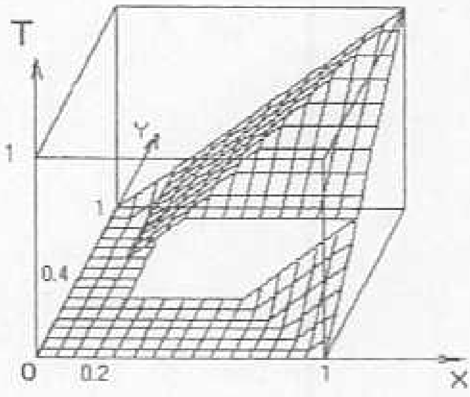
biểu diễn của toán tử trong không gian ba chiều như sau:



Trong trường hợp riêng này, ta nhận thấy rằng đồ thị của toán tử đối xứng qua mặt phẳng X = Y trên toàn miền xác định $[0, 1]^2$, qua đó thể hiện tính giao hoán của $T(x,y,\alpha)$.

Do sự khác nhau về giá trị của hai hàm tại lân cận của ngưỡng (hàm x.y có giá trị nhỏ hơn min(x,y)) nên phép hội có ngưỡng gián đoạn tại ngưỡng. Mặc dù cả hai hàm cơ sở min(x,y) và x.y đều là các hàm liên tục, nhưng phép hội có ngưỡng thu được lại là một hàm không liên tục.

- *Ví dụ 2:* Chọn t-chuẩn $T_2(x,y) = \max\{ x+y-1, 0 \}$ với $\alpha_1 = 0.2$ và $\alpha_2 = 0.4$



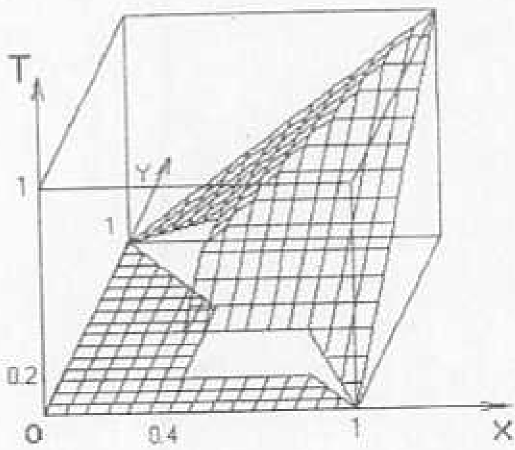
$$T_1(x,y,\alpha) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{, với } 0.2 \le x \text{ và } 0.4 \le y \\ \max\{\, x+y-1,\, 0 \,\} & \text{, với } x < 0.2 \text{ hoặc } y < 0.4 \end{cases}$$

Trong trường hợp này đồ thị của toán tử hội có ngưỡng không còn đối xứng qua mặt x=y như trường hợp trên nữa, thể hiện phép hội không thoả mãn tính giao hoán. Tuy nhiên, trên hai miền con là $(x<0.2) \vee (y<0.2)$ và $(0.4 \le x) \wedge (0.4 \le y)$ cộng thêm phần đường chéo từ (0.2; 0.2) tới (0.4; 0.4) ta vẫn có $T(x,y,\alpha)$ thoả tính giao hoán.

- *Ví dụ 3:*

Khi chọn t-chuẩn thứ hai là Min nilpotent: $T_2(x,y) = \min_0\{x, y\}$ với $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.2$

$$T_1(x,y,\alpha) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{, với } 0.4 \le x \text{ và } 0.2 \le y \\ \min_0\{x\,,\,y\} & \text{, với } x < 0.4 \text{ hoặc } y < 0.2 \end{cases}$$



Biến đổi tiếp được công thức:

$$T_1(x,y,\alpha) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{, với } (0.4 \le x) \vee (0.2 \le y) \vee (x+y > 1) \\ 0 & \text{, với các trường hợp khác} \end{cases}$$

Hàm min nilpotent là hàm không liên tục, gồm hai phần:

- Khi $x+y \le 1$ thì $\min_0\{x, y\} = 0$

- Còn trong trường hợp ngược lại, với $x+y > 1$ thì $\min_0\{x, y\}$ bằng chính $\min(x,y)$.

Nếu thoả điều kiện x+y > 1 thì hàm trên ngưỡng và hàm dưới ngưỡng là trùng nhau. Vì vậy trên miền x+y > 1 không có sự gián đoạn giữa phần vượt ngưỡng và phần dưới ngưỡng. Đặc biệt, nếu $\alpha_1+\alpha_2>1$, thì với $x \geq \alpha_1$ và $y \geq \alpha_2$ cũng suy ra x+y>1. Nghĩa là khi đó phần vượt ngưỡng hoàn toàn nằm trong miền x+y > 1. Khi đó phép hội có ngưỡng lại chính là t-chuẩn min nilpotent và giá trị cụ thể của α_1 và α_2 không còn có vai trò quan trọng nữa.

III. PHÉP TUYỂN CÓ NGƯỠNG

III.1. Định nghĩa [1]

Cho $S_2(x,y)$ là một t-đối chuẩn, phép tuyển có ngưỡng $S(x,y\beta)$ được định nghĩa như sau:

$$S(x,y,\beta) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{, với } x \leq \beta_1 \text{ và } y \leq \beta_2 \\ S_2(x,y) & \text{, với } \beta_1 < x \text{ hoặc } \beta_2 < y \end{cases}$$

Trong đó β là vectơ ngưỡng gồm hai thành phần β_1, β_2 lần lượt là ngưỡng theo x và y.

III.2. Các tính chất

- ***Miền giá trị***

Ta có với mỗi t-đối chuẩn S(x,y) bất kỳ đều thoả bất đẳng thức:

$$\max(x,y) \leq S_2(x,y)$$

Vì vậy mà phép tuyển có ngưỡng $S(x,y,\beta)$ thoả mãn: $S(x,y,\beta) \geq \max(x,y)$.

- ***Tính không giảm***

Theo định nghĩa $S_2(x,y)$ là t-đối chuẩn, cùng với max(x,y) có tính chất không giảm. Kết hợp với tính chất $\max(x,y) \leq S_2(x,y)$. Phép tuyển có ngưỡng $S(x,y,\beta)$ thoả mãn tính không giảm :

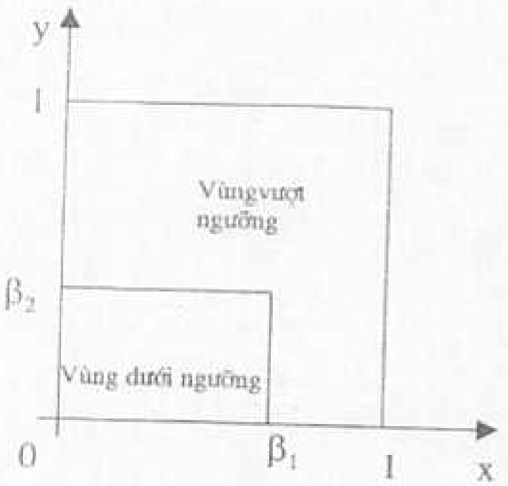
$$S(x,y,\beta) \leq S(u,v,\beta), \text{ với mọi } x \leq u,\ y \leq v$$

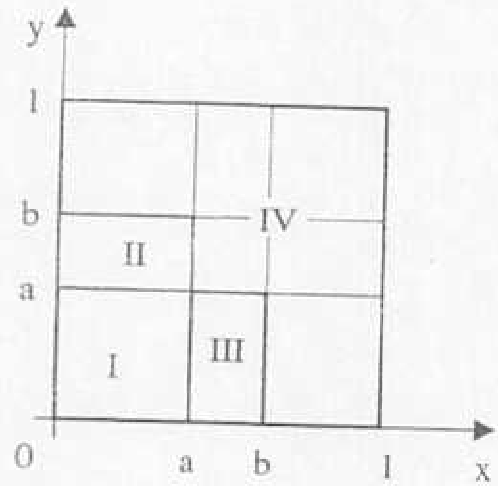
- $S(0, x, \beta) = S(x, 0, \beta) = x$, với mọi $0 \leq x \leq 1$
- $S(1, x, \beta) = S(x, 1, \beta) = 1$, với mọi $0 \leq x \leq 1$
- ***Tính giao hoán***

Cũng giống phép hội có ngưỡng, trong phép tuyển có ngưỡng các hàm hợp thành $S_1(x,y)$ và $S_2(x,y)$ đều là các t-đối chuẩn và đều thoả mãn tính chất giao hoán.

Với β_1 là ngưỡng của biến x, và β_2 là ngưỡng của biến y.

Đặt $a = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ và $b = \max\{\beta_1, \beta_2\}$





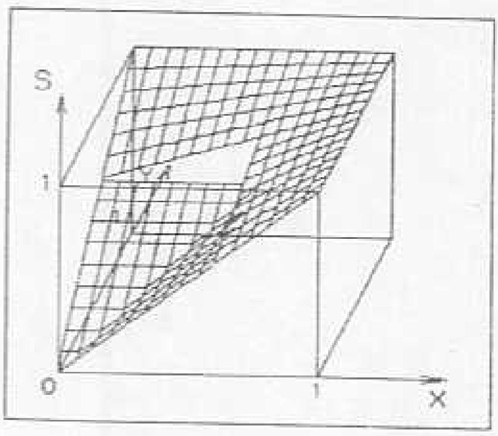
Chia miền $[0, 1]^2$ thành bốn miền con, được ký hiệu lần lượt là I, II, III và IV như hình vẽ. Trong đó một trong hai miền II và III thuộc vùng trên ngưỡng, miền còn lại thuộc vùng dưới ngưỡng. Còn miền I luôn ở dưới ngưỡng, miền IV luôn thuộc vùng vượt ngưỡng.

Với những lập luận tương tự như với phép hội có ngưỡng, ta được kết luận: trên hai miền I và IV, phép tuyển có ngưỡng thoả tính giao hoán. Và khi $\beta_1 = \beta_2$ ngưỡng theo hai biến x và y bằng nhau thì phép tuyển có ngưỡng $S(x,y,\beta)$ thoả mãn tính giao hoán.

Ví dụ

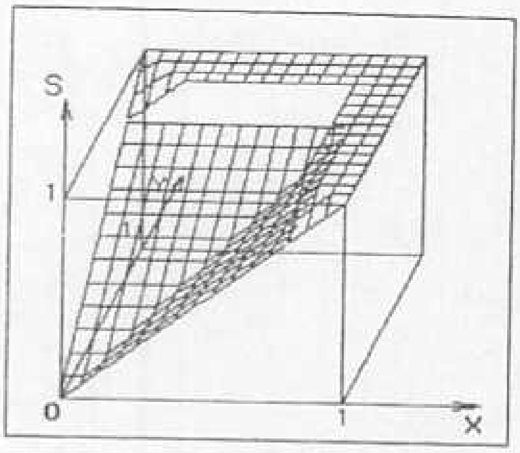
Khi chọn :

$S_2(x, y) = x + y - x.y$



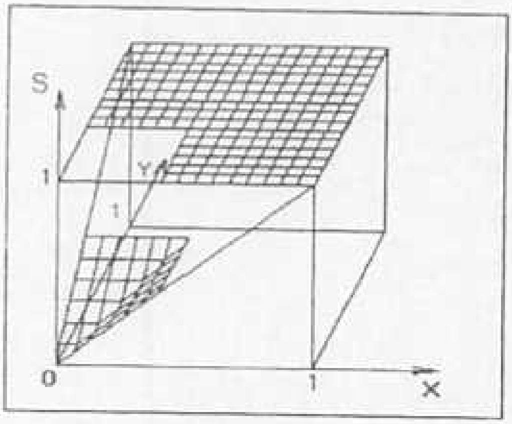
Khi :

$S_2(x, y) = \min\{x + y, 1\}$



Khi chọn:

$S_2(x, y) = Z' \{x, y\}$



IV. TÍNH ĐỐI NGẪU CỦA PHÉP HỘI VÀ PHÉP TUYỂN CÓ NGƯỠNG

IV.1. Nhận xét:

□*Cho $n(x)$ là phép phủ định mạnh, $S(x,y,\beta)$ là một phép tuyển có ngưỡng. Khi đó hàm $T(x,y,\alpha)$ xác định trên $[0, 1]^2$ bằng biểu thức:*

$$T(x,y,\alpha) = n\,(S(n(x), n(y), \beta)), \text{ với mọi } 0 \le x,y \le 1$$

là một phép hội có ngưỡng.

□*Cho $n(x)$ là phép phủ định mạnh, $T(x,y,\alpha)$ là một phép hội có ngưỡng. Khi đó hàm $S(x,y,\beta)$ xác định trên $[0, 1]^2$ bằng biểu thức:*

$$S(x,y,\beta) = n\,(T(n(x), n(y), \alpha)), \text{ với mọi } 0 \le x,y \le 1$$

là một phép tuyển có ngưỡng.

IV.2. Định lý :

Cho phép hội có ngưỡng $T(x,y,\alpha)$, phép tuyển có ngưỡng $S(x,y,\beta)$:

$$T(x, y, \alpha) = \begin{cases} T_1(x, y) & , \text{với } \alpha_1 \le x \text{ và } \alpha_2 \le y \\ T_2(x, y) & , \text{với } x < \alpha_1 \text{ hoặc } y < \alpha_2 \end{cases}$$

$$S(x, y, \beta) = \begin{cases} S_1(x, y) & \text{, với } x \le \beta_1 \text{ và } y \le \beta_2 \\ S_2(x, y) & \text{, với } \beta_1 < x \text{ hoặc } \beta_2 < y \end{cases}$$

và n(x) là một phép phủ định mạnh. Khi đó:

Nếu (T, S_1, n) và (T_2, S_2, n) là hai bộ ba De Morgan,và thoả mãn: $\beta_1 = n(\alpha_1)$, $\beta_2 = n(\alpha_2)$, thì $(T(x,y,\alpha), S(x,y,\beta), n)$ cũng là một bộ ba De Morgan

Chứng minh

Chúng ta có:

$$T(nx, ny, \alpha) = \begin{cases} T_1(nx, ny) & \text{, với } (\alpha_1 \le nx) \wedge (\alpha_2 \le ny) \\ T_2(nx, ny) & \text{, với } (nx < \alpha_1) \vee (ny < \alpha_2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T_1(nx, ny) \text{ , với } (n\alpha_1 \ge x) \wedge (n\alpha_2 \ge y) \\ T_2(nx, ny) \text{ , với } (x > n\alpha_1) \vee (y > n\alpha_2) \end{cases}$$

(vì n là phép phủ định mạnh)

Do (T, S_1, n) và (T_2, S_2, n) là hai bộ ba De Morgan nên có:

$$n(S_1(x,y)) = T(nx, ny)$$

$$n(S_2(x,y)) = T_2(nx, ny)$$

Thay vào ta có:

$$T(nx, ny, \alpha) = \begin{cases} n(S_1(x, y)) & \text{, với } (\beta_1 \ge x) \wedge (\beta_2 \ge y) \\ n(S_2(x, y)) & \text{, với } (x > \beta_1) \vee (y > \beta_2) \end{cases}$$

$$= n(S(x, y, \beta))$$

Như vậy ($T(x,y,\alpha)$, $S(x,y,\beta)$, n) cũng là một bộ ba De Morgan.

Bạn đọc quan tâm tới các phép liên kết mờ và logic mờ cũng như các ứng dụng của chúng có thể đọc các tài liệu [2-5]. Một số tính chất khác và định nghĩa quan hệ mờ có ngưỡng có thể tìm thấy trong [1] và những bài sẽ được công bố .

TÀI LIỆU DẪN

1. Bùi Công Cường, t-norm with threshold and some related problems, *Preprint* 2000/12 , Institute of Mathematics, Hanoi, April 2000.

2. H.J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory - and Its Applications, 2nd Ed., Kluwer Acad. Pub., Dodrech, 1991.

3. *Hệ mờ và ứng dụng*, Biên tập tập thể: Nguyễn Hoàng Phương, Bùi Công Cường, Nguyễn Doãn Phước, Phan Xuân Minh và Chu Văn Hỷ, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1998, Hà nội.

4. Bùi Công Cường, *Một số kiến thức cơ sở của logic mờ trong các hệ mờ, trong [3]*, trang 1-21.

5. Bùi Công Cường, *Cơ sở toán học của các hệ mờ, Giáo trình*, ĐH Bách khoa Hà nội, 1998-1999.