Algèbre de Grassmann: Moindres carrées 2D

Vincent Lesueur
lesueurv@gmail.com

Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge

07/13

Moindres Carrés

Principe :

Entrée: Nuage de points.
Sortie: La droite qui approxime au mieux les points.

On cherche une quantité à minimiser.
On note $\mathbf{x}$ un point dans $\mathbb{P}^2$ et d une droite de $\mathbb{P}^2$.

Rappel:
On sait qu'un point appartient à la droite si:

$$\mathbf{x} \wedge d = 0$$

Cela s'explique par le fait que dans $\mathbb{R}^3$ le wedge de 3 points donne l'aire formé par ces trois points.

On a donc:

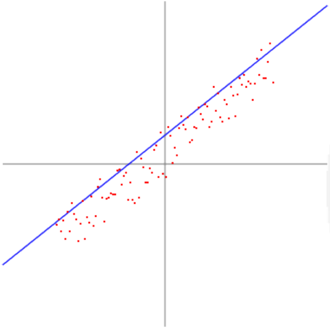
$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge d &= 0 \\ (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3) \wedge (a\mathbf{e}_{12} + b\mathbf{e}_{13} + c\mathbf{e}_{23}) &= 0 \\ (xc - yb + wa)\mathbf{e}_{123} &= 0 \end{aligned}$$

On prend n points et on les stocke dans une matrices:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & w_1 \\ x_2 & -y_2 & w_2 \\ & \vdots & \\ x_n & -y_n & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

On cherche le kernel de la matrice contenant les points. Pour résoudre cette équation on utilise la SVD.
La solution de notre équation est la dernière colonne de la matrice V fourni par la SVD.

Le résultat obtenu est le suivant:



Le problème vient des erreurs numériques.
Pour réduire ces erreurs on prend en compte la variance et la moyenne des colonnes concernées et on créé une matrice de normalisation à partir de ces données.

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sigma_x} & 0 & \frac{-\bar{x}\sqrt{2}}{\sigma_x} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sigma_y} & \frac{-\bar{y}\sqrt{2}}{\sigma_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$