

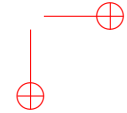
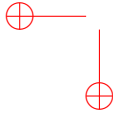
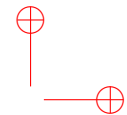
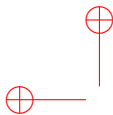
Marcel-Paul Schützenberger

ŒUVRES COMPLÈTES

éditées par
Jean Berstel, Alain Lascoux et Dominique Perrin

Tome 3 : 1953–1955

**Institut Gaspard-Monge, Université Paris-Est
2009**



Introduction

Tome III : 1953–1955

La note *Le problème des mots dans les treillis modulaires libres* [1953-6] annonce la solution d'un problème ouvert : la décidabilité du problème des mots dans le treillis modulaire libre finiment engendré. Le résultat est cependant incorrect et Freese a prouvé en 1980 que le problème est indécidable pour cinq générateurs [3].

Le mémoire *Contribution aux applications statistiques de la théorie de l'information* [1954-3] est la thèse de doctorat d'État de M.-P. Schützenberger. Elle fut soutenue à la Faculté des Sciences de Paris le 20 juin 1953, devant le jury composé de Maurice René Fréchet (président), Albert Châtelet et Georges Darmon (examineurs) et publiée dans les *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, vol. 3, 1954, p. 3–117. Dans une première partie, après un exposé rapide sur la théorie des treillis, libres, distributifs et modulaires, on trouve une étude approfondie du treillis de partition. Le calcul de la fonction de Möbius du treillis des partitions d'un ensemble fini de n éléments y est fait explicitement. Posons $(a; q)_0 = 1$ et $(a; q)_n = (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - q^{n-1}a)$ pour n strictement positif et, pour $0 \leq i \leq n$, soit $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$ le coefficient q -binomial $(q; q)_n / ((q; q)_i (q; q)_{n-i})$. On trouve dans cette première partie, à propos d'une application à l'étude des statistiques d'ordre, la démonstration de l'identité, aujourd'hui très classique, $(x + y)^n = \sum_{0 \leq i \leq n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q x^i y^{n-i}$, lorsqu'on suppose que x et y sont deux variables non-commutatives satisfaisant l'identité $yx = qxy$.

La seconde partie reprend une étude faite dans [1951-4]. Son but est d'arriver à une globalisation des deux quantités d'information récemment introduites, celle de Shannon-Wiener en théorie des communications et celle de Fisher en théorie de l'estimation statistique. Une fonction $H(x)$ est ainsi définie, devant mesurer la quantité d'information contenue dans une observation, lorsqu'un système se trouve ou non dans un ensemble de probabilité x . Sous des hypothèses assez larges, on prend $H(x)$ sous la forme $H(x) = xD \log x + (1-x)D \log(1-x)$, où D est supposé être un opérateur linéaire. Si la loi de probabilité de base dépend du paramètre θ et si $D = \partial^2 / \partial^2$, on obtient la quantité d'information de Fisher, qu'on utilise pour l'estimation de θ . Si $D = \log_2$, on obtient la quantité d'information de Shannon-Wiener.

La troisième partie, « Méthodes de groupage », est la description d'un modèle statistique, où les observations sont des fonctions de variables dont on veut faire l'étude. Il s'agit, par exemple, d'une situation que l'on rencontre dans les techniques de l'analyse de la variance. Plusieurs exemples d'applications sont

Introduction

donnés. Il ne semble pas que ce modèle ait été repris ultérieurement par M.-P. Schützenberger lui-même ni par d'autres auteurs.

Disons quelques mots sur les personnalités du jury de thèse que M.-P. Schützenberger avait constitué. L'arithméticien Albert Châtelet (1883 – 1960) [1] avait, comme déjà indiqué dans l'introduction au tome I, encouragé M.-P. Schützenberger à poursuivre ses travaux sur les treillis, lorsque celui-ci commençait à peine ses travaux en mathématique; puis, Georges Darmon (1888 – 1960) [2], directeur de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, longtemps président de l'Institut International de la Statistique et Maurice René Fréchet (1878 – 1973) [4], qui a contribué à tant de domaines mathématiques, allant de la topologie à la statistique. Notons que Émile Borel, Maurice Fréchet et Georges Darmon se sont succédés, dans l'ordre, pour occuper la chaire de calcul des probabilités à la Faculté des Sciences de Paris.

Il est remarquable de constater que, dans ces trois années 1953 – 55, M.-P. Schützenberger a exercé ses talents dans de nombreux domaines de recherche : médecine, statistique appliquée et naturellement mathématique.

-
- [1] Paul Dubreil. L'algèbre, en France, de 1900 à 1935. In *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, volume 3, pages 69–81, Paris, 1982. Institut Henri Poincaré.
 - [2] Daniel Dugué. Georges Darmon, 1888-1960. *Ann. Math. Statist.*, 32(2) :357–360, 1961.
 - [3] Ralph Freese. Free Modular Lattices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 261(1) :81–91, 1980.
 - [4] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. Fréchet biography. publication électronique. [http ://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Frechet.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Frechet.html).

Année 1953

Bibliographie

- [1] P. F. Denoix, G. Denoix, and Marcel-Paul Schützenberger. Contribution à l'étude du rôle des facteurs héréditaires dans le cancer. *Bull. Inst. Nat. Hyg.*, 8(2) :247–257, 1953.
- [2] Y. Chabbert, G. Terrial, and Marcel-Paul Schützenberger. Évolution de la sensibilité aux antibiotiques des germes isolés chez les malades de ville de 1949 à 1952. *Ann. Inst. Pasteur*, 84(5) :952–955, 1953.
- [3] Marcel-Paul Schützenberger. Remarques sur le problème du codage binaire. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 2 :125–128, 1953.
- [4] Marcel-Paul Schützenberger. Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle : $F(x + y) = F(x)F(y)$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 236 :352–353, 1953. Séance du 22 décembre 1952.
- [5] Marcel-Paul Schützenberger. Sur l'extension d'un groupe de permutations d'un ensemble fini à l'ensemble des parties de celui-ci. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 236 :449–450, 1953. Séance du 26 janvier 1953.
- [6] Marcel-Paul Schützenberger. Le problème des mots dans les treillis modulaires libres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 237 :507–508, 1953. Séance du 26 janvier 1953.
- [7] Marcel-Paul Schützenberger and Raymond Turpin. Remarques sur l'étude formelle de la consanguinité dans les populations monogames. *Semaine des Hôpitaux de Paris*, 29(76) :3974–3978, 14 décembre 1953.
- [8] P. Lefever, Marcel-Paul Schützenberger, and Raymond Turpin. Résultats d'une enquête sur l'influence des facteurs progénésiques sur les malformations humaines. *Semaine des Hôpitaux de Paris*, 29(76) :3973–3974, 14 décembre 1953.
- [9] Gisèle Normant, Marcel-Paul Schützenberger, and Raymond Turpin. Analyse statistique de l'activité d'un service parisien de pédiatrie. *Revue de l'Assistance Publique Paris*, 26 :844–850, 1953.

MINISTÈRE DE LA SANTÉ PUBLIQUE

BULLETIN
DE
L'INSTITUT NATIONAL
D'HYGIÈNE

TOME 8

N° 1. — JANVIER-MARS 1953

*VIRTVTE DVCE CO-
MITE FORITVDINE*



COLLEGIUM CIVILE
AD SANITATEM

MASSON & C^{ie}, ÉDITEURS
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN
===== PARIS (VI^e) =====

Année 1953 1953-1. Contribution à l'étude du rôle des facteurs héréditaires...

Imprimé avec le périodique
Bulletin de l'Institut National d'Hygiène.

Extrait du Tome 8, n° 2, Avril-Juin 1953
(pp. 247-257).

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU RÔLE DES FACTEURS HÉRÉDITAIRES DANS LE CANCER

Les documents recueillis au cours de l'enquête sur la condition biologique des porteurs de tumeurs ont été étudiés en vue d'apporter quelques éléments nouveaux à la discussion sur l'influence des facteurs héréditaires dans l'apparition des divers types de cancers. Nous avons rassemblé ici les éléments numériques de cette étude et nous les présentons avec un commentaire explicatif qui n'a d'autre ambition que de justifier et d'expliquer les calculs effectués. C'est donc dire qu'une analyse critique de ces résultats et qu'une bibliographie ne sauraient trouver place ici; nous renvoyons, pour cette étude approfondie, à la thèse publiée sur ce sujet par l'un de nous (1).

NATURE DES DOCUMENTS RECUEILLIS

Le matériel de base se compose de 3 331 dossiers recueillis dans les Centres Anticancéreux de France, dans les services spécialisés de l'Assistance Publique et, enfin, dans un hôpital militaire. Ce matériel n'a été l'objet d'aucune sélection préalable et comporte, pour chaque sujet, mention :

- 1° de la localisation du cancer traité;
- 2° de l'existence éventuelle d'un cancer chez les grands-parents, père et mère, frères et sœurs (nous appellerons systématiquement ces derniers « germains »). Aucun compte n'a été tenu de la mention éventuelle d'un cancer parmi les oncles ou neveux du proposant. Enfin, chaque famille n'est représentée qu'une fois dans notre échantillon.

La précision du diagnostic relatif au cas de cancer dans la famille est évidemment sujette à caution, mais nous ne pensons pas que cette enquête diffère qualitativement sur ce point des autres travaux similaires effectués tant en France qu'à l'étranger. Il est bien connu, en effet, que de par la nature même de la maladie, il est impossible de tenir un compte exact de l'influence des divers facteurs perturbateurs qui

(1) DENOIX (GILLES). Recherches et considérations sur les modalités héréditaires du cancer basées sur le dépouillement de 3 331 dossiers d'enquête. *Thèse*, Paris, 1953.

TABLEAU I

Localisation du proposant	Nombre total de proposants	Avec au moins 1 cas chez les ascendants		Avec au moins 1 cas chez les ascendants			Avec au moins 1 cas chez les ascendants	
		+ un germain au moins	Sans germain	Chez le père ou la mère	Chez les grands- parents	Dans les deux géné- rations	Paternels	Maternels
Bucco-pharynx	473	8	60	54	11	3	33	2
Larynx	164	1	20	20	1	0	13	1
Col utérin	1 243	13	221	151	63	20	89	16
Vulve, vagin, trompes	95	1	20	14	3	4	8	3
Corps utérin	58	1	14	10	3	2	11	2
Verge, testicules	73	2	12	12	1	1	6	0
Ovaires	26	0	4	2	2	0	2	0
Tube digestif	224	5	31	25	8	3	14	3
Poumon, trachée	23	0	6	5	1	0	3	0
Sein	413	9	84	56	33	4	31	3
Peau exposée	251	6	31	27	6	4	15	2
Peau non exposée	62	1	14	11	2	2	7	2
Tissu osseux	45	0	6	3	3	0	2	0
Tissu hémopoïétique	65	1	10	6	5	0	6	0
Tissu musculaire et conjonctif	27	0	4	2	1	1	4	0
Péritoine, foie	34	0	9	8	0	1	4	0
Rein	10	0	0	0	0	0	0	0
Urètre, vessie	26	0	4	4	0	0	2	0
Glandes endocrines	19	0	3	2	0	1	2	1

risquent de fausser les statistiques (âge auquel a eu lieu le décès des parents ou des germains; évolution dans la sûreté du diagnostic des cancers, etc.).

I. *Incidence globale du cancer dans la famille des proposants.* — L'ensemble des informations est consigné dans le tableau I qui donne, en pourcentage, le nombre moyen, pour 100 proposants, des cas observés chez les grands-parents, parents ou germains. La classification que nous avons adoptée (voies aérodigestives supérieures, tube digestif, col utérin, sein, peau exposée et varia) peut sûrement être l'objet de critiques nombreuses. Nous l'avons choisie, tant pour permettre une comparaison facile entre les cancers chez le proposant et les cancers dans sa famille, que pour regrouper les dossiers en classes relativement homogènes et surtout représentées par un nombre de cas du même ordre de grandeur, ce qui était, *a priori*, une exigence nécessaire pour la suite des calculs.

TABLEAU I bis
Nombre moyen de cas de cancer
observés pour 100 familles de proposants classés suivant le degré de parenté.

	Nombre de dossiers de proposants	Nombre de grands-parents cancéreux %	Nombre de pères et mères %	Nombre de ger- mains %	Nombre de dossiers avec au moins un cancer dans la famille
V. A. D. S. (voies aéro - digestives supérieures).	637	2,2	12,4	6,1	115
T. D. (tube digestif).	224	4,9	13	5,8	44
Utérus	1 301	7	14,8	4,3	287
Sein	413	9,5	14,8	8	115
Peau exposée	251	3,9	12,7	8,4	51
Varia	505	5,7	15,9	5,9	125

On observera que la dernière colonne donne une indication sensiblement différente du reste du tableau; en effet, elle concerne le nombre de dossiers dans lesquels ont été relevés un ou plusieurs cancers parmi les membres de la famille du proposant. Les chiffres des autres colonnes sont relatifs au nombre de cas de cancer par dossier, qui est nécessairement plus élevé puisque de nombreux sujets présentent, par exemple, simultanément un cancer chez un de leurs grands-parents et chez un ou plusieurs de leurs germains. Aucun commentaire particulier n'est nécessité par ce tableau; on remarquera, toutefois, que la proportion des parents atteints de cancer est à peu près uniforme, quelle que soit la localisation du cancer (de l'ordre de 10 à 15 %) et qu'elle est très nettement plus forte que celle relative aux grands-parents. En dehors des raisons purement génétiques, il semble nécessaire d'invoquer là le rôle d'une méconnaissance des faits les plus anciens. Enfin, chez les ger-

main, le pourcentage est relativement élevé par rapport à celui des parents, surtout si l'on tient compte de ce fait que, par définition, les germains sont à peu près du même âge que le malade dont on a recueilli l'observation.

II. *Distribution des localisations cancéreuses chez les parents des proposants* (tableau II). — Dans ce tableau nous avons donné, en chiffres absolus, le nombre de grands-parents, parents et germains présentant une localisation (colonne) pour chaque localisation (ligne) du proposant. Le nombre des cases qui ne sont pas représentées par aucun sujet rend nécessaire d'opérer des regroupements si l'on veut aboutir à quelque résultat. C'est ce qui a été fait dans le tableau III où nous avons totalisé, pour chaque paire de localisation, le nombre de cas observés.

La première hypothèse à vérifier est la liaison entre la localisation du sujet et celle qu'on rencontre dans sa famille. En supposant que,

TABLEAU II

		Localisations dans les familles						
		V.A.D.S.	T. D.	Utérus	Sein	Peau	Varia	Total
Localisations des proposants.	V. A. D. S.	3 19 9	6 21 9	0 9 12	2 13 4	0 2 1	6 15 4	17 19 39
	T. D.	1 1 0	4 10 2	0 1 3	1 1 0	3 2 2	2 14 6	11 29 13
	Utérus	11 17 5	18 80 15	24 41 19	14 17 10	9 5 0	15 33 7	91 193 56
	Sein	5 6 3	10 25 8	0 9 5	10 9 10	2 3 0	5 9 7	39 61 33
	Peau exposée...	1 2 2	3 10 6	0 4 3	3 5 4	1 4 1	2 7 5	10 32 21
	Varia	2 8 5	9 33 10	6 14 5	5 8 1	1 2 0	6 15 9	29 80 30
	Total	23 53 24	50 179 50	37 78 47	35 53 29	16 18 4	36 93 38	197 474 192
Un sujet appartenant aux pères et mères, atteint de cancer de la peau, n'est pas compté dans ce tableau.								
N. B. Lire dans chaque case :		<div>Grands-parents.</div> <div>Pères et mères.</div> <div>Germains.</div>						

CANCER

251

quelle que soit la localisation du sujet, la même proportion de cas devrait être observée dans les différentes lignes du tableau, on aboutit aux valeurs théoriques indiquées entre parenthèses dans le tableau III. Il est très immédiat que les chiffres, situés dans la diagonale principale, présentent un net excès par rapport aux valeurs théoriques. Ceci indique que les membres de la famille d'un malade manifestent beaucoup plus souvent la même localisation que celui-ci; au total, en effet, on ne devrait trouver que 144 couples (proposant/membres de sa famille) présentant la même localisation, alors que l'on en a observé 196. Cette différence est très significative et nous permet d'établir, de manière formelle, une conclusion déjà souvent signalée par les différents auteurs qui se sont occupés de ces problèmes et qui est la tendance à l'apparition du cancer à une même localisation dans une même famille.

TABLEAU III

		Localisations dans les familles					
		V. A. D. S.	T. D.	Utérus	Sein	Peau exp.	Varia
Localisations des proposants.	V. A. D. S.	31 (15,6)	36 (43,6)	21 (25,3)	19 (18,3)	3 (5,9)	25 (26,1)
	T. D.	2 (6,1)	16 (17,1)	4 (9,9)	2 (7,2)	7 (2,3)	22 (10,2)
	Utérus	33 (39,4)	113 (109,9)	84 (63,8)	41 (46,1)	14 (15)	55 (65,8)
	Sein	14 (15,4)	43 (43)	21 (25)	29 (18)	5 (5,8)	21 (25,7)
	Peau exposée...	5 (7,3)	19 (20,4)	7 (11,8)	12 (8,5)	6 (2,8)	14 (12,2)
	Varia	15 (16,1)	52 (44,9)	25 (26,1)	14 (18,8)	3 (6,1)	30 (26,9)
	Total	100	279	162	117	38	167
							863

III. — Si nous voulons aller plus loin, il nous faut donc éliminer cette première influence. Nous avons donc calculé quelle serait la distribution du cancer dans la famille du proposant si on se limitait aux cas dont la localisation n'est pas la même que la sienne. Il s'en déduit des chiffres qui sont consignés entre parenthèses au tableau IV. Les chiffres ont été calculés de la manière suivante, soit : P_{ij} la probabilité pour un parent d'un proposant, présentant une localisation i , d'avoir, s'il est cancéreux, une localisation j . Le tableau III nous a montré que la probabilité P_{ii} était plus grande que les autres. Dans notre 2^e hypo-

thèse, nous nous limitons donc aux probabilités P_{ij} correspondant à i différent de j . L'hypothèse selon laquelle celle-ci ne dépendrait pas de j quand $j = i$ revient à effectuer le calcul sur la base des probabilités $P'_{ij} = \frac{P_{ij}}{1 - P_{ii}}$ et à tester l'hypothèse que ces probabilités P'_{ij} sont indépendantes de l'indice i caractérisant la localisation du sujet. Sans entrer dans les détails techniques de peu d'intérêt pour le lecteur non spécialisé, rappelons qu'il suffit pour cela de résoudre l'équation au maximum de vraisemblance puis d'en déduire les fréquences attendues du tableau V.

L'échantillon est sans doute trop restreint pour que l'on puisse prouver des déviations, à moins qu'elles ne soient très importantes. Nous sommes donc réduits à ne proposer que des hypothèses quant aux constellations familiales de localisations. Les cas correspondant à des différences marquées ont été indiqués d'un astérisque dans le tableau V. On notera que les cas correspondant à chacun des deux éléments de la triade (V. A. D. S. - utérus - sein) présentent un excès des nombres observés sur les nombres attendus. Sans pouvoir en déduire des conclusions formelles et à titre de simple hypothèse directrice pour des travaux ultérieurs, on suggérera que ces 3 localisations forment un groupe, à l'intérieur duquel tendrait à se manifester un certain type de prédisposition héréditaire. Il serait très nécessaire de multiplier le nombre d'observations, afin d'aboutir à des résultats plus sûrs qui pourraient révéler d'intéressantes liaisons entre les mécanismes favorisant le développement des tumeurs, notamment, il serait souhaitable de posséder un échantillon dont la répartition initiale entre les différentes localisations soit plus homogène.

Dans le cas des cancers de l'utérus et du sein le dépouillement complet des observations fournit les chiffres suivants :

TABLEAU IV

	Localisation de la famille													
	V. A. D. S.		T. D.		Utérus		Sein		Peau exp.		Varia		Total	
	Ut.	S.	Ut.	S.	Ut.	S.	Ut.	S.	Ut.	S.	Ut.	S.	Ut.	S.
Père	15	6	47	8	0	—	1	—	4	1	21	6	88	21
Mère	2	—	33	17	41	9	16	9	1	2	12	3	105	40
Frère	5	3	4	7	—	—	—	—	—	—	5	2	14	12
Sœur	—	—	11	1	19	5	10	10	—	—	2	5	42	21
Grand-père pat. ...	4	2	3	—	—	—	—	—	1	1	3	1	11	4
Grand-mère pat. ...	—	—	1	2	10	3	6	4	—	—	3	2	20	11
Grand-père mat. ...	7	2	6	4	—	—	—	—	1	1	—	—	15	7
Grand-mère mat. ...	—	1	8	4	14	4	8	6	7	—	8	2	45	17

(Ut. : proposantes présentant un cancer de l'utérus.)
(S. : proposantes présentant un cancer du sein.)

Année 1953

1953-1. Contribution à l'étude du rôle des facteurs héréditaires...

CANCER

253

A titre d'exemple illustrant de manière assez frappante cette similitude des localisations, on peut extraire du tableau III les chiffres suivants qui sont particulièrement remarquables puisqu'ils ne concernent que des proposantes et des localisations chez les membres de la famille, pour lesquelles des erreurs de diagnostic sont relativement plus improbables :

Proposant	Total famille	
	Utérus	Sein
Utérus.....	84	41
Sein	21	29

IV. — De nombreux auteurs ont observé que, lorsqu'il s'agit d'une proposante, il se rencontrait beaucoup plus de cancers chez sa mère ou ses sœurs ou ses grands-mères que parmi les membres masculins de sa famille.

TABLEAU V

		Localisations dans les familles					
		V. A. D. S.	T. D.	Utérus	Sein	Peau exp.	Varia
Localisations des proposants.	V. A. D. S.		(41,30) 36*	(18,39) 21	(15,15) 19	(4,97) 3*	(24,18) 25*
	T. D.	(5,81) 2*		(9,15) 4*	(7,54) 2*	(2,47) 7	(13,03) 22
	Utérus	(30,74) 33	(108,67) 113		(39,88) 41	(13,09) 14	(61,62) 55*
	Sein	(12,09) 14	(42,73) 43	(19,03) 21		(5,15) 5*	(25,01) 21*
	Peau exposée...	(6,02) 5*	(21,26) 19	(9,47) 7*	(7,80) 12		(12,45) 14
	Varia	(13,92) 15	(49,19) 52	(21,91) 25	(18,05) 14*	(5,93) 3*	

A priori, ceci n'est nullement surprenant si l'on fait la supposition, bien naturelle, qu'il existe des facteurs héréditaires commandant, par exemple, l'apparition des cancers des organes génitaux et que, d'autre part, l'extériorisation de ces facteurs est plus facile chez les sujets du sexe féminin. D'autre part, il a été signalé, sans preuve bien formelle,

qu'une certaine matroclinie se manifesterait dans l'hérédité cancéreuse, c'est-à-dire que les filles seraient plus dépendantes du patrimoine héréditaire qu'elles ont reçu de leur grand-mère *maternelle* que de leur grand-mère *paternelle*. Le mécanisme de tels modes d'hérédité est extrêmement obscur si l'on se limite à un schéma mendélien. Il n'en serait que plus intéressant de déterminer exactement l'existence de semblables phénomènes. Nous avons donc repris sous cet angle les chiffres fournis par l'enquête. Pour cela, nous nous sommes limités aux localisations indépendantes à priori de toute influence sexuelle (V. A. D. S., tube digestif, peau, et varia non sexuel); les chiffres suivants ont été obtenus :

Sexe des proposants	Nombre de cas	
	Frères	Sœurs
Masculin	26	31
Féminin	13	16

Sexe des proposants	Nombre de cas		
	Pères	Mères	Total
Masculin	60 (53,4)	55 (61,6)	115
Féminin	25 (31,6)	43 (37,4)	68
<i>Total</i>	85	98	183

Aucune différence n'apparaît en ce qui concerne les frères et sœurs; par contre, en ce qui concerne les pères et les mères, la comparaison entre les chiffres observés et les chiffres attendus (entre parenthèses dans le tableau), dans l'hypothèse d'une non-influence des facteurs sexuels, est significative; il semble donc qu'on ne puisse assimiler rigoureusement les cancers, même de localisation non sexuelle, chez les hommes et chez les femmes. Enfin, le tableau suivant, donnant le nombre de cas de cancers chez les grands-parents en fonction du sexe du proposant, révèle une différence intéressante, bien que non significative.

Sexe du proposant	Nombre de cas	
	Grand-père paternel	Grand-mère paternelle
Masculin	12	11
Féminin	2	8
	Grand-père maternel	Grand-mère maternelle
Masculin	7	6
Féminin	5	4

Regroupant ce tableau, on observe 19 cas de cancers chez des sujets mâles présentant un cancer parmi leurs *grands-parents mâles*, alors que

17,0 seulement auraient dû être observés s'il n'y avait pas d'influence sexuelle. Mais, regroupant d'une autre manière, on observe 23 cancers chez des sujets mâles, présentant aussi un autre cas chez leurs grands-parents paternels, au lieu du nombre attendu : 21,6. Une fois de plus, il ne s'agit là que d'une simple indication qui demanderait à être précisée sur des nombres plus grands. Les chiffres correspondants pour les cancers sexuels féminins ont été donnés dans le tableau IV.

Enfin, le total général des cas de cancers, en fonction du sexe du proposant et des membres de sa famille, donne les chiffres suivants :

Nombre de cas chez ses	Sexe du proposant	
	Masculin	Féminin
- frères	26	39
- sœurs	31	79
- père	60	134 ←
- mère	55	188 ←
- grand-père paternel	12	17 ←
- grand-mère paternelle	11	39 ←
- grand-père maternel	7	27 ←
- grand-mère maternelle	6	66 ←

Les oppositions significatives sont marquées d'une double flèche et l'on observera que, chez les proposantes, il y a bien cette matroclinie qui n'était qu'indiquée chez les proposants. Ce résultat nous paraît fort important, il est regrettable qu'il soit basé, peut-être, sur un nombre de cas trop peu élevé pour que l'on puisse tenir compte des différents facteurs susceptibles d'en fausser la signification. Toutefois, il ne semble pas très clair comment une erreur systématique pourrait entraîner les femmes à se souvenir plus d'un cancer chez leurs grands-parents maternels que les hommes chez leurs grands-parents paternels; nous sommes persuadés, quant à nous, qu'il s'agit bien là d'une réalité et non point d'un artéfact statistique.

CONCLUSION

L'étude des 3 331 dossiers nous a permis de comparer la fréquence du cancer chez les parents les plus proches des proposants, en fonction de la localisation.

Il est certain que la même localisation se retrouve préférentiellement dans toute la famille d'un proposant. Il semble que, au delà de ce fait, il existe une certaine inégalité dans la distribution des cancers de la

256

MALADIES SOCIALES

famille, en fonction de la localisation du proposant, et on peut suggérer l'association V. A. D. S.-utérus-sein. Enfin, l'examen des chiffres relatifs aux G. P. semble indiquer l'existence d'une matroclinie et d'une patroclinie dont l'interprétation est extrêmement difficile et qui mériterait des recherches ultérieures. Dans ce but, il nous semblerait indiqué de reprendre une semblable enquête sur un nombre plus considérable de sujets et surtout sur un échantillon mieux représenté en divers types importants, tels que les cancers digestifs. Il serait, de même, très utile de ne pas être obligé de regrouper ensemble des cancers aussi divers que les cancers du rein ou du poumon, qui semblent présenter d'ailleurs de grandes différences dans le rôle qu'y jouent pour eux les facteurs héréditaires. Afin de simplifier au maximum le travail des enquêteurs, il semble qu'on pourrait se limiter à la seule mention des données figurant dans la fiche ci-jointe que nous soumettrons à l'appréciation des cancérologues.

Travail de la Section Cancer, présenté par

P. F. DENOIX, M. P. SCHÜTZENBERGER, G. DENOIX.

Année 1953 1953-1. Contribution à l'étude du rôle des facteurs héréditaires...

CANCER

257

*PROJET DE QUESTIONNAIRE
POUR UNE ENQUÊTE SUR L'HÉRÉDITÉ DU CANCER*

**Enquête hospitalière
sur l'hérédité morbide des porteurs de tumeurs.**

Nom du malade Prénom..... Sexe.....
N° du dossier hospitalier.....
Service hospitalier

Age du malade au 1 ^{er} signe de cancer (ou, faute de mieux, à la 1 ^{re} consultation où le diagnostic de cancer a été envisagé).		Diagnostic du cancer (variété histologique ou signe de certitude).					
Causes de décès (ou existence d'un cancer guéri, en évolution ou ayant cédé le pas à une autre cause de mort).							
du père : <table border="1" style="float: right; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="padding: 2px;">âge de décès (ou âge actuel).</td> </tr> </table>		âge de décès (ou âge actuel).	de la mère : <table border="1" style="float: right; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="padding: 2px;">âge de décès (ou âge actuel).</td> </tr> </table>		âge de décès (ou âge actuel).		
âge de décès (ou âge actuel).							
âge de décès (ou âge actuel).							
du grand-père paternel : <table border="1" style="float: right; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="padding: 2px;">âge de décès (ou âge actuel).</td> </tr> </table>	âge de décès (ou âge actuel).	de la grand-mère paternelle : <table border="1" style="float: right; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="padding: 2px;">âge de décès (ou âge actuel).</td> </tr> </table>	âge de décès (ou âge actuel).	du grand-père maternel : <table border="1" style="float: right; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="padding: 2px;">âge de décès (ou âge actuel).</td> </tr> </table>	âge de décès (ou âge actuel).	de la grand-mère maternelle : <table border="1" style="float: right; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="padding: 2px;">âge de décès (ou âge actuel).</td> </tr> </table>	âge de décès (ou âge actuel).
âge de décès (ou âge actuel).							
âge de décès (ou âge actuel).							
âge de décès (ou âge actuel).							
âge de décès (ou âge actuel).							
des frères :		des sœurs :					
S'il existe des oncles ou tantes ayant présenté un cancer : quels sont-ils ? quel cancer ?							

Nota. — Mieux vaut écrire un diagnostic sans précision qu'un diagnostic plus précis mais moins sûr.

1953-2. Évolution de la sensibilité aux antibiotiques des germes...

Année 1953

91468

ANNALES
DE
L'INSTITUT PASTEUR

PUBLIÉES PAR

LA DIRECTION DE L'INSTITUT PASTEUR

Avec le concours des Chefs de Service
et des Chefs de Laboratoire

Secrétaire général : P. LÉPINE

91468

TOME QUATRE-VINGT-QUATRIÈME

Janvier-Juin 1953

MASSON ET C^{IE}, ÉDITEURS

Libraires de l'Académie de Médecine
120, Boulevard Saint-Germain
PARIS

ÉVOLUTION DE LA SENSIBILITÉ AUX ANTIBIOTIQUES DES GERMES ISOLÉS CHEZ LES MALADES DE VILLE DE 1949 A 1952

par Y. CHABBERT, G. TERRIAL et M. P. SCHUTZENBERGER.

(Institut Pasteur.)

Sous l'influence de l'antibiothérapie intensive pratiquée ces dernières années on s'est attendu à voir apparaître une sélection progressive des souches les plus résistantes.

En milieu hospitalier, la sélection des Staphylocoques résistants à la

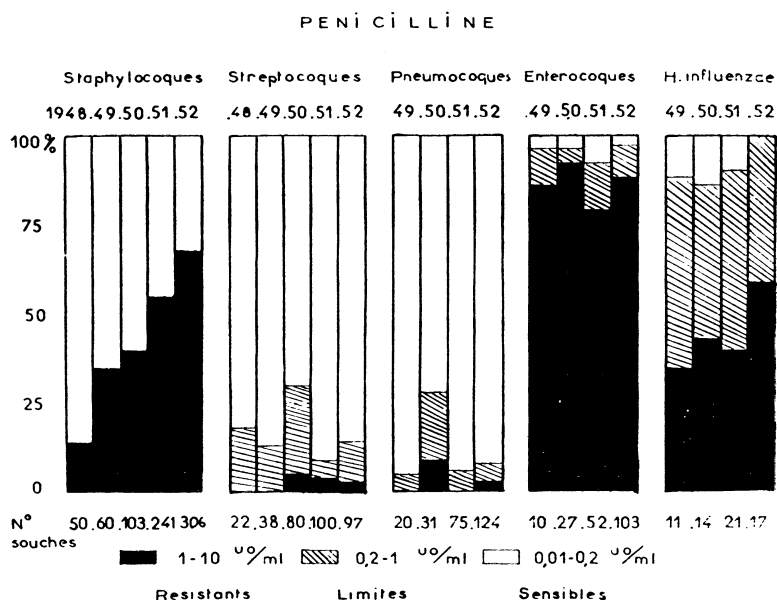


FIG. 1

Pénicilline par production de Pénicillinase s'est opérée dès 1949 [1]. Pour les autres antibiotiques : Streptomycine, Auréomycine, Chloramphénicol, Terramycine, nous avons signalé [3] en 1952 un phénomène analogue, avec prédominance de certains types résistants à la plupart des antibiotiques. Des augmentations de pourcentages des souches résistantes ont été observées dans diverses espèces microbiennes [4], mais sans avoir la netteté de celles constatées chez les Staphylocoques.

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE MICROBIOLOGIE

953

Mais les observations faites sur les souches isolées dans les hôpitaux représentent un choix, car, d'une part l'hospitalisation est souvent réservée à des malades n'ayant pas réagi aux premiers traitements antibiotiques, et d'autre part on observe souvent de véritables épidémies de salle provoquées par une souche résistante.

Les statistiques rapportées ici proviennent de résultats obtenus avec des souches isolées à Paris chez des *malades de ville non hospitalisés*. Bien qu'un certain nombre de facteurs soient encore susceptibles de

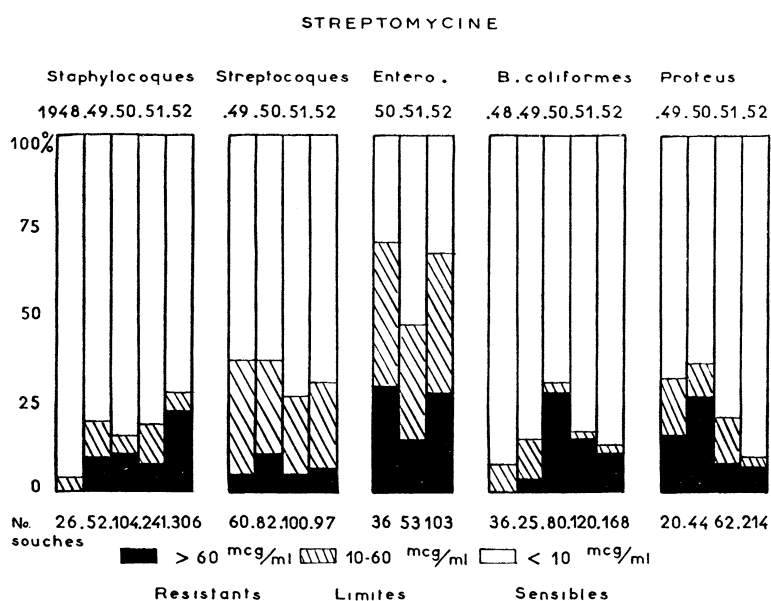


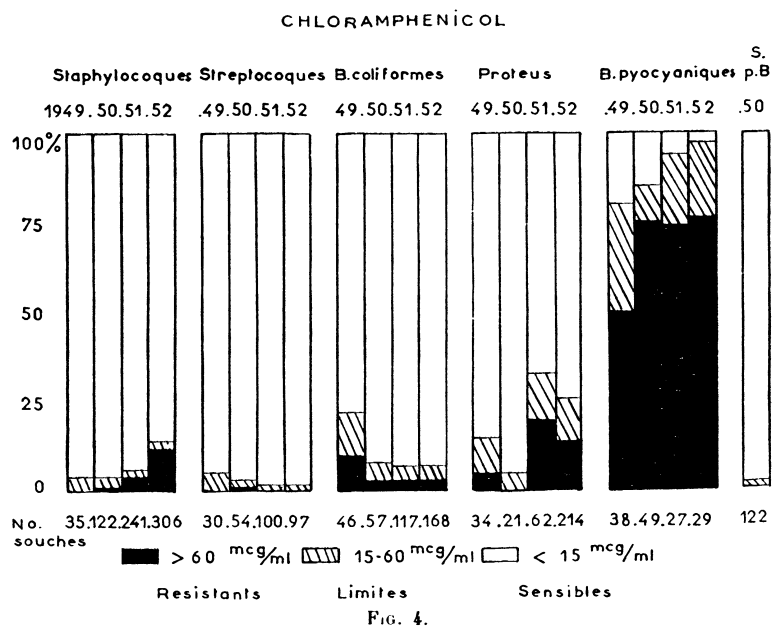
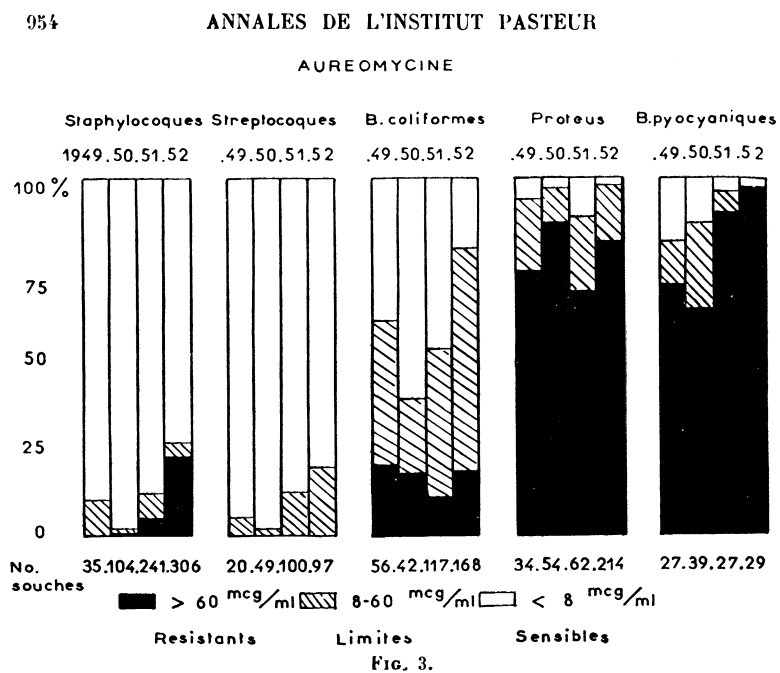
Fig. 2.

jouer, ces statistiques représentent l'évolution qui a pu se produire dans l'ensemble de la population urbaine.

La technique de titrage utilisée est la technique des disques séchés préparés par l'Institut Pasteur. Un résultat chiffré est obtenu par un procédé basé sur les différences de diamètre des zones d'inhibition obtenues entre une souche test et la souche à titrer [2]. Les concentrations inhibitrices ont été ensuite rangées en trois catégories : Sensibles, Limites et Résistantes suivant des taux figurés sur les schémas.

RÉSULTATS. — Les *Staphylocoques* occupent une place à part.

Pour la Pénicilline on note une augmentation progressive du pourcentage des souches productrices de Pénicillinase. Compte tenu d'une endémicité qui semble constante, cette augmentation peut s'expliquer



SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE MICROBIOLOGIE

955

soit par un taux d'échanges élevé, soit par la présence sur chaque individu de souches multiples. Le taux observé en 1952 en ville (68 p. 100) est de l'ordre de celui observé en 1949 dans plusieurs hôpitaux. Il y a donc un retard de quatre ans qui peut servir de base pour apprécier l'évolution possible vis-à-vis des autres antibiotiques.

Pour les trois autres antibiotiques étudiés, le pourcentage des souches résistantes était faible et stable (4-8 p. 100) jusqu'en 1952. On observe alors une élévation significative avec des différences qui coïncident avec la fréquence d'utilisation des produits : Streptomycine (23 p. 100), Auréomycine (22 p. 100), Chloramphénicol (12 p. 100). Si cette élévation obéit aux mêmes lois que pour la Pénicilline, on peut s'attendre à une évolution progressive vers la résistance dans les années à venir.

Streptocoques-Pneumocoques : De 1949 à 1952, on n'observe pour les quatre antibiotiques aucune augmentation des souches résistantes, leur pourcentage restant toujours très faible ou nul. Pour l'Auréomycine, où l'on n'a pas trouvé de souches résistantes, il y a en 1952 une élévation faible mais significative des souches limites (19 p. 100). Il faut aussi signaler l'augmentation nette du nombre de souches d'Entérocoques isolées en dehors du tractus digestif.

Bacilles coliformes : Nous avons groupé sous ce nom les souches appartenant aux genres *Escherichia* et *Klebsiella*. Dans ce groupe on n'observe aucune évolution nette vers la résistance. L'élévation significative observée en 1950 pour la Streptomycine ne s'est pas maintenue ; elle peut avoir coïncidé avec une période où la Streptomycine était utilisée seule sans association.

Proteus : Les modifications observées pour le Chloramphénicol ne sont pas significatives. Avec la Streptomycine on retrouve l'élévation transitoire observée en 1950. Le genre est naturellement résistant à l'Auréomycine, mais un faible taux de souches sensibles et limites semble se maintenir.

Pseudomonas : *Ps. aeruginosa* était naturellement peu sensible à l'Auréomycine et au Chloramphénicol ; on observe une disparition progressive des souches sensibles.

Il en est de même pour les souches d'*H. influenzae* vis-à-vis de la Pénicilline.

EN RÉSUMÉ. — Pour les souches isolées à Paris chez les malades de ville non hospitalisés de 1949 à 1952, seuls les Staphylocoques subissent une évolution significative vers la résistance. Cette évolution a été progressive pour la Pénicilline et ne fait que s'amorcer pour les autres antibiotiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BARBER et M. ROZWADOWSKA-DOWZENKO. *Lancet*, 1948, 641.
- [2] Y. CHABBERT. *Ann. Biol. clin.*, 1951, 9, 544.
- [3] Y. CHABBERT et G. TERRIAL. *Ces Annales*, 1952, 83, 499.
- [4] S. S. SCHNEIERSON. *J. Lab. Clin. Med.*, 1952, 40, 48.

Année 1953

1953-3. Remarques sur le problème du codage binaire

**PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS**

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

Comité de Direction : E. BOREL, A. BARRIOL, H. BUNLE, L.-F. CLOSON, J. COMPEYROT,
G. DARMOIS, F. DIVISIA, E. MORICE, J. RUEFF.

Rédaction : M. FRÉCHET, G. DARMOIS, M. ALLAIS, R. ROY, R. RIVET

Secrétaire de la Rédaction : D. DUGUÉ



VOL. II

PARIS
INSTITUT HENRI POINCARÉ
11, Rue Pierre Curie

REMARQUES SUR LE PROBLÈME DU CODAGE BINAIRE

par

M. P. SCHÜTZENBERGER*Hôpital Saint-Louis, Paris*

INTRODUCTION

Soit le codage binaire optimum du point de vue de la fréquence totale des erreurs d'un ensemble de m messages de longueur l fixée à l'avance. Sa recherche pose un problème combinatoire pour lequel les méthodes de la théorie des communications sont d'assez peu d'efficacité. Le but de cette brève note est de montrer que ce problème se trouve déjà résolu en partie par les travaux des statisticiens qui ont été amenés à construire, pour un but tout différent d'ailleurs, des objets mathématiques, les "balanced incomplete block designs", dont il est possible de montrer qu'ils réalisent précisément ces codes optimum, tout au moins pour certaine valeur des paramètres.

DÉFINITIONS

Par définition, un code sera un ensemble de M messages $m_i = \{X_i^j\}$ constitués chacun par une séquence de L symboles 0 ou 1. Il est naturel de supposer que des considérations de coût relatif imposent à priori une valeur déterminée au nombre N des symboles 1 dans le code et on posera :

$$N = \sum_i r_i = \sum_j k^j$$

où r_i et k^j désignent respectivement le nombre de symboles 1 dans le i ème message et à la j ème position sur l'ensemble de m messages.

Pour deux messages quelconques ou plus généralement pour deux séquences $\{y_a^j\}$ et $\{y_b^{*j}\}$ (on posera (cf. 6) :

$$2 D_{ab} = \sum_j \left[y_a^j (1 - y_b^{*j}) + (1 - y_a^j) y_b^{*j} \right]$$

D sera une distance entre $\{y_a^j\}$ et $\{y_b^j\}$ puisque $D_{ab} = D_{ba}$ et que $D_{ab} = 0$ entraîne l'identité des deux séquences.

STRUCTURE DU BRUIT DE FOND ET DÉCODAGE

Nous supposons que chaque symbole est transmis indépendamment et avec une probabilité constante p d'être reçu correctement.

Dans ces conditions il est évident que le vrai problème du décodage est exactement celui du choix entre plusieurs hypothèses tel qu'il est étudié en statistique mathématique.

Il est donc normal d'adopter une stratégie Mini Max consistant à interpréter la séquence reçue $y_a = \{y_a^j\}$ comme provenant de l'émission de celui des messages m_i tel que $\Pr(y_a^j | m_i)$ soit maximum et en effectuant un tirage au sort avec des probabilités égales si plusieurs messages m_i se trouvaient vérifier cette condition.

Par conséquent, la discussion de l'optimalité d'un code devrait se faire sur la base d'une "information de Wald" c'est-à-dire en considérant des variables de la forme

$$Z_{ij} = \sum_a \Pr(y_a) \log \frac{\Pr(y_a | m_i)}{\Pr(y_a | m_j)}$$

qui permettent cette discrimination entre les messages émis.

De fait, sous cette forme le problème semble inextricable et nous le remplacerons par le problème approché de trouver des codes tel que la valeur minimum de D_{ij} sur l'ensemble de toutes les paires de messages soit la plus grande possible. Nous appellerons pour abréger ces codes "codes optimaux".

LES CODES OPTIMAUX COMME "BALANCED BLOCK DESIGNS"

Théorème : Pour des valeurs données de M , L et N , il existe un code optimal si l'on peut construire une $M \times L$ matrice formée de 0 et de 1 telle que :

- 1°) Ses vecteurs lignes ont tous la même longueur,
- 2°) Ses vecteurs colonnes ont tous la même longueur,
- 3°) Le produit scalaire de deux secteurs lignes a une valeur constante.

Démonstration :

Calculons la variance de k^j sur l'ensemble des positions

$$\begin{aligned} \text{var } (k^j) &= \sum_j (k^j)^2 - \frac{1}{L} (\sum_j k^j)^2 \\ &= \sum_j \left(\sum_i x_i^j \right)^2 - L^{-1} N^2 \end{aligned}$$

par développement de $(\sum_i x_i^j)^2$ et permutations des deux sommations il vient :

$$\text{var } (k^j) = 2 L^{-1} (M^2 L^2 - N^2 - (ML - N)^2) - 2 \sum_{i,i'} D_{ii'}$$

comme $\text{var } (k^j)$ est nécessairement non négatif, la valeur maxima de $\sum_{i,i'} D_{ii'}$ n'est atteinte que si tous les k^j sont égaux à une certaine valeur constante K .

Si cela est arithmétiquement possible, la valeur minimum de $D_{ii'}$ sur l'ensemble des couples de messages sera la plus grande quand tous les $D_{ii'}$ seront égaux. Mais pour un message m fixe, on a :

$$2 \sum_{i,i'} D_{ii'} = \sum_{i,i'} \sum_j (x_i^j (1-x_{i'}^j) + (1-x_i^j) x_{i'}^j) = r_i (M-K) + K (L-r_i)$$

u qui implique cette fois-ci $K \neq M - K$:

$r_i = R$ pour tout i .

Dans le cas où l'on aurait $K = M - K$, le raisonnement ne s'appliquerait pas, mais la conclusion reste sensiblement la même :

Prenons un message quelconque m . En permutant les symboles 0,1 entre eux, dans tous les messages pour certaines positions, on peut faire en sorte que $\{X_i^j\}$ soit toujours 1 sans affecter les $D_{ii'}$, et le raisonnement subsiste pour l'ensemble de ces $m - 1$ messages.

Les conditions énoncées par le théorème sont précisément celles qui définissent les "balanced incomplete block designs", tels qu'ils ont été introduits par F. Y. Yates pour les besoins de l'expérimentation statistique.

Sans entrer dans l'historique de cette théorie, nous rappellerons que le problème général de leur construction n'est pas résolu quoique l'on connaisse à la fois les solutions pour les faibles valeurs de M et de L (tables dans : (3)) et diverses méthodes plus ou moins générales de construction (cf. en particulier (1) (8) et (10)).

On sait d'autre part que les 5 paramètres sont liés par les deux relations diophantiennes :

$$L K = M R$$

$$\text{et } \lambda (m - 1) = L (K - 1)$$

$$\text{où } \lambda = R - D$$

$$\text{et que l'on a toujours (R.A. Fisher 2)}$$

$$L \geq M$$

Que ces conditions ne sont pas suffisantes a été montré pour la première fois dans (9) (et indépendamment peu après dans (12) pour une infinité de valeur des paramètres (si $M = L =$ un nombre paire et si D n'est pas un carré parfait). D'autres résultats plus profonds ont été publiés, récemment (f.bibliographie dans (4) et (7)).

RÉFÉRENCES

- 1 Bose R. C. (1939) Ann. of Eug. IX 353-399
- 2 Fisher R.A. (1940) Ann. of Eug. X 52-75
- 3 " and F. Yates. Statistical tables for biological etc.. 3e edition. London 1948
- 4 Hall M. and Ryser H. J. (1951) Can. J. Math. (4) 495-502
- 5 Hamming R. W. (1950) Bell Syst. Tech. J. (26) 147-161
- 6 Laemmel A. E. (1952) Symp. on Appl. of comm.Theor.London
- 7 Mann. R. M. (1952) Can. J. Math. (4) 222-226
- 8 Rao. C. R. (1946) Proc. Nat. Ins. Ind. 123-135.
- 9 Schutzenberger M. P. (1949) Ann. Of Eug. XIV 286-287
- 10 " (1951) J. Roy. Stat.Soc. (B)XIII.120-125
- 11 " (1953) - Thèse à paraître.
- 12 Shrikande S. S. (1950) Ann. Math. Stat. (2) 106-111.
- 13 Yates F. (1936) Ann of Eug. VII 121-140.

ALGÈBRE. — *Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle :*

$F(x+y) = F(x)F(y)$. Note (*) de M. MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER, présentée par M. Émile Borel.

Nous nous plaçons dans l'anneau des suites formelles d'une algèbre de Banach non commutative \mathcal{B} et nous nous proposons de trouver une série

$$\text{Exp}_u(x) = 1 + \frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_1 a_2} + \frac{x^3}{a_1 a_2 a_3} + \dots,$$

telle que l'on ait identiquement

$$(1) \quad \text{Exp}_u(ax) \text{Exp}_u(by) = \text{Exp}_u(ax + by)$$

pour tout a et b appartenant au centre de \mathcal{B} , chaque fois que x et y satisfont à la condition de commutativité faible :

$$(2) \quad yx = uxy,$$

où u est un élément du centre de \mathcal{B} possédant un inverse. Dans ce cas :

$$(x+y)^n = x^n + (1+u+u^2+\dots+u^{n-1})x^{n-1}y + \dots + \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_u x^{n-m}y^m + \dots + y^n,$$

où l'on a posé (*)

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_u = \frac{[n]_u!}{[m]_u! [n-m]_u!}, \quad \text{avec } [0]_u! = 1 \quad \text{et} \quad [n]_u! = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1-u^{i+1}}{1-u} \right).$$

Par conséquent

$$(3) \quad \text{Exp}_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_u!}$$

(*) Séance du 22 décembre 1952.

(¹) Ces expressions ont été fréquemment étudiées en analyse du point de vue de la théorie des partitions (Cf. LITTLEWOOD, *Theory of group characters*, London, 1950) ou des méthodes énumératives dans les groupes abéliens finis (Cf. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Leipzig, 1937).

Année 1953

1953-4. Une interprétation de certaines solutions de l'équation...

(2)

et l'on peut démontrer les formules suivantes

$$(4) \quad \text{Exp}_u(x) \text{Exp}_{u^{-1}}(-x) = 1,$$

$$(5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{Exp}_u(x + \lambda y) - \text{Exp}_u(x)}{\lambda} = y \text{Exp}_u(x),$$

$$(6) \quad \text{Exp}_u(\sum x_i) = \prod (1 + x_i),$$

si les x_i sont nilpotents et satisfont à l'équation de commutativité faible (2).

Interprétation. — Soit S la matrice d'incidence d'une géométrie projective \mathfrak{g}_h à h dimensions et à coordonnées dans un $\text{GF}(p^n)$. Soit C la matrice de la relation de consécutivité associée ⁽²⁾. Il est possible de montrer que l'on a $S = \text{Exp}_{p^n}(C)$. Soit maintenant $\mathfrak{g}_{h'}$, une variété linéaire à h' dimensions de \mathfrak{g}_h , S' la matrice correspondant aux relations d'incidence qui deviennent des équivalences dans tout homomorphisme de \mathfrak{g}_h qui annule $\mathfrak{g}_{h'}$, C' la matrice de consécutivité associée et enfin $C'' = C - C'$. On a

$$C''C' = p^n C'C'', \quad \text{d'où} \quad S = \text{Exp}_{p^n}(C' + C'') = \text{Exp}_{p^n}(C') \text{Exp}_{p^n}(C'') = S'S''.$$

D'autre part si S^{-1} est la matrice inverse de S , la relation (4) montre que la fonction de Möbius est bien égale à

$$(-1)^k \frac{[k]_{p^n}!}{[k]_{p^n-n}!} = (-1)^k p^{n \frac{k^2-k}{2}} = \mu(k).$$

Cas particuliers. — Pour $u = 1$ on retrouve la fonction exponentielle habituelle avec $\mu(k) = (-1)^k$.

Pour $u = 0$ on obtient

$$\text{Exp}_0(x) = 1 + x + x^2 + \dots = (1 - x)^{-1},$$

avec

$$\mu(0) = 1; \quad \mu(1) = -1; \quad \mu(k > 1) = 0.$$

et pour $u = \infty$ (c'est-à-dire $xy = 0$) :

$$\text{Exp}_\infty(x) = 1 + x.$$

Ces deux derniers cas correspondent dans notre interprétation à ceux du treillis distributif complété et de la chaîne. On observera qu'il est alors possible de calculer *a priori* C' et C'' comme produits *kronckeriens* $C_{h'} \otimes I_{h''}$ et $C_{h''} \otimes I_{h'}$ des matrices de consécutivités et des diagonales correspondant aux treillis de hauteur h' et $h'' = h - h'$. Dans le cas des treillis modulaires non distributifs, cette construction nécessiterait une généralisation que nous ne pouvons pas exposer ici de la notion de produit *kronckerien*.

(2) J. RIGUET, *Bull. Soc. Math.*, 76, 1948, p. 140.

(3)

Enfin il est possible de démontrer que l'expression de S comme somme pondérée de puissance de C ne peut se faire que dans les cas que nous avons étudiés si l'on se limite aux matrices S relatives à des relations d'ordre latticiel. Par contre dans des cas très généraux (produits directs ou subdirects de treillis modulaires, en particulier) on a la relation

$$S = \text{Exp}_{U_1}(C_1) \text{Exp}_{U_2}(C_2) \dots \text{Exp}_{U_i}(C_i),$$

où les C_i sont des matrices de consécuitivité correspondant à des classes de quotients modulo certaines relations d'équivalence sur le treillis considéré.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 236, p. 352-353, séance du 26 janvier 1953.)

Année 1953 1953-5. Sur l'extension d'un groupe de permutations d'un ensemble...

ALGÈBRE. — *Sur l'extension d'un groupe de permutations d'un ensemble fini à l'ensemble des parties de celui-ci.* Note (*) de M. MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER, présentée par M. René Garnier.

L'extension d'un groupe de permutations \mathcal{G} à l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E de puissance finie n , détermine une partition de $\mathfrak{P}(E)$ en classes d'équivalences X_i que l'on peut ordonner, $X_i < X_j$ signifiant que toute partie de E membre de X_j contient $a_j^i \neq 0$ membres de X_i .

Les résultats que l'on énoncera ici sans démonstration facilitent la solution du problème qui se rencontre dans bien des applications du calcul effectif de de ces « nombres d'incidence » a_j^i .

Notations. — h_i désignera la puissance de X_i (c'est-à-dire l'indice du sous-groupe de \mathcal{G} laissant invariante une partie de E membre de X_i). On appellera « dimension » de la classe X_i la puissance des parties de E qui la constituent et $r(\lambda)$ sera le nombre des classes de dimension λ . A_μ^λ sera la matrice à $r(\lambda)$ colonnes et $r(\mu)$ lignes dont les éléments sont les a_j^i relatifs à l'incidence des classes de dimension λ dans celles de dimension μ . A sera la matrice carrée à $r = \sum_{\lambda=0}^n r(\lambda)$ lignes et colonnes formées par tous les a_j^i , C la matrice déduite de A en remplaçant tous les a_j^i par des zéros sauf quand la dimension de X_j excède d'une unité celle de X_i (c'est-à-dire que $C = A_1^0 + A_2^1 + A_3^2 + \dots + A_n^{n-1}$). Enfin H sera la matrice diagonale d'élément h_i .

1° Il est possible de permuter les lignes et les colonnes de A de telle sorte que, d'une part, A soit une matrice triangulaire d'élément diagonal $a_i^i = 1$ et, d'autre part, HA soit symétrique par rapport à la *deuxième diagonale*. $HAH^{-1} = |b_j^i|$ livre le nombre b_j^i de membres de X_j contenant un membre de X_i .

2° Pour tout $\lambda < \mu < \nu$ on a

$$A_\nu^\mu A_\mu^\lambda = \begin{bmatrix} \nu - \lambda \\ \nu - \mu \end{bmatrix} A_\nu^\lambda.$$

Par conséquent : $A = \exp C$ et $A^{-1} = \exp(-C)$.

(*) Séance du 26 janvier 1953.

(2)

3° Les matrices carrées $A_{n-\lambda}^\lambda$ (donnant l'incidence des classes de dimension λ dans les classes constituées par les complémentaires dans E des membres de celles-ci) sont complètement réductibles. Elles admettent pour valeurs propres les

$$\rho_\lambda(i) = (-1)^i \begin{bmatrix} n - \lambda - i \\ \lambda - i \end{bmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \lambda),$$

chacune avec le degré de multiplicité $s(i) = r(i) - r(i-1)$.

Il en découle que si $\lambda \leq \mu \leq n/2$ on a aussi $r(\lambda) \leq r(\mu)$.

4° Il est possible de trouver une matrice carrée P à r lignes et r colonnes telle que PAP^{-1} soit formée de matrices rectangulaires A_μ^λ n'ayant au maximum qu'un seul élément non nul dans chaque ligne et dans chaque colonne, les A_μ^λ correspondant biunivoquement aux A_μ^λ .

P peut être représenté comme la somme directe $P_0 + P_1 + \dots + P_i + \dots + P_n$ où P_λ pour $\lambda \geq n/2$ est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de $A_{n-\lambda}^\lambda$ et P_λ pour $\lambda < n/2$ se déduit de $P_{n-\lambda}$ par retournement.

Il est donc possible de construire A en se donnant seulement la valeur des $r(\lambda)$ d'une part, et, d'autre part, soit la matrice carrée $A_{n/2-1}^{n/2-1}$, si n est pair soit la matrice carrée $A_{(n+1)/2}^{(n-1)/2}$, si n est impair.

Dualité. — Les expressions formelles $V_j^{(\lambda)} = \sum_{(i)} \alpha_{ji} X_i$, où les α_{ji} appartiennent à un anneau commutatif \mathcal{A} et où les X_i ont même dimension λ , constituent un module \mathcal{M}_λ . Les matrices A_μ^λ définissent des homomorphismes \mathcal{H}_μ^λ de \mathcal{M}_λ dans \mathcal{M}_μ . D'autre part, à tout $V_j^{(\lambda)} = \sum_{(i)} \alpha_{ji} X_i$ correspond biunivoquement son dual $\bar{V}_j^{(n-\lambda)} = \sum_{(i)} \alpha_{ji} \bar{X}_i$, où \bar{X}_i désigne la classe formée par les complémentaires dans E des parties constituant X_i . Les résultats formulés plus haut permettent d'énoncer

Si $\mathcal{H}_\mu^\lambda V_j^\lambda = 0$, alors : $\mathcal{H}_{n-\lambda+\mu}^\lambda V_j^{(n-\lambda)} = 0$ et réciproquement et les α_{ij} sont les composantes d'un vecteur propre de $A_{n-\lambda}^\lambda$ correspondant à la valeur $+1$ ou -1 .

Généralisation. — Sans pouvoir non plus entrer dans le détail des énoncés, ni développer les démonstrations, on signalera enfin que les résultats précédents peuvent être généralisés notamment dans le cas suivant : au lieu de E et d'un sous-groupe du groupe symétrique, on considère un espace projectif F de dimension n et à coordonnées dans un corps de Galois $GF(p^m)$ et un sous-groupe du groupe linéaire correspondant, $\mathfrak{P}(E)$ étant remplacé par l'ensemble

Année 1953 1953-5. Sur l'extension d'un groupe de permutations d'un ensemble...

(3)

des variétés linéaires de F . En particulier, on a toujours :

$$A = \text{Exp}_p m(C)$$

où $\text{Exp}_p m$ désigne la fonction que l'on a introduite dans une Note antérieure⁽¹⁾.

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 236, 1953, p. 352.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 236, p. 449-450, séance du 2 février 1953.)

ALGÈBRE. — *Le problème des mots dans les treillis modulaires libres*. Note de M. MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER, présentée par M. Gaston Julia.

Les seuls treillis pour lesquels soit connue la solution du problème des mots sont : le treillis libre \mathfrak{T} ⁽¹⁾ et les treillis distributifs ⁽²⁾ auxquels peut être ajouté le \mathfrak{M} -treillis libre ⁽³⁾ union subdirecte de treillis distributifs et de M_n , puisque l'on connaît la forme canonique de ses éléments irréductibles.

On indiquera ici les grandes lignes de la théorie correspondante pour les treillis modulaires libres \mathfrak{M} ⁽⁴⁾.

Définitions :

E : un ensemble d'éléments e_i (les « générateurs »);

$\mathfrak{A} \supset E$: le système algébrique libre constitué par toutes les expressions finies formées par récurrence à partir des e_i au moyen de deux opérations (notées ici $+$ et \times avec les conventions habituelles d'omission du signe \times , la congruence dans \mathfrak{A} étant écrite \equiv) *commutatives* et *associatives*;

\mathfrak{N} : le quotient de \mathfrak{A} par $\{\equiv\} = \{\rho, \rho^{-1}\}$ ⁽⁵⁾ avec ρ définie par

$$(A + B)(C + AD) \rho (A + B)C + AD \quad (A, B, C, D \in \mathfrak{A} \text{ et } C \neq \text{mot vide});$$

\mathfrak{T} (le *treillis libre* engendré par E) : le quotient de \mathfrak{A} par $\{\simeq\} = \{\sigma, \sigma^{-1}, \check{\sigma}, \check{\sigma}^{-1}\}$, avec σ définie par $(A + B)C \sigma A (A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{A} \text{ ou vide})$;

\mathfrak{M} (le *treillis modulaire libre* engendré par E) : le quotient de \mathfrak{A} par $\{\equiv, \simeq\}$;

$|X|$ (la « formule » de $X \in \mathfrak{A}$) : le vecteur dont les composants $\xi_+, \xi_\times, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots$ sont respectivement le nombre de fois où les deux opérations et les e_i apparaissent dans l'expression X .

⁽¹⁾ P. WHITMAN, *Ann. Math.*, 42, 1941, p. 325-330 et 43, 1942, p. 104-105.

⁽²⁾ G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, New-York, 1948, p. 145.

⁽³⁾ M. P. SCHÜTZENBERGER, *Comptes rendus*, 221, 1945, p. 218.

⁽⁴⁾ C'est le problème 28 de G. BIRKHOFF (*loc. cit.* p. 70).

⁽⁵⁾ J. RIGUET, *Bull. Soc. Math.*, 76, 1948, p. 122.

On écrira $\{\lambda, \mu, \dots\}$ pour désigner la fermeture algébrique de la fermeture d'équivalence de la réunion des relations λ, μ, \dots . Le diacritique $\check{}$ symbolisera la dualité canonique échangeant entre elles les deux opérations.

(2)

Les formules seront ordonnées par $|X| \leq |X'|$ équivalent à : tout $i : \xi_i \leq \xi'_i$.

$\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{E}$: l'ensemble des expressions *semi réduites*, c'est-à-dire telles que $X' \simeq X \in \mathfrak{E}^*$ entraîne $|X| \leq |X'|$;

$\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{E}^*$: l'ensemble des expressions *réduites*, c'est-à-dire telles que $Y \simeq X' \equiv X \in \mathfrak{M}^*$ entraîne $|X| \leq |Y|$.

On sait que \mathfrak{E} est isomorphe à \mathfrak{E}^* et \mathfrak{M} à une image $\overline{\mathfrak{M}^*}$ de \mathfrak{M}^* .

La démonstration repose sur les remarques suivantes :

1° Quand les relations telles que ρ et σ ne sont pas permutables ^(*), les expressions figurant dans l'énoncé où elles interviennent peuvent être mises sous une forme canonique.

2° La formule d'une expression ne peut pas s'accroître par application de ρ ou de σ .

LEMME I. — Si $X \equiv X'$ alors $|X| = |X'|$ et $X \in \mathfrak{E}^*$ entraîne $X' \in \mathfrak{E}^*$ (on peut se limiter à vérifier le résultat pour ρ).

LEMME II. — Si $X \equiv X' \simeq YX'$ où $Y \not\sim X$ et X' , alors $X \simeq YX''$ (on peut se limiter à $X \rho X' \sigma YX'$).

LEMME III. — Si $X \sigma^{-1} Y \rho Z \rho Z'$ il existe Y' et X' avec $Z' \rho Y' \sigma X'$ et $|X| = |X'|$.

Le seul cas non trivial est celui où la relation précédente (notée θ) entre X et X' se réduit à celle entre

$$X = U(V + (U + U')V') \quad \text{et} \quad X' = U((U + U')V + V').$$

Par conséquent θ et $\tilde{\theta}$ qui sont strictement plus faibles que ρ et ρ^{-1} laissent comme elles les formules invariantes. D'autre part

$$\{\rho, \check{\rho}, \sigma, \check{\sigma}, \sigma^{-1}, \check{\sigma}^{-1}\} = \{\theta, \tilde{\theta}, \rho, \rho^{-1}, \sigma, \check{\sigma}\}.$$

Donc :

LEMME IV. — Si $X \simeq Y \equiv Y'$ il existe $X' \simeq Y'$ avec $|X| = |X'|$. D'où enfin :

THÉOREME. — \mathfrak{M}^* est le quotient de \mathfrak{E}^* par $\{\theta, \tilde{\theta}, \rho, \rho^{-1}, \sigma, \check{\sigma}\}$.

COROLLAIRE 1. — Si deux expressions de \mathfrak{A} ont des formules finies, il est possible en un nombre fini d'opérations de les ramener à une forme réduite et de déterminer si elles sont ou non modulairement équivalentes.

COROLLAIRE 2. — Une condition nécessaire (mais non suffisante si la puissance de E dépasse 3) pour que deux expressions réduites soient modulairement équivalentes est qu'elles aient même formule.

(*) P. DUBREIL et M. DUBREIL-JACOTIN, *J. Math. pures et appl.*, 18, 1939, p. 63.

(3)

On remarquera que cette dernière propriété n'est plus vraie dans le treillis modulaire \mathfrak{M}' quotient de \mathfrak{M} par les identités latticielles vérifiées dans tous les treillis de sous-groupes distingués (³).

Nous pouvons cependant annoncer qu'elle subsiste dans le cas où tous les éléments du groupe sont d'ordre 2.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 237, p. 507-508. séance du 7 septembre 1953.)

Année 1953 1953-7. Remarques sur l'étude formelle de la consanguinité dans...

LA SEMAINE DES HOPITAUX

29^e ANNÉE
NUMÉRO 76
14 DÉCEMBRE 1953

**ORGANE FONDÉ PAR L'ASSOCIATION
D'ENSEIGNEMENT MÉDICAL DES HOPITAUX DE PARIS**

SFM. HÔP. PARIS
14 DÉCEMBRE 1953

LA CONSANGUINITE DANS LES POPULATIONS MONOGAMES

3974

ci-joint qui appelle les commentaires suivants :

Dans l'ensemble, le facteur le plus net est l'âge maternel : 27,418 ans contre 26,306 ans chez les mères d'enfants normaux. Cette différence reste significative si l'on se limite aux premiers nés (24,644 ans contre 23,525).

Les autres facteurs ont des effets divers selon le type de malformation envisagé, et il ne nous est pas possible de les discuter ici.

De ce travail résulte à notre avis cette conclusion que les conditions de vie de la période d'occupation ont eu sur la fréquence des avortements spontanés une action plus dramatique encore qu'on pouvait peut-être le penser à priori. On ne voit pas en effet d'autre explication de cette réduction de pourcentage de presque toutes les malformations, que l'influence sur ces fœtus plus vulnérables, d'une augmentation du taux total de mortalité *in utero*, due aux conditions défavorables du milieu progénésique.

REMARQUES SUR L'ÉTUDE FORMELLE DE LA CONSANGUINITÉ DANS LES POPULATIONS MONOGAMES

par M. R. TURPIN et M. P. SCHUTZENBERGER

INTRODUCTION

L'ÉTUDE formelle des populations peut se décomposer en trois chapitres distincts :

1° *L'analyse des structures de parenté* c'est-à-dire la description, puis éventuellement la théorie des rapports qui existent entre les individus de la population du point de vue de la relation fondamentale « a est un descendant de b ».

2° *La démographie de la population* qui étudie la composition par âge et par sexe de celle-ci et l'évolution dans le temps de ces facteurs.

3° *La génétique* dont l'objet est la composition du patrimoine héréditaire des individus et des groupes d'individus.

Comme on le voit sans peine des interactions fondamentales relient ces trois chapitres : les structures de parenté ne peuvent réaliser tel ou tel modèle que si certaines conditions démographiques sont préalablement satisfaites, celles-ci, elles-mêmes, dépendent dans une mesure variable des particularités héréditaires de la population influencées à leur tour dans leur manifestation par la trame des croisements que prescrit ou exclut la structure des parentés. En outre une théorie non formelle ne peut envisager ces problèmes sans tenir compte des causes extérieures qui agissent sur ces trois types de phénomènes et se trouvent en même temps sous leur dépendance.

Cependant ainsi posée, l'étude des populations présente des difficultés pratiquement inextricables et il est utile de considérer formellement des cas plus simples où l'on suppose que l'une au moins de ces structures jouit de propriétés particulières telles qu'elle peut être éliminée de la discussion.

A condition de garder conscience du caractère abstrait des constructions ainsi échafaudées il y a un intérêt certain à ces recherches, qui peuvent fournir des approximations satisfaisantes quand l'observation permet de conclure que l'on se trouve effectivement dans un cas voisin de ces structures limites.

Dans les pages qui suivent nous traiterons de deux problèmes très simples relevant du premier et troisième chapitre. Comme certaines définitions et notations interviendront de façon constante par la suite, il semble préférable de les rassembler ici et nous nous excusons de leur caractère quelque peu pédant.

Relations d'ascendance monogame.

Un ensemble E d'éléments a, b, c, \dots , dits « individus », sera dit muni d'une structure *monogame* si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° E est la réunion de deux ensembles disjoints E_1 et E_2 .

2° Il existe une relation d'ordre A entre éléments de E notée aAb (« a est un descendant de b »).

3° A possède une relation de consécutivité associée à $x Ay$ (« y est un parent de x »).

4° La relation $x Ay$ définit une fonction univoque $P(x)$ à valeurs dans E_1 et une fonction univoque $M(x)$ à valeurs dans E_2 , ces fonctions n'étant pas nécessairement partout définies.

5° Si $P(x)$ existe $M(y)$ existe et réciproquement.

6° Si $P(x)$ existe et est égal à $P(y)$ alors $M(x) = M(y)$, et réciproquement $M(x) = M(y)$ entraîne $P(x) = P(y)$.

Définitions accessoires.

7° Les individus tels, que $P(x)$ n'existe pas, seront

29^e ANNÉE
n° 76

LA CONSANGUINITE DANS LES POPULATIONS MONOGAMES

— 3075 —

appelés « ancêtres » de la population, l'ensemble des ancêtres ne pouvant évidemment être vide que si la population est infinie.

Tout sous-ensemble G de E , satisfaisant aux conditions suivantes, sera appelé « génération ».

8° Si x et y appartiennent à G , alors on n'a jamais $x A y$.

9° pour tout z ,
ou bien $z \in G$,
ou bien il existe x ou $y \in G$ et $x A z$ ou $z A y$.

Il est facile de donner verbalement une interprétation des énoncés précédents :

1) exprime le fait que tout individu est mâle ou femelle ;

2) spécifie que si y est un ascendant de x et si z est un ascendant de y alors z est un ascendant de x . D'autre part 2) implique que x et y ne peuvent pas être simultanément ascendants l'un de l'autre.

On notera que dans notre définition x est ascendant de lui-même.

3, 4 et 5) précisent que si x possède des ascendants dans la population il possède nécessairement aussi un père $P(x)$ et une mère $M(x)$ uniques qui sont ses ascendants directs.

6) est la définition même de la monogamie stricte, (du point de vue de la reproduction).

7) définit comme ancêtres les individus dont aucun ascendant n'appartient à la population considérée.

8) et 9) donne une formulation rigoureuse du concept de génération qui contient comme cas particulier la notion habituelle.

REMARQUES SUR L'ETUDE FORMELLE DES RELATIONS ELEMENTAIRES DE PARENTÉ

Introduction.

Nous allons appliquer les concepts décrits précédemment pour donner une classification sommaire des systèmes possibles a priori de relations élémentaires de parenté.

1° Systèmes à obligation, versus, systèmes à interdiction.

Nous n'introduisons cette différence que pour éliminer de la suite de l'étude les systèmes à obligation que l'on définira comme suit :

Un système de relation élémentaire de parenté sera dit « à obligation » s'il existe un ensemble de règles permettant de fixer pour tout individu un autre individu unique qui est théoriquement seul susceptible d'être son conjoint.

Inversement un système sera dit « à interdiction » si les règles permettent seulement d'exclure certains individus bien déterminés comme conjoints potentiels.

Il est bien évident que les systèmes en usage dans l'espèce humaine ne sauraient que très difficilement appartenir au type « à obligation » strict tel que nous l'avons défini.

On observera qu'au contraire un système artificiel

d'inbreeding réalise précisément ce genre de relations de parenté.

2° Systèmes à classification objective et systèmes à classification subjective.

Ici au contraire les exemples des deux cas peuvent être fournis par l'anthropologie.

Nous dirons qu'une classification est objective si un système de « repères », d'invariants, peut être attaché à tout individu, qui détermine par conséquent une division de la population, en classe, groupes, clans, etc..., ces invariants étant dits généalogiques s'ils dépendent exclusivement des invariants correspondants des ancêtres de l'individu en question, et sociologiques dans le cas contraire. Un exemple d'invariant « presque » généalogique dans nos sociétés est la nationalité qui ne dépend le plus souvent que de la nationalité des parents.

Cet invariant sous la forme d'appartenance à telle ou telle caste de la société est au contraire strictement généalogique dans la société brahmanique.

Les exemples d'invariants sociologiques (année de naissance d'où appartenance à telle ou telle branche d'âge de la population et limitations, subséquente du choix du conjoint) ou intermédiaires (appartenance à telle ou telle religion, couche sociale etc...) sont trop manifestes ou émotionnellement trop chargés pour qu'on ait besoin de s'y attarder.

Inversement un système de classification est subjectif si ce rangement de la population en catégorie dépend de l'individu qui l'effectue : X est ma sœur, ma cousine, la sœur de ma femme, ce qui détermine pour moi du point de vue qui nous occupe ici des normes de conduite sensiblement différentes. Au contraire pour un autre homme, ces trois femmes qui viennent d'être données en exemple rentrent dans le seul groupe des « femmes avec lesquelles on n'a pas de lien de parenté ».

Nous sommes donc amenés à distinguer les civilisations où les règles (d'interdiction ou d'obligation) reposent sur des invariants objectifs (c'est le cas des systèmes australiens, et, à des degrés divers, celui des classes supérieures de la société européenne) des civilisations où des règles se fondent seulement sur des invariants subjectifs.

Le système Crow Omaha est typique de ce deuxième groupe et dans nos pays c'est également la seule règle qui soit sanctionnée officiellement par la loi sous la forme de la prohibition du mariage entre personnes qu'unissent déjà des liens spécifiés de parenté (frère, sœur, parents, enfants, etc...).

Un exemple d'application des méthodes formelles à l'étude d'un système objectif à interdiction.

Considérons un système objectif basé sur un seul invariant généalogique :

Ceci revient à dire 1° que la population est divisée en un certain nombre de classes que nous pouvons numéroter 1, 2, ... n, en écrivant $c(x) = i$ pour indiquer que l'individu x appartient à la i^{me} classe.

2° Que la donnée des valeurs de c pour les ancêtres de x caractérise de manière univoque la valeur $c(x)$.

SEM. HÔP. PARIS
14 DÉCEMBRE 1953

LA CONSANGUINITE DANS LES POPULATIONS MONOGAMES

— 3976 —

Le système que nous étudierons sera encore plus simple puisque l'on supposera que $c(x)$ dépend exclusivement de $c(Px)$ et $c(Mx)$ soit, verbalement, que l'on connaît la classe d'un individu quand on connaît celle de son père et de sa mère.

Ceci implique naturellement que deux germains appartiennent à la même classe.

Nous imposerons enfin une dernière condition à savoir que si $c(x) = i$ son conjoint doit appartenir à une certaine classe unique dont le numéro j est donc une certaine fonction $c'(i)$: [$c'(i)$ si x est i et $c'(i)$ si x est j].

Un tel système si artificiel qu'il apparaisse est cependant appliqué effectivement par certaines civilisations.

Nous voulons savoir maintenant dans quelle mesure c (et par conséquent c') sont déterminés par le fait que :

Tout homme doit pouvoir épouser la fille du frère de sa mère ce qui constitue comme Lévi-Strauss l'a montré une règle fondamentale pour ces types de sociétés.

Pour cela nous employerons l'artifice suivant : supposons que soit né un enfant (x) de l'union envisagée plus haut et décrivons le reste des individus par rapport à lui : on a x ; $P(x)$, $M(x)$.

Le fait que $M(x)$ soit la fille du frère de la mère de $P(x)$ revient à l'assertion que la grand-mère paternelle de x ($M(P(x))$) et son grand-père maternel ($P(M(x))$) sont des germains soit encore :

$$PMP(x) = PPM(x) \text{ et } MMP(x) = MPM(x).$$

D'après les hypothèses faites si $c(x) = i$; $c(P(x))$ et $c(M(x))$ sont des fonctions bien déterminées de i , disons $p(i)$ et $m(i)$.

Des égalités précédentes on déduit : $p(m(p(i))) = p(p(m(i)))$ et $m(m(p(i))) = m(p(m(i)))$ pour tout i , soit encore : $m(p(i)) = p(m(i))$ pour tout i soit enfin le résultat que nous cherchions à savoir que les fonctions m et p sont commutatives.

On observera que ce résultat identique en substance avec celui, antérieur, de André Weil est cependant un peu plus général et surtout a été obtenu par une méthode générale valable pour des cas plus compliqués.

Définitions et notations propres à la génétique formelle.

Soit E une population monogame au sens où nous avons défini plus haut cette expression. Nous dirons quelle est *génétique* si les conditions suivantes sont satisfaites.

1° Il existe un ensemble Γ d'éléments $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (les « allèles ») et pour tout $x \in E$ une application $x = (\alpha, \beta)$ dans les couples d'éléments de Γ .

2° Si $x = (\alpha, \alpha')$; $P(x) = (\beta, \beta')$; $M(x) = (\gamma, \gamma')$ alors $\alpha = \beta$ ou β' et $\alpha' = \gamma$ ou γ' .

Ce modèle purement statique ne permet pas d'aller très loin et nous y adjoindrons les hypothèses suivantes de distribution en probabilité sans sélection :

2 bis) dans les hypothèses précédentes :

$$\Pr(x = (\beta, \gamma)) = \Pr(x = (\beta, \gamma')) = \Pr((x = (\beta', \gamma)) = \Pr(x = (\beta', \gamma')) = 1/4.$$

3° Chacun des 4 événements relatifs à x est indé-

pendant des 4 événements correspondants relative à $y \neq x$.

On introduira enfin les notions de fréquence, $a(x)$, de l'allèle chez x :

$$\begin{aligned} 4^\circ \quad a(x) &= 0 \text{ si } x = (\beta, \beta') \text{ et } \beta \neq x \neq \beta' \\ a(x) &= 1/2 \text{ si } x = (\beta, \beta') \text{ et } \beta = x \neq \beta' \\ &\quad \text{ou } \beta \neq x = \beta' \\ a(x) &= 1 \text{ si } x = (\beta, \beta') \text{ et } \beta = x = \beta' \end{aligned}$$

E' étant un sous ensemble de E : la fréquence $a(E')$ sera bien entendu :

$$a(E') = \sum a(x), \text{ — pour } x \in E' \text{ —}$$

On posera : consanguinité de x et de y la fonction numérique :

$$\begin{aligned} [x, y] &= 1 \text{ si } x = y \text{ et si } x = (\alpha, \alpha') \text{ avec } \alpha = \alpha' \\ &= 0 \text{ si } x = y \text{ et si } x = (\alpha, \alpha') \text{ avec } \alpha \neq \alpha' \end{aligned}$$

Si $x \neq y$ la consanguinité $[x, y] = [y, x]$ sera la consanguinité $[z, z]$ moyenne qu'aurait un z tel que $x = P(z)$ et $y = M(z)$.

Dans ce qui suit, sauf mention du contraire on supposera toujours que par fréquence ou consanguinité on entend leur valeur moyenne relativement à un système d'hypothèses spécifiées à l'avance.

Théorèmes généraux sur la consanguinité.

L'intérêt des notions précédentes est justifié par le théorème fondamental suivant qui introduit comme on le voit un principe équivalent au principe de Huygens :

THÉOREME.

Les fonctions $a(x)$ et $[x, y]$ étant données pour une génération G_0 ainsi que les structures de parentés entre cette génération et une génération antérieure G_{-1} , les fonctions $a(x)$ et $[x, y]$ relatives à G_{-1} , sont indépendantes des fonctions correspondantes relatives à G_{-2} .

DÉMONSTRATION. — Il suffit, par induction, de montrer que si l'on connaît les fonctions génétiques $a(x)$ et $[x, y]$ de l'ensemble $G^* = \{P(x), P(y), M(x), M(y)\}$ les fonctions génétiques de l'ensemble $G^*_{-1} = \{x, y\}$ sont indépendantes de celles de $G^*_{-2} = \{P(P(x)), M(P(x)), M(M(y)), P(M(y))\}$ qui est l'ensemble des « grands-parents » de x et de y .

La démonstration dans ce cas particulier est alors purement casuistique et nous pouvons la laisser en exercice au lecteur qui s'appuyera sur les résultats suivants (dont le 2° quoique ne pouvant se présenter dans une population monogame est cependant indiqué ici par souci d'être complet) :

1° Si $z = P(x) = P(y)$ et $M(x) = M(y) = t$ (x et y sont « germains »)

$$[x, y] = 1/4 (+ 1/2 [z, z] + 1/2 [t, t] + 2 [z, t])$$

2° Si $z = P(x) = P(y)$ et $t = M(x)$; et $t' = M(y)$; ($t \neq t'$) (x et y sont « demi-frères »)

$$[x, y] = 1/4 (1/2 + 1/2 [z, z] + [z, t] + [z, t'] + [t, t'])$$

3° Si $z = P(x)$; $z' = P(y)$; $t = M(x)$; $t' = M(y)$; $z \neq z'$; $t \neq t'$:

$$[x, y] = 1/4 ([z, t] + [z, t'] + [z', t] + [z', t']).$$

Année 1953

1953-7. Remarques sur l'étude formelle de la consanguinité dans...

29^e ANNÉE
n° 76

LA CONSANGUINITE DANS LES POPULATIONS MONOGAMES

2977

On peut compléter le théorème par la remarque suivante :

THÉORÈME :

Les fonctions génétiques de G_1 sont des fonctions linéaires des fonctions correspondantes de G_0 .

Ces deux résultats permettent donc de retrouver très simplement une théorie de l'inbreeding développée par Fisher, Haldane et Sewall Wright puisqu'à chaque type de structure de parenté liant une génération à celle de ses parents correspond une matrice unique qui opère la transformation des fonctions génétiques.

On remarquera cependant que la méthode que nous proposons diffère de la méthode de Fisher par les points suivants :

1) Les calculs ne sont pas homogènes (ce qui est un désavantage).

2) On n'a pas besoin de considérer toutes les compositions de tous les couples (ce qui est un avantage) puisque l'on utilise au maximum les symétries du problème.

Traisons à titre d'exemple le croisement frère x sœur : Par hypothèse on posera :

$$x_i = P(x_{i+1}) = P(y_{i+1}) \text{ et } y_i = M(x_{i+1}) = M(y_{i+1})$$

On a ainsi :

$$[x_0, y_0] = 1/4 + 1/8 [x_1, y_1] + 1/8 [y_1, y_1] + 1/2 [x_1, x_1] \text{ et } [x_1, x_1] = [y_1, y_1].$$

La matrice S est par conséquent donnée par le tableau suivant :

	$[x_1, x_1]$	$[y_1, y_1]$	$[x_1, y_1]$	Constante
$[x_1, x_1]$	0	0	1	0
$[y_1, y_1]$	0	0	1	0
$[x_1, y_1]$	1/8	1/8	1/2	1/4

En itérant les formules précédentes on retrouve les résultats classiques suivants (S = matrice donnant la valeur du coefficient de consanguinité à la n ^{ème} génération de mariages frère x sœur en fonction des valeurs initiales).

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 1/16 & 1/16 & 1/2 & 3/8 \end{pmatrix}$$

$$S^3 = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/2 & 3/8 \\ 1/16 & 1/16 & 1/2 & 3/8 \\ 1/16 & 1/16 & 3/8 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$S^4 = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 3/8 & 1/2 \\ 1/16 & 1/16 & 3/8 & 1/2 \\ 3/64 & 3/64 & 5/16 & 19/32 \end{pmatrix}$$

Nous ne pouvons nous étendre sur cette question qui nécessiterait d'assez longs développements sur la répartition des racines des semblables matrices en fonction de considérations de symétrie que l'on peut imposer aux données initiales.

Donnons maintenant un autre type de théorèmes relatifs cette fois à la consanguinité comme « pseudo-distance » entre les individus.

THÉORÈME. — L'inégalité suivante est toujours identiquement vérifiée :

$$[x, y] = 1/2 (1 + \inf([x, x], [y, y]))$$

Considérons en effet toutes les compositions génétiques de 2 individus, α, β, γ et δ étant 4 allèles différents l'on a, à des symétries évidentes près, seulement l'un des 7 cas suivants :

	I	II	III	IV	V	VI	VII
x	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\alpha$	$\alpha\alpha$	$\alpha\alpha$	$\alpha\alpha$
y	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\gamma\delta$	$\gamma\gamma$	$\alpha\gamma$	$\alpha\alpha$
$[x, x]$	0	0	0	1	1	1	1
$[x, y]$	0	1/4	1/2	0	0	0	1
$[y, y]$	0	0	0	0	1	1/2	1

Puisque nécessairement $0 \leq [z, z] \leq 1$ les seuls cas effectifs (au sens de la théorie des ensembles convexes) sont I, III, IV, V, VI et VII d'où le résultat.

THÉORÈME. — Entre trois individus distincts, x, y et z , on a toujours l'inégalité pseudo-triangulaire.

$$1 + [x, y] \geq [y, z] + [x, z].$$

La démonstration procède selon la même méthode que les précédentes. On a cette fois à considérer six allèles différents et 23 cas possibles dont la plupart sont d'ailleurs ineffectifs puisque l'on a par exemple

$$x = (\alpha, \alpha); y = (\alpha, \alpha); z = (\beta, \gamma) \text{ avec } [x, y] = 1; [x, z] = [y, z] = 0$$

et qu'il ne reste donc à envisager que les cas où

$$[x, y] + [x, z] + [y, z] \geq 1.$$

Enfin si l'on sait que x et y sont une paire de germains $P(x) = P(y)$ et $M(x) = M(y)$ on a en posant $[x, x] = [y, y] = C$:

THÉORÈME

Pour toute paire de germains distincts :

$$C \leq [x, y] \leq 3/8 + 5/8 C.$$

Le résultat se déduit soit par la méthode précédente générale soit en utilisant les matrices de transition données plus haut pour le croisement frère x sœur.

UN THEOREME SUR L'EVOLUTION DE LA CONSANGUINITE DANS UNE POPULATION A REMPLACEMENT SIMPLE

Nous dirons qu'une population est à remplacement simple si à chaque génération succède une autre de même puissance obtenue par le remplacement systématique d'un père et d'une mère par leurs deux enfants qui sont en outre supposés de sexe différent. Dans une certaine mesure ce type de modèle peut constituer une première approximation grossière de la réalité, et il est intéressant de donner des théorèmes limites fixant des bornes à l'évolution des fonctions génétiques quelle que soit la nature combinatoire des relations de parenté.

THÉORÈME

Soit M_i la matrice de consanguinité temps t_i ; l'unité de temps étant choisie égale à une génération. Soit M_i la somme des éléments de M_i n'appartenant pas à la diagonale ; alors, dans une population à remplacement simple, M_i est une fonction monotone strictement décroissante de temps.

SEM. HÔP. PARIS
14 DÉCEMBRE 1953

LA CONSANGUINITE DANS LES POPULATIONS MONOGAMES

— 3978 —

DÉMONSTRATION

Limitons nous provisoirement à M_0 entre 4 individus formant deux couples de parents : x et y et z et t . Le remplacement simple leur substitue respectivement les individus x' , y' , z' , t' . Nous avons donc à étudier dans M_1 2 types de paires d'individus : les germains x' et y' et z' et t' d'une part, et d'autre part quatre paires telles que x' , t' .

On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned} [x', y'] &= 1/4 + 1/8 [x, x] + 1/8 [y, y] + 1/2 [x, y] \\ [z', t'] &= 1/4 + 1/8 [z, z] + 1/8 [t, t] + 1/2 [z, t] \\ [x', z'] &= [x', t'] = [y', z'] = [y', t'] = K \\ 1/4 \{ [x, z] + [x, t] + [y, z] + [y, t] \} \end{aligned}$$

D'après la dernière ligne la somme :

$$[x' z'] + [x' t'] + [y' z'] + [y' t'] = 4 K$$

est invariable en passant d'une génération à la suivante. Posons $C' = [x' y']$ et $[x, y] = C$ je dis que l'on a toujours $C' \geq C$.

En effet appelons a et b respectivement le plus petit et le plus grand de $[x, x]$ et de $[y, y]$.

On a prouvé antérieurement que :

$$C \leq 1/2 + a/2 \text{ mais } C' - C \geq 0 \text{ s'écrit :} \\ C \leq 1/2 + 1/4 a + 1/4 b$$

et comme $a + b \geq 2 a$ par hypothèse, le résultat est établi.

Revenons maintenant au cas général. Nous avons donc montré que les seuls changements intervenant dans la transition $M_0 \rightarrow M_1$ sont ceux qui résultent du remplacement d'une somme $2 [x, y]$ par la somme plus grande $1/2 + 1/4 [x, x] + 1/4 [y, y] + [x, y]$ et ceci pour chacun des N couples constituant la population de M_0 . Comme la différence $C' - C$ est en plus égale à $1/2$ dans le cas où x et y seraient deux homozygotes en deux allèles différentes nous avons donc prouvé en même temps le :

THÉORÈME

Si une population à remplacement simple est formée de $2 N$ individus, la valeur moyenne de la consanguinité entre individus s'accroît en K génération d'une quantité sûrement comprise entre zéro et $K (2 N - 1)^{-1}$.

En effet cette consanguinité moyenne est par définition $\bar{M}_1 \times 2 (2 N - 2 N - 1)^{-1}$ et on vient de donner les deux bornes de l'accroissement de M_1 .

Le résultat précédent devient manifestement sans intérêt dès que K est de l'ordre de $2 N$, et l'on pourrait en poussant l'analyse montrer que des limites plus strictes existent. De ce fait des résultats ne sont pas *très améliorés* par ces calculs et, comme d'usage, on a recours à la substitution d'un énoncé stochastique relativement efficace à une formulation rigoureuse mais triviale. Nous ne pouvons songer à démontrer ici que si les croisements se font au hasard la valeur moyenne de la consanguinité croît comme la fonction exp. $(-K/2 N)$.

Calcul effectif de la consanguinité d'un individu.

Les méthodes qui ont été indiquées plus haut permettent aisément de répondre à cette question. Il est cependant important du point de vue médical de réaliser que ce calcul est en général effectué dans l'hypothèse où l'on suppose nulles les consanguinités entre les individus au sujet desquels l'arbre généalogique recueilli n'apporte pas d'indication formelle au contraire.

Il y a là une source d'erreur peut être négligeable dans beaucoup de cas mais sûrement importante quand l'on sait par exemple que les individus proviennent d'un isolat génétique. C'est dire l'importance capitale que présentent alors les travaux comme ceux de Sutter qui visent à déterminer globalement cette consanguinité moyenne.

Cependant en admettant que l'hypothèse précédente est valide, il est possible d'abrégé considérablement les calculs par la méthode classique du dénombrement des chaînes.

La justification de la procédure est triviale, d'après ce que nous venons de dire et peut être omise sans inconvénient.

RÈGLE

Disons que x et y sont reliés par une chaîne de longueur K si y est défini par rapport à x par une fonction $Q(Q(Q...)) (x)$ (où $Q = P$ ou M) impliquant K symboles opératoires.

Soient x et x' deux individus et $Z = \{ z_i \}$ l'ensemble des ancêtres communs à x et à x' alors :

$[x, x'] = \sum_i m_i^{-1}$ où la sommation est étendue à toutes les chaînes de longueur n_i et m_i respectivement joignant x et x' à chacun de z_i .

CONCLUSIONS

On a introduit quelques définitions et un formalisme permettant de décrire simplement les relations de parenté entre individus.

Une application a été faite au système de mariage des cousins croisés.

Une extension à la génétique formelle des notions précédemment définies a permis de fournir les éléments d'une théorie combinatoire de la consanguinité dont on a donné quelques exemples simples.

BIBLIOGRAPHIE

- J. B. S. HALDANE et MOSHINSKI, PEARL (1939). — Inbreeding in Mendelian Populations with special reference to human cousin marriage. *Ann. of Eugen.*, 9, 321-340.
F. A. FISHER (1918). — The correlation between relatives on the supposition of mendelian inheritance. *Trans. Roy. Soc. Edimb.*, 52, 11, n° 15.
S. WRIGHT (1921). — Systems of mating. *Genetics*, 6, 124.
— (1922). — Coefficient of inbreeding and relationship. *Amer. Nat.*, 56, 330.
LEVIS-STRAUSS. — Les structures élémentaires de la parenté.

Année 1953

1953-8. Résultats d'une enquête sur l'influence des facteurs...

RÉSULTATS D'UNE ENQUÊTE SUR L'INFLUENCE DES FACTEURS PROGÉNÉSIQUES SUR LES MALFORMATIONS HUMAINES

R. TURPIN, M. P. SCHUTZENBERGER et P. LEFEVER (Paris)

L'IMPORTANCE des facteurs progénésiques non héréditaires chez l'homme a déjà été mise en valeur par l'un d'entre nous et cette note résume les résultats d'une enquête entreprise pour préciser les limites de leur influence sur les malformations.

L'échantillon étudié consiste en un lot de 674 enfants, nés dans trois maternités parisiennes entre 1941 et 1950 et présentant des malformations graves. Le nombre total des naissances correspondantes est de 79.844 et nous disposons en outre d'un échantillon de contrôle de 671 enfants normaux. Le premier groupe contient tous les enfants dont le dossier comportait la mention d'une malformation à la naissance, et le second groupe a été constitué en prenant systématiquement le dossier portant le numéro d'ordre consécutif.

Les observations ont été réparties en huit groupes, le dernier comprenant les types trop rares pour être classés isolément et aussi les cas de malformations multiples, relevant de plusieurs des sept autres groupes. Le détail de cette classification sera publié ultérieurement.

La première constatation qui s'impose est l'accroissement considérable (25 p. 100) du pourcentage des malformés, depuis le retour à des conditions alimentaires plus satisfaisantes dont nous avons arbitrairement fixé le moment en 1947.

Cette différence de 7,38 p. 1.000 à 9,27 p. 1.000 prend toute sa valeur si l'on observe qu'en outre l'âge moyen

	total en valeur absolue	Fréquence		Rang moyen	Fréquence des premiers-nés (en pourcentage)	Âge moyen de la mère	Âge moyen de la mère pour les premiers-nés
		en 41-46	en 47-50				
Anomalies des membres	34	4,5	3,9	2,177	50,0	27,588	24,941
Anomalies des doigts et mains ..	51	6,0	6,8	2,000	41,2	26,628	23,810
Pieds bots	109	11,2	16,9	1,881	57,8	27,000	24,302
Anomalies du système nerveux et du crâne	99	11,2	14,0	2,475	35,4	27,929	25,371
Anomalies du tractus digestif	42	3,0	8,3	1,881	42,9	27,810	25,556
Becs de lièvre ...	63	8,0	7,7	2,064	54,0	26,746	24,023
Anomalies de l'appareil génital ..	78	8,2	11,9	2,115	43,6	26,654	25,000
Autres malformations y compris multi-malformat.	167	19,2	23,5	2,461	40,1	28,084	24,557
Normaux	671			2,136	48,6	26,306	23,525

(Ce tableau contient seulement les 643 cas pour lesquels on a pu réunir des informations complètes).

des mères à la naissance des enfants et le rang de ceux-ci ont évolué dans un sens qui, classiquement, aurait dû faire apparaître l'effet inverse (âge moyen en 1941-1946 : 26,65 ans ; en 1947-1950 : 25,90 ans ; les rangs moyens sont respectivement 2.198 et 2.064).

En ce qui concerne les malformés les résultats de l'étude de ces facteurs sont consignés dans le tableau

SEM. HÔP. PARIS
14 DÉCEMBRE 1953

LA CONSANGUINITE DANS LES POPULATIONS MONOGAMES

— 3974 —

ci-joint qui appelle les commentaires suivants :

Dans l'ensemble, le facteur le plus net est l'âge maternel : 27,418 ans contre 26,306 ans chez les mères d'enfants normaux. Cette différence reste significative si l'on se limite aux premiers nés (24,644 ans contre 23,525).

Les autres facteurs ont des effets divers selon le type de malformation envisagé, et il ne nous est pas possible de les discuter ici.

De ce travail résulte à notre avis cette conclusion que les conditions de vie de la période d'occupation ont eu sur la fréquence des avortements spontanés une action plus dramatique encore qu'on pouvait peut-être le penser à priori. On ne voit pas en effet d'autre explication de cette réduction de pourcentage de presque toutes les malformations, que l'influence sur ces fœtus plus vulnérables, d'une augmentation du taux total de mortalité *in utero*, due aux conditions défavorables du milieu progénésique.

Année 1953 1953-9. Analyse statistique de l'activité d'un service parisien de...

ANALYSE STATISTIQUE DE L'ACTIVITÉ D'UN SERVICE PARISIEN DE PÉDIATRIE

MORBIDITÉ SUIVANT LE SEXE
DURÉE MOYENNE DE L'HOSPITALISATION — MORTALITÉ

par

le Professeur Raymond TURPIN
le Docteur M. P. SCHÜTZENBERGER
et Gisèle NORMANT



I. — PRÉSENTATION DU MATÉRIEL

1^o CONDITIONS DE COLLECTE DES DOCUMENTS

Notre étude portera sur 1.243 cas recueillis parmi les malades hospitalisés dans le service de l'un d'entre nous, de 1947 à 1952 inclusivement (Centre de médecine infantile de l'hôpital Saint-Louis).

Le nombre d'admissions variant, au cours de ces six années, de 1.148 à 1.674 par an, pour atteindre le total de 8.003, nous avons procédé par sondage, limitant nos relevés à quatre ou cinq jours par mois, un jour différent par semaine. Les mêmes règles ont été observées chaque année.

Pour les quatre premiers mois d'une année, par exemple, les jours choisis ont été :

Janvier	Février	Mars	Avril
---	---	---	---
Lundi 5	Vendredi 6	Mardi 3	Samedi 4
Mardi 13	Samedi 14	Mercredi 11	Dimanche 12
Mercredi 21	Dimanche 22	Jeudi 19	Lundi 13
Jeudi 19	Lundi 23	Vendredi 27	Mardi 21
			Mercredi 29

Tous les dossiers des enfants admis dans le service à ces dates ont été examinés. Nous sommes partis des données administratives (bureau d'entrée de l'hôpital) pour discriminer les dossiers médicaux à consulter, cet artifice permettant un sondage strictement impartial.

2^o DIVISIONS NOSOLOGIQUES ADOPTÉES

Ayant classé les différentes affections par organes, nous avons divisé la pathologie médicale, de façon assez artificielle, en dix-sept catégories.

R R V U E D E L ' A S S I S T A N C E P U B L I Q U E A P A R I S

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. <i>Troubles du métabolisme et des glandes endocrines.</i></p> <p>2. <i>Affections du système nerveux :</i>
 Ménigites purulentes
 Ménigites lymphocytaires curables
 Hydrocéphalies
 Encéphalites
 Tumeur cérébrale
 Abscess du cerveau
 Poliomyélite</p> <p>3. <i>Affections des voies respiratoires supérieures :</i>
 Rhino-pharyngites
 Otitis, mastoïdites</p> <p>4. <i>Affections laryngo-trachéo-bronchiques :</i>
 Laryngites
 Spasme de la glotte
 Bronchites
 Dilatation des bronches
 Asthme</p> <p>5. <i>Affections non tuberculeuses du poumon et de la plèvre :</i>
 Pneumonies
 Broncho-pneumonies
 Staphylococcies pulmonaires
 Abscess du poumon
 Œdème pulmonaire aigu
 Pleurésies purulentes</p> | <p>6. <i>Affections tuberculeuses bénignes :</i>
 Primo-infection non traitée par la streptomycine
 Pleurésie séro-fibrineuse</p> <p>7. <i>Affections tuberculeuses graves :</i>
 Miliaire
 Typhobacillose
 Ménigite</p> <p>8. <i>Affections de l'appareil digestif :</i>
 Colite, gastrite
 Salmonellose, typhoïde</p> <p>9. <i>Affections hépatiques.</i></p> <p>10. <i>Cœur :</i>
 Rhumatisme articulaire aigu, chorée</p> <p>11. <i>Sang, rate, ganglions.</i></p> <p>12. <i>Reins, appareil génital.</i></p> <p>13. <i>Maladies parasitaires.</i></p> <p>14. <i>Maladies contagieuses communes de l'enfance.</i></p> <p>15. <i>Carences.</i></p> <p>16. <i>Neuro-toxicoses.</i></p> <p>17. <i>Divers.</i></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Cette classification ne permet pas d'éviter quelques causes d'erreur, plusieurs cas appartenant à la fois à deux catégories (exemple, otite post-rougeoleuse). Nous avons *a priori* retenu la maladie causale.

3° RÉPARTITION SELON L'ÂGE

Les cinq catégories suivantes ont été adoptées : a) de trois semaines à un an ; b) de un à deux ans ; c) de deux à quatre ans ; d) de quatre à huit ans ; e) de huit à quatorze ans.

4° RÉPARTITION SUIVANT LES SAISONS

Nous avons divisé l'année en deux semestres, opposant les mois chauds (du 1^{er} avril au 31 septembre), aux mois froids (du 1^{er} octobre au 31 mars).

5° DURÉE D'HOSPITALISATION

Enfin la durée d'hospitalisation ayant été relevée pour chaque individu, nous avons pu étudier son évolution durant ces dernières années.

II. — ÉTUDE DE LA MORTALITÉ EN FONCTION DU SEXE ET DE L'ÂGE

Pour chaque groupe de maladies désigné par un nombre conventionnel (cf. divisions nosographiques), on trouvera dans le tableau numéro 1 :

- en première ligne, le nombre de sujets admis dans le service ;
- en deuxième ligne, le nombre de décès parmi ceux-ci.

Cette répartition tenant compte à la fois du sexe et de l'âge de l'individu.

Les seuls chiffres qui appellent des commentaires sont les rapports garçons-filles dans les catégories nosographiques numéro 14 et numéro 16. Dans les deux cas marqués d'un astérisque, les différences sont à la limite de la signification, mais l'impression d'une réelle influence des facteurs constitutionnels sexuels est renforcée par le fait que la mortalité proportionnelle est chaque fois plus élevée dans le sexe le plus atteint. Cette inégalité, à nouveau, n'est pas significative, sauf pour les toxicoses numéro 16 marquées de deux astérisques. Elle justifierait des recherches ultérieures sur des échantillons plus importants.

Il convient, à ce propos, de rappeler les conclusions d'un travail antérieur de l'un d'entre nous (1) sur la distribution, suivant le sexe et l'âge des maladies infectieuses de l'enfant. Ces conclusions permettaient de répartir les différentes affections considérées suivant les catégories suivantes :

1^o LES MALADIES ANDROTROPES

- a) Androtropie pour toutes les catégories d'âge : méningites aiguës et tuberculeuses, bronchites ;
- b) Androtropie interrompue de un à deux ans par une tendance gynécotrope : otites et mastoïdites, infections digestives, broncho-pneumonies, pneumonies.

2^o LES MALADIES GYNÉCOTROPES

- a) Gynécotropie constante pour toutes les catégories d'âge : chorée ;
- b) Gynécotropie surtout de huit à quatorze ans : appendicite.

3^o LES MALADIES SEMBLANT ÉCHAPPER AU CONTRÔLE DU SEXE

- a) Tuberculose pulmonaire ;
- b) Tuberculose osseuse.

Un parallèle entre les résultats ci-dessus et ceux que nous analysons met en valeur les faits suivants : pour quelques-unes des maladies précitées, les fréquences relatives selon le sexe varient dans le même sens, et l'amplitude de ces variations est du même ordre de grandeur. Cette remarque ne peut être faite qu'au sujet des maladies androtropes, notre classement ne permettant pas d'individualiser les affections gynécotropes. Encore faut-il remarquer que dans le cas des maladies du système nerveux, nous ne pouvons comparer que des chiffres globaux, dont la chorée est exclue, à des chiffres se rapportant à des affections neurologiques précisément spécifiées (exemple, méningite).

De même dans les affections non tuberculeuses de la plèvre et du poumon, nous comparons un chiffre global aux fréquences de maladies individualisées, telles la pneumonie, la broncho-pneumonie.

En conclusion, les deux séries d'observations sont aussi congruentes qu'il était possible de s'y attendre. En effet, si dans notre échantillon, la différence de fréquence selon le sexe n'atteint pas le seuil de signification (520), il serait facile de montrer que, vu l'inégalité des effectifs considérés (l'enquête portait en 1945 sur 17.349 cas), l'atteinte de ce seuil aurait témoigné d'une divergence formelle entre les deux séries de résultats.

(1) R. Turpin, G. Bernyer et J. Cayrol. *La Semaine des Hôpitaux de Paris*, 1945, 13, p. 332-338. Cf. R. Turpin. *L'Hérédité des prédispositions morbides*. Gallimard, Paris, 1951.

1953-9. Analyse statistique de l'activité d'un service parisien de ...

Année 1953

REVUE DE L'ASSISTANCE PUBLIQUE A PARIS

TABLEAU I

DIVISIONS NOSOGRAPHIQUES	CATÉGORIES D'ÂGE PAR SEXE										TOTAL		TOTAL GÉNÉRAL
	0 à 1		1 à 2		2 à 4		4 à 8		8 à 14		G	F	
	G	F	G	F	G	F	G	F	G	F			
N° 2	16	8	2	3	3	2	2	2	4	4	27	19	46
	7	5	1	0	0	0	0	2	0	0	8	7	15
* N° 3	87	63	39	31	38	34	29	23	16	12	209	163	372
	6	3	0	0	0	0	0	0	0	0	6	3	9
N° 4	4	9	1	3	3	5	5	2	1	0	14	19	33
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N° 5	25	13	4	2	7	10	16	13	13	13	65	51	116
	8	7	0	0	1	0	0	0	0	0	9	7	16
N° 6 + 7	1	1	4	0	2	4	6	11	5	7	18	23	41
	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	3
N° 8	16	21	6	3	3	4	6	7	15	3	46	38	84
	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2	2
N° 9	1	0	0	0	0	1	3	2	1	5	5	8	13
	0	0				0	0	0	0	0	0	0	0
N° 10	0	1	0	0	0	0	0	2	11	12	11	15	26
		0						1	0	0	0	1	1
N° 12	2	4	0	0	3	4	2	6	5	3	12	17	29
	0	1			0	0	0	0	0	0	0	1	1
N° 13	0	1	0	0	3	1	4	1	3	3	10	6	16
		0			0	0	0	0	0	0	0	0	0
* N° 14	17	32	25	38	40	48	44	31	3	11	129	160	289
	1	4	1	1	1	0	1	0	0	0	4	5	9
N° 15	4	3	1	1	4	1	1	0	1	0	11	5	16
	1	0	0	0	0	0	0		0		1	0	1
** N° 16	35	15									35	15	50
	25	8									25	8	33
N° 1+11+17	20	19	12	16	10	6	8	9	10	10	60	60	120
	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	4	3	7

Année 1953 1953-9. Analyse statistique de l'activité d'un service parisien de ...

REVUE DE L'ASSISTANCE PUBLIQUE A PARIS

Le calcul a été effectué dans trois cas :

1° Affections du système nerveux : dans ce cas seulement le calcul porte sur toutes les catégories d'âge, la seule classe de trois semaines à un an présentant un effectif trop faible pour pouvoir être étudiée statistiquement ;

2° Neuro-toxicoses ;

3° Ensemble des autres maladies.

Les éléments de calcul sont rassemblés ci-dessous pour chacune des trois rubriques.

	AFFECTIONS DU SYSTÈME NERVEUX	NEURO- TOXICOSE	AUTRES AFFECTIONS
Nombre de cas	46	50	344
Pourcentage moyen de décès	32,6	66	11,4
Décroissance moyenne de ce pourcentage pour une période de six mois	3,9	3,4	1,3
Corrélation de Bravais-Pearson entre mortalité et temps.	0,33	--- 0,25	--- 0,15

Il convient d'insister sur le fait suivant : cette méthode, qui permet d'affirmer une diminution progressive de la mortalité, ne peut prétendre à la description précise du phénomène semestre par semestre. En effet, les variations fortuites sont d'une amplitude telle que seul un résultat moyen peut être envisagé.

En définitive, la seule formulation correcte de ces calculs est « la meilleure approximation linéaire estimée à la décroissance de la mortalité depuis 1947 correspondrait à 7 pour 100 par an ».

IV. — ÉVOLUTION DE LA DURÉE D'HOSPITALISATION

L'analyse est rendue plus difficile qu'on ne le pensait *a priori* du fait que les valeurs moyennes des durées d'hospitalisation sur le petit échantillon que nous avons dû considérer dépendent, en premier lieu, de quelques sujets dont le séjour à l'hôpital — une mise en séjour prolongée étant nécessaire — excède de beaucoup le temps habituel des autres malades.

On a toutefois calculé les chiffres suivants pour les groupes nosographiques suffisamment représentés. Une année est constituée ici par l'été, plus l'hiver qui le suit, ce qui a obligé à éliminer certains documents tels que les semi-hivers 1947 et 1952. (Les chiffres entre parenthèses sont le nombre de cas.)

ANNÉES	N° 3	N° 5	N° 8	N° 14
	j.	j.	j.	j.
1947	13,1 (51)	13,7 (21)	17,9 (15)	25,7 (42)
1948	9,0 (57)	10,3 (10)	18,6 (5)	24,4 (55)
1949	12,0 (61)	16,1 (11)	17,0 (11)	25,2 (48)
1950	12,6 (60)	9,1 (31)	14,4 (17)	23,8 (56)
1951	12,4 (74)	16,9 (22)	13,7 (19)	21,6 (56)
Moyenne	11,84 (303)	12,53 (95)	15,72 (67)	24,19 (257)

Il convient de remarquer que les chiffres précédents ne sont que des estimations à quelques jours près des vraies valeurs et qu'il serait futile d'y chercher plus qu'une impression d'ensemble.

R E V U E D E L ' A S S I S T A N C E P U B L I Q U E A P A R I S

Néanmoins, en faisant le total général des catégories précédentes, on trouve pour la valeur moyenne du temps d'hospitalisation des chiffres qui, cette fois, indiquent de façon statistiquement significative une décroissance depuis 1947 :

1947.....	18,13 jours		1950.....	15,91 jours
1948.....	17,10 —		1951.....	16,13 —
1949.....	17,73 —			

RÉSUMÉ

Les documents recueillis dans un service parisien de pédiatrie de 1947 à 1952 inclusivement confirment, en premier lieu, les résultats déjà obtenus en 1945 par l'un d'entre nous sur les tendances androtropes de certaines affections oto-mastoïdites, méningites, pneumonies, broncho-pneumonies, bronchites.

D'autre part, l'étude de la mortalité permet de montrer une régression progressive depuis 1947 à 1952, cette régression pouvant être estimée à 7 % par an.

Enfin, la durée moyenne d'hospitalisation a régulièrement décreu au cours de ces mêmes années.

Année 1954

Bibliographie

- [1] Marcel-Paul Schützenberger. Sur une définition combinatoire des espaces vectoriels classiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 238 :2487–2488, 1954.
- [2] Marcel-Paul Schützenberger. A tentative classification of goal-seeking behaviours. *J. Mental Sci.*, 100 :97–102, 1954.
- [3] Marcel-Paul Schützenberger. Contribution aux applications statistiques de la théorie de l’information. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 3(1-2) :3–117, 1954. (Thèse d’État).
- [4] Marcel-Paul Schützenberger. Un treillis universel des géométries projectives. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 239 :1754–1756, 1954.

ESPACES VECTORIELS. — *Sur une définition combinatoire des espaces vectoriels classiques.* Note de M. MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER, présentée par M. René Garnier.

Une théorie purement combinatoire des espaces vectoriels hermitiens, orthogonaux ou symplectiques peut être développée à partir de la seule notion de fermeture de Galois ⁽¹⁾ en postulant l'existence d'une opération ternaire qui correspond à l'intersection de l'hyperplan polaire d'un vecteur avec un sous-espace dont une base est formée de deux vecteurs conjugués. Si ces derniers sont en outre isotopes, il en est de même de l'intersection et une grande partie des résultats subsiste donc pour les « null systems » ⁽²⁾ qui sont la restriction d'un espace vectoriel à l'ensemble de ses vecteurs isotopes.

E sera un ensemble d'éléments que l'on appellera « points » (ce seront, en fait, les vecteurs habituels) et que l'on représentera toujours par des minuscules. ρ sera une relation binaire symétrique dite « de conjugaison » entre ces points. P étant une partie de E, P^* désignera l'ensemble des points de E conjugués avec tous les points de P; $P^{**} = (P^*)^*$ sera la *fermeture de Galois* de P. On sait ⁽¹⁾ que l'application $P \rightarrow P^{**}$ applique le treillis $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E sur un treillis complet $\mathfrak{E}(E)$ et l'on écrira

$$P + Q = P^{**} + Q^{**} = (P \cup Q)^* = (P^* \cap Q^*)^* = \{x : P^* \cap Q^* \subset x^*\}.$$

AXIOME I. — Une telle structure $\mathcal{E} = (E, \rho)$ sera une « relation bilinéaire classique » (RBC), si et seulement si, $a \neq b$; $a \rho b$; $c \not\subset a^* \cap b^*$ entraînent $c^* \cap (a + b) =$ un point unique.

On déduit de I :

1° Une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{E} soit séparable (c'est-à-dire que pour tout $a : a^{**} = a$) est que E^* (qui est au plus un point) soit vide.

2° Si les (E_i, ρ_i) sont des RBC disjointes, leur « somme directe » $\mathcal{E} = (E = \bigcup E_i, \rho)$ avec ρ définie par : $x \rho y$ si $x \in E_i$ et $y \in E_j$ ($i \neq j$) ou si $x \rho_i y$ quand $x, y \in E_i$, est aussi une RBC. $\mathfrak{E}(E)$ est le produit direct des $\mathfrak{E}(E_i)$.

⁽¹⁾ Cf. G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, chap. IV et J. RIGUET, *Bull. Soc. Math.*, 1948, p. 114-155.

⁽²⁾ R. BRAUER, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42, 1936, p. 247-254 et 51, 1945, p. 903-906.

(2)

Réciproquement, une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{E} soit décomposable de cette manière est que pour au moins un a , l'ensemble $\beta(a)$ des points b distincts de a tels que $a \dot{\cap} b$ et $a + b = a \cup b$, ne soit ni vide ni formé de points tous conjugués entre eux. Si pour au moins un a , $\emptyset \neq \beta(a) \subset (\beta(a))^*$, \mathcal{E} est la réunion d'un espace vectoriel dont tous les points sont conjugués avec son espace dual.

On se limitera désormais aux RBC séparables et indécomposables \mathcal{E} telles que l'on puisse trouver une autre RBC, \mathcal{F} , jouissant des mêmes propriétés et que $E \subset F$, $E^{**} = E$ dans F . On dira que A admet une « base normale » S si $A = S^{**}$ et si pour tout point $s \in S$, ou bien $S \subset s^*$, ou bien il existe un s' unique dans S tel que $S - s' \subset s^*$. S sera dite « orthogonale » si en outre aucun de ses points n'est conjugué avec lui-même.

3° Si E admet une base normale, $\mathfrak{E}(E)$ est semi-modulaire, mais non nécessairement modulaire comme le montre l'exemple des « null systems ». On a cependant pour tout A admettant une base normale et B une base finie : $A^* \cap (A + A^* \cap B) = A^* \cap A + A^* \cap B$, identité qui généralise la *loi modulaire*.

4° Si E admet une base orthogonale ou si pour tout s et s' distincts dans la base normale S de E et tout $c \in E$, $c^* \cap (s + s') \neq \emptyset$, $\mathfrak{E}(E)$ est un treillis de géométrie projective [$\mathfrak{E}(E)$ est modulaire, complété et indécomposable]. Il en est de même si I est remplacé par la condition plus forte : pour tout a , b et c , $a \neq b$ et $c \not\subset a^* \cap b^*$, entraînent $c^* \cap (a + b) =$ un point unique; on sait en effet, dans ce cas, construire une base normale de E , qui est orthogonale si E contient au moins un point non conjugué avec lui-même.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 238, p. 2487-2488, séance du 28 juin 1954.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
146460-54 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

A TENTATIVE CLASSIFICATION OF GOAL-SEEKING BEHAVIOURS.*

By M. P. SCHÜTZENBERGER, M.D., Sc.D.,

Paris.

GOAL-SEEKING behaviour, once a great mystery, is now beginning to be understood. In its simplest forms it is, in fact, understood to-day almost completely. Thus the theory of the simple regulator, such as the thermostat, not only includes an extensive repertoire of techniques, but the elementary principles, of the necessity for negative feedback for instance, are becoming scientific commonplaces. In getting to know, however, about these simple systems and their principles, we should not make the mistake of thinking that there is nothing more to be learned. On the contrary, in real life many an important goal is to be achieved only through some quite complex pattern of behaviour, a pattern for which the simple concept of "negative feedback" is quite inadequate. It is of these more complex patterns that I wish to speak to-day.

One way of studying the subject is by way of actual experiment; but I shall make little reference to actual experiments to-day. The fact is that before such experimentation can be undertaken with any usefulness there must be a preliminary period of study and thought. Before we can experiment we must be clear about what questions we want to ask, and why these questions are significant, and what are to be the interpretations of the experiment's various possible outcomes. Before we can usefully start experimenting, in other words, we must have a well-developed theory. Such a theory must inevitably, if it is to be precise, be mathematical; but I hope to show in this paper that what is necessary, at least at first, is the logic and precision of mathematical thought rather than its more advanced techniques. If then we are to explore the properties of the more complex forms of goal-seeking behaviour we must first construct some suitable mathematical models.

The use of mathematical models in the study of animal and human behaviour goes back to the early nineteenth century, but those early attempts have little in common with the contemporary researches of such scientists as von Neumann, Wiener, and, here among us, Dr. Ashby. The last author has particularly stressed the similarity between the activities of some types of mechanism and that of the brain; and this similarity must be the excuse for a mathematician such as myself venturing into this controversial field. My aim will be to show how certain of the more complex goal-seeking behaviours, seen in both machines and men, can be described, and the principles made clear, by a uniform mathematical framework of ideas.

* A paper read at the Annual Meeting of the Royal Medico-Psychological Association held at Barnwood House, Gloucester, 9 July, 1953.

BASIC CONCEPTS.

In order to make the ideas as clear as possible I shall start with a very simple example. Let us suppose a man is on the top of a hill and that he wishes to get to a house in the valley ; let us assume that the “ goal ” is his arrival there in *the shortest possible time*. Between him and the house are many causes of delay : boulders, marshes, escarpments, and so on. Travelling in a bee-line is out of the question. Let us consider his possible modes of behaviour.

An exhaustive, and final, solution of the problem would be given by taking a map of the district, dividing it into small areas, finding the time taken to cross each area individually, joining the areas into all possible chains between the top of the hill and the house, and then finding which chain gives the smallest total time for the journey. The path so selected is absolutely the best and has been selected by what I shall call the “ strategy ” of the problem. (I shall use the words “ strategy ” and “ tactic ” throughout this paper in the particular senses defined, and with no correspondence to other usages, though in some cases our “ strategy ” will correspond to von Neumann’s “ Minimax strategy.”)

Usually, of course, the traveller would not use so elaborate a method. A common method would be to make the selection in stages. He would first select a point about a hundred feet down to which he could get rapidly ; then, arrived there, he would select another point a hundred feet lower still to which a rapid descent was possible, and so on till he reached the house. This method I shall call a simple *tactic*, as contrasted with the previous *strategy*. The tactic differs from the former in that the tactic does not take into account the whole of the situation, but proceeds according to a criterion of optimality that is applied locally, stage by stage.

This example, of the traveller on the hill, is really more general and widely applicable than might at first appear. We can in fact replace the hillside by an abstract space and the expected elementary times t_i (on the elementary areas) by some function $f(P)$ of the points P of the space. At this level of abstraction the problem is then to find a curve C between the initial and terminal points, such that the integral

$$\int_C f(P) dP$$

is a minimum.

To see more clearly how the concept can be applied when the problem is not geometrical, let us consider an example of quite a different type. Suppose a specialist in vocational guidance has to allot n given persons to n given jobs, when he has already tested them and has made predictions (n^2 in number) of the “ suitability ” (on some scale) of each person for each job. His “ goal ” is such an assignment as will maximise the suitabilities *over the whole set*. Thus, it might happen that three people A , B , and C had the suitabilities shown in the Table for jobs I, II and III.

	I	II	III
A	9	10	4
B	5	8	4
C	3	2	1

1954]

BY M. P. SCHÜTZENBERGER, M.D.

99

An “assignment” (of people to jobs) is determined when we have selected three entries, no two being in the same row and no two in the same column.

Here the strategy would consist of computing the totals corresponding to each of the $n!$ possible assignments. In this example there are $1 \times 2 \times 3$, i.e., 6 possible assignments; trials soon show that the best is that which gives A the job I, B the job II, and C the job III. This scores 18, and no other assignment scores more.

If n is large, the computations become prohibitively heavy; a possible tactic is then to proceed by first picking out the largest entry in the table, then cancelling out that person and that job, then selecting the next largest in the remaining $n - 1$ persons and jobs, and so on to the completion of the assignment. If it is applied to the table, then the score of 10 first determines that A is to be given job II, then the 5 gives B the job I and then C gets job III.

This tactic scores 16, little less than the maximum of 18. We see therefore that it may be possible to achieve fairly easily a score that is only slightly below the best when the best itself is quite impossible of achievement (as would have been the case in this example had n been thirty instead of three).

The same principle occurs in chess-playing. If, toward the end of a game, player A can see how to beat B in spite of all defences, then A will be following what I have called a strategy. Often, however, this perfect way to the goal cannot be perceived; then A looks for some move that will achieve a temporary or local advantage, such as capturing B 's Queen, or covering the largest area of the board, or promoting a pawn, etc. Such a move is a tactic.

STRATEGY AND TACTIC.

Our next step is to see more clearly what is the relation between these two—to show them as derivatives of a single concept. Let us go back to the man on the hill.

Let us assume that by now he has discovered everything about the hillside, so that he now knows the true minimal time T_i necessary for going from every point P_i of the hillside to the house. This information he has conveniently schematized on his map by drawing a series of *isochronic curves* such that each curve joins all those places that are situated at the same (minimal) time from the house. Thus, the curve marked “5 minutes” would run through all those places from which the house can be reached in 5 minutes but not less.

Once the map has been prepared, a simple reasoning, borrowed from the calculus of variations, shows that, given any starting point, *the optimal path to the house is one that cuts every isochronic curve at right angles*. (Technically we may express this by saying that the optimal paths are geodesics in a variation problem and that the isochronic curves are the “transversal” of the problem.)

From the practical point of view, the introduction of the isochronic curves is not a mere artifice. In some problems a computation of the solution may be obtained easily if the path is computed backwards from the goal. Sometimes, though more rarely, it happens that computation of the isochronic curves is actually the quickest way to the solution—the most economical in the number of arithmetical operations. Thus, in the problem of assigning jobs we saw that

$n!$ sums involving $(n-1) \cdot n!$ additions had to be performed; if, however, we follow a method derived from the considerations just given, the number will not exceed $n(2^{n-1}-1)$, which is far fewer; for instance, if n is 12, the number of elementary additions falls from 5,269,017,600 to 24,564. Similar reasoning has been used by Hoffman to design codes of minimal redundancy.

The introduction of isochronic curves enables us now to see more clearly the relation between a strategy and a tactic. For if a point follows a path that is everywhere at right angles to the isochronic curves then it is also moving in such a way as to make maximal the instantaneous decrease of the remaining time—it is moving optimally according to the *local* conditions. In other words, if our man behaved as if acted on by a field of force deriving from a potential (which had the isochronic curves as equi-potential lines), then his path would be identical with that determined by the optimal strategy. It is now clear that once the isochronic curves are given, i.e., *once the map's projection has been changed to that of the really optimal metric, the distinction between strategy and tactic disappears.*

CLASSIFICATION OF IMPERFECT TACTICS.

Having considered the optimal path, let us turn next to consider the case of the path that is grossly non-optimal, to that, say of a stone rolling down towards the valley under the action of gravity. According to the laws of physics, the stone, at each moment, is falling in such a direction as takes it the longest distance down in the shortest time, when only immediately local conditions are considered. Thus the difference between the behaviours (or paths) of man and stone is simply a difference between the fields which direct them; the man's field is truly optimal, for it is based on the isochronic curves, and the stone's field is that of its crudest approximation—the Newtonian field of gravitation.

In addition to these two fields are others; what can we say *a priori* of their properties and of their values as tactics?

First they may be classified according to what I shall call their “span of foresight”; thus, if the man coming down the hill plans each next move according to the details of the next hundred feet he will do better than if he were to plan only over the next ten feet. The spans of foresight are here a hundred feet and ten feet respectively.

Should the span of foresight be equal to the distance from the goal, then obviously the tactic and the strategy become identical.

The second characteristic that is to be considered is the behaviour's “flexibility.” Suppose the span of foresight is “100 feet below”; once the man has covered half this distance he may discover that his provisional goal was not the best, and that he should now take a different path for a different goal, again at one unit of foresight ahead. Clearly, in the strategy of the traveller with complete foresight the concept of flexibility plays no part, and neither does it at the other extreme—the case of the rolling stone (for the latter's steps are assumed to be infinitesimal, so that no smaller step is possible). It is in the intermediate degrees that the concept becomes important.

After these preliminaries, it will be seen that any goal-seeking behaviour

1954]

BY M. P. SCHÜTZENBERGER, M.D.

IOI

may be classified on a scale of strategies and tactics, each one depending on a general function representing some measure of the distance between the present position and the goal. Thus, for the stone, the function depends on the present altitude above the bottom of the valley. Had the stone been a piece of iron and the goal a big magnet, the function would have depended on the object's present distance from the magnet. Other models would have led to other functions ; so we have many tactics, each depending on a single function. The complete specification, and full classification, are given when to this function we add the span of foresight and the degree of flexibility, the latter being conveniently measured by the minimal time at which the provisional goal may be replaced by another.

THE STOCHASTIC ENVIRONMENT.

What we have done so far is to show that the "strategy" is simply one of the tactics : it is that extreme tactic based on the best function as given by the isochronal curves. It is now instructive to show conversely (so close is the relation between them) that any tactic may be viewed as some sort of strategy. This is so if the time t_i taken in crossing each elementary area is not permanently constant, as we have assumed so far, but depends on other factors of which we know only the probability of their values. Thus one of the areas might be a marsh that is easy to cross when the weather has been fine but difficult to cross after rain ; if the traveller does not know what has happened prior to a *particular* trip, he can give only a probability to any particular "duration of crossing." Again, another area might be a lake, to be crossed only by a boat which may or may not be available, and so on. More generally we can assume that the elementary times t_i are not given fixed values but are given fluctuating values, depending on some random or "stochastic" process.

If now we apply the theory of inductive behaviour as defined by Wald on the Ville-von Neumann principles, we find that *the optimal strategy is just the simple tactic of attempting to do one's best on a purely local basis.*

To illustrate this thesis let us consider some well known examples. First consider that of the dog that wants to run to his master, who is himself walking steadily in a definite direction. If the dog is something of a computer it will perform an integration and will go directly to the place at which their relative velocities will enable them to meet. If the dog is not so clever it will continuously run directly towards where its master is at that moment. This second tactic is, of course, the simpler of the two, but is inferior if the master is moving uniformly. If, however, the master is making steps backward and forward in a totally random way, as if he were undergoing a Brownian movement, then this second tactic can be shown, by mathematical proof, to be actually *the best one possible.* The tactic has become the strategy.

Here is a second example. A number of lengths of telephone wire must be joined end to end to complete a long-distance line. Each length imposes some small but characteristic distortion a_i on the message. The overall distortion is the sum of the individual distortions, but by reversing a length before it is joined the distortion can be added positively or negatively. How should the lengths be joined if the total distortion, $\Sigma \pm a_i$ is to be a minimum?

If a hundred lengths are to be connected, the absolute optimum can hardly be achieved, for the number of sums that would have to be calculated (if all possibilities are to be explored) is prohibitively large. What is the engineer to do? In practice, he adds the lengths one by one, at each new addition adding the wire this way or that so as to make the sum as small as possible at that particular stage. This tactic has been found to give quite satisfactory results, its success, perhaps, depending on the fact that this tactic really is the best possible if the wires are provided, and have to be connected, one by one.

Other examples of this thesis—that the optimal strategy often consists of doing one's best on a local basis—is also used in Fano's method for finding an optimal code, and in Gavrilov's method for building up a switching system that will represent a given logical function at minimal cost.

CONCLUSION.

In this paper I have attempted to show something of what is implied by "goal-seeking" when the whole situation is more complex than that occurring in, say, a simple thermostat. It is clear that the further study of these situations will have to be made mathematically. It is also clear that much more development will be necessary on the purely mathematical side, for much of the necessary mathematics will have to be developed specially. To the mathematician many of the problems raised are new, and will need new methods.

In particular we need to know more about how much efficiency is lost when the span of foresight and the degree of flexibility are not optimal. The problem is not made easier by the fact that often the parameters do not enter the problem with random values, so the appropriate theorems will have to be stated in a somewhat unusual form.

The purpose of this paper, however, was not to enter into these technicalities but to show in a general way how the introduction of mathematics into this branch of psychology might itself be a worth-while tactic.

SUMMARY.

When "goal-seeking" behaviour is considered in situations of more than the most elementary type, the problems that arise are related to those of strategies and tactics.

I have attempted to show that clear-cut principles are involved, capable of mathematical treatment.

It appears likely that among the factors of special importance are those of "span of foresight" and "degree of flexibility."

The case has also been considered in which the organism faces an environment that can be characterized only in terms of probability.

REFERENCES.

- ASHBY, W. ROSS, *Design for a Brain*. London, 1952.
 GAVRILOV, A. I., *Teoriya releino Kontaknykh Skhem*. Moscow, p. 185, 1949.
 NEUMANN, J. VON, and MORGENTHAU, O., *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, 2nd ed., 1947.
 WALD, A., *Sequential Analysis*. New York, 1947.
 WIENER, N., *Cybernetics*. New York, 1948.

1954-3. Contribution aux applications statistiques de la théorie de... Année 1954

**PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS**

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

Comité de Direction : E. BOREL, A. BARRIOL, H. BUNLE, L.-F. CLOSON, J. COMPEYROT,
G. DARMOIS, F. DIVISIA, E. MORICE, J. RUEFF.

Rédaction : M. FRÉCHET, G. DARMOIS, M. ALLAIS, R. ROY, R. RIVET

Secrétaire de la Rédaction : D. DUGUÉ

M. P. SCHÜTZENBERGER

**CONTRIBUTION
AUX
APPLICATIONS STATISTIQUES
DE LA
THÉORIE DE L'INFORMATION**

VOL. III - FASCICULES 1-2 - 1954

**PARIS
INSTITUT HENRI POINCARÉ**

INTRODUCTION

La variété des outils mathématiques auxquels le calcul des probabilités et la statistique doivent avoir recours augmente chaque jour : à la théorie des fonctions de variable réelle, qui constituait l'essentiel du bagage analytique nécessaire à leur étude dans le premier quart de ce siècle, se sont ajoutés depuis, le calcul matriciel, la théorie de la transformation de FOURIER, celles des équations aux dérivées partielles, pour ne citer que des exemples classiques.

En retour, sous la pression d'une demande technique sans cesse accrue, qui s'étend de la psychologie à la production industrielle de masse, et suivant les lignes de force de son développement propre, le calcul des probabilités a enrichi de problèmes nouveaux et de solutions originales les disciplines auxquelles ces emprunts avaient été effectués.

L'algèbre n'a pas fait exception à cette tendance comme en témoignent les travaux de Mr. le Pr. FRECHET sur les systèmes d'événements compatibles et dépendants, qui sont des algèbres de BOOLE, aussi bien que des applications mineures telles que l'emploi des propriétés des corps algébriques pour la solution de certains problèmes de planification des expériences. En particulier, la théorie des treillis semble prédestinée à tenir un rôle important dans de nombreux chapitres du calcul des probabilités.

Le présent travail espère être une illustration nouvelle de ces possibilités et nous avons tenu à conduire l'exposé depuis les fondements abstraits les plus généraux, les relations d'équivalence et d'ordre, jusqu'aux applications à la sérologie ou la génétique mendélienne.

Ce programme déjà trop ambitieux eut sans doute été irréalisable si nous avions dû maintenir à tous les niveaux le degré maximum de généralité. Nous avons donc sacrifié délibérément tout ce qui ne relevait pas des méthodes de la théorie des ensembles finis. Celles-ci d'ailleurs suffisaient pour aborder les problèmes précis que nous avons en vue et on verra, en outre que nombre d'énoncés ont été établis de telle sorte qu'ils s'appliqueraient sans modification à des cas plus généraux. La rançon en serait une formulation plus lourde des démonstrations risquant peut-être parfois d'obscurcir la nature véritable du lien logique qui tresse le raisonnement.

Venons en maintenant à l'objet de cette étude ; la théorie de l'information. Ici aussi, il s'agit d'une discipline nouvelle dont les frontières d'aujourd'hui indiquant la direction des progrès futurs plus que les limites reconnues des concepts et des méthodes. Il était tentant d'en chercher une unification même restreinte et même provisoire et d'appliquer ses techniques à une classe de problèmes qui put mettre en évidence la diversité et l'unité des notions qui se trouvaient ainsi regroupées ;

Enfin, nous avons essayé de faire oeuvre pratique. Nous voudrions espérer que les statisticiens, aux prises comme nous avec les réalités parfois si peu accommodantes de la recherche industrielle ou scientifique, trouveront dans ce travail, non seulement des suggestions, mais aussi des résultats directement utilisables.

En fonction de ces objectifs, l'exposé a été scindé en trois parties dont chacune forme un tout :

I. Dans la première partie, on rappelle certaines notions algébriques qui réapparaîtront constamment par la suite ; relations d'ordre, treillis distributifs, enfin treillis de partitions qui généralisent très directement la structure déjà bien connue de treillis de toutes les relations d'équivalence d'un ensemble.

Il s'agit là d'un exposé schématique de résultats presque tous classiques où l'accent est mis sur les concepts spécialement efficaces dans le cas fini tels que les éléments irréductibles ou le groupe des intervalles, par exemple.

Les auteurs à notre sens, donnent un sens trop restrictif au terme de valuation des éléments d'un treillis. Nous avons tenté de replacer cette notion dans une perspective plus naturelle, comme fonction numérique associée à la fois aux éléments d'une structure d'ordre et au groupe des intervalles que définit celle-ci. La définition proposée permet d'obtenir formellement toutes les valuations d'un treillis de partitions fini.

Trois exercices (calcul de l'expression formelle des cumulants en fonction des moments, - fonction génératrice des probabilités de certaines "statistiques d'ordre" - forme générale des distributions de la statistique quantique) illustrent les possibilités de ces méthodes dans le calcul des probabilités.

II. Dans deux théories indépendantes, avaient déjà été définis des êtres mathématiques nommés "information" : l'information de FISHER en théorie de l'estimation et l'information de SHANNON en théorie des communications. Dans cette seconde partie on s'efforce de justifier une définition générale des "informations" par une analyse de propriétés que doit a priori posséder un tel être pour généraliser valablement les deux quantités qui viennent d'être évoquées. On aboutit à une classe spéciale de valuations du treillis des partitions des états observables d'une aléatoire. Un opérateur linéaire reste disponible dans cette expression. Pour un choix convenable de celui-ci, on retrouve les deux types spéciaux que l'on voulait unifier mais, aussi, à côté d'êtres apparemment nouveaux tels que les informations de tri, une quantité que nous nous proposons d'appeler

INTRODUCTION

7

"Information de Wald" en raison du rôle capital que cet auteur lui a fait jouer tacitement dans l'analyse séquentielle.

De la systématisation des résultats découle, comme d'usage, une grande économie de démonstrations et des possibilités d'extensions de concepts tels que l'exhaustivité de DARMOIS, l'additivité, etc ...

Enfin, d'autres grandeurs familières du calcul des probabilités (cumulants, chicarré) présentent avec les informations des analogies qui sont brièvement discutées.

Comme dans la première partie, l'originalité ne se trouve que dans le mode d'exposition qui permet de rassembler des théories dont le lien n'avait pu être interprété jusqu'ici, que de façon assez superficielle. Cette confrontation fait apparaître des problèmes non encore résolus, d'un intérêt certain, aussi bien du point de vue physique que de celui des mathématiques pures.

III. Les "méthodes de groupage" qui font l'objet de la troisième partie n'ont au contraire presque jamais été étudiées. On construit un modèle mathématique très simple qui représente certains systèmes d'objets tels qu'une seule observation soit éventuellement susceptible de caractériser entièrement plusieurs d'entre eux ; le type en est l'observation du produit d'une série de nombres qui permet d'apprendre, soit qu'ils sont tous différents de zéro, soit que l'un d'eux au moins est nul. Diverses situations concrètes peuvent s'y ramener, semble-t-il, et l'on énonce avec l'aide des concepts algébriques décrits dans la première partie quelques propriétés générales de ce modèle.

L'application des grandes méthodes de la statistique mathématique (test, estimation) conjointement avec les notions développées dans la seconde partie livre une gamme d'exercice dans lesquels se manifestent l'utilité et le sens des diverses informations.

A ce propos, on introduit comme substitut des solutions optimales - trop souvent inaccessibles pour des raisons de complexité combinatoire - la notion de "tactique localement optimale" qui semble nouvelle et qui dépasse d'ailleurs très largement le cadre de ce travail.

Références et bibliographie. Le matériel présenté dans la première partie est le plus souvent classique et presque toutes les indications utiles se trouvent dans l'ouvrage fondamental de G. BIRKHOFF "Theory of Lattices", ou en français dans la "Théorie des Structures" de GLIVENKO. Nous avons jugé superflu d'en reproduire la bibliographie et nous sommes contentés d'introduire dans le cours du texte les références supplémentaires nécessitées par les divers points particuliers étrangers à la théorie des treillis.

Il en est de même pour la troisième partie qui ne fait appel qu'aux éléments les plus familiers de la statistique mathématique quand il ne s'agit pas de notions déjà discutées dans la seconde partie, la seule pour laquelle soit apparu nécessaire de compiler une bibliographie systématique.

Nous exprimons notre reconnaissance respectueuse à Monsieur le Professeur Maurice FRECHET qui a bien voulu nous faire l'honneur de présider la soutenance de cette thèse, à Monsieur le Doyen Albert CHATELET qui fût notre premier Maître de cette Faculté, et à Monsieur le Professeur Georges DARMOIS qui nous a constamment guidé de ses conseils et de ses encouragements.

On verra par ailleurs dans le cours de ce mémoire, la part essentielle qui revient à l'enseignement de Monsieur A. CHATELET et aux travaux de Monsieur M. FRECHET et de Monsieur G. DARMOIS.

Nous ne saurions nous plus ne pas exprimer notre respectueuse gratitude à Monsieur le Professeur Raymond TURPIN qui depuis de nombreuses années nous a associé à ses recherches progénésiques dans le Centre qu'il a fondé à l'Hôpital Saint-Louis et à Monsieur le Professeur Pierre GAVAUDAN qui nous a fait participer à ses travaux de physiologie et dont l'amitié et l'exemple nous ont été le plus précieux des encouragements.

Enfin ce travail n'aurait pu être accompli sans le soutien de l'Institut National d'Hygiène, de son Directeur Monsieur le Professeur Louis BUGNARD, de Monsieur Pierre DENOIX, Chirurgien des Hôpitaux de Paris, et l'aide généreuse du Fonds d'étude de la Société médicale des Hôpitaux de Paris; qu'ils reçoivent, ici le témoignage de notre reconnaissance.

Année 1954 1954-3. Contribution aux applications statistiques de la théorie de...

PREMIÈRE PARTIE
PRÉLIMINAIRES ALGÈBRIQUES

I. - RELATIONS D'ÉQUIVALENCE ET RELATIONS D'ORDRE

Etant donné un ensemble E d'éléments a, b, \dots une relation d'équivalence (1) sera par définition une relation entre éléments de E , notée aRb , satisfaisant aux trois conditions suivantes :

- 1° - Réflexivité : pour tout a : aRa .
- 2° - Symétrie : pour tout a et b : si aRb , alors : bRa .
- 3° - Transitivité : pour tout a, b et c : si aRb et bRc , alors : aRc .

On démontre que R induit sur E une partition en classes d'équivalence X, Y, \dots, Z . Celles-ci forment un système de sous ensembles de E disjoints, (c'est-à-dire deux à deux sans élément commun) tels que tout élément de E soit contenu dans l'un d'eux et enfin satisfaisant à cette condition que aRb , si et seulement si a et b sont membres du même sous-ensemble.

De deux relations d'équivalence R_1 et R_2 sur un ensemble E , R_1 sera dit "plus fine" que R_2 si et seulement si, pour tout a et tout b , aR_1b entraîne aR_2b .

Dans ce cas, les classes X, Y, Z, \dots de R_2 sont elles-mêmes partitionnées en les classes $X_1, X_2, \dots, X_k, Y_1, Y_2, \dots, Y_k, Z, \dots$. Si A est une classe de R_1 et B une classe de R_2 , ou bien A et B sont sans élément commun ou bien A est toute entière contenue dans B .

Enfin, on fera usage de la notion de fermeture transitive \bar{R} d'une relation quelconque R de E ; par définition \bar{R} sera la plus fine des relations d'équivalence telle que pour tout a et b si aRb , alors $a\bar{R}b$. Cette définition est justifiée par le fait qu'on peut prouver que \bar{R} est unique pour un E et un R quelconque.

Les relations d'ordre sont des relations :

- 1° - Réflexives
- 2° - Transitives
- 3° - Acycliques c'est-à-dire telles que l'on ait jamais : aRb et bRa , sauf si $a = b$.

On voit donc qu'elles s'opposent aux relations d'équivalence par le fait que l'on a remplacé la condition de symétrie par son contraire qui est l'acyclicité.

(1) Pour un exposé complet de ces notions sur les relations, on consultera avec fruit le travail d'ensemble de : J. RIGUET (1951) - Théorie des relations binaires - (Thèse Paris).

Les exemples les plus familiers de relation d'ordre sont les relations "plus petit ou égal" entre grandeurs réelles et la relation "être contenu dans" entre sous-ensembles et ensembles. Il est commode d'emprunter à ces cas particuliers les notations \leq ou \subset pour représenter une relation d'ordre quelconque.

On appellera "ordre dual" d'une relation d'ordre R la relation R^d définie par aR^db si, et seulement si, bRa . On vérifie sans peine que R est bien une relation d'ordre en même temps que R^d .

Dérivant de la relation d'ordre, on fera usage dans les structures finies de la relation de consécutivité. b sera dit "consécutif" à a ou "couvrir a " si $a < b$ et s'il n'existe aucun c différent de a et de b tel que $a < c < b$.

Si $a < b$, une chaîne complète entre a et b sera une suite d'éléments c_i ($0 \leq i \leq k$) tels que $a = c_0$; $b = c_k$ et qu'enfin pour tout i , c_{i+1} couvre c_i . On appellera k la longueur de la chaîne.

Correspondant en quelque sorte à la notion de classe d'équivalence, nous trouverons ici la notion d'intervalles. Par définition l'intervalle (a, b) sera le sous-ensemble de E formé par les éléments x tels que $a < x$ et $x < b$. L'expression "intervalle (a, b) " n'aura donc de sens que si $a < b$. Si b couvre a , l'intervalle (a, b) sera réduit à ces deux éléments, ce sera donc un intervalle minimum. Les intervalles dégénérés qu'il est commode de considérer formellement seront les intervalles du type (x, x) .

Il sera utile de considérer sur les intervalles l'opération de composition associative mais non partout définie suivante :

$$(a, b) (c, d) = \begin{cases} (a, d) & \text{si } a < b \text{ ; } b = c \text{ et } c < d \\ \text{non défini} & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

E étant un ensemble ordonné, l'ensemble de ses intervalles munis de cette loi de composition sera appelé le "groupeïde des intervalles de E ". Les intervalles dégénérés en sont les idempotents puisque $(a, a) (a, a) = (a, a)$; Cette définition, généralise et restreint en même temps la notion déjà classique de "groupeïde de BRANDT".

Enfin, étant donnée une relation d'ordre R et une relation d'équivalence R' entre éléments dont les classes sont X, Y, \dots toutes deux définies sur le même ensemble, nous dirons que R' est compatible avec R si la relation R entre classes définies par $X R Y$ s'il existe $a \in X$ et $b \in Y$ telles que aRb est une relation d'ordre entre ces mêmes classes n'entraînant aucune autre relation de la forme XRY et YRX (ce qui pourrait être le cas si l'on avait à la fois par exemple :

$$a, a' \in X \text{ et } b, b' \in Y \text{ et } aRb \text{ et } b' R a').$$

Nous appellerons cette nouvelle structure la structure quotient E/R' de E par R' . On peut démontrer que si R' n'était pas compatible avec R , il existerait une relation d'équivalence R'' unique, moins fine que R' , compatible avec R et telle que toute autre relation d'équivalence satisfaisant à ces conditions soit moins fine qu'elle. Nous pouvons donc sans ambiguïté aucune associer à une relation d'ordre R sur E une relation d'ordre \bar{R} sur E/R'' .

PRÉLIMINAIRES ALGÈBRIQUES

13

On fera attention au fait qu'à une structure d'ensemble ordonnée correspondent deux familles de relation d'équivalence :

les relations entre éléments dont nous venons de dire un mot et qui induisent des structures quotient de l'ensemble.

les relations entre intervalles qui induisent au contraire des structures quotient du groupe des intervalles.

La plus simple d'entre ces dernières est la relation d'isomorphie R définie par :

$(a, b) R (a', b')$ si et seulement si, il existe une correspondance biunivoque \longleftrightarrow entre les éléments c_i de l'intervalle (a, b) et c'_i de (a', b') telle que si $c_i \longleftrightarrow c'_1$ et $c_2 \longleftrightarrow c'_2$ $c_1 \leq c_2$ soit équivalent à $c'_1 \leq c'_2$.

Pour terminer, nous rappellerons que si E et E' sont deux ensembles munis chacun d'une relation d'ordre R et R' , le produit direct $E \times E'$ est muni lui aussi de façon naturelle de la relation d'ordre R'' définie par :

$(a \times a') R'' (b \times b')$ si et seulement si, $a R b$ et $a' R' b'$.

Naturellement tous les intervalles $((a \times a'), (b \times b'))$ où a et b sont fixés et où a' parcourt E' sont isomorphes entre eux et isomorphes à E' .

II. - TREILLIS

Nous allons maintenant isoler parmi les relations d'ordre une famille satisfaisant à des conditions beaucoup plus strictes qui nous permettront de traiter l'ensemble E comme une structure algébrique.

Définition : Une relation d'ordre \leq sur E est une relation d'ordre latticiel si et seulement si pour toute famille F formée d'éléments a, b, \dots, c de E il existe un élément x et un élément y tels que :

1° Pour tout $a \in F$: $x \leq a \leq y$

2° Pour toute autre paire z, u satisfaisant à la condition précédente: $z \leq x \leq y \leq u$.

Un exemple familier d'ordre latticiel est celui des ensembles convexes du plan réel ordonnés par inclusion; dans ce cas :

y est le plus petit ensemble convexe contenant tous les éléments de F ;

x est la partie commune à tous les éléments de F ; (celle-ci pouvant d'ailleurs être vide).

On appelle x l'intersection des éléments de F ;
 y la réunion des éléments de F ;

et on note : $x = a \cap b \dots \dots \dots \cap c$

$y = a \cup b \dots \dots \dots \cup c$

ou encore, plus fréquemment, quand aucune confusion n'est à craindre ;

$$x = a \cap b \cap \dots \cap c$$

$$y = a \cup b \cup \dots \cup c$$

On peut montrer que ces deux opérations \cap et \cup satisfont aux lois suivantes ;

1° - Idempotence : pour tout a ; $a \cap a = a = a \cup a$

2° - Associativité : pour tout a, b, c ;

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) ; (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

3° - Commutativité : pour tout a et b ;

$$(a \cap b) = b \cap a ; a \cup b = b \cup a$$

4° Absorption : pour tout a et b ;

$$a \cap (a \cup b) = a = a \cup (a \cap b)$$

Inversement, en prenant ces égalités algébriques comme axiomes on pourrait reconstruire la relation d'ordre par la définition suivante ;

$$a \leq b \text{ si et seulement si } a = a \cap b$$

$$\text{ou bien } a \leq b \text{ si et seulement si } b = a \cup b$$

Un ensemble muni d'une relation d'ordre latticiel sera nommé un treillis.

Formellement il sera toujours possible d'adjoindre à un treillis un "plus petit" et un "plus grand" élément, notés, par exemple 0 et 1 tels que l'on ait pour tout a ;

$$0 \cap a = 0 ; 0 \cup a = a = a \cap 1 ; 1 \cup a = 1.$$

Si le treillis est fini, 0 et 1 peuvent être identifiés respectivement à l'intersection et à la réunion de tous les éléments du treillis.

Dans tout treillis existe une dualité canonique obtenue en permutant les opérations \cap et \cup qui, comme on le voit, entrent de manière parfaitement symétrique dans les définitions. Autrement dit, R et R simultanément sont ou ne sont pas des ordres latticiels.

On observera que si l'ensemble ordonné E est fini et s'il contient un plus grand élément, il suffit pour qu'il soit un treillis qu'il possède une intersection ; en effet, pour toute famille F (a, b, ... c), il existe au moins un x tel que $a \leq x$ entraîne $a \leq x$. S'il en existait plusieurs, constituant une famille (x, y ... z) l'intersection $x_0 = x \cap y \cap \dots \cap z$ serait la réunion $a \cup b \cup \dots \cup c$ car ;

1° - x satisfaisant à $a \leq x$, ceci entraîne $a \leq x_0$ puisque $a \leq x$ est équivalent à : $a \cap x = a$ et par conséquent si

$$a \cap x = a \cap y = a \text{ on a ;}$$

$$a = (a \cap x) \cap (a \cap y) = a \cap (x \cap y) \text{ et donc ;}$$

$$a \leq x \cap y$$

2° - x_0 est minimal parmi les éléments ayant cette propriété de par la définition même de l'intersection.

Le même raisonnement et son extension par dualité permettent de démontrer le résultat suivant :

Tout intervalle d'un treillis est lui-même un treillis.

En effet, on vient de voir que si

$$a \leq x \leq b \text{ et } a \leq x' \leq b \text{ on a aussi } a \leq x \cap x' \leq x \cup x' \leq b$$

Il est trivial de remarquer qu'un sous-treillis c'est-à-dire un sous-ensemble de E fermé pour les deux opérations, réunion et intersection n'est pas nécessairement un intervalle.

TREILLIS LIBRES, ÉLÉMENTS IRRÉDUCTIBLES

La structure de treillis que nous venons de caractériser est encore trop générale et dans les applications on ne se sert le plus souvent que de treillis satisfaisants des axiomes supplémentaires. Ceux-ci peuvent être de plusieurs types dont le plus important est constitué par les "lois universelles" qui postulent une relation algébrique nouvelle reliant les deux opérations \cap et \cup .

Par exemple, nous étudierons plus loin les treillis distributifs, c'est-à-dire ceux où entre trois éléments quelconques on a toujours :

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) .$$

Appelons "mot latticiel" toute expression formelle bâtie à partir d'une famille de symboles x, y, \dots, z et des deux opérations \cap et \cup .

Nous conviendrons que deux mots $P_1(x, y, \dots, z)$ et $P_2(x, y, \dots, z)$ sont équivalents si l'on peut les ramener l'un à l'autre par l'application successive des axiomes définissant la relation d'ordre latticiel.

Par exemple (nous employons ici la notation abrégée) les deux mots :

$$P_1 = a b \text{ et } P_2 = a(ab + bc)$$

sont équivalents puisque l'on a :

$$a b \leq b ; b c \leq b ; \text{ donc } a b + bc \leq b \text{ donc :}$$

$$a (a b + b c) \leq a b$$

et d'autre part : $a b \leq a ; a b \leq a b + b c ;$

donc aussi : $a b \leq a (a b + b c)$ donc, enfin, l'équivalence cherchée.

L'ensemble de ces mots ou plutôt de ces classes de mots constitue un treillis que l'on appelle le "treillis libre" à n générateurs si n symboles x, y, \dots, z sont intervenus dans sa construction.

Soit maintenant \mathcal{U} une loi donnée par l'égalité postulée de deux mots P_1 et P_2 portant sur k symboles et soit T un certain treillis. P_1 et P_2 définissent chacun une fonction dans T des k-uples d'éléments de T. Deux cas sont alors possibles.

- ou bien ces deux fonctions sont toujours égales, auquel cas nous dirons que T satisfait à \mathcal{U} ou encore que T est un \mathcal{U} -treillis.

- ou bien au moins pour un k -uplet (x, y, \dots, z) on a $P(x_0, y_0, \dots, z_0) \neq t \neq t' = P_2(x_0, y_0, \dots, z_0)$.

Définissons alors une relation d'équivalence \mathcal{U} entre éléments de T par le fait que $t \mathcal{U} t'$ si et seulement si il est possible de les exprimer par deux mots réductibles l'un à l'autre par l'application répétée des axiomes et de l'égalité $P_1 = P_2$.

Il est clair que T/\mathcal{U} est un treillis que l'on appellera le treillis quotient de T par la loi \mathcal{U} .

En particulier, si T est le treillis libre à n générateurs T/\mathcal{U} sera le \mathcal{U} -treillis libre à n générateurs.

C'est ici qu'intervient une notion nouvelle qui est particulièrement utile dans l'étude de ces structures : celle de d'élément irréductible.

Nous dirons que x est un élément \mathcal{U} irréductible si dans toute représentation $x = y \cup z$; on a $y = x$ ou $z = x$; il revient au même, si le treillis est fini, de dire que x ne couvre qu'un seul élément qu'on notera x_0 .

On définirait de même les éléments \cap irréductibles par dualité canonique et l'on peut énoncer le :

Théorème : Tout treillis est décrit de manière univoque par la seule donnée des relations d'ordre qui existent entre ses éléments \mathcal{U} irréductibles et ses éléments \cap irréductibles.

En effet, tout élément de treillis peut être caractérisé de manière univoque à la fois comme la réunion de tous les éléments \mathcal{U} irréductibles qui sont plus petits que lui ou comme l'intersection de tous les \cap irréductibles qui sont plus grands que lui.

Comme d'habitude dans les structures algébriques, on dira que la relation d'équivalence R entre éléments est compatible avec la structure du treillis T si pour tout a et b , a' et b' $a R b$ et $a' R b'$ entraînent :

$$(a \cap b) R (a' \cap b') \text{ et } (a \cup b) R (a' \cup b').$$

On peut alors énoncer :

Toute relation d'équivalence R compatible avec T fini est décrite de manière univoque par la donnée des intervalles (x_0, x) (où x est un élément \mathcal{U} irréductible) qui deviennent des intervalles dégénérés dans le treillis T/R .

L'énoncé dual vaut naturellement pour les éléments \cap irréductibles.

TREILLIS DISTRIBUTIFS

Ce sont des treillis où entre trois éléments quelconques, on a toujours l'égalité :

$$(D) : a(b + c) = ab + ac$$

A titre d'exemple, montrons que cet axiome est équivalent à sa forme duale :

$$(\bigcup D) : (a + b) (a + c) = a + bc$$

En effet, si D est vrai :

$$(a+b) (a+c) = (a+b)a + (a+b) c = a + a c + b c = a + b c$$

Il en résulte que dans le treillis distributif libre à n générateurs T_n les seuls \cap -irréductibles sont les mots $(x + y + \dots + z)$ et les \cup -irréductibles les mots $x y \dots z$ (où $x, y \dots z$ constituent une partie quelconque de l'ensemble des générateurs) puisque l'on peut éliminer toutes les parenthèses grâce à D ou à \bar{D} .

Un élément de T est donc caractérisé de deux manières distinctes comme une famille de parties de l'ensemble des générateurs entre lesquels n'existe aucune relation d'inclusion.

Par exemple :

$a b c + a b d + c d$ est un élément de T_4 et l'élément dual associé serait :

$$(a+b+c) (a+b+d) (c+d) = a c + a d + b c + b d + c d$$

Les exemples de treillis distributifs se rencontrent dans presque toutes les parties des mathématiques. Le plus classique est peut être celui où la relation c représente la relation de divisibilité entre entiers. Les opérations \cup et \cap sont alors les opérations de P.G.C.D. et de P.P.C.M.

Cependant, nous pouvons encore particulariser deux types remarquables à l'intérieur des treillis distributifs.

1° - Les chaînes (ou "ensembles totalement ordonnés") dans lesquelles pour deux éléments quelconques x et y on a toujours soit xy soit yx et dont il est superflu de donner des exemples.

2° - les algèbres de BOOLE dans lesquelles on postule à côté de \cap et \cup , l'existence d'une opération unaire biunivoque partout définie la "complémentation" notée $\bar{}$ et caractérisée par :

$$\bar{\bar{a}} \cap a = 0 \quad \text{et} \quad a \cup \bar{a} = 1$$

Il n'est pas nécessaire non plus d'insister sur les algèbres de BOOLE qui sont familières aux probabilistes sous la forme de l'algèbre des propositions et où les symboles \cap et \cup et $\bar{}$ sont interprétés respectivement comme la conjonction ($\&$), la disjonction (\vee) et la négation.

On rappellera simplement que dans une algèbre de BOOLE, les seuls irréductibles ("les atomes") couvrent 0 (et dualement les seuls irréductibles sont couverts par 1).

Il est classique aussi que si E est fini l'ensemble de ses parties ordonnées par inclusion constitue une algèbre de BOOLE et l'on connaît l'importance dans la théorie de la mesure, de ces notions étendues convenablement au cas infini.

TREILLIS MODULAIRES

Il existe des cas très importants (idéaux, sous-groupes distingués) où la loi distributive n'est pas vérifiée mais où pourtant existe la loi plus faible suivante : loi modulaire ou loi de DEDEKIND :

Pour tout a, b et c :

$$(M) : a \cap (b \cup (a \cap c)) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

Par exemple, si l'on considère le treillis formé par les variétés linéaires d'un espace projectif; avec $a \cap b$ comme intersection de a et de b et $a \cup b$ comme "plus petite variété linéaire contenant a et b ", on voit que si a_1 est une droite contenue dans le même plan que les points distincts b_1 et c_1 , on a : $b_1 \cup c_1 =$ une droite et, donc, $a_1 \cap (b_1 \cup c_1) =$ un point mais (sauf si b_1 ou c_1 sont sur a_1) :

$$a_1 \cap b_1 = a_1 \cap c_1 = (a_1 \cap b_1) \cup (a_1 \cap c_1) = \text{l'ensemble vide } \emptyset.$$

Par contre, on peut démontrer que l'égalité (M) est toujours vraie dans cette structure.

Nous dirons qu'un treillis est "modulaire" s'il satisfait à la loi universelle (M). Comme (M) est identiquement vrai quand (D) l'est elle-même, les treillis distributifs sont à fortiori des treillis modulaires;

A titre d'exemple, nous allons montrer que (M) est équivalent à sa formule duale :

$$(\check{M}) = a + b (a + c) = (a + b) (a + c)$$

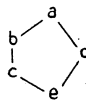
en effet d'après (M) on a :

$$\begin{aligned} (a + b) (a + c) &= (a (a + c) + b) (a + c) \\ &= a (a + c) + b (a + c) = a + b (a + c) \end{aligned}$$

Au contraire de ce que nous avons vu pour les treillis distributifs, il n'est pas connu de forme canonique pour les éléments irréductibles de treillis modulaire libre à k générateurs sauf dans les seuls cas où celui-ci est fini c'est-à-dire quand $k = 2$ ou 3 .

Les propriétés essentielles des treillis modulaires découlent du résultat suivant :

Dans un treillis modulaire, il n'existe aucun 5-uplet d'éléments distincts formant un sous-treillis du type représenté par le schéma suivant où les traits verticaux indiquent des relations de consécuité :



En effet si la loi M était vérifiée on aurait :

$$b = b a = b (c + d) = b (b c + d) = b c + b d = c + e = c$$

La réciproque est vraie et il s'en déduit :

Dans un treillis modulaire fini, toutes les chaînes qui joignent deux éléments ont la même longueur.

Une autre formulation est la suivante qui est connue sous le nom de Lemme de BIRKHOFF.

Si toutes les chaînes d'un treillis sont de longueur finie, la condition nécessaire et suffisante pour que celui-ci soit modulaire est que pour tout x et y , l'assertion ; " x et y couvrent $x \cap y$ " soit équivalente à ; " $x \cup y$ couvre y et x ".

Enfin on exprimera plus généralement le théorème suivant ; en désignant par R_0 la fermeture de la relation R entre intervalles définie par ;

$$(x, x \cap y) R (x \cup y, y)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le treillis soit modulaire est que R_0 soit une relation d'isomorphisme.

On appelle R_0 la "relation d'équivalence projective" et on voit que dans le contre exemple précédent on avait à la fois $(a, c) R_0 (d, e)$ et $(a, b) R_0 (d, e)$ et que par conséquent $(a, c) R_0 (a, b)$.

Montrons au contraire que R_0 est bien un isomorphisme dans les treillis modulaires. En effet, si v et v' appartiennent à $(x \cap y, x)$, on a la correspondance ; $v \rightarrow y \cup v$.

$$v' \rightarrow y \cup v'$$

$$v \cup v' \rightarrow y \cup (v \cup v') = (y \cup v) \cup (y \cup v')$$

et pour tout w, w' dans $(y, y \cup x)$:

$$w \rightarrow x \cap w ; w' \rightarrow x \cap w' ; w \cap w' \rightarrow x \cap (w \cap w')$$

Enfin d'après la loi modulaire, il existe la propriété involutive suivante qui achève d'établir le résultat ;

$$v \rightarrow y \cup v \rightarrow x \cap (y \cup v) = (x \cap y) \cup (x \cap v) = v$$

III. - TREILLIS DE PARTITION

Les autres variétés particulières de treillis que l'on a l'occasion d'utiliser ne sont pas en général définies par des lois universelles, mais par des considérations assez diverses.

Par exemple, un treillis fini est un arbre quand, quelque soient a et b on a ; $a + b = 1$ (1 : le plus grand élément) (sauf naturellement si $a \subset b$ ou $b \subset a$).

Ceci revient à dire que chaque élément (sauf 1) ne couvre qu'un seul élément ou encore que tous les intervalles $(0, a)$ ($a \neq 1$) sont des chaînes.

Les treillis de partition que nous étudierons maintenant sont au contraire définis à partir d'une autre structure. Ils sont un peu plus généraux que les treillis que l'on considère habituellement sous ce nom et qui ne sont rien d'autre que les

structures duales des treillis de toutes les relations d'équivalence d'un ensemble.

Définition : Etant donné un ensemble E , une famille F de parties e_i de E ($i \in I$) sera dite "base de partition" de l'ensemble si elle satisfait aux conditions suivantes :

- 1° - F contient E lui-même et l'ensemble vide \emptyset
- 2° - F contient en même temps que tout sous-ensemble de ces parties leur intersection au sens de la théorie des ensembles.
- 3° - Si $e_i \in F$, et si les ensembles deux à deux disjoints e_j ($j \in J \subset I$) sont contenus dans e_i , il existe au moins un système de e_k ($k \in K(I)$) dans F , deux à deux disjoints, et disjoints des e_j , tels que la réunion (toujours au sens de la théorie des ensembles) des e_j et des e_k soit exactement e_i .

On observera que la condition 3° n'est qu'une forme affaiblie de celle par laquelle on définit habituellement la différence de deux ensembles. Qu'elle ne s'y réduit pas est montré par le contre-exemple suivant :

$E = a, b, c$; $F = (a, b, c), (a, b), (b, c), (a), (b), (c)$, et \emptyset .

F est bien un treillis mais ne contient pas :

$$(a \ c) = (a \ b \ c) - (b)$$

On voit sans peine que :

toute base de partition de E contient aussi une base de partition pour chacun des ensembles, e_i appartenant à F .

Dans la suite, nous n'aurons presque jamais besoin que des deux cas suivants :

1° - E est un ensemble fini de n éléments. F est l'ensemble de toutes les parties de E , ce qui est le cas considéré habituellement comme nous l'avons dit plus haut.

2° - E est l'ensemble des entiers positifs inférieurs à n , F est l'ensemble des entiers compris entre deux valeurs.

Nous considérerons désormais que E et F sont donnés une fois pour toutes.

Définition : Une partition $W = (e_1)(e_2) \dots (e_k)$ de E sera une relation d'équivalence sur E dont les classes (les "composants") e_1, e_2, \dots, e_k appartiennent à F .

Le résultat suivant est trivial :

Si W est une partition de E , W définit aussi une partition de chacun des sous-ensembles E_i de E formé par la réunion d'un nombre quelconque de ses composants. On appellera ces partitions les restrictions de W à E_i .

On profitera de ceci pour abréger les notations et écrire par exemple $W = (e_1)(e_2) \dots (W')(W'') \dots$ si $e_1, e_2 \dots$ etc sont des composants de W et $W^{(i)}$ les restrictions de W à $e^i, e'' \dots$ etc,

les $e_1, e_2, \dots, e', e'' \dots$ étant, naturellement disjoints et de réunion totale égale à E .

Nous ordonnerons les partitions par la même relation d'ordre ("plus fin") que les relations d'équivalence et nous démontrerons ;

Quelque soit F , cet ordre est un ordre latticiel ;

En effet, soient $W = (e_1) (e_2) \dots (e_k)$ et $W' = (e'_1) (e'_2) \dots (e'_k)$. Les ensembles $e_i \cap e'_j$ appartiennent à F , sont deux à deux disjoints et ont pour réunion E . Ceux qui ne se réduisent pas à l'ensemble vide sont les composants d'une partition W'' plus fine que W et que W' et moins fine que toute autre ayant la même propriété. Donc il existe une intersection des partitions et comme nous opérons dans un domaine fini, il s'en déduit l'existence d'une réunion.

On remarquera à ce propos que ce treillis L_F ne satisfait à aucune loi universelle particulière dans le cas général. Il est cependant distributif dans le cas correspondant au deuxième exemple donné plus haut.

Enfin si W_2 est plus fine que W_1 , la notion de "quotient" W' de W_1 par W_2 aura un sens bien clair ; W' sera la partition induite par W_1 sur le quotient E' de l'ensemble E par la relation d'équivalence que définit W_2 .

Les principales propriétés du treillis L_F découlent des considérations très simples suivantes ;

A tout e_i et à toute partition W_α de e_i nous associons un symbole que nous appellerons l'opérateur de partition simple T_α et nous convenons d'écrire ;

$$W T_\alpha = W' \text{ chaque fois que ;}$$

1° - e_i est un composant de W (sinon on convient que l'écriture précédente n'a pas de sens).

2° - les restrictions de W et de W' à $E - e_i$ sont identiques.

3° - La restriction de W' à e_i est précisément W_α .

Nous composerons ces opérateurs par une loi notée \circ et définie par ;

$T' = T \circ T'$ si et si seulement il existe W, W' et W'' tels que $W T = W'$ et $W'' = W' T'$ aient un sens.

Manifestement on ne peut avoir $T \circ T'$ que dans les deux cas suivants ;

1° - T' opère sur un composant de la partition W_α sur lequel opérait déjà T . Dans ce cas $T' \circ T$ n'a pas de sens mais $T \circ T'$ est aussi un opérateur de partition simple.

2° - T' opère sur un composant e_j de W distinct de e_i . Dans ce cas $T \circ T'$ et $T' \circ T$ ont tous les deux un sens et peuvent être considérés comme égaux puisqu'ils conduisent à la même partition W'' .

L'ensemble des classes de mot en les T formés avec la loi de composition qui ont un sens, et qui ne sont pas réductibles

l'une à l'autre par la loi de commutativité précédente constituent ce que nous appellerons le groupeïde G des opérateurs de partition de E.

Comme on voit, G est isomorphe du quotient du groupeïde des intervalles de L par la relation d'équivalence R entre intervalles W qui est la fermeture des relations suivantes :

1° - $R_T : (W, W') R_T (W'', W''')$ si $W' = W T$ et $W''' = W'' T$.

2° - $C : (W, W') C (W'', W''')$ s'il existe T et T' tels que $W' = W (T o T')$ et $W''' = W'' (T o T')$.

Nous appellerons \bar{R} l'équivalence normale et nous justifierons son intérêt par les théorèmes suivants :

1° - Si $(W, W') R_T (W'', W''')$ alors les deux intervalles sont isomorphes.

En effet, ils sont tous les deux isomorphes à un intervalle (W_1, W'_1) sur le treillis des partitions de l'ensemble e_1 sur lequel opère T.

2° - L'intervalle (W, W'') où $W'' = W (T_1 o T_2)$ est isomorphe au produit direct des intervalles : $(W T_1, W'_1)$ et $(W T_2, W'_2)$.

En effet, toute partition de l'intervalle (W, W'') peut s'écrire $(W_1) (W_2) (W_3)$ où W_1 est une partition de l'ensemble e_1 sur lequel opère T_1 , W_2 une partition de e_2 et W_3 une partition de $E - e_1 - e_2$.

Enfin on a :

3° - \bar{R} est une relation d'équivalence plus fine que la relation d'équivalence projective \bar{R}_0 . Deux intervalles \bar{R} équivalents sont donc isomorphes.

Ce résultat est certainement vrai pour la relation C en vertu du théorème précédent. Montrons qu'il en est de même pour R_T .

Si $(W_1, W'_1) R_T (W_2, W'_2)$, on peut poser par définition :

$$W_1 = (e_0) (W'_1), \quad W_2 = (e_0) (W'_2)$$

$$W'_1 = (W_0) (W''_1), \quad W'_2 = (W_0) (W''_2)$$

où W_0 est la partition effectuée par T sur e_0 .

Considérons l'intervalle $((W_1 \cup W_2), (W'_1 \cup W'_2))$. Il est isomorphe à chacun des intervalles (W_1, W'_1) et (W_2, W'_2) puisque :

$$W_1 \cup W_2 = (e_0) (W'_1 \cup W'_2) \text{ et } W'_1 \cup W'_2 = (W) (W''_1 \cup W''_2).$$

Qu'il leur est aussi projectivement équivalent résulte du calcul :

$$W_1 \cap (W'_1 \cup W'_2) = W'_1 \text{ et } W_2 \cap (W'_1 \cup W'_2) = W'_2$$

qui est immédiat puisque $W'_1 \cap (W'_1 \cup W'_2) = W'_1$.

Le même raisonnement aurait pu naturellement être effectué en utilisant l'intervalle $(W_1 \cap W_2, W'_1 \cup W'_2)$.

L'ensemble de ces résultats peut encore être résumé dans le théorème suivant :

4° - Si W_2 est plus fine que W_1 , l'intervalle (W_1, W_2) est isomorphe au produit direct des intervalles (W_{1i}, W_{0i}) correspondant chacun à un composant e_i de W_1 et où W_{1i} et W_{0i} sont respectivement la partition la moins fine et la plus fine de l'ensemble e_i quotient de e_i par la restriction-appropriée de W_2 considérée comme relation d'équivalence.

Enfin rappelons que l'on appelle semi-modulaires les treillis tels que :

Si x et y couvrent $x \cap y$ alors $x \cup y$ couvre x et y , ce qui est un affaiblissement du lemme de BIRKHOFF que nous avons donné plus haut pour les treillis modulaires.

On peut établir que :

Les treillis duaux des treillis de partition finis sont semi-modulaires.

Il suffit de voir que W_1 et W_2 ne peuvent couvrir $W_3 = W_1 \cap W_2$ que dans les deux cas suivants :

1° - $W_1 = (e_1)(W_2')(W_3')$ et $W_2 = (W_1')(e_2)(W_3')$

où W_1' et W_2' sont respectivement des partitions de e_1 et e_2 .

2° - $W_1 = (W_{11}')(W_3')$ et $W_2 = (W_{12}')(W_3')$

où W_{11}' et W_{12}' sont deux partitions du même e_1 .

Le résultat découle alors de la définition même de la base des partitions.

IV. - FONCTIONS NUMÉRIQUES SUR LES ENSEMBLES ORDONNÉS

Dans la théorie des treillis, il est classique de définir une valuation comme une fonction numérique $|x|$ des éléments x d'un treillis modulaire satisfaisant à l'identité :

$$|x \cup y| + |x \cap y| = |x| + |y|$$

Afin d'étendre aisément cette définition par trop restrictive nous nous placerons d'emblée à un niveau plus général.

E étant un ensemble muni d'une relation d'ordre R et α étant un anneau commutatif, nous appellerons fonctions de (E, R) dans α toute application $f(x, y)$ dans α des paires d'éléments x et y de E qui est nulle sauf quand $x R y$.

Il s'agit donc plutôt en toute rigueur d'une fonction dans α des intervalles de E mais nous pourrions sans danger de confusion employer cette terminologie plus concise.

Si E est fini, on peut associer (cf. RIGUET, Thèse Paris 1951) à tout $f(x, y)$ une matrice F dont l'élément $a_{xy} = f(x, y)$ est nul quand x n'est pas tel que $x R y$. Il est évident qu'en raison de la transitivité et de l'acyclicité de R , les matrices F satisfaisant à cette condition constituent un nouvel anneau $\tilde{\alpha}$ dont l'unité I correspond à la fonction Kronekerienne :

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

De plus, si $f(x, x)$ n'est jamais nul, il existe une matrice unique F telle que $FF^{-1} = I$.

Parmi les fonctions spécialement dignes d'intérêt on notera la fonction de consécutivité dont la matrice C représente la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ couvre } x. \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

et la fonction d'incidence à laquelle nous associerons la matrice S :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \subset y. \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

La matrice S^{-1} correspond à la fonction de MÖBIUS de la relation d'ordre car si $f(x, y)$ est définie par $f(x, y) = \sum_{x \subset z \subset y} f'(x, z)$ où f' est une autre fonction on a : $F = SF'$ et, par conséquent : $F' = S^{-1}F$.

Enfin, il est classique que l'élément a_x^y de C^n livre le nombre de chaînes distinctes de longueur n joignant x à y . On peut aussi, de manière plus profonde, rattacher certaines propriétés de la relation d'ordre R à celles de la réduite de JORDAN de la matrice $S-I$.

Nous arrêterons là ces généralités qui sont quelque peu extérieures à l'objet de ce travail mais qui peuvent présenter de l'intérêt pour les probabilistes en raison de leurs applications nombreuses aux problèmes de dénombrement finis. A titre d'exemple nous indiquerons seulement le calcul de l'expression formelle des moments d'un système de variables aléatoires en fonction de leurs cumulants ce qui nous fournira l'occasion de donner la fonction de MÖBIUS du treillis de toutes les partitions d'un ensemble de n objets.

Considérons n variables aléatoires x_1, \dots, x_n réparties de manière quelconque. A tout composant X_i d'une partition W de l'ensemble des x , associons la valeur moyenne $m(X_i)$ du produit des variables x_j appartenant à X_i et à W elle-même le produit des expressions $m(x_j)$ relatives à chacun des composants. Désignons par $K(W)$ l'expression analogue construite avec les cumulants.

Soit W_0 la partition la plus fine; il lui correspond $m(W_0) = K(W_0) = m(x_1) m(x_2) \dots m(x_n) = K(x_1) \dots K(x_n)$

Considérons $m(W)$ et $K(W)$ comme deux fonctions de l'intervalle (W, W_0) du treillis de toutes les partitions de l'ensemble des x_j .

Nous supposerons connu le fait que $m(x_1, \dots, x_n)$ est la somme étendue à tous les W des $K(W)$ correspondants, chacun d'eux étant affecté d'un coefficient unité, c'est-à-dire que l'on a : $m(W) = \sum K(W')$ où la sommation est étendue à toutes les W' plus fines que W . Par exemple :

$$M(x y z) = K(x y z) + K(x) K(y z) + K(y) K(x z) + K(z) K(x y) + K(x) K(y) K(z).$$

On aura donc : $K(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum f(E, W') m(W')$ où la somme est étendue aussi à toutes les partitions de E et où

$f(E, W)$ est le coefficient numérique représentant la fonction de MOBIUS du treillis des partitions de E .

Par définition $f(W_1, W_2)$ est nulle si W_1 n'est pas plus fine que W_2 . Elle est égale à 1 si $W_1 = W_2$ et enfin, pour tout intervalle non dégénéré (W_1, W_2) , elle satisfait à $\sum f(W_1, W') = \sum f(W', W_2) = 0$ où W' parcourt (W_1, W_2) .

Il nous suffit ici de calculer $f(E, W_2)$ mais comme on l'a vu dans le chapitre précédent (E, W_2) est isomorphe à (E', W'_2) où E' est le quotient de E par W_2 et où W'_2 est la partition la plus fine de E' . Par conséquent :

$f(E, W_2) = f(E', W'_2)$. Il en résulte que $f(E, W_2)$ ne dépend que du nombre h_2 des composantes de W_2 . On vérifiera que cette fonction est $(-1)^{h_2} (h_2)!$ pour les premières valeurs de h et on obtient le résultat par récurrence en utilisant l'identité :

$$\sum_{i=1}^m S_m^i (-1)^i i! = 0 \quad (S_n^i : \text{nombre de STIRLING de 2ème espèce})$$

puisque S_m^i est le nombre des partitions en i classes de m objets.

De l'expression de $K(x, x_1, \dots, x_n)$ ainsi obtenue on peut déduire toutes les autres en identifiant certaines variables.

Ainsi par exemple :

$$K(xyz) = m(xyz) - m(x)m(yz) - m(y)m(zx) - m(z)m(xy) + 2m(x)m(y)m(z)$$

On en dériverait en faisant : $x = z$:

$$K(x^2y) = m(x^2y) - 2m(x)m(xy) - m(y)m(x^2) + 2(m(x)^2 m(y))$$

et en faisant $x = y = z$

$$K(x^3) = m(x^3) - 3m(x)m(x^2) + 2(m(x))^3$$

LES VALUATIONS

Les fonctions qui nous occuperont maintenant sont celles qui dérivent d'une fonction au sens strict des éléments de E et nous introduirons la définition suivante :

$f(x, y)$ sera une fonction simple s'il existe une application $h(x)$ dans \mathcal{A} des éléments de E telle que $f(x, y) = h(y) - h(x)$

On voit que pour un système physique évoluant de façon discrète si $f(x, y)$ est considérée comme attachée au passage de l'état x à l'état y , la condition que nous imposons revient à postuler l'existence d'une fonction d'état $h(x)$ indépendant de l'histoire antérieure du système.

Naturellement, nous aurions pu au lieu d'une loi additive, utiliser une loi de composition multiplicative $h(y) = f(x, y)h(x)$ et nous ferons souvent usage de cette possibilité.

Plus généralement encore, nous aurions pu supposer que \mathcal{A} n'était pas commutatif. Un exemple simple en est fourni par les chaînes de MARKOFF. Dans ce cas $h(t)$ est le vecteur représentant la distribution des probabilités au temps t et $f(t_1, t_2)$ est la matrice décrivant les probabilités de transition.

Nous particulariserons encore les fonctions qui nous intéressent et R étant une relation d'équivalence entre intervalles de E nous définirons enfin les valuations :

La fonction simple $f(x,y)$ sera dite induite par une valuation $h(x)$ des éléments de E si $f(x,y) = f(x',y')$ chaque fois que les intervalles (x,y) et (x',y') sont équivalents selon R .

Dans l'exemple évoqué précédemment des chaînes de MARKOV, nous avons donc bien affaire à une valuation si la chaîne était constante dans le temps et si la relation R était simplement l'égalité de durée des intervalles.

Plus généralement il en serait de même si les états successifs d'un système physique étaient régis par un semi-groupe (ou groupe) d'opérateurs T_i . L'on voit alors que notre définition des valuations est une généralisation de la notion de caractère de groupe — telle que la définit WIENER — puisque elle s'exprime en notation multiplicative par :

$$h(T_i x) = f(T_i) h(x) \quad \text{où } f(T_i) \text{ est indépendant de } x.$$

En choisissant pour R la relation d'équivalence projective on retrouve bien pour les treillis modulaires la définition classique qui peut s'écrire (en notation abrégée) $[h(x+y) - h(y) = h(x) - h(x \vee y)]$

Calculons maintenant les expressions $h(x(y+xz))$ et $h(xy + zy)$

dans un treillis quelconque en utilisant l'identité précédente :

$$\begin{aligned} h(x(y+xz)) &= h(x) + h(y+xz) - h(x+y+xz) \\ &= h(x) + h(y) + h(xz) - h(xyz) - h(x+y) \\ &= h(xy) + h(xz) - h(xyz) \\ h(xy + xz) &= h(xy) + h(xz) - h(xyz) \end{aligned}$$

On voit que l'égalité de ces deux valeurs entraîne que dans tout treillis, les éléments modulairement équivalents ont la même valuation, quand celle-ci repose sur l'équivalence projective ce qui explique les limitations de la définition classique.

En outre, ceci montre le lien étroit qu'établissent les valuations entre les relations d'équivalence entre éléments et les relations d'équivalence entre intervalles.

On observera enfin que les probabilités associées à un système d'événements x, y, \dots quelconques constituent une valuation particulière, car l'identité fondamentale peut aussi bien s'énoncer sous la forme familière :

$$\Pr(x \wedge y) = \Pr(x) + \Pr(y) - \Pr(x \vee y)$$

Si donc on a affaire à un système d'événements formant un treillis distributif dont les éléments "irréductibles" et "irréductibles" sont désignés respectivement par a_i et a_j et si x est défini par :

$$x = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$$

on obtient par application répétée de cette identité les deux représentations classiques de $\Pr(x)$ comme somme pondérée d'expressions telles que $\Pr(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots)$ ou que $\Pr(a_1 \vee a_2 \vee \dots)$

Revenons maintenant au cas général.

Théorème : Les valuations de E pour R forment un module dont le rang est égal au nombre plus un des classes d'intervalles équivalents définies par R .

La première partie de cette assertion est évidente.

Nous pouvons donc associer à chaque classe C_i d'intervalles (x, y) équivalents une valuation h_i telle que :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in C \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Réciproquement, si la fonction $f(x, y)$ déduite de la valuation h_i est telle que $f(x, y) = a_i$ pour $(x, y) \in C_i$, la différence :

$$f(x, y) - \sum a_i (h_i(y) - h_i(x))$$

est identiquement nulle. Ceci établit le théorème puisque f ne détermine h qu'à une constante près.

Théorème : Toute valuation d'un treillis de partition fini relative à l'équivalence normale R peut se mettre sous la forme :

$$h(W) = g(e_1) + g(e_2) + \dots + g(e_k)$$

où $g(e_i)$ est une application dans \mathcal{A} du composant e_i de la partition W .

Il est facile de vérifier que si $h(W)$ est de la forme précédente les différences $h(WT) - h(W)$ ne dépendent pas des ensembles e sur lesquels n'opère pas T . Réciproquement, soit W_0 la partition la plus fine de E , c'est-à-dire $W_0 = (a)(a)(c) \dots (x)$. Soit pour une certaine valuation $h(W) = K$. Choisissons arbitrairement dans \mathcal{A} les valeurs $g(a), g(b) \dots$ telles que leur somme soit K . Pour tout e_i de F appelons W_i la partition la plus fine dont un composant est e_i et définissons

$$g(e_i) \text{ par } h(W_0) + h(W_i) + \sum_{a \in e_i} g(a)$$

Comme pour toute partition $W = (e_1)(e_2) \dots (e_k)$, l'intervalle (W_i, W_0) est le produit direct des intervalles $(W', W_0) \dots (W_k, W_0)$, on doit avoir :

$$h(W_0) - h(W) = \sum (h(W_0) - h(W_i))$$

ce qui ne peut être identiquement vérifié que si :

$$h(W) = \sum g(e_i)$$

la somme étant étendue à toutes les composantes de W .

Comme les valuations ne sont définies qu'à une constante additive près, il pourra être avantageux d'utiliser la forme :

$$h(W) = g(e_1) - g(E)$$

qui s'adapte commodément au calcul sur un sous-treillis (W', W_0)

UNE ÉQUATION REMARQUABLE

Nous allons supposer maintenant que F contient toutes les parties de l'ensemble fini E et nous allons discuter une équation dont la solution est une valuation de L .

Théorème : Si la fonction $h(e_i, e_j)$ dans \mathcal{A} des paires d'ensembles disjoints satisfait pour tout e_i, e_j, e_k aux deux conditions :

$$1^\circ - h(e_i, e_j) = h(e_j, e_i)$$

$$2^\circ - h(e_i, e_j \cup e_k) + h(e_j, e_k) = h(e_j, e_i \cup e_k) + h(e_i, e_k)$$

elle peut être mise sous la forme :

$$h(e_i, e_j) = f(e_i) + f(e_j) - f(e_i \cup e_j)$$

La condition 1° implique que l'expression figurant dans 2° est une fonction symétrique de e_i, e_j et e_k que nous pouvons écrire : $h(e_i, e_j, e_k)$

Montrons d'abord par récurrence sur n que

$$h(e_i, e_j \dots e_{n+1}) = h(e_i, e_j, e_n, e_{n+1}) + h(e_n, e_{n+1})$$

est aussi une fonction symétrique de ses $n + 1$ arguments.

Par hypothèse on a :

$$\begin{aligned} & h(e_n, e_{n+1}) + h(e_1, e_2 \dots e_{n-1}, e_n \cup e_{n+1}) = \\ & h(e_1, e_2 \dots e_{n-1} \cup e_n \cup e_{n+1}) + h(e_{n-1}, e_n \cup e_{n+1}) + h(e_n, e_{n+1}) \\ & = h(e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \cup e_n \cup e_{n+1}) + h(e_{n-1}, e_n, e_{n+1}) \end{aligned}$$

ce qui montre que $h(e_1 \dots e_{n+1})$ est invariante par permutation de e_{n-1}, e_n et e_{n+1} et comme e_{n-1} , par hypothèse aussi, est un quelconque des $n-1$ premiers arguments de $h(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1})$, ce résultat intermédiaire est établi.

Montrons maintenant que h est une valuation de treillis des partitions.

Comme F contient toutes les parties de E nous pouvons nous limiter aux opérateurs T qui partitionnent en deux sous-ensembles celui sur lequel ils opèrent.

Soit la partition :

$$W = (e_1 \cup e_2) (e_3 \cup e_4) (e_5) (e_6) \dots (e_n)$$

on peut alors vérifier que

$$\begin{aligned} & h(e_1 \cup e_2, e_3 \cup e_4, e_5 \dots e_n) - h(e_1 \cup e_2, e_3, e_4, e_5, \dots e_n) \\ & = h(e_1, e_2, e_3 \cup e_4, e_5 \dots e_n) - h(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots e_n) \end{aligned}$$

ce qui établit que h est une valuation. D'où le théorème.

Il est important d'observer que quand E n'est pas un espace topologique discret comme nous l'avons supposé, l'équation que nous venons de discuter, peut avoir des solutions qui ne sont pas des valuations. Une équation très analogue se rencontre dans la théorie de ELLENBERG et MAC LANE de l'extension des groupes abéliens - (1943) Ann. of Math. (2) Vol 41 -

V. - DEUX APPLICATIONS

UNE APPLICATION AUX "STATISTIQUES D'ORDRE"

Nous considérerons en application des résultats précédents, certaines distributions qui ont été étudiées séparément (1) par les statisticiens et nous montrerons qu'elles peuvent se déduire très simplement de ce seul fait que leur fonction génératrice est une valuation d'un treillis de partition.

Soit une famille de k ensembles A_1, A_2, \dots, A_k comprenant chacun n_i éléments a_{ij} . Il est fréquent en statistique que les a_{ij} puissent seulement être classés par ordre de grandeur et que l'on ait à tester l'hypothèse nulle selon laquelle les $(\sum n_i)!(n_1!n_2!\dots n_k!)^{-1}$ permutations possibles seraient équiprobables contre la famille d'hypothèses alternatives selon lesquelles il y aurait toujours une probabilité plus grande que $1/2$ qu'un objet a_{ij} soit plus petit qu'un objet $a_{i'j'}$ si $i < i'$.

Les deux cas limites qui ont été envisagés systématiquement sont :

1° - Celui où $k = 2$, ce qui fournit un test non paramétrique de la différence de tendance centrale de A_1 et de A_2 .

2° - Celui où, au contraire, k étant quelconque, chaque ensemble A_i ne contient qu'un seul objet, ce qui conduit aussi à un test non paramétrique mais cette fois portant sur la corrélation entre le rangement observé et un autre rangement a priori (c'est le coefficient "tau" de KENDALL).

Nous n'étudierons ici que l'aspect algébrique de cette question et nous chercherons les distributions de la variable $R = \sum_{i,j,i',j'} r(i,j,i',j')$

avec $r(i,j,i',j') = \begin{cases} 1 & \text{si } i < i' \text{ et } a_{ij} \text{ observé inférieur à } a_{i'j'} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$

Il est facile de voir que R fournit la caractérisation la plus immédiate des propriétés d'ordre de l'échantillon observé.

Pour un système de valeurs de n_i donné, nous désignerons par P_x la probabilité pour que $R = x$ dans l'hypothèse H_0 et par $g(n_1, n_2, \dots, n_k) = \sum_x P_x t_x$ la fonction génératrice des P_x .

Théorème : g est une valuation multiplicative du treillis des partitions en segment de l'intervalle $(0, n_i)$

D'après les résultats du chapitre précédent, il suffit de montrer que si g' et g'' désignent respectivement les fonctions génératrices relatives à une famille formée de $k-1$ ensembles de puissance $n_1, n_2, \dots, n_{i_0} + n_{i_0+1}, \dots, n$ et à une famille composée seulement de deux ensembles de puissance n_{i_0} et n_{i_0+1} , on a $g = g'g''$

Cf : KENDALL, M.G. Rank correlation Methods—London 1948
WILCOXON, F. (1945) Biometrics Bulletin 1 p 80-82
HALDANE, J.B.S. and C.A.B. SMITH (1947) Ann. Eug. (14) p 117-124
KEEPING, E.S. (1952) Biometrics (8) p 112-119

Mais cette propriété résulte directement du fait que R est la somme de deux variables aléatoires indépendantes; l'une R' qui ne diffère de R que par le fait que l'on pose $r(i_0, j, i_0 + 1, j')$ identiquement nulle, c'est-à-dire que l'on ne se pré-occupe pas de l'ordre relatif des objets des classes A_{i_0} et A_{i_0+1} ; l'autre R'' définie au contraire par :

$r(i, j, i', j') = 0$ sauf si $i = i_0 + 1$ et si l'objet a est observé plus petit que $a_{ij'}$.

Par conséquent on peut écrire g sous la forme $\frac{\prod \varphi_{n_i}(t)}{\varphi(t)}$

où $\varphi_{n_i}(t)$ est une certaine fonction qui ne dépend que de n_i et que nous allons déterminer.

Pour cela il suffira de considérer le cas très simple d'un ensemble A_1 avec n objets et d'un ensemble A_2 avec un seul objet. Ici, on a évidemment :

$$g = (1 + t + t^2 + \dots + t^h) (n+1)^{-1} = \varphi_n(t) \varphi_1(t) \varphi_{n+1}^{-1}(t)$$

En raison de l'homogénéité des formules on peut poser :

$$\varphi_1(t) = \frac{1-t}{1-t} = 1$$

et l'on déduit par récurrence du résultat précédent :

$$\varphi_n(t) = \prod_{i=1}^h \frac{1-t^i}{1-t} (n!)^{-1}$$

d'où l'on peut dériver les distributions déjà connues dans les deux cas que nous avons mentionnés au début, c'est-à-dire :

1° - dans le cas de deux ensembles de puissance respectives n_1 et n_2 =

$$P_x = \text{coefficient de } t_x \text{ dans : } \prod_{i=1}^{n_1+n_2} (1-t^i) \left[\prod_{i=1}^{n_1} (1-t^i) \prod_{i=1}^{n_2} (1-t^i) \right]^{-1}$$

2° - dans le cas de n ensembles formés chacun d'un seul objet

$$P_x = \text{coefficient de } t \text{ dans : } (n!)^{-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1-t^i}{1-t} \right)$$

APPLICATIONS A L'ANALYSE GÉNÉRALE

Les formules précédentes ont une application algébrique intéressante.

Considérons dans un anneau deux éléments x et y tels que $y x = u x y$ où u appartient au centre de l'anneau et proposons-nous de calculer :

$$(x + y)^h = z \quad (n : \text{entier positif})$$

PRÉLIMINAIRES ALGÈBRIQUES

31

Il est immédiat que z est une somme de termes de la forme :

$$x_1^{n_1} y^{n-n_1} f_{n,n_1}(u)$$

où $f_{n,n_1}(u)$ est un polynôme en u de degré maximum $n_1 (n-n_1)$ puisque : $y^b x^a = u^{ab} x^a y^b$.

Mais $f_{n,n_1}(u) x_1^{n_1} y^{n-n_1}$ est la somme de $\frac{z n!}{n_1! (n-n_1)!} R$

termes élémentaires de la forme $u^R x_1^{n_1} y^{n-n_1}$ où R a la même signification que dans le paragraphe précédent. Par conséquent :

$$f_{n,n_1}(u) = \prod_{i=1}^n (1-u^i) \times \prod_{i=1}^{n_1} (1-u^i)^{-1} \times \prod_{i=1}^{n-n_1} (1-u^i)^{-1}$$

Nous avons utilisé ailleurs (Comptes-Rendus 1953-236-p. 352-353) ce résultat pour donner une solution nouvelle de l'équation fonctionnelle :

$$F(x+y) = F(x) F(y).$$

LA FORME GÉNÉRALE DES DISTRIBUTIONS DE LA STATISTIQUE QUANTIQUE

Dans l'application précédente, c'était une fonction génératrice qui apparaissait comme une valuation; ici au contraire ce seront des distributions de probabilité que nous déduirons directement de la formule générale.

Soit un ensemble E d'objets de puissance finie N . Nous appellerons ces objets des particules.

Soit d'autre part F un second ensemble qui sera l'espace dans lequel se trouvent ces particules.

Les parties de F seront appelées "cases" et on les supposera munies d'une mesure additive.

On définit en général les distributions de la statistique quantique en faisant dès le début des hypothèses sur la nature des particules et on en déduit les expressions classiques de BOLTZMANN, BOSE-EINSTEIN et FERMI (1). Mais dans cette méthode il est parfois difficile de faire la part de ce qui est nécessité logique et de ce qui est raisonnement physique ou encore calcul d'approximation.

Nous nous proposons donc à l'inverse de montrer brièvement comment des impératifs algébriques imposent aux distributions une forme générale qui est indépendante de la nature des particules étudiées.

Théorème : Toutes les distributions de la statistique quantique sont de la forme

$$\left(\prod f^{*g_i}(n_i) \right) \left(f^{*\sum g_i}(\sum n_i) \right)^{-1} \quad \text{où } f(n) \text{ désignant une certaine distribution, } f^{*g}(n) \text{ représente la distribution dont la transformée de FOURIER est égale à la } g^{\text{ième}} \text{ puissance de celle de } f(n)$$

Cf par exemple : PERRIN.F.1939-Mécanique statistique quantique- XI
FORTET.R.1950-Calcul des probabilités- p 27-31

Désignons par $\Pr \left\{ \begin{matrix} n_1, n_2, \dots, n_k \\ g_1, g_2, \dots, g_k \end{matrix} \right\}$ la probabilité conditionnelle

de trouver n_i particules dans la case 1 de mesure g_1 , n_2 particules dans la case 2 de mesure g_2 etc ... quand on sait que les $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ particules occupent un domaine de mesure totale $G = g_1 + g_2 + \dots + g_k$

Avec ces notations, le théorème des probabilités composées s'écrit :

$$\Pr \left\{ \begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{matrix} \right\} = P_1 \left\{ \begin{matrix} n_1, n_2 \\ g, g_2 \end{matrix} \right\} \Pr \left\{ \begin{matrix} n_1 + n_2, n_3 \\ g_1 + g_2, g_3 \end{matrix} \right\}$$

puisque par hypothèse la distribution de $n_1 + n_2$ particules à l'intérieur du domaine de mesure $g_1 + g_2$ est indépendante de la distribution des autres particules à l'extérieur de celui-ci. Par conséquent, si nous considérons le treillis des partitions en cases de l'espace où sont représentées les particules,

$\Pr \left\{ \begin{matrix} n_1, n_2, \dots, n_k \\ g_1, g_2, \dots, g_k \end{matrix} \right\}$, en est une valuation multiplicative et peut

être mise sous la forme :

$$\prod f \left(\begin{matrix} n_i \\ g_i \end{matrix} \right) \times f \left(\begin{matrix} \sum n_i \\ \sum g_i \end{matrix} \right)^{-1} \quad \text{où } f \left(\begin{matrix} n_i \\ g_i \end{matrix} \right) \text{ désigne une certaine}$$

fonction encore indéterminée de n_i et de g_i .

Nous pouvons maintenant appliquer l'axiome des probabilités totales au cas particulier où deux cases seulement sont en cause. Pour toute valeur de g_1 et g_2 :

$$\sum_{n=0}^{n_1+n_2} f \left(\begin{matrix} n \\ g_1 \end{matrix} \right) f \left(\begin{matrix} n_1 + n_2 - n \\ g_2 \end{matrix} \right) \times f \left(\begin{matrix} n_1 + n_2 \\ g_1 + g_2 \end{matrix} \right)^{-1} = 1$$

C'est-à-dire que pour tout g_1 et g_2 on a l'équation de

$$\text{convolution : } f \left(\begin{matrix} n_1 + n_2 \\ g_1, g_2 \end{matrix} \right) = \sum_{n=0}^{n_1+n_2} f \left(\begin{matrix} n \\ g_1 \end{matrix} \right) f \left(\begin{matrix} n_1 + n_2 - n \\ g_1 + g_2 \end{matrix} \right)^{-1}$$

et comme il est possible de normaliser f sans que cela apporte le moindre changement aux équations, il s'en déduit le résultat annoncé par une démonstration classique qu'il est inutile que nous reproduisions.

1954-3. Contribution aux applications statistiques de la théorie de... Année 1954

PRÉLIMINAIRES ALGÈBRIQUES

33

On peut vérifier que les fonctions f ainsi introduites sont respectivement dans les cas considérés par les physiciens :

- la distribution de POISSON pour la statistique de BOLTZMANN (et ici g est une variable continue).
- la distribution binomiale pour la statistique de BOSE-EINSTEIN.
- la distribution binomiale négative pour la statistique de FERMI-DIRAC.

Dans les deux derniers cas, on observera que g est nécessairement un entier et que, d'autre part, les distributions élémentaires f contiennent un paramètre qui ne semble pas avoir un sens physique et qui d'ailleurs s'élimine de l'expression finale des probabilités.

Année 1954 1954-3. Contribution aux applications statistiques de la théorie de...

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE DES INFORMATIONS

I. - DÉFINITION DES INFORMATIONS

Sans doute est-il trop tôt pour que puisse déjà être écrite l'histoire de la théorie de l'information. Aussi bien, est-ce là encore un chapitre tout récent des mathématiques appliquées auquel chaque année, sinon chaque mois ajoute des contributions qui en bouleversent les perspectives et les limites.

Cette théorie, comme on sait, tire ses origines de la pratique des communications et c'est la nécessité de délimiter et de mesurer ce qui était l'objet même de leur travail qui a conduit les fondateurs HARTLEY, TULLER, WIENER .. etc (39, 48, 77, 90) à définir mathématiquement le concept d'information.

Ces recherches ont trouvé leur aboutissement dans la formulation rigoureuse de C. SHANNON dont le mémoire fondamental (72) contient l'essentiel de ce que nous savons sur ce qu'on a appelé l'information sélective : à une source aléatoire émettant des signaux avec des fréquences données, SHANNON associe un invariant numérique ayant la même expression formelle que l'entropie et il montre que les propriétés les plus significatives des messages émis par la source ne dépendent en définitive que cette quantité.

On peut aussi bien traduire ces résultats en un langage moins spécial (84) et considérer que les signaux sont simplement les résultats d'observations successives effectuées sur un objet dont les états que l'on cherche à identifier sont déterminés par un processus stochastique.

Sur cette base de nombreux travaux ont étendu ou appliqué le concept d'information aux domaines les plus divers : physique, théorique depuis SZILARD (70) avec GABOR (31,32,33) et MANDELBROT (55); optique (BLANC LAPIERRE) (10), physiologie de l'audition (HUGGINS) (42), sociologie expérimentale (BAVELAS) (5,6,45) linguistique (MANDELBROT) (55), pour ne citer que quelques exemples typiques. Une revue générale sommaire, jusqu'en 1951, a été esquissée par CHERRY (13,14).

Mais, dans un tout autre domaine, il existait un invariant associé à un modèle stochastique que l'on appelait également "information" et qui avait donné lieu à une série importante de travaux (24,25,26,27). Nous voulons parler de l'information de FISHER, bien connue des statisticiens puisque constituant le concept central de la théorie de l'estimation. Les liens entre ces deux quantités apparaissaient d'ailleurs comme fort étroits :

Cependant que l'information de SHANNON livre le nombre minimum d'observations nécessaires pour déterminer exactement l'état d'un système aléatoire, le théorème de FRECHET-DARMOIS, (30,18,19) exorcise tout démon qui prétendrait estimer un para-

mètre inconnu avec une précision supérieure à l'inverse de l'information de FISHER. Enfin, la parenté formelle existant entre les expressions analytiques devait mener à chercher l'unification de ces deux théories qui s'étaient jusque là développées de façon indépendante.

C'est le problème général de l'information qui est d'en fonder la théorie dans un cadre conceptuel dégagé des restrictions imposées par la pratique de la statistique ou celle des communications : on citera les travaux de BAR HILLEL et CARNAP (12), de MAC KAY (51,52,53,54) de FERON (22,23) de BARNARD (2) auxquels malheureusement pour rester dans les limites fixées, il sera impossible de consacrer ici plus que cette brève mention. Il est vraisemblable qu'à ces préoccupations l'historien futur associera des recherches déjà plus anciennes comme celles suscitées par les conceptions de FISHER sur la signification même des probabilités, dont BARNARD (2) et GOOD (34) ont bien vu la liaison avec le problème de l'information.

Le but du présent exposé est beaucoup plus modeste : contrairement à la plupart des auteurs que nous venons de citer nous ne chercherons pas à définir par une analyse phénoménologique ou sémantique ce que doit être l' "information en soi" puis à vérifier ensuite que telle ou telle quantité en fournit plus ou moins bien une évaluation numérique. Au contraire, nous laisserons de côté le problème de la nature universelle de l'information pour nous attacher à celui de sa mesure dans des problèmes pratiques précis.

Les deux cas particuliers étudiés par FISHER et par SHANNON nous servant comme de repères, nous essayerons de trouver l'expression analytique la plus générale qui jouisse de leurs propriétés communes et nous définirons celle-ci par des postulats qui ne sont autre chose que les théorèmes relatifs à ces deux invariants.

Même si les nécessités du discours empêchent qu'on l'explique à chaque fois, il sera donc convenu que par le terme "information" au singulier nous n'entendons rien de plus que "tout type d'expression analytique satisfaisant aux conditions énoncées".

Cet abandon de l'intuition physique ou philosophique pour les cheminements de l'algèbre aura cependant un avantage : une fois obtenue l'expression générale de l' "information" — à notre sens — nous retrouverons en la particularisant des grandeurs parfois déjà connues mais dans lesquelles on n'avait point encore songé à voir des informations. Il peut y avoir là, à travers la diversité de ses mesures une voie pour des extensions de concept d'information lui-même.

En bref, si l'on nous permet ce latinisme douteux, nous chercherons à construire mathématiquement un "explicandum" puis à l'utiliser, du point de vue du calcul des probabilités bien plus qu'à livrer "l'explicatum" (12) des diverses informations concevables a priori. La tâche de relier à la physique les grandeurs ainsi définies par un raisonnement formel qui a été brillamment entreprise par MANDELBRÖT (55) reste donc extérieure à l'objet de ce travail.

L'INFORMATION COMME ATTACHÉE A UN PROCESSUS STOCHASTIQUE

C'est la première propriété commune aux informations de SHANNON et de FISHER que d'être relatives à des processus dans lesquels joue un élément de nature aléatoire.

Cette intervention ne s'effectue d'ailleurs pas de la même manière dans les deux cas. Dans celui d'une source qui émet des messages on convient de la considérer comme aléatoire pour exprimer le fait qu'elle est astreinte à produire des signaux avec des fréquences données a priori. Dans celui de l'estimation, selon la formulation définitive de NEYMAN et PEARSON (58,59), on s'interdit au contraire toute hypothèse semblable sur les valeurs inconnues du paramètre, mais toute la théorie repose sur l'existence d'un véritable processus stochastique interposé entre le choix arbitraire du paramètre inconnu et l'observateur.

On voit donc qu'il existe une certaine marge de disponibilités dans l'insertion du hasard à l'intérieur du modèle étudié et il nous semble qu'il y a là matière à des développements nouveaux dans un domaine qui apparemment n'a pas encore reçu l'attention qu'il mérite: celui de la possibilité et de la signification d'une sorte d'information dans les processus rigoureusement déterministes que sont les calculs numériques dans un système algébrique quelconque, d'ailleurs.

En effet, dans la perspective où se sont placés la plupart des auteurs, et nous-même, il n'y a aucun changement dans la quantité d'information quand l'on a réussi par exemple à calculer les racines d'une équation dont les coefficients étaient donnés. Il est de même équivalent de connaître les éléments intervenant dans un mot booléen ou de savoir en plus la valeur ("vrai" ou "faux") de celui-ci.

Il semble pourtant qu'il y ait lieu à des théorèmes du type de ceux étudiés par SHANNON pour la transmission des messages qui donneraient a priori la limite inférieure du nombre de opérations nécessaires pour le calcul. Peut-être pourrait-on à ce propos évoquer la possibilité encore très vague de faire rentrer les problèmes dans le cadre des phénomènes aléatoires en introduisant une certaine irréversibilité par l'hypothèse que le calculateur "oublierait" son équation initiale une fois qu'il aurait par exemple trouvé la valeur de la racine sur le feuillet de RIEMANN qui l'intéresse. Les résultats empiriques de LEMOINE (50) en "géométrie" et les énoncés bien rudimentaires encore de l'algèbre des circuits électriques pourraient peut-être fournir une base concrète à des recherches dans cette voie.

Il est impossible enfin de clore ces remarques heuristiques sans souligner une autre limitation propre cette fois à ce travail et non à l'état d'avancement de la théorie: les mécanismes aléatoires qui interviennent ici seront finis et en quelque sorte intemporels. Il ne sera jamais question que d'une suite limitée de tirages au hasard discrets, c'est-à-dire, en définitive, d'une aléatoire unique dans un espace produit. Les problèmes que pose l'introduction de véritables processus stochastiques tels qu'ils apparaissent dans les travaux de GABOR ou dans les théories de la prédiction de KOLMOGOROF (44) WIENER(91) (Cf aussi(43) et les travaux de VILLE (79-83)) dépassent le ca-

dre de cet exposé qui se bornera à la "statique" de l'information comme préliminaire à la "dynamique" qu'annoncent les recherches éminentes qui viennent d'être citées.

L'INFORMATION COMME VALUATION

Nous sommes donc amenés à considérer l'information comme une expression $H(\xi)$ attachée à une aléatoire ξ . A priori la caractérisation la plus générale sera de supposer que $H(\xi)$ est une fonction symétrique $H(X_1, X_2, \dots, X_k)$ des k états possibles X_i que peut prendre ξ lors d'un tirage et nous conviendrons, comme nous l'avons déjà dit, de nous limiter à un nombre fini de ceux-ci. Insistons sur le fait que H pour l'instant est une fonction absolument quelconque qui pourrait, par exemple, dépendre en plus de la probabilité a priori de chaque état, d'un système d'autres grandeurs physiques (distance à l'origine, nombre de fois où ξ a été observé à l'état X_i etc... etc...) à condition que chacune de celles-ci soit attachée à l'un des X_i , et qu'on en puisse déduire les valeurs correspondantes à tous les ensembles d'une base de partition F de l'ensemble X des X_i .

Il est commode d'introduire des observateurs O_i dont chacun est muni d'un dispositif lui permettant seulement de repérer ξ entre les composants $(Y_{i1}) (Y_{i2}) \dots$ d'une partition W_i de l'ensemble X des X_i relative à la base F .

Aussi au lieu de parler de l'information attachée à ξ où ξ est une aléatoire dont les états sont $X_{i1}, X_{i2} \dots$ nous parlerons de l'information H_i sur ξ pour l'observateur O_i qui est caractérisé par cette même partition.

Considérons tous les couples d'observateurs (O_i, O_j) , où O_j ne diffère de O_i que par l'impossibilité où il est de séparer entre eux certains états X_1, X_2, \dots, X_k qui sont au contraire distincts pour O_i .

La première condition que nous imposerons à H est d'être telle que la différence $H_i - H_j$, soit la même pour tous les couples (O_i, O_j) . Mettant en correspondance les opérateurs simples de partition T_j et les instruments d'observation capables de "résoudre" comme disent les astronomes les parties X_j en sous-ensembles $X_{j1} \dots X_{jk}$, il est naturel d'associer à la possession de chacun d'eux un accroissement bien défini de l'information. La condition précédente revient à postuler que cet accroissement est additif quand les ensembles correspondants X sont disjoints.

Si l'on admet, ce qui est fort naturel aussi, que le coût de l'installation d'un dispositif d'observation est la somme des coûts de chacun des instruments élémentaires, on voit que cette condition revient à établir une dépendance linéaire entre l'information et ce coût total.

D'après les résultats obtenus dans la première partie, N est donc une valuation de treillis des partitions de X déterminé par l'existence des instruments d'observation et c'est un résultat immédiat que d'énoncer :

La valeur de l'information attachée à l'observation de l'aléatoire ξ est la forme $\sum g(X_i)$ où les X_i sont les ensembles d'états entre lesquels on peut distinguer celui pris par ξ et où g est une application des X_i dans un module \mathcal{A} .

CONDITION IMPOSÉE PAR LA RESTRICTION X' DE X

Les expressions $\sum g(X_i)$ sont encore beaucoup trop générales pour être efficaces et nous allons les particulariser par d'autres considérations.

Jusqu'ici nous nous sommes bornés, de fait, à envisager la différence de l'information entre deux observateurs qui étaient censés posséder les mêmes connaissances a priori sur ξ , ce qui éliminait ipso facto toute nécessité d'une référence à l'ensemble des données auxiliaires qu'ils pouvaient avoir à l'avance sur cette aléatoire. Au lieu de cette comparaison en quelque sorte synchronique, considérons maintenant la différence diachronique entre l'information attachée à ξ quand l'observateur sait seulement que $\xi \in X$ et celle qui correspond à une étape intermédiaire du processus d'observation caractérisée par le fait que celui-ci sait en outre que ξ n'est pas dans un certain sous-ensemble $X' = X - X'$.

Par exemple, si ξ est une variable numérique entière, disons le numéro d'un billet de loterie, nous devons considérer comme le gain d'information associé à la connaissance d'un premier chiffre la différence entre l'information avant et après cette détermination. Nous distinguerons donc le gain d'information qui n'a de sens que pour chacune des réalisations effectives de l'observation, de l'information proprement dite qui n'a au contraire de sens que pour autant que celle-ci reste encore à faire

Si avant l'observation l'information était donnée par $\sum_{X_i \in X} g(X_i)$, on pourrait considérer qu'après, elle devient $\sum_{X_i \in X-X'} g(X_i)$ quand le sous-ensemble $X' = X - X'$ a été exclu par le résultat de l'observation.

En réalité, il ne saurait en être rigoureusement ainsi ; le passage de X à X' a aussi en quelque sorte altéré la nature de chacun des X_i puisqu'ils ne sont plus relatifs à la même catégorie d'épreuves.

Par exemple, comme on avait $\sum_{X_i \in X} P_2(X_i) = 1$, les $Pr(X_i)$ ne peuvent pas constituer un invariant attaché intrinsèquement à un état X_i , hors de toute référence à la totalité des autres X_j . Pour marquer cette dépendance, nous écrirons explicitement :

$H = \sum_{X_i \in X} g_{X'}(X_i)$ et $H' = \sum_{X_i \in X-X'} g_{X'}(X_i)$ ce qui fait que g doit être envisagée comme une fonction de deux arguments.

Considérons le cas particulier où $X = X_1 + X_2 + X_3$ et soient deux observateurs O_1 et O_2 .

O_1 commence par déterminer si ξ est ou non dans X_1 puis, dans cette deuxième alternative, il regarde alors lequel des deux ensembles X_2 ou X_3 contient ξ . O_2 procède de la même manière mais en commençant par X_3 . Par exemple ξ étant, soit nulle, soit finie,

soit infinie, O_1 détermine d'abord si $\xi = 0$ ou $\xi \neq 0$ puis dans ce dernier cas si $\xi^{-1} = 0$ ou $\xi^{-1} \neq 0$.

Au contraire O_2 commence par l'examen de ξ^{-1} puis éventuellement observe ξ . Il est naturel de supposer que l'information attachée à ξ est, avant toute observation, la même pour O_1 et O_2 . D'autre part, d'après le principe d'additivité que nous avons déjà utilisé, il est aussi naturel de poser pour O_1 :

$$H(X_1, X_2, X_3) = H(X_1, X_2, X_3) \quad (\text{valeur de l'information relative à la première observation})$$

$$+ \Pr(X_2 + X_3) H(X_2, X_3) \quad (\text{valeur pondérée de l'information relative à la deuxième observation})$$

En effet cette relation ne fait que traduire la correspondance linéaire que nous avons déjà postulée entre information et coût d'observation.

On en déduit pour g l'équation fonctionnelle suivante où l'on a posé pour simplifier $P_i = \Pr(X_i)$:

$$\begin{aligned} & g_X(X_1) + g_X(X_2) + g_X(X_3) \\ &= g_X(X_1) + g_X(X_2 + X_3) + (P_2 + P_3)(g_{X_2 + X_3}(X_2) + g_{X_2 + X_3}(X_3)) \\ &= g_X(X_3) + g_X(X_1 + X_2) + (P_1 + P_2)(g_{X_1 + X_2}(X_1) + g_{X_1 + X_2}(X_2)). \end{aligned}$$

Y et Z étant deux sous-ensembles ordonnés ($Y \subset Z$) de X posons:

$$g_Z(Y) = \frac{\Pr(Y)}{\Pr(Z)} h_Z(Y) \quad \text{ce qui est légitime puisque si } \Pr(Y) \text{ était nul, il n'y aurait plus matière à information et il serait donc logique que } g_Z(Y) \text{ soit nulle.}$$

La première des équations précédentes peut alors s'écrire:

$$P_2 h_X(X_2) + P_3 h_X(X_3) - (P_2 + P_3) h_X(X_2 + X_3) = P_2 h_{X_2 + X_3}(X_2) + P_3 h_{X_2 + X_3}(X_3)$$

X ne figurant pas au second membre (puisque un changement de X multiplie seulement P_2 et P_3 par un facteur et que l'équation est homogène) le premier membre doit être indépendant de X , ce qui est le résultat auquel nous voulions aboutir et qui est le plus fort de ceux qui peuvent être obtenus si l'on ne fait pas d'hypothèse sur la nature des invariants qui caractérisent les ensembles X_i . Introduisons alors les restrictions suivantes:

1° - $\Pr(Y_i)$ est un élément d'une certaine algèbre commutative de BANACH B (par exemple $\Pr(X_i)$ est une fonction analytique deux fois différentiables d'un système de paramètres, ou bien $\Pr(X_i)$ est un polynôme en certains paramètres a_1, a_2, \dots)

2° - $h_Z(Y)$ est un élément de l'algèbre commutative de BANACH dans laquelle est définie H . Elle est en outre une fonction continue de $\Pr(Y)$ et $P(Z)$ et elle ne dépend de Y et de Z que par l'intermédiaire de ces probabilités.

Dans cette hypothèse, $h_Z(Y)$ doit être comme on le voit une fonction de $\frac{\Pr(Y)}{\Pr(Z)}$ seulement que nous écrivons $h(P(Y)/P(Z))$ et la

dernière équation devient ;

$P_2 h(z P_2) + P_3 h(z P_3) - (P_2 + P_3) h(z P_2 + z P_3) =$ une fonction indépendante de l'élément z quelconque de l'algèbre B .

Soit encore, en supposant que $\Pr(X_2) = \Pr(X_3) = x$;

$2x(h(xz) - h(2xz))$: une fonction indépendante de z , soit encore ;

$$h(zx) - h(2zx) = \text{constante}$$

ce qui est l'équation de SCHRODER (69) dont une solution continue est $\text{Log}(xz)$ dans le cas où l'algèbre B se réduit à l'algèbre des nombres complexes.

Posons alors dans le cas général ;

$$h(u) = h'(\log u).$$

On doit avoir pour tout u ;

$$h'(\log u) = h'(\log u + \log 2) + \text{Constante},$$

ce qui entraîne que $h'(\cdot)$ soit un opérateur linéaire S .

Nous obtenons ainsi le théorème ;

Toute information est la valeur moyenne, étendue à l'ensemble des états, de la résultante de l'application d'un opérateur linéaire S sur le logarithme de la probabilité a priori de chaque état.

Dans tous les cas que nous traiterons, le gain moyen d'information associé à une observation sera non négatif.

On pourra donc ajouter à la définition précédente la restriction ;

L'opérateur S doit être tel que l'information correspondante soit toujours positive ou nulle.

REMARQUES SUR L'AXIOMATIQUE PRÉCÉDENTE

SHANNON a donné une justification très analogue dans le cas qui l'intéressait et qui se limite à celui où p est un nombre. En outre, il introduit cette hypothèse supplémentaire que s'il existe N états équiprobables a priori, H soit une fonction croissante de N .

Il faut remarquer que l'équation fondamentale qui revient à décomposer l'observation complète de ξ en une série d'observations dichotomiques virtuelles, suffit à elle seule à entraîner que $\Pr(x_1, \dots, x_k) H(x_1, \dots, x_k)$ soit une valuation. On pourrait donc abréger la démonstration. Il était cependant intéressant d'en analyser au maximum les différentes étapes car les valuations des treillis de partition se rencontrent dans de nombreux chapitres du calcul des probabilités et c'est exclusivement par la pondération $\Pr(x_2 + x_3)$ que l'information se distingue d'une quantité telle que le "chi carré" des statisticiens. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

II. - THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES INFORMATIONS

EXTENSION AU CAS OU N'EST PAS UNE VARIABLE DISCRÈTE

Nous n'avons étudié jusqu'ici qu'une variable susceptible de prendre seulement un nombre fini d'états et il serait important de pouvoir étendre la notion d'information à des cas plus généraux. Nous nous limiterons à celui où ξ est une variable numérique douée d'une densité de probabilité continue $f(x)$ avec $f(x)$ nulle en dehors d'un intervalle fini (a, b) .

La démonstration s'étendrait sans peine aux cas plus généraux $((a, b)$ infini ou ξ vecteur aléatoire).

Considérons une famille infinie de partitions de plus en plus fine de (a, b) en intervalles $(a_{ij}; a_{i,j+1})$ de longueur m_{ij} .

Pour une partition donnée et quel que soit l'opérateur H l'information est :

$$\sum f(x_j) (m_{ij}) S \log f(x_j) m_{ij}$$

$$\text{où } a_{i,j} \leq x_j \leq a_{i,j+1}.$$

Introduisons maintenant dans f un paramètre t tel que

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t = 0 \\ (a-b)^{-1} & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

autrement dit, $f_t(x)$ est supposée être une distribution rectangulaire. Puisque l'opération consistant à fixer la valeur du paramètre est une opération linéaire :

$$m_{ij} f_t(x_j) S [\log f_t(x_j) m_{ij}]_{t=1}$$

est une information que nous pouvons appeler H_0 , donc

$$H_0 - H'_0 = \bar{H}_0 = m_{ij} f_0(x_j) S \log f_0(x_j)$$

est une information et comme $f_0(x_j)$ est continue, H_0 tend vers l'intégrale $\int_a^b dx f(x) S \log f(x)$ quand les partitions de (a, b) sont de plus en plus fines.

Dans les cas où cette expression a un sens nous l'appellerons aussi l'information et nous ne ferons pas de différence entre le cas discret et le cas continu. On remarquera toutefois que H'_0 dépend des transformations que l'on pourrait faire subir à la variable x .

Il en est de même pour \bar{H} ce qui est naturel puisque l'opérateur que l'on vient d'employer correspond en quelque sorte à cette partie (infinie) de l'information totale qui est associée à la possibilité d'une identification infiniment précise de la position de x et qui est celle que l'introduction du paramètre puis la soustraction de la quantité associée à $t = 1$ permet d'éliminer du résultat final.

INFORMATION CONDITIONNELLE

Nous avons déjà fait implicitement usage de cette notion extrêmement commode d'ue aussi à SHANNON.

Considérons deux aléatoires η et ζ auxquelles correspondent des treillis de partition T_η et T_ζ . On a dit antérieurement que cette structure induisait de manière naturelle une base de partition pour l'ensemble X des couples $\xi = (\eta, \zeta)$.

C'est une convention de langage commode que d'appeler pour un opérateur S quelconque "information conditionnelle" la valeur moyenne $H(\eta|\zeta)$ — relativement à tous les états de ζ , de l'information $H(\eta|Z_i)$ attachée à l'observation de η quand l'état Z_i de ζ est déjà connu.

Posons :

$$\Pr(\eta \in Y_i; \zeta \in Z_j) = P_{ij} ; p_i = \Pr(\eta \in Y_i) ; p'_j = \Pr(\zeta \in Z_j)$$

$$P_{ij} = \Pr(\eta \in Y_i | \zeta \in Z_j) = p_{ij}/p'_j$$

on peut écrire pour tout opérateur S :

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \sum_{ij} p_{ij} S \log p_{ij} = \sum_{ij} p_{ij} S \log p_{ij} + \sum_j \left(\sum_i p_{ij} \right) S \log p_j \\ &= \sum_j p'_j H(\eta|Z_j) + H(\zeta) = H(\eta|\zeta) + H(\zeta) \end{aligned}$$

on aurait de même :

$$H(\xi) = H(\zeta|\eta) + H(\eta)$$

Supposons maintenant que η ne dépende que de ξ et ceci par un mécanisme aléatoire tel que l'information qui lui est attachée soit nulle quand ξ est déjà connu ; par exemple, — comme on le verra plus loin — si $S = d^2/dt^2$ (information de FISHER) où t est un certain paramètre, $H(\eta|X_i)$ est nul si t n'intervient pas dans la liaison stochastique entre η et ζ . $H(\eta|\zeta)$ est donc nul aussi.

Comme nous avons supposé que les informations étaient toujours positives $H(\zeta|\eta)$ est nécessairement plus grand que zéro. Par conséquent :

$$H(\eta) = H(\xi) - H(\zeta|\eta) = H(\zeta) - H(\zeta|\eta) \text{ est toujours plus petite que } H(\zeta).$$

Ceci correspond bien à l'idée intuitive que l'observation de η ne saurait être aussi efficace que celle de ξ .

VARIABLES INDÉPENDANTES

Supposons maintenant que ξ et η soient indépendantes c'est-à-dire que pour tout i et tout j $P_{ij} = p_i$. Les calculs précédents montrent que $H(\eta|\xi) = H(\eta)$ et par une extension immédiate à un nombre quelconque de variables l'on en déduit le théorème fondamental :

Théorème : L'information est une fonction additive pour la composition des variables aléatoires indépendantes.

Réciproquement, il est intéressant de voir quelle forme doit avoir une valuation H pour être additive relativement à cette opération.

Prenons donc $H(\xi) = \sum_i g(X_i)$ où g est une fonction quelconque des ensembles X_i qui forment une partition de l'ensemble des états de ξ et supposons que $\xi = \eta x \zeta$ où η et ζ sont deux aléatoires indépendantes susceptibles de prendre l'un des trois états Y_1, Y_2, Y_3 et Z_1, Z_2, Z_3 respectivement.

Nous écrirons X_{ij} pour $\eta(Y_i)$ et $\xi(Z_j)$ (c'est-à-dire que X_{ij} est l'intersection de X_i et Z_j) et par hypothèse $g(X_{ij})$ devra être une fonction symétrique $g(Y_i, Z_j)$ puisque l'indépendance de η et ξ signifie aussi que les invariants de ξ intervenant dans g peuvent s'exprimer en fonction des invariants de η et de ξ . Ici encore, nous aurons besoin d'un artifice pour éliminer le fait que les trois ensembles Y_1, Y_2 et Y_3 (et naturellement, Z_1, Z_2 et Z_3) ne sont pas indépendants puisqu'ils constituent la totalité des possibles. Nous introduirons pour cela les aléatoires $\bar{\eta}$ et $\bar{\xi}$ obtenues à partir de η et ξ en confondant respectivement Y_2 et Y_3 et Z_2 et Z_3 .

Nous aurons donc, d'une part les quatre équations exprimant

$$H(\eta x \xi) = H(\eta x \bar{\xi}) = H(\bar{\eta} x \xi) \text{ et } H(\bar{\eta} x \bar{\xi})$$

$$\text{comme sommes de } H(\eta), H(\bar{\eta}), H(\xi) \text{ et } H(\bar{\xi})$$

d'autre part, les huit équations exprimant ces valuations comme sommes de termes $g(X_{ij})$.

Les quatre premières équations montrent que :

$$H(\eta x \xi) - H(\eta x \bar{\xi}) - H(\bar{\eta} x \xi) + H(\bar{\eta} x \bar{\xi}) \text{ est nul.}$$

On en déduit l'équation :

$$\begin{aligned} &+ g(X_{22}) + g(X_{23}) + g(X_{32}) + g(X_{33}) \\ &- g(X_{22} + X_{23}) - g(X_{32} + X_{33}) - g(X_{22} + X_{32}) - g(X_{23} + X_{33}) \\ &+ g(X_{22} + X_{23} + X_{32} + X_{33}) = 0 \end{aligned}$$

Pour trois ensembles U, V, V' quelconques posons :

$$g(U \cap V) + g(U \cap V') - g(U \cap (V \cup V')) = G(U; V, V')$$

($U \cap V$ désignant l'intersection des ensembles U et V

l'équation précédente peut encore s'écrire :

$$G(Y_2; Z_2, Z_3) + G(Y_3; Z_2, Z_3) = G(Y_2 + Y_3; Z_2, Z_3).$$

On en déduit le théorème :

Théorème : La condition nécessaire et suffisante pour que H soit additive est que g soit telle que pour tout triplé Y, Z, Z' la fonction :

$$g(Y \cap Z) + g(Y \cap Z') - g((Y \cap Z) \cup (Y \cap Z'))$$

soit une fonction additive en Y .

Limitons-nous maintenant au cas des valuations numériques c'est-à-dire à celui où le seul invariant de X intervenant dans $g(X_i)$ est la variable numérique $\text{Pr}(X_i)$. On a :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une valuation numérique continue soit additive est qu'elle soit une information de SHANNON.

En effet, posons $g(U) = u \cdot g'(u)$ ($u = \text{Pr}(\xi \in U)$)

la condition devient :

$$y \cdot z \cdot g'(y \cdot z) + y \cdot z' \cdot g'(y \cdot z') - (y \cdot z + y \cdot z') \cdot g'(y \cdot z + y \cdot z') = y \cdot K(z, z')$$

où $K(z, z')$ est une certaine fonction de z et de z' .

Supposons que $z = z'$, il vient :

$$g(y \cdot z) - g(2 \cdot y \cdot z) = \frac{1}{2} \frac{K(z, z)}{z}$$

Le second membre étant indépendant de y , doit l'être aussi de z et l'on retombe sur l'équation de SCHRODER.

Dans le cas général, on retrouve évidemment les informations H et en outre toutes les expressions de la forme $D(H)$ où D est un opérateur linéaire, mais l'inventaire complet de ces valuations reste semble-t-il encore à faire.

EXHAUSTIVITÉ

Nous pouvons encore appliquer ici cette notion si importante introduite par M. le Professeur DARMOIS (16, 17) (Cf aussi 36, 45).

Considérons en effet plusieurs tirages successifs $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ de η et supposons que nous sachions mettre l'espace $\eta_1 \times \eta_2 \times \dots \times \eta_n$ en correspondance biunivoque avec un autre espace $\xi \times \xi'$ satisfaisant à la condition suivante : pour chaque valeur fixée de ξ , ξ' ne dépendra plus de η_i que par un mécanisme stochastique tel que pour que l'opérateur S considéré, l'information correspondante est nulle.

Dans ce cas $H(\xi) = \sum H(\eta_i)$ et nous dirons que ξ est le résumé exhaustif des η_i .

En particulier, si S annule toute expression qui ne dépend pas d'un paramètre θ et si ξ est déterminé à partir de ξ' par un mécanisme constant, ξ est exhaustif pour les η_i .

INFORMATION ET PROBABILITÉ D'ABSORPTION

Le problème fondamental de l'information au sens où nous l'entendons ici est celui du rapport entre les opérateurs S et les êtres mathématiques auxquels correspondent les informations associées. Nous n'avons pu éclaircir pleinement cette question. La difficulté semble dépendre en majeure partie de celle que l'on éprouve à définir qu'elle est précisément la classe de ces êtres. L'analogie qui existe entre la physique quantique où l'on associe aussi opérateurs linéaires et observables pourrait peut-être servir de guide dans cette voie.

Une autre approche qui semble fructueuse est celle qui relie la théorie de l'information à celle des probabilités d'absorption.

Considérons chaque observation comme un mouvement aléatoire dans un certain espace. Si l'on a réussi à attacher un opérateur linéaire à une certaine frontière dans cet espace de telle sorte que pour tout point de celle-ci l'information soit nulle, des théorèmes peuvent être établis qui relient le nombre moyen d'observations à effectuer au gain d'information moyen réalisé à chacune d'elles. Le théorème très général suivant que nous pensons nouveau est essentiel pour ce raisonnement.

Soit u une variable aléatoire qui s'accroît par saut à partir de zéro à chaque temps $1, 2, \dots, n$ de manière absolument quelconque sauf qu'il y a une probabilité égale à 1 pour qu'elle atteigne la valeur K en un temps fini.

Soit $g(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la longueur moyenne du $(n+1)$ ème saut quand les positions successives de u forment la séquence $s_i = 0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Théorème : Si quelle que soit la séquence possible s_i on a :

$$L_0 \leq g(s_i) \leq L_1;$$

le temps moyen mis par u pour atteindre K est compris dans l'intervalle $(K/L_1, K/L_0)$.

Démonstration : Nous appellerons \bar{S} l'ensemble de toutes les séquences s_i se terminant par K et S l'ensemble (comprenant \bar{S}) de toutes les sous-séquences formées par les premières valeurs des séquences de \bar{S} . Nous poserons :

$P(s_i)$ = probabilité que la séquence des positions de u soit s_i

On a :

$$(1) g(s_i) = \sum_1^n (a_i - a_n) \frac{\text{Pr}(0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_i)}{\text{Pr}(0, a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs de a_i .

D'autre part le temps moyen \bar{T} est par définition :

$$(2) \bar{T} = \sum_{i \in \bar{S}} t(\bar{s}_i) \text{Pr}(\bar{s}_i) \text{ en notant } t(s_i)$$

le nombre des termes qui constituent la séquence \bar{s}_i .

THÉORIE DES INFORMATIONS

49

Cela peut encore s'écrire

$$(3) \quad \bar{T} = \sum_{i \in S} \Pr (s_i)$$

où la sommation est étendue cette fois à toutes les séquences de S . En effet à toute séquence $s_i = (0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ entrant dans (2) avec le coefficient $t(s_i) = n$ correspond dans (3) la somme :

$$\Pr (0 a_1) + \Pr (0 a_1 a_2) + \dots + \Pr (0 a_1 a_2 \dots a_n).$$

Par sommation sur toutes les séquences (1) donne en posant $A(s_i) =$ dernier terme de la séquence s_i :

$$\sum_{i \in S} \Pr(s_i) g(s_i) - \sum_{i \in S} \sum_a (a - A(s_i)) P_i(s_i) = K$$

puisque tous les a_j (sauf si $A(s_i) = K$) entrent munis du signe plus et du signe moins avec la même somme de probabilité.

Donc si l'on peut poser $g(s_i) = L + L'(s_i)$ où L est indépendant de s_i , il vient en introduisant cette valeur dans (4) :

$$L \sum_{i \in S} \Pr s_i = K - \sum_{j \in S} L'(s_j) \Pr(s_j)$$

d'où le résultat annoncé quand L est choisi de telle sorte que l'on ait toujours :

$$L'(s_i) \leq 0 \quad \text{ou} \quad L'(s_i) \geq 0.$$

III. - LES INFORMATIONS PARTICULIÈRES

L'INFORMATION DE SHANNON WIENER

Le problème considéré par SHANNON (72) et pour lequel il a été amené à définir cette expression est le problème du codage et nous ne ferons guère ici que retranscrire en un langage plus familier aux statisticiens les résultats obtenus par cet auteur. En effet, comme on l'a très vite remarqué, il est équivalent soit d'étudier une source aléatoire émettant des signaux élémentaires avec des fréquences a priori données, soit de considérer une aléatoire ayant pris l'un des états $X_i \in X$ et de chercher à reconnaître celui-ci (à faire un "diagnostic") par une série d'observations élémentaires.

Chaque observation consistant essentiellement en une partition d'un sous-ensemble de X , une famille d'observations successives permettant un diagnostic complet de ξ (nous dirons une "procédure") correspond à un arbre, au sens que nous avons donné à ce terme dans la première partie et on associera à chaque état X_i le nombre d'observations $L(x_i)$ qu'il faut effectuer pour apprendre que $\xi \in X_i$. Un état x_i de ξ étant un "message" dans le langage de la théorie des communications, $L(X_i)$ n'est autre que la longueur du mot X_i dans le code spécial qu'est une procédure.

Venons-en maintenant à l'information de SHANNON-WIENER, dite aussi "sélective" quoique à vrai dire l'emploi de ce mot soit assez peu explicite, car presque toutes les autres informa-

tions sont aussi sélectives. C'est la seule information numérique, c'est-à-dire, comme on l'a vu, telle que les $\text{Pr}(\xi \in X_1)$ n'interviennent précisément que par leur valeur numérique. Elle n'est définie qu'à une constante près et nous poserons :

$$H = \sum p_i \log_2 1/p_i \quad (\log_2 = \log \text{ de base } 2).$$

On voit sans peine que H est toujours positive et qu'elle n'est égale à zéro que pour un système de X_i tel que tous les p_i soient nuls sauf un égal à l'unité. Ce cas correspond exactement à la situation de l'observateur quand il a achevé le diagnostic de ξ et nous pourrions donc appliquer le théorème du chapitre précédent sur les probabilités d'absorption.

Enfin, si ξ ne peut prendre que N états distincts, on vérifie sans peine que H est maximum quand tous les p_i sont égaux à $1/N$. Ceci correspond bien à l'idée intuitive que l'on a de l'incertitude la plus grande sur l'état de ξ telle qu'elle s'exprime par exemple dans la théorie du théorème de BAYES. La valeur de H est alors $\log_2 N$ et l'on voit que le choix de la constante était du au souci d'avoir $H = 1$ pour une observation dichotomique optimale. Enfin, pour clore ses généralités, faisons remarquer que l'inégalité $H > 0$ n'empêche pas qu'après une observation l'on puisse se trouver avec une incertitude plus grande qu'avant celle-ci. Par exemple si $p_1 = 0,98$; $p_2 = 0,01$; $p_3 = 0,01$, l'information initiale est $0,161$; après qu'une première observation ait permis d'écarter X_i , elle devient $1,00$. Trop fréquents sont les jours où la quasi certitude se change en doute complet pour qu'il soit nécessaire d'illustrer par des exemples.

Avant de passer à l'étude des propriétés de l'information de SHANNON WIENER, nous donnerons quelques indications sur son expression analytique.

Posons $S_r = \sum p^r$ (donc $S_1 = 1$) et

$$b(k, r) = \begin{bmatrix} k \\ r-1 \end{bmatrix} (-1)^{r-1} \text{ pour } r \geq 2 \text{ et } 1/h \text{ pour } r = 1.$$

Pour toutes les valeurs de k on a l'inégalité :

$$\log H > \sum_{r=1}^{k+1} b(k, r) S_r$$

le second membre livrant un développement asymptotique de H en fonction des S .

En effet, il suffit de développer chacun des termes $\log 1/p_i$ sous la forme $p_i \sum_{r=1}^{\infty} (1-p_i)^r$ puis de sommer sur les indices i . On obtient ainsi pour les premières valeurs de k :

$$[H \log_2 > 11/6 - 3 S_2 + 3/2 S_3 - S_4 > 3/2 - 2 S_2 + 1/2 S_3 > 1 - S_2]$$

Qu'on ne trouve par cette méthode qu'un développement asymptotique, valable seulement pour k fini est évidemment lié au fait que déjà dans le cas d'une variable dichotomique H n'est pas développable en série de puissances de la variance pq (Cf. plus bas "Information de WALD".) Nous n'insisterons pas plus sur ce point qui ne semble pas avoir été remarqué, mais qui présente peut être un certain intérêt en liaison avec le problème d'exprimer H en fonction des autres invariants classiques de la distribution de ξ .

On peut signaler enfin que les résultats précédents donnent la formule commode :

$H \log_2 \# \log N + 1/2 \text{ var } t_i$, quand les p_i sont de la forme $(1+t_i)N^{-1}$ avec t_i tendant uniformement vers zéro.

Venons-en maintenant aux propriétés de l'information H . On a d'abord le théorème fondamental de SHANNON :

Théorème : Si l'information attachée à chaque observation est toujours comprise entre deux limites H_1 et H_2 , le nombre moyen L d'observations nécessaires pour établir le diagnostic de ξ est compris entre H/H_1 et H/H_2 ou H est l'information a priori sur ξ .

Ceci est une application immédiate du théorème sur les probabilités d'absorption. Un résultat plus profond du aussi à SHANNON est le suivant que nous formulerons ainsi :

Si toutes les procédures ne comportant que des observations en K composantes (ou moins) sont possibles on peut en trouver une telle que $L \leq 1 + H \frac{\log_2}{\log K}$.

Rangeons les X_i par ordre de probabilités p_i décroissantes et associons à chaque X_i la somme $P_i = \sum_{j=1}^i p_j$ avec $P_0 = 0$. Développons chaque P_i en une somme de fractions K -adiques :

$\frac{a_{i1}}{K} + \frac{a_{i2}}{K^2} + \dots + \frac{a_{ix}}{K^x} \dots$ de dénominateur K^x . Pour la première observation nous grouperons ensemble les X_i ayant même valeur de a_{i2} pour les secondes ceux qui ont même a_{i1} et a_{i2} etc....

Si r_i est défini par $\log_k 1/p_i \leq r_i \leq 1 + \log 1/p_i$, on voit que p_i diffère de p_{i+1} au moins à la r_i ème place de son développement et que, par conséquent, si $\xi \in X_i$, le diagnostic est achevé en r_i observations au plus. En multipliant chacune des inégalités précédentes par p_i , puis en sommant, on retrouve bien le résultat annoncé.

Cette procédure est en général très près de l'optimum, Nous indiquerons cependant d'après D.A.HUFFMAN (41) une méthode qui permet d'obtenir celui-ci.

Par définition $L = \sum p_i L(X_i)$; si donc l'arbre définissant la procédure est donné, L sera le plus petit possible quand on aura permuté les X_i de telle sorte que $p_i < p_j$ entraîne $L(X_i) < L(X_j)$. Par conséquent, les K ensembles X_i ayant les probabilités les plus faibles doivent être distingués les uns des autres dans une seule et ultime observation.

Considérons maintenant la variable ξ qui a la même distribution que ξ sauf que l'on considère comme un seul état les K états X_i précédents. Le même raisonnement s'applique et l'on aboutit ainsi de proche en proche à n'avoir plus que $K' \leq K$ ensemble.

Traisons à titre d'exemple le cas suivant où les observations sont toutes dichotomiques et où l'on s'est donné les probabilités suivantes de six états possibles de l'aléatoire :

$$p_1 = 0,26 \quad p_2 = 0,21 \quad p_3 = 0,19 \quad p_4 = 0,16 \quad p_5 = 0,11 \quad p_6 = 0,07$$

La procédure qu'indique la méthode de SHANNON peut être symbolisée par $((X_1) (X_2, X_3))((X_4), (X_5, X_6))$ où les parenthèses superposées indiquent les observations successives. On a donc :

$$L = 2 \times 0,26 + 3 \times 0,21 + 3 \times 0,19 + 2 \times 0,16 + 3 \times 0,11 + 3 \times 0,07 = 2,57 \text{ observations.}$$

Dans la méthode de HUFFMAN on considère successivement les ensembles suivants :

$$0,26 \quad / \quad 0,21 \quad / \quad 0,19 \quad / \quad 0,16 \quad / \quad 0,11 \quad / \quad 0,07$$

$$0,26 \quad / \quad 0,21 \quad / \quad 0,19 \quad / \quad 0,18 = 0,11 + 0,07 \quad / \quad 0,16$$

$$0,34 = 0,18 + 0,16 \quad / \quad 0,26 \quad / \quad 0,21 \quad / \quad 0,19$$

$$0,40 = 0,21 + 0,19 \quad / \quad 0,34 \quad / \quad 0,26$$

$$0,60 = 0,34 + 0,26 \quad / \quad 0,40$$

ce qui conduit à la procédure rigoureusement optimale :

$$((X_1) ((X_4) (X_5 X_6))) \quad (X_2, X_3)$$

qui donne à peine un gain de 2 % puisque :

$$L = 2 \times 0,26 + 3 \times 0,16 + 4 \times 0,07 + 2 \times 0,21 + 2 \times 0,18 = 2,53$$

Signalons enfin la méthode de FANO (21) qui consiste à diviser chaque fois selon les probabilités aussi voisines que possible de $1/2$. Nous aurons à revenir longuement sur ce point de vue dans la IIIème partie.

Cas d'une variable continue.

Nous ne ferons qu'énoncer les résultats suivants dus aussi à SHANNON et qui constituent l'essentiel de ce que l'on connaît des propriétés générales de cette information pour une variable numérique répartie de façon continue.

Valeurs extrêmes : Si ξ varie entre a et b finis, H maximum correspond à une répartition uniforme de la probabilité et est alors égal à $\text{Log}_2 (b - a)$ ce qui est le cas considéré par WIENER.

Si ξ varie entre 0 et l'infini, H maximum pour $\bar{\xi}$ fixé correspond à la répartition $a \exp(-a\xi)$ où $\bar{\xi} = a^{-1}$ et est égal à $\text{Log}_2 a e$.

Si $\bar{\xi}$ varie entre plus et moins l'infini, H maximum pour une variance fixée correspond à la distribution de LAPLACE GAUSS et est égale à $\text{Log} \sqrt{2\pi e} \sigma$.

Cas de plusieurs variables

Soit $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ = un vecteur aléatoire de densité de probabilité $f(\xi)$

Soit $\eta(\xi) = y \dots y$ un autre vecteur obtenu par une transformation continue (non aléatoire) de ξ . Les informations attachées respectivement à ξ et à η sont :

$H(\xi)$ et $H(\eta) = H(\xi) - E(J)$ où $E(J)$ désigne la valeur moyenne du jacobien de la transformation.

La distribution de LAPLACE GAUSS à n variables est douée des mêmes propriétés extrémales que la distribution à une variable et l'on a : $H = \log(2\pi e)^{n/2} |a_{ij}|^{1/2}$ où $|a_{ij}|$ est le déterminant des a_{ij} définissant la forme ξ quadratique $\xi^T A \xi^*$ dont la distribution est laplacienne.

Addition de variables aléatoires indépendantes.

D'après le théorème général, la somme des informations relatives à deux variables ξ et ξ' indépendantes est égale à l'information relative au couple (ξ, ξ') . Si au lieu du couple on ne connaît que la somme $\xi + \xi'$ on a seulement les inégalités :

$$\bar{N}(\xi) + \bar{N}(\xi') \leq \bar{N}(\xi + \xi') \leq \text{var } \xi + \text{var } \xi'$$

ou $\bar{N}(\xi)$ désigne "l'entropy power" c'est-à-dire la fonction $1/2\pi e \cdot \exp 2 H(\xi)$ et le remplacement de l'une des inégalités par une égalité n'est possible que dans le cas d'une distribution de LAPLACE GAUSS où les trois expressions sont d'ailleurs égales.

L'INFORMATION DE FISHER

C'est, comme nous l'avons déjà dit, le premier exemple d'information qui ait été étudié et c'est aussi peut être celui qui joue le rôle le plus important dans la statistique mathématique.

Nous nous bornerons à définir l'information de FISHER dans le cas où les $\text{Pr}(X_i) = p_i$ dépendent continuellement d'un système de paramètres θ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) que l'on cherche à estimer (Cf. 1, 20).

Définition : L'information de FISHER H est la valeur moyenne de la matrice hessienne de $\log 1/p_i$ par rapport aux θ_j .

Par conséquent H est définie dans le module des $m \times m$ matrices et l'opérateur linéaire S est symbolisé par la matrice d'élément générique $\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta}$.

Il en résulte que si l'on fait une transformation fonctionnelle sur les θ_j , la nouvelle information est égale à l'ancienne multipliée par le hessien de cette transformation.

Dans le cas où nous nous sommes placés on a évidemment :

$$\begin{aligned} -\sum_i p_i \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} \log p_i &= \sum_i \frac{1}{p_i^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} p_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta'} p_i \right) - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} p_i \\ &= -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} p_i + \sum_i p_i \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta'} \log p_i \right) \end{aligned}$$

Comme $\sum p_i = 1$, le premier terme du dernier membre est identiquement nul et l'on obtient le résultat classique :

L'information de FISHER est égale à la matrice des variances et co-variances des dérivées logarithmiques des p_i .

Le théorème fondamental est alors le théorème de FRECHET DARMOIS (30.18.19) qui associe $1/H$ à la variance d'échantillonnage de toute estimation possible des θ . Nous nous bornerons au cas où il n'existe qu'un seul paramètre, et désignant par x_i une observation de ξ , nous supposons que $\varphi(x)$ est une fonction d'estimation correcte c'est-à-dire telle que :

$$\sum p_i \varphi(x_i) = \theta$$

Par dérivation par rapport à θ il vient :

$$\sum \varphi(x_i) p_i \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_i = 1$$

et comme :

$$\sum p_i \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_i = 0$$

on peut écrire :

$$\sum (\varphi(x_i) - \theta) p_i \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_i = 1$$

d'où, par l'inégalité de SCHWARTZ :

$$\text{Var}(\theta - \varphi(x)) \geq 1 / \text{Var} \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_i = 1/H$$

Ce que nous énoncerons par :

L'inverse de l'information de FISHER est la borne inférieure de la variance de toute estimation correcte de θ .

On sait aussi, ce que nous ne démontrerons pas, que cette borne est atteinte asymptotiquement quand $\varphi(x)$ est la fonction d'estimation basée sur l'équation au maximum de vraisemblance. Pour un nombre fini d'observations, on ne peut avoir égalité que si $(\xi(x) - \theta) \sqrt{p_i}$ est proportionnel à $\sqrt{p_i} \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_i$. Dans le cas continu, ceci entraîne que $\log f(x)$ soit de la forme :

$$a(\theta) b(x) + c(\theta) + d(x)$$

ce qui peut aussi s'écrire, moyennant un double changement de variable, sous la forme que nous retrouverons plus tard :

$$f(y) = \frac{f(y)}{g(t)} \exp \sqrt{-1} ty$$

où $g(t)$ est la transformée de FOURIER de $f(y)$

Les extensions du théorème fondamental sont nombreuses : D'abord au cas continu où la sommation est remplacée par une intégrale de HOLLINGER (15) et où l'on doit imposer en plus ou bien la condition que les limites de la variation de ξ ne dépendent pas de ξ ou bien que $f(\xi)$ s'y annule. Ensuite, au cas de plusieurs paramètres (Théorème de DARMOIS) où, de nouveau, apparaît une liaison certaine avec les propriétés de la trans-

THÉORIE DES INFORMATIONS

55

formée de FOURIER de la distribution. Enfin, un théorème analogue (CRAMER-RAO) (15) vaut dans le cas où les estimations sont affectées d'une erreur systématique et dans celui de HAMMERSLEY(37) où θ est astreint à n'avoir ses valeurs que dans un espace discret. Nous ne pouvons naturellement pas songer à donner même un sommaire des travaux relatifs à cette question, ce qui serait écrire l'histoire de la théorie de l'estimation, soit, pratiquement, de la statistique mathématique.

Nous démontrerons pour terminer un théorème qui est en quelque sorte le converse du théorème de SHANNON sur le codage.

Bornons-nous encore au cas d'un seul paramètre. L'expression "information de FISHER relative à θ contenue dans ξ " a un sens bien clair et il est intéressant de savoir quelle fraction de cette information peut être gagnée en moyenne par une seule observation dichotomique.

Ces considérations semblent pouvoir présenter quelque intérêt pratique dans certaines applications de la méthode de MONTE-CARLO où il pourrait être relativement plus aisé de savoir si ξ appartient ou non à un certain intervalle pour un grand nombre de tirages que de déterminer complètement la valeur pour un nombre moindre d'épreuves.

Théorème : Si l'aléatoire considérée est susceptible de prendre N états, il en existe au moins un tel que l'information attachée au fait de savoir si ξ est ou non à cet état soit au moins égale à $1/N-1$ de l'information totale contenue dans ξ .

En effet, en posant :

$$u_i = \left(\frac{d}{d\theta} p_i \right)^2 / p_i(1-p_i) = H/N-1 + x_i, \text{ on peut écrire :}$$

$$H = \sum_{i=1}^N u_i (1-p_i) = \frac{H}{N-1} \sum_{i=1}^N (1-p_i) + \sum_{i=1}^N (1-p_i) x_i$$

d'où le théorème, puisque $\sum_{i=1}^N (1-p_i)x_i$ est nul et que, par conséquent, l'un des x au moins est plus grand que zéro s'ils ne sont pas tous nuls.

Le contre exemple suivant montre qu'il n'est pas toujours vrai que l'on puisse obtenir la moitié de l'information en une seule observation.

$$p_1 = a + t : p_2 = a - t : p_3 = 1/2 - a + t : p_4 = 1/2 - a - t$$

avec a tel que $a(1-a) \leq 1/32$.

Cependant nous avancerions volontiers l'hypothèse que des conditions générales très simples peuvent assurer cette possibilité d'une seule observation préférable à elle seule au reste du diagnostic.

Voici maintenant un théorème qui facilite singulièrement la recherche de cette observation dichotomique optimale. Appelons "premier composant" celui des deux sous-ensembles X' qui le constituent dont la probabilité a priori $\text{Pr}(X')$ est plus petite ou égale à $1/2$. En changeant au besoin le signe de θ , nous pouvons faire en sorte que $\frac{d}{d\theta} \text{Log Pr}(X')$ soit non négatif.

Théorème : Le premier composant de l'observation optimale contient tous les états tels que la dérivée logarithmique de leur probabilité soit supérieure à une certaine valeur non négative K .

Pour établir ce résultat, nous étudierons d'abord les cas particuliers de 3 et de 4 états. Ceux-ci étant notés : A, B, C, D , soient p, q, r, s leurs probabilités et a, b, c, d les dérivées logarithmiques correspondantes.

Si trois états A, B et C tels que $a \geq b \geq c$ sont en cause, la perte d'information associée au fait que l'observateur confonde A et B est donnée par :

$$p a^2 + p b^2 - (p - q) \left((p a + q b) / (p + q) \right)^2 = (a - b)^2 \frac{pq}{p + q}$$

Il en résulte que l'observation symbolisée par $(AC)(B)$ et consistant à confondre les états A et C n'est jamais meilleure que la fois que les deux observations $(AB)(C)$ et $(A)(BC)$.

En effet, on devrait avoir :

$$(a - c)^2 \frac{pr}{p + r} \leq (a - b)^2 \frac{pq}{p + q} \quad \text{et} \quad (a - c)^2 \frac{pr}{p + r} \leq (b - c)^2 \frac{qr}{q + r}$$

soit encore :

$$(a - c) \sqrt{\frac{p r}{p + r}} \times \frac{p + q}{p q} + (a - c) \sqrt{\frac{p r}{p + r}} \times \frac{q + r}{q r} = a - b + b - c = a - c$$

ce qui est impossible puisque :

$$\left(\sqrt{\frac{p r}{p + r}} \times \frac{p + q}{p q} + \sqrt{\frac{p r}{p + r}} \times \frac{q + r}{q r} \right)^2 \geq \frac{r(p + q) + p(q + r)}{q^2(p + r)} \geq 1$$

Soient maintenant 4 états avec encore $a \geq b \geq c \geq d$.

Montrons que l'observation dichotomique $(AC)(BD)$ ne saurait être la meilleure et pour cela posons $A' = A + C$ et $D' = B + D$; les nouveaux états A' et D' correspondent au regroupement de A et de C d'une part, et B et D d'autre part et leurs dérivées logarithmiques sont :

$$a' = (p a + r c) / (p + r) \quad \text{et} \quad d' = (q b + s d) / (q + s).$$

Si $(AC)(BD)$ était optimale, $A'(BD)$ qui n'est qu'une autre manière d'écrire cette observation devrait être meilleure que $(A'B)(D)$ et $(A'D)(B)$ et de même $(AC)(D')$ devrait être meilleure que $(A)(CD')$ et $(AD)(C)$.

Ceci entraîne :

$$(b - d)^2 \frac{q s}{q + s} \leq (a' - b)^2 \frac{(p - r)q}{p + r + q}$$

$$(a - c)^2 \frac{p r}{p + r} \leq (c - d')^2 \frac{r(q + s)}{r + q + s}$$

En outre, on doit avoir $a > a' > b$ et $c > d' > d$ car sinon, d'après ce qui vient d'être vu pour trois états, ni $(BD)(A')$ ni $(AC)(D')$ ne sauraient être optimales. Ceci conduit aux nouvelles inégalités :

$$a'-b = p(a-b) - r(b-c) / p+r \leq (a-b)p / p+r$$

$$\text{et } c-d' \leq (c-d)s / s+q$$

Comme $c < d$ et que, par conséquent, $a-b$ et $c-d$ sont plus petites que $a-c$ et $b-d$, on a :

$$(c-d)^2 \leq (b-d)^2 \leq (a'-b)^2 \quad (p+r)q(p+q+r)^{-1} \quad q^{-1} s^{-1} (q+s)$$

$$(a-b)^2 \quad p^2 \quad s^{-1} (p+r) (q+s)(p+q+r)^{-1}$$

De même :

$$(a-b)^2 \leq (c-d)^2 \quad s^2 \quad p^{-1} (p+r)(q+s)^{-1} (q+r+s)^{-1}$$

ce qui ne se peut pas puisque ps est sûrement plus petit que :

$$(p+q+r) (s+q+r).$$

La démonstration est achevée puisque X' étant le premier composant de l'observation optimale, le résultat précédent montre que si les états Y et Z appartiennent à X' il doit en être de même de tous les états T tels que :

$$\frac{d}{d\theta} \log \Pr(Y) \leq \frac{d}{d\theta} \log \Pr T \leq \frac{d}{d\theta} \log \Pr Z$$

C'est-à-dire enfin qu'il doit exister une valeur K telle que tous les états, dont la dérivée logarithmique de la probabilité l'excède, appartiennent à X' .

Il reste à prouver que cette limite K doit être non négative.

$$\text{Posons } \frac{d}{d\theta} \log \Pr(X') = P'/P \quad (P = \Pr(X'))$$

L'information associée à l'observation optimale peut être écrite

$\frac{P'^2}{P(1-P)}$. Si X' contenait un état Y tel que la dérivée logarithmique correspondante soit non positive, l'observation $(X'(Y))$ ($(X'+Y)$) serait meilleure que $(X')(X')$ car

$$\frac{d}{d\theta} \log \Pr(X'-Y) \text{ serait plus grande que } \frac{d}{d\theta} \log \Pr(X') \text{ et}$$

$$\Pr(X'-Y) \times P(X'+Y) \text{ serait plus petite que } \Pr(X') \Pr(X').$$

L'INFORMATION DE WALD

Nous pensons pouvoir donner ce nom à l'expression que nous allons étudier en raison de la place capitale que, sans la nommer d'ailleurs, A.WALD lui a fait jouer dans l'analyse séquentielle (85). Il en est de même des autres auteurs qui l'ont considérée : ceux-ci ou bien n'en ayant pas reconnu le caractère d'information (57) ou bien ayant préféré ne l'envisager que comme une expression accessoire (46,47) de l'information de SHANNON.

Définition : les $p_i(\theta)$ dépendant d'un système de paramètres symbolisé par l'information de WALD, $W(\theta)$ est définie par l'opérateur linéaire $\left[\right]_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_0}$

Par conséquent $W(\theta)$ est la valeur moyenne de la variable z_i qui représente le logarithme du rapport des vraisemblances de l'évènement x_i dans les deux hypothèses :

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1: \theta = \theta_1$$

On a la propriété très importante :

$W(\theta)$ n'est jamais négatif et ne s'annule que si pour tous les états $p_i(\theta_0)$ est égal à $p_i(\theta_1)$, ceci étant son seul minimum, à la fois comme fonction des $p_i(\theta_0)$ et comme fonction des $p_i(\theta_1)$

En effet, pour un système quelconque de variations des $p_i(\theta_i)$ on a :

$$dW(\theta_1) = \sum_i d p_i(\theta_1) \left\{ 1 + \text{Log} \frac{p_i(\theta_0)}{p_i(\theta_1)} \right\} \text{ d'où : } p_i(\theta_0) / p_i(\theta_1) = \text{constante.}$$

Et de même :

$$\sum_i d p_i(\theta_0) = \sum_i \frac{p_i(\theta_0)}{p_i(\theta_1)} d p_i(\theta_1) \text{ avec } \sum_i d p_i(\theta_1) = 0$$

D'où le résultat annoncé.

Dans le cas dichotomique, on a l'inégalité suivante qui semble nouvelle. Ecrivons :

$$D = p(\theta_0) - p(\theta_1) = q(\theta_1) - q(\theta_0)$$

$$\boxed{W \geq \frac{2D^2 + \frac{4}{3}D^4}{2D^2 + \frac{4}{3}D^4}}$$

Posons en effet $2 p(\theta_0) = 1-x$ et $2 p(\theta_1) = 1-y$ après avoir choisi p de telle sorte que x soit positif.

On peut développer W en série de puissance de x et de y :

$$2W = (1-x) \text{Log}(1+x)/(1-y) + (1+x) \text{Log}(1+x)(1+y).$$

On trouve :

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} (4i^2 - 2i) - 1 (x^{2i} - 2ixy^{2i-1} + (2i-1)y^{2i})$$

Tous les termes sont positifs car le polynome

$t^{2i} - 2it + 2i - 1$ a un unique extremum pour $t = 1$ et prend en ce point la valeur 0.

Bien plus :

$$x^{2i} - 2ixy^{2i-1} + (2i-1)y^{2i} = 4D^2(x^{2i-2} + 2x^{2i-3}y + 3x^{2i-4}y^2 + \dots + (2i-1)y^{2i-2})$$

Par conséquent W est plus grand que la somme des deux premiers termes de son développement qui sont :

$4D^2/2$ et $4D^2/12(x^2 + 2xy + 3y^2)$ et la valeur de ce dernier polynome étant supérieure pour D fixe à $D^2/3$ on trouve bien le résultat.

Si u désigne le plus grand de x et de y on a enfin l'inégalité complémentaire suivante qui se déduit du développement précédent :

$$W \leq 2 D^2 (1-u^2)^{-1}$$

On observera qu'en faisant $p(\theta_1) = 1/2$ les résultats précédents permettent de trouver un développement de l'information de SHANNON en série de puissances (paires) de :

$$x = p-q = (1-4pq)^{1/2}.$$

Le théorème fondamental qui donne un sens physique à l'information de WALD appartient à la théorie de l'analyse séquentielle.

Soit à choisir entre les deux hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 d'après une méthode telle que les probabilités d'erreur soient inférieures ou égales respectivement à α et β selon que la vraie valeur de θ est θ_0 ou θ_1 ; l'analyse séquentielle prescrit l'emploi du "sequential probability ratio test" qui consiste à effectuer une série de tirages successifs indépendants de x_1, x_2, \dots, x_n de ξ jusqu'à ce que la somme $Z_n = \sum_{i=1}^n z_{\alpha}$ atteigne l'une des deux limites A et B calculées à l'avance.

Comme $z_{\alpha} = \log \frac{\Pr(\xi_{\alpha}(X_i | \theta_0))}{\Pr(\xi_{\alpha}(X_i | \theta_1))}$, ceci revient exactement à poursuivre le test jusqu'à ce que le rapport des vraisemblances des deux hypothèses ait atteint certaines limites.

Nous appellerons N_0 et N_1 le nombre moyen d'observations nécessaires pour achever le test selon que c'est \mathcal{H}_0 ou \mathcal{H}_1 qui est vraie.

WALD a montré (86) qu'aucune autre procédure ne saurait être uniformément meilleure que le "sequential probability ratio test".

Mais les démonstrations sont trop longues et font appel à trop de notions extérieures à ce travail pour que nous puissions songer à les reproduire ici. Nous nous contenterons en suivant WALD lui-même à établir des résultats approchés valables quand les limites A et B sont assez grandes par rapport à $|z|$ pour que l'on puisse considérer comme pratiquement nulles les différences $|Z_n - A|$ et $|Z_n - B|$.

Choisissons un entier N tel que soit négligeable la probabilité que la procédure ne soit pas achevée au N ième tirage.

Supposons que n soit le numéro d'ordre de tirage auquel l'une des limites a été atteinte, mais que l'on ait quand même continué les observations jusqu'à N . On a, en désignant par E l'opération "valeur moyenne pour un θ donné" :

$$E(z) = W \quad ; \quad \sum_1^N z_{\alpha} = \sum_1^n z_{\alpha} + \sum_n^N z_{\alpha}$$

d'où puisque n est une variable aléatoire :

$$N W = E\left(\sum_1^n z_{\alpha}\right) + E(N-n)W$$

$$\text{soit : } E\left(\sum_1^n z_{\alpha}\right) = E(n) W$$

Soient a et b les probabilités que $\sum_1^n z_i$ atteigne respectivement A et B , on a enfin :

$$E(n) = (aA + bB) W^{-1}$$

Dans les hypothèses d'approximation où nous nous sommes placés on peut donc énoncer en tenant compte du théorème d'optimalité de WALD :

$K/W(\theta_i)$ où K est une fonction de a et de b , limite inférieurement le nombre d'épreuves indépendantes nécessaires si $\theta = \theta_i$ pour tester l'hypothèse \mathcal{H}_0 contre l'hypothèse \mathcal{H}_1 avec les probabilités d'erreur a et b .

On remarquera l'analogie de cette propriété avec le théorème de FRECHET-DARMOIS. Nous allons voir que la liaison n'est pas fortuite et que l'information de WALD établit bien une médiation entre les problèmes de diagnostic et les problèmes d'estimation.

On a souvent observé (notamment 4) que si les $p_i(t)$ sont des fonctions deux fois dérivables du paramètre inconnu, l'information de FISHER (que nous écrirons ici $F(t)$) apparaît dans le développement en série de TAYLOR de $W(t)$.

De fait on peut établir le résultat plus fort suivant :

Si $t_0 = t + dt$ et $t_1 = t - dt$; $W(t_1)$ et $W(t_0)$ ont les mêmes parties principales $2 F(t)$ qui est aussi la moitié de la variance de z_i .

On a en effet les développements :

$$p_i(t \pm dt) = p_i(t) \pm p'_i(t) dt + \frac{1}{2} p''_i(t) dt^2 \pm Q dt^3$$

$$z_i = \text{Log} \frac{p_i(t+dt)}{p_i(t-dt)} = 2 p'_i(t)/p_i(t) dt + R dt^3$$

Donc en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à dt^3

$$W(t_0) - W(t_1) = 2 \sum (p'_i(t)^2 / p_i(t)) dt^2 = 2 F(t) dt^2$$

$$\text{et } \text{Var}(z_0) = 4 \sum p_i(t) (p'_i(t)/p_i(t))^2 dt^2 = 4 F(t) dt^2$$

Par conséquent, si l'on effectue un nombre N constant et très grand de tirages et si \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 diffèrent extrêmement peu, la variable réduite :

$$Z_N^* = \sum_1^n z_i \sqrt{(4 F(t)) / dt}$$

est distribuée comme une variable de LAPLACE GAUSS de variance unité et de moyenne $\pm (F(t) / 2 N dt)$ selon que c'est \mathcal{H}_0 ou \mathcal{H}_1 qui est vérifiée ce qui montre que, comme on le soupçonnait, les probabilités a et b ne dépendent à la limite que de $F(t)$

CAPACITE.

Nous ne possédons aucun théorème suffisamment général qui donne, comme dans le cas de l'information de FISHER, une aide pour étudier l'efficacité d'une observation unique. Il y a là un domaine de recherches très important qui se rattache, semble-t-il, à la théorie des inégalités relatives aux fonctions convexes.

THÉORIE DES INFORMATIONS

61

Plus généralement, il nous faudrait savoir résoudre le problème suivant qui contient les précédents et que nous reformulerons d'après SHANNON.

Soient X_i les états de ξ . Supposons que ξ soit elle-même inobservable mais que l'on puisse déterminer l'état d'une seconde aléatoire, dépendant de ξ par les probabilités conditionnelles $P_2(\eta \in \gamma_j | \xi \in X_i) = p_{ji}$.

Nous avons vu que l'on a quelque soit S :

$$H(\xi \times \eta) = H(\xi) + H(\eta | \xi) = H(\eta) + H(\xi | \eta)$$

SHANNON(72) appelle "capacité" le maximum de $H(\xi) - H(\xi | \eta)$ relativement aux $p_i = \text{pr}(\xi \in X_i)$ pour des p_{ji} fixés et donne la solution du problème consistant à trouver précisément les p qui assurent ce maximum dans le cas de l'information qu'il considère

Le problème plus général consiste, soit à déterminer les p pour une information quelconque soit - (ce qui serait plus important dans la théorie de l'estimation et du test où il est fréquent que $H(\eta | \xi)$ soit nul et où par conséquent comme on l'a vu $H(\xi) - H(\xi | \eta) = H(\eta)$) - de choisir les p_{ji} en tenant compte de certaines contraintes imposées par la technique d'observation.

Le théorème que nous avons donné plus haut est un premier pas dans cette voie et se traduit dans les notations de ce paragraphe par $j = 1$ ou 2 et $p_{j|i} = 0$ ou 1 .

LES INFORMATIONS DE TRI

Considérons une famille d'événements e_j que nous appellerons élémentaires et dont nous supposons que les probabilités a priori s'annulant pour $t = 0$ sont développables en séries de puissance croissante d'un paramètre t . Soit E l'ensemble de tous les événements composés qui peuvent être construits à partir des e_j par les procédés habituels de la théorie des événements compatibles et dépendants (29). Il est commode d'associer à chaque e_i son indicatrice x_i prenant la valeur 0 ou 1 et au système des e_j la variable ξ dans l'espace produit.

$$X = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_i$$

Chaque événement de E est alors caractérisé par un certain domaine X_i de X et sa réalisation peut être notée $\xi \in X_i$. Supposons maintenant que des observations antérieures ayant ou non déjà restreint le champ E des états possibles de ξ , nous effectuons l'observation 0 correspondant à la partition $(X_1)(X_2)\dots(X_k)$ de E .

L'information attachée à l'opérateur $W \left[t \frac{\partial}{\partial t} \right]_{t=0}$ livre le nombre moyen d'événements élémentaires supplémentaires dont 0 nous permet d'apprendre qu'ils ont été réalisés. Nous appellerons cette information "information de tri de première espèce".

Considérons en effet un sous-ensemble quelconque X_i de X .

Les deux assertions :

" X_i n'est possible que si au moins n_i événements élémentaires au moins sont réalisés", et

" $\Pr(X_i)$ présente un zéro d'ordre n_i à l'origine"

sont équivalentes d'après nos hypothèses sur le développement des $\Pr(e_j)$ en puissance de t .

Mais d'autre part si $P = t^{n_i}(a+bt+\dots) = t^{n_i} Q$ la valeur pour $t = 0$ de $t \frac{d}{dt} \log P = n_i + t \frac{Q'}{Q}$ est précisément n_i . D'où le théorème puisque, plus généralement, si on savait déjà que n' événements e_j devaient être réalisés, on aurait :

$$P = \frac{t^{n_i}}{t^{n'}} \frac{Q}{R} \quad \text{et} \quad \left[t \frac{d}{dt} \log P \right]_{t=0} = n_i - n'$$

Naturellement, si l'on avait choisi t de telle sorte que chacune des expressions $1 - \Pr(e_j)$ présente un zéro simple pour $t=1$, on aurait une information analogue concernant le nombre d'événements élémentaires non réalisés.

Enfin à l'opérateur : $\left[t \frac{d}{dt} \right]_{t=0} + \left[(1-t) \frac{-d}{dt} \right]_{t=1}$

correspondrait le nombre des événements dont l'état est encore indéterminé.

On voit que ces opérateurs diffèrent de celui associé à l'information de SHANNON par le fait qu'ils ne tiennent aucun compte de l'identité des événements en cause mais seulement de leur nombre ou même plutôt du minimum de leur nombre.

Il serait donc peut être plus imagé de parler d'"information de comptage". La terminologie adoptée trouve sa justification dans la II^{ème} partie de ce travail (Chapitre 4 "Problèmes de tri").

Avant d'en terminer, nous donnerons encore un autre exemple d'information associée à des problèmes analogues. Toujours dans le cadre de ce système d'événements e_j , supposons que nous ayons pu restreindre ξ par des observations préalables, à appartenir à un sous-ensemble E' impliquant qu'au moins n événements élémentaires sont réalisés. Limitons-nous aux observations qui ne changent pas ce minimum (c'est-à-dire à celles qui n'apportent aucune information de tri de première espèce) et faisons l'hypothèse supplémentaire que pour tous les e_j le coefficient du terme dans leur développement est égal à un.

L'information de tri de seconde espèce associée à l'opérateur $\left[\right]_{t=0}$ livre le logarithme du nombre de manières dont la réalisation de n événements élémentaires permet la réalisation de l'événement observé.

En effet, d'après les théorèmes classiques et les hypothèses faites, si $\Pr(X_i) = a_i t^{n_i} + \dots$ c'est qu'il y a a_i combinaisons de n événements réalisés qui assurent que $\xi \{ x_i$.

Comme $\Pr(E')$ admet aussi un zéro d'ordre n avec un coefficient que nous pouvons écrire a , chacun des $\Pr(X_i | E')$ correspon-

dant à l'un des composants de l'observation est de la forme

$$\frac{a_i t^n + b_i t^{n+1} + \dots}{a t^n + b t^{n+1} + \dots} = a_i/a + c t + c' t^2 + \dots$$

et par conséquent, la valeur pour $t = 0$ de $\text{Log Pr}(\xi \in E^t)$ est bien $\text{Log } a_i - \text{Log } a$.

Il serait facile d'illustrer d'exemples l'emploi de cette nouvelle information et nous en trouverons aussi l'occasion dans la IIIème partie.

On voit également comment pourraient se faire diverses généralisations en introduisant par exemple plusieurs paramètres correspondant chacun à une sous-famille de l'ensemble des événements élémentaires.

Il y a là un domaine de recherches qui semble nouveau et qui serait de nature à éclaircir la signification physique des opérateurs S caractérisant les informations. Dans l'état actuel de nos connaissances et de manière plus heuristique que mathématique leur rôle apparaît être le suivant :

Dans chaque domaine (diagnostic, estimation....) certains états de la variable aléatoire peuvent être considérés comme équivalents du point de vue spécial où l'on se place ; ainsi dans les problèmes d'estimation par exemple, est-il indifférent que les tirages successifs aient donné les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n ou toute autre permutation de ces n nombres. De même par hypothèse, lorsqu'il s'agira d'extraire d'une population infinie un objet présentant telle propriété spécifiée à l'avance ne nous soucierons-nous point d'apprendre qu'un ou plusieurs objets ne présentent pas cette propriété.

Ceci suggère inévitablement le recours à la notion fondamentale d'exhaustivité introduite par Mr. le Professeur G.DARMOIS ; pour chaque type de problème seuls certains invariants de certaines classes d'états sont à considérer et leur connaissance épuise pour le but particulier poursuivi tout ce que nous désirons savoir.

Il apparaît donc légitime que l'opérateur linéaire destiné à transformer en une information efficace - en une "information pour nous", - "l'information en soi", abstraite et universelle $\sum p_i S \text{Log } p_i$, fasse apparaître précisément cette équivalence des états et, par là même, réintroduise dans le concept d'information la notion de sa valeur que nous avons volontairement feint d'ignorer lors de la définition axiomatique. En même temps les informations qui sont des grandeurs physiques recouvrent une dimension - celle-ci d'ailleurs pouvant être aussi bien un nombre pur (information de WALD) que l'inverse du carré d'une grandeur (information de FISHER) selon le modèle dont elles sont un invariant.

Dans cette perspective, on voit comment pourraient s'ordonner les différents types avec à la base l'information de SHANNON WIENER redondante par rapport à toute autre puisqu'impliquant une connaissance absolue de l'aléatoire. Ces remarques s'apparentent aux conceptions de MANDELBRÖT (55) sur le temps relatif des diverses stratégies liées aux théories physiques. Elles expliquent, nous semble-t-il, le succès de l'emploi de l'informa-

tion de SHANNON dans l'étude de la transmission des messages en présence de bruit bien qu'en toute rigueur il s'agisse là d'un problème d'analyse discriminative (Cf. 89, 66, 63, 75) — donc d'une information de Wald. L'opérateur $S = \text{constante}$ fournit en effet seulement une quantité approchée, qui est valable à la limite dans les cas particuliers envisagés mais n'est absolument correcte que si le bruit a une structure telle que l'on peut en principe achever le diagnostic (38) c'est-à-dire s'il n'est plus aléatoire quand l'observation dure un temps suffisamment long.

IV. - PSEUDO INFORMATIONS ET "CHI CARRÉ"

LES PSEUDO INFORMATIONS

Nous appellerons ainsi certaines expressions qui quoique pouvant être mises sous la forme $\sum p_i S \log P_i$ ne sont pourtant pas en général des informations. Le seul exemple que nous indiquerons sera celui des cumulants et celui des valeurs extrêmes de la variable aléatoire, qui dérivent, d'ailleurs de ces derniers.

ξ pouvant prendre les valeurs numériques x_i avec les probabilités p_i nous dirons que le paramètre t intervient de façon canonique dans la distribution de ξ si ξ prend la valeur de x_i avec la probabilité $q_i = p_i (\varphi(t))^{-1} \exp(\sqrt{-1} t x_i)$ ou $\varphi(t)$ est la transformée de FOURIER de la distribution initiale c'est-à-dire, à une constante près $\varphi(t) = \sum p_i \exp \sqrt{-1} t x_i$.

Dans le cas continu on définirait de même :

$$g(\xi) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp \sqrt{-1} t \xi \right)^{-1} f(\xi) \exp \sqrt{-1} t \xi$$

Il est clair que si t intervient de manière canonique dans la distribution des variables indépendantes ξ et ξ' il en est de même pour la distribution produit symbolique $f \times f'$.

Par contre — et c'est pourquoi nous n'obtiendrons que des pseudo informations — si l'on considère la variable ξ déduite de ξ en confondant certains états, les termes correspondants dans l'expression de q_i ne sont pas réductibles à une paramétrisation canonique puisque, par exemple :

$p_1 \exp \sqrt{-1} t x_1 + p_2 \exp \sqrt{-1} t x_2$ ne peut être mis sous la forme :

$$(p_1 + p_2) \exp \sqrt{-1} t y.$$

Considérons maintenant les opérateurs :

$S_h = (\sqrt{-1})^h \frac{d^h}{dt^h}$ et les informations K_h qui leur sont attachées. Par hypothèse :

$$K_h = (\sqrt{-1})^h \left(\frac{d}{dt} \right)^h \log \varphi(t)$$

est le cumulant du h ème ordre de ξ pour $h \geq 2$ et est égal à zéro pour $h = 1$.

THÉORIE DES INFORMATIONS

65

Par conséquent :

les cumulants sont égaux à des informations quand le paramètre est canonique et dans ce cas seulement :

Nous dirons que les cumulants sont des pseudo-informations. On retrouve bien ainsi leurs propriétés classiques d'additivité et, dans une certaine mesure, on voit comment pourraient se rattacher à la théorie générale les quantités introduites par BHATTACHARYYA (7, 8, 9).

Sous des conditions très générales l'opérateur symbolisé par $(i - \sqrt{1} \frac{d}{dt})^{-1}$ a un sens et donc :

le logarithme de la transformée de FOURIER de f (la fonction génératrice des cumulants) est une pseudo-information.

Si l'on est dans le cas continu et si a et b finis sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur de ξ telle que $f(\xi) \neq 0$, on sait d'après POLYA (65) que a et b peuvent être retrouvés par des opérations linéaires sur $\text{Log} \varphi(t)$, ceci résultant du théorème de PALEY-WIENER et du fait que $\varphi(t)$ est une fonction du type exponentiel. L'on a :

$$a = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \text{Log } \varphi(\sqrt{-1}r) \quad \text{et} \quad b = \lim_{r \rightarrow -\infty} r^{-1} \text{Log } \varphi(\sqrt{-1}r)$$

Par conséquent :

Les valeurs extrêmes de ξ sont des pseudo-informations.

Ceci était d'ailleurs vraisemblable a priori puisque ce sont des grandeurs additives pour la composition des variables indépendantes.

On observera cependant que l'ensemble des relations d'équivalence correspondant aux regroupements d'états qui n'affectent pas la valeur de cette pseudo-information est beaucoup plus vaste que dans le cas des cumulants.

Par exemple, si l'on considère comme concentrée à l'origine toute la probabilité sauf une fraction ξ en a et une autre ξ' en b, ces limites ne sont évidemment pas affectées.

Nous ne saurions terminer ces brèves indications sans attirer l'attention sur un problème de nature analytique qui ne semble pas avoir reçu encore de solution satisfaisante et qui est la réciproque des résultats précédents : celui de la détermination directe des informations à partir de la seconde caractéristique sans l'étape intermédiaire du calcul explicite des probabilités de chaque état.

LE "CHI CARRÉ"

Nous avons vu que l'information de WALD fournissait une sorte de pseudo-distance entre deux distributions. Les statisticiens font souvent usage depuis PEARSON (61,62) (Cf. 40 et 56)

66

d'une autre grandeur qu'ils appellent communément le "chi carré" et qui est définie par :

$$\chi^2 = \sum_i \frac{p_i(\theta_0) - p_i(\theta_1)^2}{p_i(\theta_0)}$$

χ^2 , outre certaines facilités de calcul, possède des propriétés très intéressantes pour de nombreuses applications (1) d'invariance par transformation par un certain groupe orthogonal et de décomposition subséquente. Manifestement χ^2 est une valuation du treillis des partitions des états de l'aléatoire considérée et l'on vérifie sans peine qu'il ne jouit pas d'additivité pour la composition des distributions indépendantes. Le "chi carré" n'est donc pas une information.

Nous allons voir comment il est cependant possible, comme pour celles-ci, d'en calculer la valeur en utilisant des restrictions du treillis de partition de X .

Soit $X = (X_1) (X_2) (X_3)$ et posons pour abrégier :

$$p_i(\theta_0) = a_i ; p_i(\theta_1) = b_i$$

Si l'on considère que la partition $(X_1) (X_2 + X_3)$ on a :

$$\bar{\chi}^2 = \frac{(a_1 - b_1)^2}{a_1} + \frac{(a_2 + a_3 - b_2 - b_3)^2}{a_2 + a_3}$$

Si l'on se restreint au contraire à $(X_2) (X_3)$ on trouve :

$$\chi'^2 = \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} - \frac{b_2}{b_2 + b_3} \right)^2 \left(\frac{a_2}{a_2 + a_3} \right)^{-1} + \left(\frac{a_3}{a_2 + a_3} - \frac{b_3}{b_2 + b_3} \right)^2 \left(\frac{a_3}{a_2 + a_3} \right)^{-1}$$

En vertu de l'identité :

$$\frac{x^2}{y} + \frac{x'^2}{y'} - \frac{(x + x')^2}{y + y'} = \frac{(x/y' - x'/y)^2}{(y + y')}$$

il vient :

$$\chi^2 = \bar{\chi}^2 + (a_2 + a_3) \left(\frac{b_2 + b_3}{a_2 + a_3} \right)^2 \chi'^2$$

formule qui est très analogue, mais cependant différente, de celle que nous avons postulée pour les informations.

D'autre part, on peut écrire aussi χ^2 sous la forme :

$\sum \frac{p_i^2(t)}{p_i(t)}$ en posant $p_i'(t) = p_i(\theta_1) - p_i(\theta_0)$ et comparer cette expression à l'information de FISHER qui a la même apparence formelle. Dans cette perspective on constate que la différence provient de ce que si p' est effectivement $\frac{d}{dt} p_i \frac{d}{d\theta} p_i$ il doit devenir $\frac{p' P - P' P}{2}$ quand on considère ξ comme restreint à une partie X' de X de probabilité totale P , alors qu'il devient $\frac{p'}{p}$ dans le calcul de χ^2 .

(1) En général les $p_i(t)$ ne sont pas des distributions a priori mais sont des nombres de cas observés ce qui entraîne que leur somme n'est pas égale à 1. Ceci n'a aucune importance du point de vue où nous nous plaçons.

THÉORIE DES INFORMATIONS

67

Nous arrêterons là ces quelques remarques qui n'avaient d'autre but que de relier en les contrastant la théorie du test de "chi carré" à la théorie de l'information.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 - AITKEN A.C. (1948) Proc.Soc Roy.Ed. A.62 P.362
- 2 - BARNARD G.A. (1951) Jour. Roy Stat. Soc. (138) P.46
- 3 - BARTLETT M.S. (1950) Proc. Lond. Symp P.81
- 4 - BARTLETT M.S. (1946) J. Roy. Stat. Soc 8 P.27
- 5 - BAVELAS (1950) J. Acoustical Soc. Am. 22. P.725
- 6 - BAVELAS (1951) Communication patterns;"Cybernetics"
J. Macy. Conf)
- 7 - BHATTACHARYA A. (1946) Sankya (8) P.1
- 8 - BHATTACHARYA A. (1947) Sankya (8) P.201
- 9 - BHATTACHARYA A. (1948) Sankya (8) P.315
- 10 - BLANC LAPIERRE A et PERROT M. (1950) C.R.Ac Sci (231) P.539
- 11 - BLUNDELL (1952) Proc. Lond. Symp
- 12 - CARNAP. R. and BAR HILLEL Y. (1952) M.I.T. Tech. Rep 247
- 13 - CHERRY E.C. (1951) Proc. Inst E.P. Engr (98.111) P.383-393
- 14 - CHERRY E.C. (1951) Proc. Symp. Lond. 161-168
- 15 - CRAMER (1946) Mathematical Methods. Of Stat. Princeton
- 16 - DARMOIS G. (1935) C.R.Ac. Sc. (200) P.1176 et 1265
- 17 - DARMOIS G. (1936) Inst. Int. Stat P. 288
- 18 - DARMOIS G. (1945) Rev. Inst. Int. Stat.
- 19 - DARMOIS G. (1942) C.R.Ac. Sci (222) P.164
- 20 - DARMOIS G. (1942) C.Ac.Sc.(221) P.266
- 21 - DUGUE O. (1939) Ecole Poly (3) P.305
- 22 - FANO R.M. (1949) M.I.T. Tech. Rep N° 65
- 23 - FERON R. (1950) CR.Ac.Sc.T.230 P.1495-97
- 24 - FERON R. et G. FOURGEAUD (1951) C.R.Ac.Sc.t:232 P.1636-1638
- 25 - FISHER R.A. (1944) Statistucal Methods.Edinburgh.
- 26 - FISHER R.A. (1942) The design of experiments.Edinburgh.
- 27 - FISHER R.A. (1921) Phil.Trans.Roy.Soc. A.22 P.309
- 28 - FISHER R.A. (1925) Proc. Camb. Phil. Soc. (22) P.700
- 29 - FORTET R. (1951) Processus stationnaires et entropie ;
La Cybernétique ... Paris
- 30 - FRECHET M. (Paris 1943) Les probabilités associées à un
système d'évènements compatibles et dépendants Ière partie.

Année 1954 1954-3. Contribution aux applications statistiques de la théorie de...

68 M. P. SCHÜTZENBERGER : THÉORIE DE L'INFORMATION

- 31 - FRECHET M. Rev. Inst. Stat. 3/4/ P.182
- 32 - GABOR D. (1950) La théorie des communications et la physique. La Cybernétique
- 33 - GABOR D. (1946 Jour. I.E.E. (93) P.429
- 34 - GABOR D. Phil. Mag (1950) (41) P.1161
- 35 - GOOD I.J. (London 1950) Probability and the weighting of evidence
- 36 - GOOD I.J. (1952) J. Roy. Stat. Soc. (14) P.107
- 37 - HALMOS P.R. and L.J. SAVAGE (1949) Ann. Math. Stat.vol. 20. P.225
- 38 - HAMMERSLEY (1950) J. Roy. Stat. Soc. (12.B.) P.192
- 39 - HAMMING R.W. (1950) Bell Syst. Tech J. (29) P.147
- 40 - HARTLEY R.V.L. (1928) Bell Syst Technicol J. 7. P.535
- 41 - HELMERT P.R. (1875) Zeit F Math Phy 20.P.300
- 42 - HUFFMAN (1952) Proc. Lond Symp
- 43 - HUGGINS (1952) Proc. Lond. Symp
- 44 - KARHUNEN K. (1949) Arkiv.f.Mat.(I) P.141
- 45 - KOLMOGOROF A. (1942) Bull Ac. Sci.U.R.S.S. (série Math) (5)
- 46 - KOOPMAN B.C. Trans.Am. Math. Soc. (39) P.399
- 47 - KULLBACK S. and R.A. LEIBLER (1951) Ann. Math. Stat. Vol. 22 P.79
- 48 - KULLBACK S. (1952) Ann. Math. Stat. Vol. 23. P.88
- 49 - KUPFMULLER K. (1924) Elek Nachtechn I.P.141
- 50 - LEAVITT H.J. (1951) J. Ab. Soc. Psy. (46) P.38
- 51 - LEMOINE E. (1902) Géométrographie. Paris.
- 52 - MAC KAY D.M. (1950) Phi.Mag (41) P.284
- 53 - MAC KAY D.M. (1950) Proc. Symp.Lond. P.9.
- 54 - MAC KAY D.M. (1950) Proc. Symp. Lond. P.162
- 55 - MAC KAY D.M. (1951) Basic Symbols "Cybernetics" (J. Macy Conference)
- 56 - MANDELBROT B. (1952) Thèse (Paris 1952)
- 57 - MATHERS K. (London 1932) Measurement of linkage in heredity.
- 58 - MOURIER E. (1946) C.R. Acad. Sci. Vol. 223 P.712
- 59 - NEYMAN J. and E.S. PERSON (1933) Proc. Camb.Phil.Soc. 29 P. 492
- 60 - NEYMAN J. and E.S. PERSON (1933) Phil. Trans. A.231-289
- 61 - NEYMAN J. (1937) Phil. Trans. A.236. P.333
- 62.- PEARSON K. (1900) Phil. Mag. (50) P. 157
- 63 - PEARSON K. (1922) Biometrika (14) P.186
- 64 - PENROSE L.S. (1947) Ann. Eug (3) P.228
- 65 - PITMAN E.J.G. (1937 Proc.Camb.Phil.Soc (33) P.212

- 66 - POLYA G. (1949) Proceedings of the Berkeley symposium
Math Stat. and Prob P. 115-123
- 67 - RAO C.R. (1948) J. Roy. Stat. Soc. (10B) P.159
- 68 - RICE S.O. (1950) Bell Syst Techn J. 29. P.60
- 69 - RIGUET J. (Thèse Paris 1951) Théorie des relations binaires
- 70 - SCHRODER (1871) Mar. Ann. (3) P.296
- 71 - SCHUTZENBERGER M.P. (1951) C.R.Ac.Sc. 233 P.925
- 72 - SCHUTZENBERGER M.P. (1951) C.A.Ac.Sc.233. P.1805
- 73 - SHANNON C.E. (1948) Bell Syst Techn J. Vol.27 P.379-423
et 623-656
- 74 - SHANNON C.E. (1950) Proc. Lond. Sym P.102
- 75 - SHANNON C.E. (1950) Proc. Lond. Sym P.105
- 76 - SMITH C.A.B. (1947) Ann. Eug. (3) P.272
- 77 - SZILARD L. (1929) Zeitschrift f. Phg 53. P.840
- 78 - TULLER W.G. (1949) Proc. Ins. Rad. Eng. 37 P/468
- 79 - VALLEE R. (1951) C.R. Ac.Sc. 233 P.1580
- 80 - VILLE J. (1948) Cable et Trans (2) P.61
- 81 - VILLE J. (1950) Cable et Trans (4) P. 9
- 82 - VILLE J. (1951) Cable et Trans (4) P.76
- 83 - VILLE J. (1951) Cable et Trans (5) P.126
- 84 VILLE J. (1951) Cable et Trans (5) P.189
- 85 - VILLE J. et SCHUTZENBERGER M.P. (1951) C.R. Ac. Sc. (232)
P. 206
- 86 - WALD A. (N.Y. 1947) Sequential analysis
- 87 - WALD A. et WOLFOWITZ (1948) Ann. Math. Stat. 19
- 88 - WALD A. (N.Y.1950) Statistical decision fonctions.
- 89 - WEAVER (1949) Sc. Am. 181 P.I
- 90 - WELCH B.L. (1939) Ann. Math. Stat. (31) P.218
- 91 - WIENER N. Cybernetics (Paris 1948).
- 92 - WIENER N. The extrapolation etc (New-York 1949).
- 93 - KHINTCHIN A.J. Ucpexi Mat. Nauk. (VII). 1953. p. 320.

Année 1954 1954-3. Contribution aux applications statistiques de la théorie de...

TROISIÈME PARTIE

LES MÉTHODES DE GROUPAGE

I. - PROBLÈMES ET MÉTHODES

LES MÉTHODES DE GROUPAGE

Les méthodes que nous aborderons dans ce travail semblent n'avoir jamais été l'objet d'une étude systématique malgré la diversité des cas où l'on en fait un usage plus ou moins empirique (1). Nous nous proposons donc de définir exactement les hypothèses de base, de classer les problèmes possibles et finalement soit d'indiquer des solutions, soit de développer des méthodes générales permettant de faciliter leur recherche.

Quelques exemples permettront de rendre plus clair la discussion des hypothèses.

1° - Circuits électriques : Un appareillage électrique est hors d'état de marche. Pour localiser la "panne" on subdivise en sous-circuits que l'on "sonne" successivement. Le résultat de chaque épreuve permet de conclure, soit que tous les éléments constituant le circuit "sonné" sont en état, soit que l'un d'eux, au moins, est défectueux.

2° - Calculs numériques : Une série de calculs numériques est telle que l'on possède une méthode permettant de décider pour certaines suites d'opération si elles sont toutes correctes ou si au moins l'une d'elle est erronée.

3° - Epreuves biologiques : Ayant fait une série de prélèvements, on les homogénéise et on effectue un seul ensemencement. Moyennant diverses conditions de nature biologique un résultat négatif de l'ensemencement permet de conclure à la stérilité de tous les prélèvements.

4° - Test chimiques ou sérologiques : La même possibilité existe si l'on est dans un cas tel que la sensibilité du réactif soit suffisante pour donner une réaction positive, même si un seul des composants du mélange était "marqué".

(1) La seule référence que nous ayons pu retrouver dans la littérature est un travail de R. DORFMANN, (the detection of defective members of large population (1943). Ann. Math. Stats. (14) p.436-440)

5° - Observation de phénotypes en génétique mendélienne : étant donné une paire d'allèles (A, a) d'un même gène à dominance et pénétrance complètes, l'observation pure et simple d'un individu permet, si son phénotype correspond à l'allèle récessif a , d'être sûr que son génotype est $\frac{a}{a}$ (qu'il est "homozygote récessif") ou au contraire, si son phénotype correspond à l'allèle dominant A , de savoir seulement que son génotype est $\frac{A}{A}$ ou $\frac{A}{a}$ sans pouvoir trancher entre ces deux dernières éventualités.

LES HYPOTHÈSES DE BASE

Dans tous ces exemples se retrouvent à divers degrés les mêmes particularités que nous discuterons d'abord ici avant de les formuler rigoureusement dans le chapitre suivant sous forme d'un modèle mathématique.

1° - Les observations sont d'une nature telle qu'une observation unique peut éventuellement apporter une certaine information (1) sur plusieurs objets à la fois.

2° - Cette information est par nature fournie de manière dissymétrique en ce sens que les divers résultats d'une même épreuve en apportent des "quantités" différentes voire même incomparables au niveau purement intuitif où nous nous plaçons ici ; pour le médecin par exemple, savoir que tous les membres d'un groupe ont un B.W. négatif ce qui assure qu'ils n'ont pas de syphilis secondaire est un renseignement clinique utile. Ce serait pratiquement ne rien apprendre que d'avoir seulement la preuve que l'un d'eux a un B.W. positif si l'on devait continuer à ignorer qui d'entre eux est malade.

3° - Le renseignement que l'on sollicite de l'expérience est de nature dichotomique ou dépend de caractères dichotomiques. Ce calcul est-il juste ou non ? - Ces prélèvements sont-ils septiques ou non ? Ou bien, mais ce n'est là, comme nous le verrons, qu'un stade supérieur de complexité du même phénomène ; combien de ces appareils électriques sont hors d'état ? - Quelle est la fréquence de cet allèle dans la population ?

4° - L'observation ne fournit à chaque fois qu'une réponse par oui ou par non, donc dichotomique elle aussi.

5° - Le facteur aléatoire n'intervient pas dans le processus d'observation lui-même mais seulement, par définition, en tant que caractérisant notre ignorance partielle ou complète des objets sur lesquels portent nos investigations.

6° - Pour autant qu'elles s'adressent à des objets différents, les observations sont indépendantes ou plutôt ne sont liées entre elles que par les paramètres qui ou bien, sont donnés explicitement (par exemple quand on connaît déjà la proportion

(1) Nous prenons ici le mot "information" dans son acception la plus vague. On verra ultérieurement comment la spécification de concept joue un rôle essentiel dans la solution de ces problèmes.

des appareils électriques défectueux dans un lot qu'il s'agit de trier) ou bien, constituent le but même de la recherche comme dans le cas de l'estimation de la fréquence inconnue d'un gène dans une population.

Nous allons maintenant reprendre un à un ces points et tout en donnant une formulation mathématique des hypothèses, discuter les raisons de notre choix.

La propriété décrite en 1° revient à dire qu'au lieu d'observer des variables, on observe des fonctions de plusieurs de ces variables ce qui est une démarche fréquente en statistique mathématique comme en témoignent, par exemple, les applications de l'analyse de variance à la technique des pesées. (Cf. Hotelling (1944) Ann. Math Stat (15) p 297-307).

Cependant la seconde particularité introduit un élément nouveau qui n'apparaît pas dans les méthodes auxquelles on vient de faire allusion puisque celles-ci au contraire reposent sur l'homogénéité des différentes mesures et, partant, sur la possibilité de leur substituer des formes linéaires qui leur soient équivalentes. Cette dissymétrie est donc une caractéristique essentielle de notre problème et c'est précisément à elle qu'est due la possibilité d'économiser éventuellement des observations. Il y a là une analogie qui n'est peut être pas que superficielle avec les problèmes mathématiques de "type réel" où la constatation que la valeur d'une forme quadratique définie positive est plus petite ou égale à zéro, permet de conclure que toutes les variables qui y figurent sont nulles alors qu'on ne saurait que fort peu de choses sur elles si l'on connaissait seulement la valeur numérique (différente de zéro) de cette forme.

Les conditions 3° et 4° s'imposent tout naturellement dans les exemples que nous avons donnés ; il importe peu en effet qu'un calcul soit faux de telle ou telle manière une fois que son inexactitude est établie. Ce n'est de même qu'à un stade ultérieur de l'étude clinique que l'on aura besoin d'évaluer la quantité exacte de réagine contenue dans le sang d'un malade soupçonné de tréponématose. La pratique médicale courante dans ce cas est d'ailleurs de faire d'abord un test dit "qualitatif" puis, seulement si ce dernier est "positif" de procéder aux opérations sensiblement plus coûteuses en temps et en argent de ce qu'on appelle la "quantitation". D'autre part remarquons que dans certains cas il existe simultanément plusieurs classifications dichotomiques. Par exemple dans une étude par agglutination des groupes sanguins dits "classiques" de LANDSTEINER on a les diverses possibilités suivantes ; avec un sérum contenant les agglutinines "alpha" et "béta" on peut classer les sujets en "O" (dont les hématies ne contiennent ni l'agglutinogène A ni l'agglutinogène B) et "non O" (dont les hématies contiennent A, B, ou A et B).

Dans ce cas mettant à part diverses considérations sérologiques extérieures à notre propos, il est théoriquement possible de vérifier d'un seul coup qu'un lot de sujets est constitué exclusivement de donneurs universels O (pas d'agglutination observée en testant un mélange de leurs sangs) ou contient au moins un sujet (A) ou (B) ou (A B).

La dichotomie est donc (O) / (A) (B) (AB).

Par contre avec un serum contenant seulement de l'agglutinine "alpha" la dichotomie serait ; (O) (B) / (A) (AB) c'est-à-dire que l'observation d'un mélange de sang permettrait de conclure ;

- soit que tous les sujets sont O ou B (pas d'agglutination)

- soit qu'un sujet au moins est A ou AB (agglutination). De même un serum "béta" conduirait à la dichotomie :

(O) (A) / (B), (AB)

Nous ferons toujours l'hypothèse qu'il s'agit de la même dichotomie à l'intérieur de chacun des problèmes que nous étudierons. Le cas où des systèmes plus complexes d'observations existeraient est d'ailleurs justiciables sinon des mêmes méthodes tout au moins, dans certaines limites, de leur extension. Il est cependant nécessaire d'introduire une nomenclature systématique qui caractérise, pour le mode d'observation employé, les alternatives qui sont en considération.

Selon la suggestion qui nous a été faite par notre Maître Monsieur le Professeur R. TURPIN, nous dirons qu'un objet est "marqué" s'il est possible de dépister en une seule observation sa présence dans un lot et qu'il est "neutre" si, au contraire, une seule observation permet seulement de le prouver tel quand tous les autres objets du lot sont "neutres" aussi.

En ce qui concerne les observations, nous dirons que l'une d'elles a fourni un résultat "positif" quand elle a permis de prouver l'existence d'au moins un objet "marqué" dans le lot; son résultat serait dit "négalif" dans le cas contraire.

Le tableau suivant résume et explique cette terminologie dans les exemples que nous avons donnés plus haut ;

Type d'observation	Objets "marqués"	Objets "neutres"
1° Vérification électrique	Défectueux	Normaux
2° Vérification des calculs	Faux	Corrects
3° Ensemencements	Septiques	Aseptiques
4° Tests sérologiques ou chimiques	Présence du réacteur	Absence du réacteur
Groupes sanguins O, A, B, AB		
Sérum α , β	A, B, AB	O
Sérum α	A, AB	O, B
Sérum B	B, AB	
5° Phénotype	Allèle A (dominant)	Allèle B (Récessif)

Une formulation mathématique achèvera de préciser s'il en était besoin, ce que nous entendons par "marqué", "neutre", "positif", et "négalif" bien que malheureusement, l'emploi de ces

deux derniers termes, qu'impose à peu près nécessairement la pratique chimique et sérologique, soit ici fort mal adaptée.

Etant donné un ensemble fini de variables finies, supposons que l'on se limite à l'observation de leur produit; s'il est nul, nous dirons que le résultat est "positif" (!) parce qu'au moins l'une des variables est nulle (c'est-à-dire "marquée"), s'il ne l'est pas, nous dirons que le résultat est "négatif" (!) parce que ceci prouve que toutes les variables sont différentes de zéro (c'est-à-dire toutes "neutres").

Insistons enfin sur le fait que théoriquement on peut concevoir des cas où deux systèmes d'observations permettraient de faire jouer un rôle symétrique aux catégories "marquées" et "neutres". Par exemple, si les variables x pouvaient prendre exclusivement les valeurs 0 et 1, l'observation du produit des $(x_i - x)$ au lieu de celui des x_i échangerait les deux possibilités. En effet si le premier produit n'était pas nul, ceci impliquerait que tous les x sont nuls. Toutefois, dans la pratique, il en est rarement ainsi puisque presque toujours la dichotomie qui sert de base aux observations résulte en quelque sorte de l'isolement d'un point critique dans le champ continu où varient les propriétés physiques des objets. Nous n'envisagerons donc pas cette possibilité, qui n'est en définitive qu'un cas très particulier de cette autre plus générale, que nous discuterons plus loin et qui est l'existence d'une méthode d'observation permettant de déterminer en une seule observation le nombre d'éléments "marqués et "neutres" composant un lot.

Il nous faut donc discuter les raisons pour lesquelles nous n'avons pas envisagé ce mode d'observation. Pour cela considérons de quelle manière celles-ci pourraient être effectivement réalisées. Pratiquement la seule possibilité serait de mesurer d'un seul coup la valeur d'une certaine fonction des variables x_i caractérisant chacun des objets du lot. Le choix de cette fonction impliquerait donc d'abord la nécessité de se donner un type d'additivité. Mais en outre il faudrait que chacune des variables x ne fut susceptible que de prendre deux valeurs ce qui est une hypothèse très artificielle, car sinon l'on se trouverait ramené à un problème classique d'estimation de variables numériques par la donnée numérique aussi de certaines fonctions en ces mêmes variables, problème qui est entièrement hors de notre sujet.

Les mêmes remarques s'appliquent également à la propriété annoncée dans 5° : outre le fait qu'il est difficile de concevoir un modèle statistique assez général pour couvrir une classe suffisamment vaste de cas où une aléatoire peut perturber les relations déterministes strictes :

Un objet "marqué" équivalent à un résultat positif de l'observation

Tous les objets "neutres" équivalents à un résultat négatif de l'observation

il semble bien que le problème ne devienne alors le problème général de la statistique mathématique dans un cas très particulier.

Nous nous bornerons donc à ce schéma qui est, lui aussi, suffisamment vraisemblable dans la plupart des situations pratiques. Nous formulerons cependant pour quelques cas précis des résultats qui généralisent à des modèles aléatoires bien fixés, certains des énoncés valables pour le modèle déterministe.

Enfin, il n'est pas inutile de souligner que plus généralement, il est possible de poser un problème avec une observation dépendant stochastiquement des particularités des objets comme un problème de type déterministe mais muni d'une structure plus compliquée de l'ensemble des objets ou, plus précisément, de l'ensemble des observations que l'on peut effectuer sur eux. Ceci très typiquement est le cas des observations de la génétique mendélienne même quand on inclut dans les schémas d'observation le processus complexe qui consiste à croiser deux individus et à observer leur descendance. Puisque l'observation des phénomènes dans le cas limite, mais pratiquement très général, où nous nous sommes placés permet seulement de savoir si des individus sont $\frac{a}{a}$ ou s'ils sont $\frac{A}{a}$ ou $\frac{A}{A}$, tout croisement ultérieur permettra seulement de découvrir que certains qui présentaient un phénotype correspondant à l'allèle dominant A , étaient en réalité hétérozygotes (c'est-à-dire étaient $\frac{A}{a}$). Rigoureusement parlant, il ne sera jamais possible de faire la preuve au sens de la logique formelle qu'un sujet est $\frac{A}{A}$ mais seulement de formuler une assertion statistique du type courant "il y aurait au moins x chances sur cent, mille, dix mille... que ces phénotypes aient été observés si tel ancêtre avait eu le génotype $\frac{A}{a}$ ". C'est ce qui se rencontre en particulier dans l'analyse des problèmes d'exclusion de paternité qui relèvent du même schéma logique et où la génétique peut au plus exclure un progéniteur présumé sans pouvoir formellement conclure en faveur d'une paternité certaine.

En général, il faudrait remplacer les objets élémentaires, par des urnes pour réaliser par un artifice un modèle déterministe ayant le même comportement que le modèle aléatoire que l'on désire étudier. Ici, comme on s'en convaincra sans peine, il ne peut s'agir que de cas d'espèces car le problème fondamental est de préciser la nature de l'additivité de caractères "marqué". En effet si l'on admet qu'il y a seulement une certaine probabilité pour que la réaction soit "positive" quand le lot contient un objet marqué, il est peu plausible de supposer que celle-ci soit la même quand tous les objets le sont, d'où l'introduction d'une expression décrivant cette probabilité en fonction de la composition du lot. Nous espérons que les méthodes générales décrites ici permettront d'aborder les cas précis où il serait à la fois nécessaire d'introduire cette fonction et possible de spécifier son expression.

Pour en terminer avec la signification et le rôle des probabilités dans notre problème il nous faut signaler qu'on supposera presque toujours, sinon connue à l'avance, tout au moins grossièrement estimée, la fréquence des objets "marqués". Comme dans l'analyse séquentielle de WALD avec laquelle nos problèmes présentent beaucoup d'analogies, c'est justement cette connaissance préalable qui permet d'augmenter l'efficacité d'un système d'observation. Un problème typique dans ce sens est celui de l'estimation de la fréquence inconnue des objets marqués dans

LES MÉTHODES DE GROUPE

79

une population infinie. Il est évident que si l'on ignore totalement son ordre de grandeur entre $1/2$ et $1/10^6$, la seule chose à faire est d'obtenir une estimation préalable sur un premier échantillon qui servira ensuite à choisir les paramètres fixant la deuxième série d'observations qui pourra celle-ci s'effectuer selon un "design" optimal.

Reste enfin la dernière caractéristique qui se justifie comme les précédentes par le fait :

- qu'elle est pratiquement réalisée dans les cas importants
- qu'elle contient les autres possibilités en ce sens qu'un modèle simple du type "dépendant" peut être ramené à un modèle "indépendant" à structure complexe.
- que son abandon impliquerait le choix d'une loi de dépendance qui ne saurait être que plus arbitraire encore.

Signalons enfin parmi les problèmes analogues aux nôtres et justiciables sans doute de méthodes parallèles celui où au lieu d'objets "neutres" et "marqués" existeraient des objets disons de type I et de type II et où l'observation serait positive quand et seulement quand le lot contiendrait simultanément au moins un objet I et un objet II. Une illustration d'un tel cas pourrait encore être fournie par la recherche de nouveaux groupes sanguins quand manquent à la fois des hématies porteuses de l'agglutinogène cherché et une réserve de sérum contenant l'agglutinine correspondante.

LES TYPES DE PROBLÈMES

Toujours sur le plan de la discussion intuitive, il est nécessaire d'indiquer les principaux problèmes qui peuvent se poser en présence d'un système du type décrit; nous en isolerons quatre, relevant deux par deux de domaines différents du calcul des probabilités.

Tout d'abord les deux problèmes classiques de la statistique mathématique :

l'estimation d'un paramètre inconnu, typiquement, la fréquence des objets "marqués" dans une population infinie

le test d'une hypothèse assignant à cette probabilité de se trouver dans un certain intervalle.

Naturellement, dans ces deux cas, il ne s'agira ici que d'appliquer les méthodes générales connues en profitant des particularités structurales envisagées plus haut pour diminuer à précision ou risque d'erreur égaux, le nombre des observations nécessaires. Dans certains cas on arrivera à des résultats extrêmement substantiels.

Les deux autres problèmes par contre sont en réalité distincts de ceux de la statistique mathématique habituelle quoi qu'il soit possible de les y ramener par un biais très artificiel à vrai dire.

Ce sont :

les problèmes de diagnostic : étant donné un ensemble fini d'objets, déterminer pour chacun d'eux s'il est "neutre" ou "marqué".

les problèmes de tri : étant donné un ensemble fini ou non, en extraire un nombre m , fixé à l'avance d'objets "marqués" ou bien n objets "neutres" ou bien encore à la fois m objets "marqués" et n objets "neutres".

Un lien entre ces deux derniers exemples et les problèmes relevant de la statistique mathématique serait le comptage des objets "marqués" dans un lot fini, problème statistique si l'on se contente d'une réponse "en probabilité", mais problème du second type si l'on veut une réponse catégorique. De fait, le problème de comptage ne se pose pas parce que, comme on le verra plus loin, il est impossible, du fait même de la structure logique du modèle d'observation, de "compter" les objets "marqués" sans les repérer individuellement. Ce problème se résume donc exactement au problème de diagnostic. Cet exemple cependant fait apparaître assez nettement le contraste entre les deux groupes de problèmes qui résulte à la fois de la nature déterministe des observations et du caractère discontinu (dichotomique même !) à la fois des grandeurs observées et des états inconnus des objets. Il apparaît donc que les problèmes du deuxième groupe rentrent plutôt dans le cadre des questions étudiées par la théorie de l'information. Le cas de diagnostic est d'ailleurs exactement, comme nous l'avons déjà dit dans la deuxième partie, une modalité particulière du problème du codage; les problèmes de tri sont, semble-t-il, nouveaux.

LES TACTIQUES

Ayant ainsi délimité les problèmes que nous aborderons, il nous faut enfin dire quelques mots sur la nature des solutions auxquelles nous nous efforcerons d'aboutir.

L'idéal serait de pouvoir, dans chaque cas, donner explicitement l'expression de la "décision fonction" de WALD ou de la "stratégie minimax" au sens de VON NEUMANN qui garantit à l'expérimentateur, les meilleurs résultats pour le coût en moyenne le plus faible.

De fait, la complexité combinatoire des problèmes et la nécessité de rester dans certaines limites de simplicité pour les procédures d'expérimentation nous conduira, selon une démarche très fréquente d'ailleurs dans les mathématiques appliquées, à substituer au concept de "stratégie optimale" celui de "tactique optimale" que nous allons définir.

Soit un certain but à atteindre, qui est aussi bien ici le diagnostic ou le tri d'un ensemble d'objets que la réduction en dessous d'un certain niveau de la variance d'estimation ou des probabilités d'erreur de première ou de deuxième espèce. Nous symboliserons ce but par un point, O , dans un certain espace B .

Quel que soit le problème, une procédure est une suite, menant au but proposé, d'opérations élémentaires, dont chacune a un coût fixé à l'avance. La question qui se pose est celle de trou-

ver la ou les procédures telles que la somme correspondante des coûts soit minimum.

Du point de vue qui nous intéresse nous pouvons encore schématiser ceci par une feuille de chemins C_i menant de l'origine I au but O et une fonction $f(P)$ des points de B . Le coût (ou plutôt sa valeur moyenne, mais il est équivalent d'employer ou non un langage déterministe), correspond alors simplement à l'intégrale de $f(P)$ prise le long de C_i et le problème est de trouver le ou les chemins qui rendent celle-ci minimum.

Les méthodes générales du calcul des variations permettent alors le raisonnement suivant ; supposons que pour chaque point P la valeur minimum $h(P)$ de l'intégrale précédente prise de P à O soit connue. Les surfaces $h(P) = Cte$ constituent une famille dépendant d'un paramètre (ce sont les "transversales"), et les chemins C optimaux en sont les trajectoires orthogonales ce qui permettrait de les déterminer.

Ceci est d'ailleurs intuitif puisque le fait de suivre ces trajectoires orthogonales revient à rendre maximum pour chaque déplacement infinitésimal la décroissance du coût total correspondant au chemin qui reste à parcourir.

La méthode reste valable quand, au lieu d'une trajectoire continue, on a affaire à une suite discrète de choix et nous avons pu montrer que dans certains cas particuliers elle présentait l'avantage de nécessiter le plus petit nombre d'opérations arithmétiques. Pour l'appliquer, on part des positions voisines du point O et on calcule pour chacune d'elles le coût minimum nécessaire pour atteindre le but ; puis successivement on effectue cette détermination pour toutes les positions qui sont voisines des précédentes, puis pour celles qui sont voisines de ces dernières ... etc ; jusqu'à ce qu'on soit remonté au point de départ I .

L'économie de calcul résulte évidemment du fait que l'on a jamais à tenir compte pour les comparer entre eux que des chemins qui sont déjà optimaux pour leur portion qui avoisine O ce qui réduit grandement le nombre des opérations.

Une semblable méthode a probablement été employée de façon implicite dans de nombreux cas et nous nous bornerons à citer celui du codage binaire d'un système quelconque de messages (Cf. D. HUFFMAN - 1952 - A method for the construction of minimum redundancy codes - Symp on comm. application. London).

Mais, en général, la détermination de la fonction $h(P)$ entraîne un travail considérable et l'on peut essayer de lui substituer une autre fonction $k(P)$ qui soit plus facile à calculer.

Revenons au cas discret et relativement à un certain choix d'une fonction $k(P)$ nous aurons alors ce que nous appellerons une tactique (optimale) d'ordre zéro ; celle-ci consistera pour chaque point P à passer au point P' tel que la décroissance de $k(P)$ soit la plus grande possible, tactique qui serait rigoureusement optimale, comme on l'a vu, si $k(P)$ était précisément $h(P)$.

On définirait de même des tactiques d'ordre un par le choix à chaque position P du point suivant P' tel qu'il permette lui-même de passer en un deuxième temps à P'' avec $k(P) - k(P'')$

maximum, des tactiques d'ordre deux où P' serait choisi en fonction de $k(P) - k(P'')$ où P'' peut être atteint à partir de P' Naturellement cette méthode serait rigoureusement optimale quel que soit $k(P)$ si une tactique d'ordre assez élevé pouvait être utilisée.

L'analogie de ces méthodes, qui semblent d'ailleurs appeler de nombreux travaux, avec la conduite effective des individus dans des situations telles que le jeu d'échecs, est évidente; à chaque position le joueur calcule le mouvement qu'il va effectuer en fonction du gain tactique qu'il lui assurera un, deux, trois, coups plus tard.

Sans pouvoir insister sur cette question, que nous avons développée ailleurs d'un autre point de vue (A tentative classification of goal seeking behaviours. J of Ment.Sci.-Octobre 1953) indiquons rapidement quelques exemples d'emploi d'une tactique d'ordre zéro dans divers domaines.

Problème de construction d'un circuit à contacts approximativement le plus économique pour réaliser une fonction logique donnée (Cf GAVRILOV. Teoria Releinkontaknyx cxem. Moskva 1950. p, 185).

Problème des diaphonies de J.VILLE -(les (a_i) étant donnés, il s'agit de choisir les signes + ou - de manière à minimiser $(\sum a_i)$ - (Cf Variables aléatoires equiparties (1949) Cables et transmissions - p 262-274).

Problème de détermination de la permutation des colonnes d'une matrice donnée rendant maximum la somme des éléments de la diagonale.

"Problème du livreur" ; c'est-à-dire choix de l'itinéraire le plus court qui passe par un ensemble de points dont les distances mutuelles sont connues.

Enfin il semble que dans le domaine des calculs numériques de nombreuses méthodes d'itération reposent aussi sur le même principe que l'on pourrait appeler d'optimalité locale.

Certaines fonctions $k(P)$ correspondent à ce que serait effectivement une stratégie optimale au sens strict si les paramètres caractéristiques du problème étaient choisis au fur et à mesure par un adversaire tel que le définit la théorie des jeux, au lieu d'être donnés à l'avance.

Ainsi, dans le problème classique généralisé des courbes de poursuite, la tactique d'ordre zéro est basée sur la fonction $k(P)$ qui est simplement la distance du poursuivant à l'objectif et elle consiste à choisir une trajectoire dont la tangente passe à chaque instant par l'objectif. Cette tactique serait optimale si celui-ci, dépourvu d'inertie, voyait sa position soumise à des fluctuations aléatoires et indépendantes. La tactique d'ordre un tiendrait compte de l'existence de l'inertie et interpréterait les mouvements de l'objectif comme résultant d'une chaîne de MARKOV d'ordre un elle aussi ... etc ...

En définitive, le problème se trouve ramené au choix de la fonction $k(P)$; mises à part des propriétés qualitatives assez peu caractéristiques ; (par exemple $k(0) = 0$), nous ne savons pour ainsi dire rien à ce sujet dans le cas général puisque le critère essentiel qui conduit à préférer $k(P)$ à $h(0)$ est celui

de la simplicité du calcul, qu'il est difficile d'explicitier en dehors des cas particuliers. Notons cependant qu'on a employé souvent, de manière implicite d'ailleurs, la méthode qui consiste à remplacer $h(P)$ par une fonction simple qui lui soit équivalente dans certains cas où les paramètres du problème ont des valeurs particulières, correspondant le plus souvent à des cas extrêmes.

Revenons à notre problème après cette longue parenthèse. Pour les mêmes raisons de simplicité qui nous ont guidé dans le choix des hypothèses, nous prendrons pour coût le nombre moyen d'observations élémentaires effectuées quel que soit le nombre des objets sur lesquelles elles portent. Nous pouvons déjà indiquer que pour chaque type de problème considéré, les fonctions $k(P)$ seront les informations appropriées ; en effet d'après ce que nous avons vu dans la deuxième partie, celles-ci sont susceptibles d'être calculées simplement et pour certaines valeurs, des paramètres elles coïncident avec les fonctions $h(P)$ en vertu des théorèmes d'optimalité. De plus grâce à ses mêmes théorèmes limitatifs on sera souvent en mesure de prouver que les tactiques d'ordre zéro conduisent dans l'ensemble à des résultats qui ne s'écartent pas trop des résultats strictement optimaux.

II. - PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MODÈLE

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

L'ensemble (fini ou infini) des objets sera désigné par E et les objets eux-mêmes par a, b, c, \dots ou bien selon les cas par a_1, a_2, \dots, a_n .

Le fait qu'un objet " a " soit à l'état marqué (respectivement neutre) sera noté par a^+ (respectivement a^-).

Nous désignerons par $A = (a, b, c, \dots)$

$B = (x, y, z, \dots)$ ou bien A_j les ensembles d'objets susceptibles d'une observation élémentaire permettant de savoir s'ils sont tous "neutres" ou si l'un d'eux au moins est "marqué".

Ainsi A désignera à la fois un ensemble (a, b, \dots) et l'observation élémentaire portant sur A . Le plus souvent, tous les sous-ensembles de E seront susceptibles d'être observés ; dans d'autres cas, certains seulement qui seront dits "admissibles". Par exemple en génétique mendélienne, les ensembles admissibles sont certaines paires d'allèles, celles appartenant à un individu de l'échantillon dont elles constituent le génotype. Il sera commode d'utiliser la notation $A^{(n)}$ pour désigner un ensemble quelconque formé de n objets et on dira qu'un ensemble A est "libre" si aucun des objets qui y figure n'a encore appartenu à un ensemble observé. Enfin, l'événement constitué par le fait que l'observation de A a donné un résultat positif (respectivement : négatif) sera simplement écrit A^+ (respectivement A^-).

Pour tout objet a, b, c ou x_j la probabilité qu'il soit à l'état marqué sera représentée par la lettre grecque correspondante sauf, pour des raisons typographiques évidentes, dans le cas où toutes ces probabilités élémentaires ayant la même valeur commune celle-ci sera notée par $p = 1 - q$.

LES TREILLIS DES POSITIONS

Après ces définitions, nous pouvons passer à l'étude des principales propriétés mathématiques du modèle et tout d'abord au calcul de la probabilité du résultat d'une observation X quand on connaît déjà les résultats d'un système \mathcal{A} d'observations A, B, \dots

Pour cette étude, le résultat suivant est essentiel.

Théorème I — Etant donné un système d'observations, A, B, \dots, C ayant porté sur les objets d'un ensemble E , les résultats de celles-ci sont décrits intégralement par les données :

- 1° — D'un élément \mathcal{A}^* du treillis distributif libre T dont les générateurs sont les objets de E .
- 2° — D'un sous-ensemble A^- de E , \mathcal{A}^* et A^- ne contenant aucun objet en commun.

Considérons en effet d'abord l'ensemble \mathcal{A}^- de toutes les observations de \mathcal{A} qui ont donné un résultat négatif. D'après les propriétés déterministes du modèle, un objet ne figure dans une observation de \mathcal{A}^- que s'il est à l'état "neutre". Réciproquement si tous les objets x, y, z, \dots sont à l'état "neutre" toute observation sur un sous-ensemble d'entre eux donne un résultat négatif. Par conséquent, a posteriori, \mathcal{A}^- est équivalent à une seule observation élémentaire A^- ayant donné un résultat négatif.

Toujours en raison du caractère déterministe du modèle, si l'observation $X = (a \ b \ c \dots)$ a donné un résultat positif, elle est a posteriori équivalente à l'observation $X' = (a \ b \ c \dots)$ où X' se déduit de X par suppression des objets appartenant à A^- .

Nous pouvons donc réduire \mathcal{A} à $\bar{\mathcal{A}}$ et à \mathcal{A}^* tels qu'aucun objet ne figure à la fois dans $\bar{\mathcal{A}}$ et dans une observation de l'ensemble d'observations \mathcal{A}^* .

Pour achever la démonstration, il nous suffit maintenant de montrer que si \mathcal{A}^* contient deux observations A et B telles que l'ensemble A soit un sous-ensemble de B on peut sans rien changer supprimer B de \mathcal{A}^* .

Mais ceci est évident, puisque le fait que A soit positif entraîne qu'il contient au moins un objet "marqué" et, par conséquent que toute observation portant sur un ensemble contenant A est positive et ne saurait rien apprendre de plus sur aucun objet si elle est effectuée après A .

Par une extension bien naturelle d'une terminologie introduite par Monsieur le Professeur G. DARMOIS, on pourrait dire que, dans notre modèle, le résultat positif de l'observation d'un sous-ensemble (et non pas l'ensemble des résultats comme en général en statistique) est un résumé exhaustif du résultat de l'observation d'un ensemble.

Une conséquence immédiate de ce résultat est que si l'observation B où B est un sous-ensemble de A , est effectuée après A , les objets de $A-B$ redeviennent des objets libres c'est-à-dire que l'on ne sait rien de plus sur eux que si A n'avait jamais été faite.

Appelons "position" d'un observateur le couple α^+A^- qui résume les résultats qu'il a déjà obtenus. D'après ce que nous venons de dire, l'ensemble de ces positions constitue un treillis T_E (le treillis de position) si l'on introduit un ordre " $<$ " gouverné par les conventions suivantes :

- 1° - $(\alpha^+A^-) < (\alpha'^+A'^-)$ si et seulement si $\alpha^+ \leq \alpha'^+$ dans T_E et $A^- \leq A'^-$ dans le treillis booléen des parties de E .
- 2° - Il existe une position (\emptyset) antérieure à toutes les autres ; c'est celle de l'observateur avant toute observation.
- 3° - Il existe une position (purement virtuelle d'ailleurs) qui est celle d'un observateur qui aurait obtenu des résultats contradictoires (par exemple A^+ et B^- si A était un sous-ensemble de B).

La relation d'ordre "antérieur à" dans T , coïncide avec l'ordre temporel, physique, des observations.

Enfin, il est important de noter que si $E' \subset E$ et si tous les objets figurant dans α^+A^- et $\alpha'^+A'^-$ appartiennent à E' , la relation $\alpha^+A^- < \alpha'^+A'^-$ dans T_E est équivalente à la même assertion dans $T_{E'}$.

A titre d'exemple, nous allons montrer comment la dissymétrie des états "marqués" et "neutres" entraîne qu'un résultat positif apporte moins de renseignements qu'un résultat négatif.

Plus exactement :

soit $\alpha = \alpha^+A^-$ la position d'un observateur avant qu'il effectue l'observation élémentaire X . Soit $\alpha'^+A'^-$ sa position si X^+ ; $\alpha''^+A''^-$ sa position si X^- ; enfin β^+B^- , sa position s'il apprenait que tous les objets de X sont à l'état marqué (ce que l'on peut noter X^{++}).

C'est-à-dire que β^+B^- peut s'écrire $\beta^+X^{++}B^-$ où le mot β^+ ne contient aucun des objets de X . On a :

Dans T_E : $\alpha'^+A'^- < \beta^+B^-$

Dans T_{E-X} : $\beta^+ < \alpha'^+$

ce qui signifie donc que mis à part les objets de X , X^+ conduit à une position antérieure à celle qui résulte de X^- .

En effet :

- 1° - A'^- est la réunion de A^- et de X^- et α'^+ est obtenue à partir de α^+ en y effaçant purement et simplement les lettres qui symbolisent les objets de X .
- 2° - A''^- et B^- sont identiques à B^- ce qui établit la première relation puisque β^+ est la réunion de A''^+ et de X^{++} .
- 3° - La deuxième relation découle de ce que α^+ est la réunion de β^+ avec ce qui reste des monomes de α^+ après effacement des objets de X .

Il est intéressant à ce stade de notre discussion de dire un mot des affaiblissements du théorème I qu'impliqueraient le remplacement du modèle déterministe par certains modèles aléatoires. Nous considérerons successivement les deux possibilités limites qui se traduisent par une liaison stochastique au lieu d'une implication formelle pour l'hypothèse :

1° - au moins un objet marqué entraîne un résultat positif

2° - tous les objets "neutres" entraînent un résultat négatif

Dans le premier cas, le théorème I se réduit, d'une part à la simple possibilité de "résumer" une série d'observations sur un seul objet par une observation quand au moins une fois un résultat positif a été obtenu. D'autre part, il reste encore la faculté de négliger l'observation d'un lot d'objets quand tous les objets testés individuellement ont fourni un résultat positif.

En effet soit r le paramètre $\Pr(A^+|a^+)$ où A est l'observation de l'ensemble A réduit à a et soit p_n la probabilité que la n ème observation du même objet a donné un résultat négatif quand les $n-1$ premières ont été négatives aussi, on a :

$$p_n = \frac{\alpha(1-r)^n + 1 - \alpha}{\alpha(1-r)^{n-1} + 1 - \alpha} \quad (\alpha = \Pr(a^+))$$

Par conséquent, sur le plan opérationnel où nous nous plaçons c'est-à-dire même si α et r sont connus (et a fortiori si α est inconnu) chaque observation négative nouvelle de a apporte un changement sur la probabilité des résultats d'une autre observation ultérieure.

Au contraire, en vertu du déterminisme (unilatéral) que nous avons supposé conservé il est clair que $A^+ B^+ C^+$ entraîne $(A + B + C, \dots)^+$ avec une certaine probabilité r' qui ne dépend que de la structure stochastique du modèle à condition que $A B C \dots$ soient des objets et non groupes d'objets puisque par exemple la connaissance de A^+ et $(B+C)^+$ n'est pas équivalente à celle de A^+ ; $(B+C)^+$ et $(A + B + C)^+$ pour prévoir le résultat de l'observation C .

De façon duale, dans le deuxième cas, seule subsiste la première partie du théorème I, c'est-à-dire que l'on peut seulement remplacer \mathcal{A} par une observation unique portant sur un certain ensemble A .

Montrons pour finir que dans le modèle déterministe le comptage du nombre des objets marqués d'un ensemble E implique le diagnostic de tous les objets.

Soit en effet \mathcal{A} la position d'un observateur sachant que E contient n objets marqués et m neutres.

Par hypothèse A^- est équivalent à une observation élémentaire $A^{(m)}$ ayant donné un résultat négatif et garantissant donc le caractère neutre des m objets qui y figurent.

D'autre part \mathcal{A}^+ est équivalent à un système d'observations positives et ne peut que fixer une limite inférieure au nombre n d'objets marqués à moins que toutes les opérations élémentaires qui le composent n'aient porté que sur un seul objet.

LES PROBABILITÉS DES POSITIONS

Nous sommes maintenant en mesure de calculer les probabilités qui nous intéressent. Nous désignerons par $\text{Pr}(X|\mathcal{A}^+A^-)$ la probabilité que l'observation élémentaire X donne un résultat positif quand on a déjà obtenu les résultats résumés par le couple \mathcal{A}^+ et A^- .

D'après la théorie des probabilités composées on a :

$$\text{Pr}(X^+|\mathcal{A}^+A^-) \times \text{Pr}(\mathcal{A}^+A^-) = \text{Pr}(X^+ \mathcal{A}^+ A^-)$$

Comme l'ensemble $X^+ \mathcal{A}^+$ est aussi un mot \mathcal{A}^+ de T , le problème est donc ramené au calcul des $\text{Pr}(\mathcal{A}^+)$ c'est-à-dire au calcul des $\text{Pr}(\mathcal{A}^+)$ puisque le fait que \mathcal{A}^+ et A^- n'aient pas d'éléments communs entraîne :

$$\text{Pr}(\mathcal{A}^+A^-) = \text{Pr}(\mathcal{A}^+) \times \text{Pr}(A^-)$$

Le calcul de $\text{Pr}(A^-)$ est immédiat :

$$\text{Pr}(A^-) = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \dots (1 - \xi)$$

si $a, b, c, \dots, x \in A$.

Pour calculer les $\text{Pr}(\mathcal{A}^+)$ on dispose du théorème suivant :

Théorème II - Les probabilités $\text{Pr}(\mathcal{A}^+)$ sont une valuation du treillis T_E .

Le théorème n'est encore une fois que la transcription en langage des treillis des notions fondamentales du calcul des probabilités. Toutefois cette transcription nous permet d'obtenir directement les résultats pratiques suivants qui découlent de la possibilité de calculer les valuations de tous les mots à partir de la seule donnée des valuations des éléments, et + irréductibles du treillis T_E .

1ère méthode :

Soit $\mathcal{A}^+ = \sum_{i \in I} A_i^+$ une représentation réduite de \mathcal{A}^+ en les observations élémentaires A_i ($i \in I$) qui sont les éléments + irréductibles du treillis.

D'après les méthodes générales de la théorie des événements compatibles et dépendants ou - ce qui revient au même - d'après les méthodes de la théorie des valuations dans les treillis distributifs on a :

$$\text{Pr}(\mathcal{A}^+) = \sum_{i \in I} \text{Pr}(A_i^+) - \sum_{i, j \in I} \text{Pr}(A_i^+ A_j^+) + \sum_{i, j, k \in I} \text{Pr}(A_i^+ A_j^+ A_k^+) + \dots$$

ce que l'on peut encore formuler de la façon suivante :

Corollaire I - Pour chaque sous-ensemble I' de puissance n de I soit $B_{I'}$ l'observation élémentaire portant sur les objets qui appartiennent au moins à l'un des A_i ($i \in I'$), on a :

$\text{Pr}(\mathcal{A}^+) = (-1)^n \text{Pr}(B_{I'}^+)$ où la sommation est étendue à tous les sous-ensembles I' de I .

Chacun des B_i' étant équivalent à une observation élémentaire on a enfin :

$$\Pr (B_1^{++}) = 1 - \Pr (B_1^{--}) = 1 - (1 - \alpha) (1 - \beta) \dots (1 - \xi)$$

si $a, b, \dots x \in B_1'$

2ème méthode :

Nous partons maintenant de la représentation de \mathcal{A}^+ comme intersection des mots irréductibles.

Soit C_j ($j \in J$) les ensembles minimaux d'objets tels que \mathcal{A}^+ ne sont possibles que si tous les objets de l'un des C sont à l'état marqué ce que nous noterons par $(C_j)^{++}$. En langage de probabilité on a donc :

$$\Pr (\mathcal{A}^+) = \Pr (C_1^{++} \text{ ou } C_2^{++} \text{ ou } \dots C_J^{++})$$

d'où :

$$\Pr (\mathcal{A}^+) = \sum_j \Pr C_j^{++} - \sum_{j,j'} \Pr (C_j^{++} C_{j'}^{++}) +$$

De manière formelle les ensembles C_j seront obtenus simplement en permutant dans l'expression de \mathcal{A}^+ les opérations \cdot et $+$ puis, grâce à la loi distributive, en développant en somme de monomes ces derniers étant précisément les C_j .

La formule précédente s'énonce alors de manière rigoureuse :

Corollaire II - Pour chaque sous-ensemble de puissance n , J' de J soit $C_{j'}$, l'ensemble des objets qui figurent dans au moins un $C_{j'}$, ($j' \in J'$), on a :

$$\Pr (\mathcal{A}^+) = \sum (-1)^n \Pr (G_{j'}^{++})$$

où la sommation est étendue à tous les sous-ensembles J' de J .

Enfin si $a, b, \dots x \in G_j$, on a par définition :

$$\Pr (G_j^{++}) = \Pr (a^+ b^+ \dots x^+) = \alpha \beta \dots \xi$$

Exemple : soit $E = (abcd)$ et soient les observations élémentaires $A = (a,b,c)^+$ $B = (a,d)^+$ $C = (b,d)^+$

Nous représenterons simplement le fait que $A^+ B^+ C^+$ par le mot $abc + ad + bd$ et nous avons, d'après le corollaire I : $\Pr (A^+ B^+ C^+) = \Pr (-abc + ad + bd) = \Pr (abc) + \Pr (ad) + \Pr (bd) - \Pr (abd) - \Pr (abcd)$.

$$\text{Donc } \Pr (A^+ B^+ C^+) = 1 - \bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{\gamma} - \bar{\alpha} \bar{\delta} - \bar{\beta} \bar{\delta} + \bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{\delta} + \bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{\gamma} \bar{\delta}$$

en posant $\bar{\xi} = 1 - \xi$ = probabilité que x soit neutre.

De même en employant le corollaire II :

Les combinaisons minimales d'objets "marqués" qui garantissent que $A^+ B^+ C^+$ sont, comme on le calcule sans peine :

(a et b) ; (a et d) ; (b et d) ; (c et d). On a donc :

$A_1 = ab$; $A_2 = ad$; $A_3 = bd$; $A_4 = cd$; et finalement :

$$\Pr (A^+ B^+ C^+) = \alpha \beta + \alpha \delta + \beta \delta + \gamma \delta - 2\alpha \beta \delta - \alpha \gamma \delta - \beta \gamma \delta + \alpha \beta \gamma \delta$$

valeur qui est bien égale à celle trouvée à l'aide du corollaire I.

3ème méthode.

Les deux méthodes précédentes conduisent à des expressions contenant des signes négatifs. La théorie des événements compatibles et dépendants nous livre une troisième représentation qui ne présente pas cet inconvénient éventuel.

Considérons en effet les événements D_i ("les diagnostics complets") consistant en le fait qu'est connu l'état de chacun des N objets de l'ensemble étudié E . La probabilité de l'un quelconque de ces 2^N événements est de la forme :

$$\Pr(D_i) = \alpha_1 \alpha_2 \dots (1 - \alpha_j) (1 - \alpha_j') \dots$$

et tout α^+ pouvant être représenté de manière unique comme somme logique de ces événements incompatibles, il s'en déduit bien l'expression cherchée.

On obtient ainsi pour l'exemple précédent :

$$\Pr(A^+ B^+ C^+) : \alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\bar{\delta} + \alpha\beta\bar{\gamma}\delta + \alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta} + \alpha\bar{\beta}\gamma\delta + \alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta} + \alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}\delta + \alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}$$

LE CAS DES PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES ÉGALES

Dans la suite, nous étudierons surtout le cas particulier correspondant à une probabilité d'être marqué p égale pour tous les objets.

A chaque mot α correspond alors un polynome $P(p) = \Pr(\alpha^+)$ prenant ses valeurs dans $(0,1)$.

Les propriétés suivantes quoique très simples méritent d'être relevées.

1° - $P(p)$ est une fonction croissante de p (plus généralement $\Pr(\alpha^+)$ est fonction croissante des α_i).

2° - $P(p)$ admet la racine $p = 0$ avec un ordre de multiplicité égale au nombre minimum n_0 d'objets dont le caractère marqué assure que α^+ est réalisé.

En effet, d'après le corollaire II, $\Pr(\alpha^+)$ est une somme de monomes en les α_i correspondant chacun à un ensemble C_j d'objets tous marqués et les ensembles minimaux de cette famille sont les C_j eux-mêmes. Le coefficient du terme p^{n_0} est donc en outre le nombre de ces C_j de puissance n_0 .

3° - $1 - P(p)$ admet la racine $p = 1$ avec un ordre égal au minimum de la puissance des observations élémentaires qui constituent α^+ .

Ceci est immédiat d'après le corollaire I.

4° - $P(p)$ est d'ordre au plus égal au nombre n des objets qui figurent dans α^+ . Cet ordre s'abaisse chaque fois que n étant pair α^+ est un mot identique à son dual, $\bar{\alpha}^+$.

Considérons en effet α^+ et l'évènement $\check{\alpha}^-$ défini par le fait que pour qu'aucun des c l'on a (c) . La double implication :

$$\alpha^+ \text{ entraîne non } \check{\alpha}^- \text{ et } \check{\alpha}^- \text{ entraîne non } \alpha^+$$

permet d'écrire :

$$\Pr(\alpha^+) = 1 - \Pr(\check{\alpha}^-)$$

Mais comme $\Pr(\check{\alpha}^-)$ est équivalente d'après les corollaires I et II à $\Pr(\check{\alpha}^+)$ où l'on aurait remplacé les j par les \bar{j} , nous pouvons écrire si $\alpha^+ = \check{\alpha}^+$, $\Pr\alpha(p) + \Pr\check{\alpha}(q) = 1$ et le coefficient du terme de plus haut degré doit bien être nul si ce degré est pair.

Enfin, pour les cas où des dispositifs expérimentaux particuliers (circuits électriques par exemple) permettraient de réaliser de façon relativement aisée certains mots complexes, nous rappellerons le résultat suivant bien connu en théorie des treillis :

La condition nécessaire et suffisante pour que E contienne au moins h objets marqués est que l'on ait α_h^+ ou α_h désigne le mot symétrique $\sum A^{(N-h+1)}$ avec la sommation étendue à toutes les combinaisons $(N-h+1)$ à $(N-h+1)$ des N objets de E .

En effet le calcul montre que le dual de α_h est précisément α_{N-h+1} . D'après la troisième méthode de calcul, les fonctions correspondantes sont :

$$P_h(p) = \sum_{i=0}^{N-h} \binom{N}{h+i} p^{h+i} (1-p)^{N-h-i}$$

La fonction $P_h(p)$ a la propriété remarquable de présenter un point d'inflexion unique pour $p = (h-1)/(N-1)$ comme on peut le vérifier par le calcul direct. Quand N et h tendent vers l'infini de telle manière que $(h-1)/(N-1)$ et $(N-h)/(N-1)$ aient des limites finies, $P_h(p)$ tend vers une fonction de saut en ce point ce qui d'ailleurs est intuitif.

III. - PROBLÈMES DE DIAGNOSTIC

GÉNÉRALITÉS

Dans ces problèmes, il s'agit, comme on l'a vu, de déterminer celui qui s'est réalisé des événements incompatibles D_j consistant en le fait que tous les objets de E ont un état donné

Nous désignerons par π une procédure, c'est-à-dire une suite déterminée d'observations à effectuer en fonction des résultats des observations antérieures; c'est-à-dire, encore, formellement un arbre à chaque point de ramification duquel est attaché le sous-ensemble X de E qui doit être observé.

Les α_i étant donnés, nous désignerons par $L(\alpha)$ la somme $\sum \Pr(D_j) \lambda(D_j)$ étendue à tous les D_j postérieurs à α (c'est-à-dire auxquels on peut encore aboutir quand on est en position α) et où $\lambda(D_j)$ désigne le nombre d'observations élémentaires conduisant de α à D_j , en suivant la procédure π .

Ainsi, par exemple, $L(\emptyset)$ est le coût total moyen de la procédure et inversement $L(D_j) = 0$ pour tout D_j par hypothèse.

Si π prescrit l'observation élémentaire X quand on est en α , on a la relation ;

$L(\alpha) = \text{Pr}(\alpha) + L(\alpha X^+) + L(\alpha X^-)$ ce qui montre que L est une fonction décroissante sur le treillis de position.

Théorème : Une condition nécessaire pour que π soit optimale est que l'on ait quelque soit α ;

$$L(\alpha X^+) \leq L(\alpha X^-).$$

Supposons en effet que pour un certain α cette condition ne soit pas vérifiée. Pour la partie de la procédure qui concerne les observations postérieures à αX^- , remplaçons les observations prescrites par π celles que prescrit π quand αX^+ . D'après ce qui a été vu dans le chapitre précédent sur la dissymétrie des résultats qu'entraînent respectivement les résultats X^+ et X^- on aura en appelant π' la procédure π ainsi modifiée ;

$$L'(\alpha X^-) \leq L(\alpha X^+) \leq L(\alpha X^-)$$

Donc π' est uniformément préférable à π .

On en déduit la conséquence importante suivante ;

Une condition nécessaire pour que π soit optimale est que $\lambda(D_j) \leq \lambda(D_{j'})$ pour tout $\alpha = \emptyset$ et pour toute paire $D_j, D_{j'}$, où le second diagnostic ne diffère du premier que par remplacement de l'état neutre par l'état marqué pour certains objets. Dans ces conditions $L(\emptyset)$ est une fonction croissante de chacun des α_i .

En effet π' étant un arbre, il existe pour toute semblable paire $D_j, D_{j'}$ une position α_j et une observation X telles que D_j soit postérieure à $\alpha_j X^-$ et $D_{j'}$ à $\alpha_j X^+$. Il en résulte la première partie de l'énoncé puisque π est supposé optimale. D'autre part, dans la somme ;

$$L(\emptyset) = \sum \text{Pr}(D_j) \lambda(D_j),$$

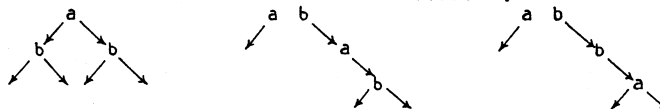
et relativement à chacun des α_i , on peut associer les paires $D_j, D_{j'}$ telles que dans D_j on ait α_i^- et dans $D_{j'}$ α_i^+ , les états des autres objets étant les mêmes.

Il en résulte la deuxième partie de l'énoncé puisque les $\text{Pr}(D_j)$ sont des fonctions linéaires en chacun des α_i .

Représentation des procédures.

Il nous faut maintenant donner une représentation commode des procédures.

Considérons les trois schémas suivants ;



où un trait descendant à gauche (respectivement, à droite) signifie que l'observation élémentaire dont ils partent a fourni un

résultat négatif (respectivement positif). Ainsi la seconde procédure consiste en les étapes suivantes :

1° - Observer a et b ensemble.

Si le résultat est négatif c'est que a^- et b^-

Si le résultat est positif ; on passe à ;

2° - Observer a

Si le résultat est négatif c'est que a^- et b^+

Si le résultat est positif ; on passe à ;

3° - Observer b ce qui conduit finalement à l'un des deux diagnostics $a^+ b^-$ ou $a^+ b^+$.

Dans les problèmes que nous traiterons, il apparaîtra qu'un diagnostic complet est presque toujours obtenu quand deux résultats négatifs ont été observés. Pour des raisons de commodité typographique, nous utiliserons cette particularité pour noter une procédure quelconque de la façon suivante :

Les ensembles constituant les observations élémentaires successives sont écrits de gauche à droite et celles-ci doivent être effectuées dans cet ordre quand la précédente a donné un résultat positif. Quand il est nécessaire d'effectuer encore des observations après un résultat négatif, la séquence correspondante complète est notée entre parenthèses immédiatement après l'observation en cause.

Par exemple, la première procédure du tableau précédent s'écrirait : a, (b), b et la seconde ab, a, b.

CAS D'UN PETIT NOMBRE D'OBJETS

Etudions d'abord le cas de $n = 2$. Les schémas donnés plus haut correspondent évidemment aux seules procédures possibles et les fonctions de coût sont :

$$L I = 2$$

$$L II = 1 \times \Pr(a^- b^-) + 2 \times \Pr(a^- b^+) + 2 \times \Pr(a^+) = 1 + 2\alpha + \beta - \alpha\beta$$

$$L III = 1 + 2\alpha + \beta - \alpha\beta$$

Il convient donc si l'on n'adopte pas I de choisir II ou III selon que α est plus petit ou plus grand que β

On aura alors (en supposant $\alpha \leq \beta$) :

$1 + 2\alpha + \beta - \alpha\beta \leq 2$; équivalent à $\alpha \leq \beta \leq 1 - 2\alpha / 1 - \alpha$ ce qui montre que le groupage n'est efficace que si l'une au moins des deux probabilités est inférieure à $3 - \sqrt{5} / 2 = 0.381966...$

Nous ferons désormais l'hypothèse que $\alpha_i = p$ pour tout i .

Pour trois objets déjà, il devient nécessaire de procéder selon une méthode rigoureuse, si l'on veut aboutir, sans trop de difficultés au résultat. Conformément aux idées que nous

avons développées dans le premier chapitre, nous avons fait usage d'une méthode récurrente qui consiste à calculer la fonction minimale $L(\alpha)$ pour toutes les positions en partant des positions terminales c'est-à-dire en étudiant d'abord la procédure à partir de

$((ab)^+(ac)^+)$ puis de $(ab)^+$ puis de $(abc)^+$ puis de \emptyset .

On obtient ainsi sept procédures dont la fonction n'est minorée par aucune autre. Ce sont :

- I - abc, ab, ac, bc, a, b, c
 $L_I = 1 + 6p + 3p^2 - 3p^3$
- II - $abc, a, (b, c)bc, b, c$
 $L_{II} = 1 + 7p - 4p^2 + p^3$
- III - $abc, a, (bc)b, (c)c$
 $L_{III} = 1 + 8p - 7p^2 + 2p^3$
- IV - $ab, (c)ac, bc, a, b, c$
 $L_{IV} = 2 + p + 7p^2 - 4p^3$
- V - $ab, (c)a, (c)bc, b, c$
 $L_V = 2 + 2p + 2p^2 + p^3$
- VI - $ab, (c)a, (c)b, (c)c$
 $L_{VI} = 2 + 3p - p^2$
- VII - Observation objet par objet
 $L_{VII} = 3$

Le calcul montre que les procédures suivantes sont seules à retenir :

- I pour $0 \leq p \leq 1/8$ ($7 - \sqrt{35}$) = 0.15628 .. avec un coût toujours inférieur à 2,004 .. dans cet intervalle
- II pour $1/8$ ($7 - \sqrt{35}$) $\leq p \leq 2 - \sqrt{2}$ = 0.29289 .. (coût inférieur à 2.722 ...)
- V $2 - \sqrt{2} \leq p \leq 1/2$ ($3 - \sqrt{5}$) = 0.38187 .. (coût inférieur à 3)
- VII $1/2$ ($3 - \sqrt{5}$) $\leq p$ coût toujours égal à 3.

Pour quatre objets la même technique conduit aux procédures suivantes. (Nous ne donnons ici que les résultats définitifs).

- I - $abcd, ab, (c, d)acd, bcd, c, (a, b, d)ad, bd, a, b, d$
 $L_I = 1 + 10p + p^2 + 2p^3 - 3p^4$ (à utiliser pour $p \leq 1/8$ ($7 - \sqrt{35}$))
 - II - $abcd, ab, (c, d)a, (cd, c, d)bcd, b, (c, d)cd, c, d$
 $L_{II} = 1 + 11p - 5p^2 + p^3$ (à utiliser pour $1/8$ ($7 - \sqrt{35}$) $\leq p \leq p_1$ = 0.21385 ...)
- (p_1 = racine de $1 - 6x + 7x^2 - 4x^3 + x^4 = 0$)

III - $ab (cd, c, d), a, (cd, c, d) bcd, b(c, d) cd, c, d$

$$L_{III} = 2 + 5p + 2p^2 - 3p^3 + p^4 \text{ (à utiliser pour } p_1 \leq p \leq 2 - \sqrt{2} \text{)}$$

IV - $ab (cd, cd,) cd, (a, b) a, (c, d) c, (b) bd, b, d.$

$$L_{IV} = 2 + 6p - 3p^2 + 3p^3 - p^4 \text{ (à utiliser pour } e - \sqrt{2} \leq p \leq 1/2 \text{ (} 3 - \sqrt{5} \text{))}$$

V - observation objet par objet ;

$$L_V = 4 \text{ (à utiliser pour } p \geq 1/2 \text{ (} 3 - \sqrt{5} \text{))}$$

On obtient donc déjà ici un gain assez important dès que p est faible puisque par exemple si $p = 0.10$ on économise à peu près 50 % du nombre des observations en utilisant I au lieu de V.

Il est à remarquer que certaines positions (par exemple $(abc)^+$) ne sont jamais atteintes si l'on suit une procédure optimale.

Nous arrêterons là la discussion de ces procédures.

En effet, si l'on veut bien se souvenir que le treillis libre a cinq générateurs à 7581 éléments, on comprendra que la méthode d'exhaustion que nous avons suivie devient inapplicable. Il paraît sûr que de nombreuses règles combinatoires pourraient être trouvées qui faciliteraient ces recherches. Nous comptons revenir ultérieurement sur cette question qui peut présenter un certain intérêt théorique.

EMPLOI DE L'INFORMATION DE SHANNON WIENER

Par définition, l'information de SHANNON WIENER associée à la position \mathcal{U} est nulle quand et seulement quand plus rien d'aléatoire ne reste dans le processus éventuel d'observation; c'est à-dire quand cette position est un diagnostic complet. Les autres propriétés que nous avons étudiées plus en détail dans la première partie confirment encore dans cette idée que l'information de SHANNON WIENER peut être une approximation raisonnable de la fonction $L(\mathcal{U})$ qui décrirait le nombre moyen minimum d'observations restant à effectuer et qui, par conséquent, permettrait de choisir à chaque position l'observation x optimale. Nous utiliserons donc cette information pour construire des tactiques d'ordre zéro.

Avant toute observation, l'information que nous avons sur un objet a_i est par définition :

$$\alpha_i \log_2 \alpha_i + (1 - \alpha_i) \log_2 (1 - \alpha_i) = H_i$$

et pour l'ensemble des N objets qu'il nous faut diagnostiquer :

$\sum_i H_i$ puisque ces objets sont indépendants. Enfin on a :

$$H = N (p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p))$$

LES MÉTHODES DE GROUPEMENT

95

si l'on suppose, comme nous le ferons désormais toujours que toutes les probabilités élémentaires sont égales à p .

La première observation peut porter sur un lot A de n objets et le gain moyen d'information qui lui est attaché est égal à

$$(\Pr A^+ \log_2 \Pr A^+ + \Pr A^- \log_2 \Pr A^-)$$

$$\text{soit} \quad (1-q^n) \log_2 (1-q^n) + q^n \log_2 q^n$$

En vertu du caractère monotone de cette fonction de n il revient au même pour fixer la première observation optimale selon la tactique d'ordre zéro de rechercher n tel que q^n soit le plus voisin possible de $1/2$, c'est-à-dire de prendre

$n_0 = \left[\frac{\log 1/2}{\log (1-p)} \right]$ où la notation $[x]$ signifie l'entier le plus voisin de x . On en déduit le tableau suivant qui donne pour les premières valeurs de n les valeurs critiques pour lesquelles sont les mêmes valeurs absolues de la différence entre la valeur optimale vraie $\log_2 2/\log$ et celles correspondant aux deux entiers n et $n+1$.

Ces valeurs sont les racines de l'équation $q^n + q^{n+1} = 1$

n

1		5		9	
	0.312		0.118		0.070
2		6		10	
	0.245		0.101		0.064
3		7		11	
	0.181		0.088		0.05^
4		8		12	
	0.143		0.079		
5		9			

On pourra comparer ce tableau aux résultats antérieurs et vérifier que l'écart est faible entre ces solutions approchées et les procédures optimales.

La deuxième observation consiste alors, si un résultat positif a été obtenu, à observer un lot B formé de n objets de telle sorte que

$$\Pr(B^+|A^+) = \frac{\Pr(B^+ A^+)}{\Pr(A^+)} \text{ soit le plus voisin possible de } 1/2.$$

Il faudrait donc trouver les valeurs critiques correspondantes aux solutions de

$$q^n + q^{n'} - q^{n+n'-m} = 1/2 (1-q^n) \text{ pour } n \text{ fixé par l'équation précédente.}$$

On aurait ensuite à choisir (si le résultat était encore positif) n'' objets nouveaux, m' objets appartenant au lot qui a servi à la première observation m''' appartenant au lot de la deuxième observation, m'''' appartenant à la fois aux deux et l'on serait ramené dès les premières observations à un problème pratiquement aussi compliqué que celui de la détermination des procédures rigoureusement optimales.

Nous restreindrons donc le champ des tactiques admissibles à ce que nous appellerons les "tactiques simples".

Par définition, une "tactique simple" sera une tactique dans laquelle seront considérés comme admissibles :

soit des observations portant sur un lot d'objets dont on ne connaît rien d'autre que leur probabilité a priori (objets "libres").

soit des observations portant sur un sous-ensemble d'un lot ayant déjà donné un résultat positif.

Ces deux conditions sont bien compatibles puisque si B est un sous-ensemble de A^+ et si on a obtenu successivement A^+ et B^+ , on ne sait rien de plus sur les objets de $A-B$ que si aucune observation n'avait été faite sur eux.

Par conséquent, toute position dans le domaine des tactiques simples est résumé par :

- 1° - l'ensemble des objets sur lesquels l'on ne sait rien.
- 2° - l'ensemble des objets que l'on sait être "neutres".
- 3° - une famille d'ensembles disjoints contenant chacun au moins un objet "marqué".

Nous n'insisterons pas sur les avantages pratiques de ces tactiques tels que la diminution du risque des erreurs que pourrait faire craindre l'emploi de schémas opératoires trop compliqués.

Nous sommes donc amenés à choisir m objets formant le lot B dans le lot initial A de n objets de telle sorte que :

$$\Pr (B^+ | A^+) = \frac{\Pr (B)}{\Pr (A^+)} = \frac{1 - q^m}{1 - p^n}$$

soit le plus voisin de $1/2$.

Par un développement en série, on obtient la valeur approchée $m = n/2 - \frac{pn^2}{8} + \dots$.

L'évaluation précise du coût de cette tactique est un problème combinatoire assez compliqué et nous nous bornerons à donner une limite supérieure d'ailleurs très satisfaisante.

Chaque observation élémentaire est d'autant moins bonne que les probabilités correspondantes s'éloignent plus de $1/2$; nous allons montrer que le pire cas est celui d'un lot de trois objets ayant donné un résultat positif et où les probabilités sont pourtant sûrement comprises entre $1/3$ et $2/3$.

En effet, un lot de n objets n'a donné un résultat que si on l'a testé et par conséquent que si p est inférieur à la valeur donnée par la table I.

Mais alors, pour $n = 2$, la probabilité conditionnelle que l'un de ces objets soit positif quand le lot a donné un résultat est évidemment plus grande que $1/2$ mais inférieure à

$$\frac{p}{1 - q^2} \leq 0,62 \leq 2/3.$$

Pour $n > 3$ le choix de $m = (n/2)$ objets assure déjà que la probabilité du résultat est de $\frac{1 - q^m}{1 - q^n} \leq 2/3$ et pour $n > 4$ cet écart maximum ne peut que décroître avec n .

Par conséquent, le gain moyen d'information par observation est donc toujours plus grand que :

$$\frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \log_2 2/3 = 0.9128 \dots$$

alors que le maximum théorique est 1.000.

Dès que le nombre N d'objets à diagnostiquer est suffisamment grand, il en résulte que l'on aurait en moyenne N observations en procédant objet par objet et au plus à peu près $1.085 \times N H_p$ en utilisant la tactique que l'on vient de décrire, résultat qui est bien voisin du minimum $N H_p$ qu'impose le théorème fondamental de la théorie de l'information.

Rappelons pour terminer que la procédure proposée par DORFMANN qui a le premier étudié les possibilités des méthodes de groupement, mais en se limitant aux problèmes de diagnostic, est ce que l'on pourrait appeler une procédure ultra simple.

En effet DORFMANN ne considère qu'une seule observation de groupe suivie, — si elle est positive — d'un diagnostic objet par objet.

Cette procédure ne réalise évidemment pas l'économie la plus grande possible mais peut présenter un intérêt certain dans la pratique quand les propriétés déterministes du modèle ne sont pas rigoureusement valables (en particulier si la liaison "neutre" entraîne négatif est de type stochastique).

UN CAS PARTICULIER DE MODÈLE A STRUCTURE PLUS COMPLEXE VÉRIFICATION D'UNE TABLE DE COVARIANCE

Toujours à titre d'exemple d'application des principes généraux, nous étudierons un cas pratique où l'ensemble E des ensembles admissibles est restreint par des considérations structurelles imposées à l'avance.

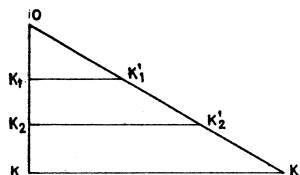
Soit x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k$) ; $j = 1, 2, \dots, n$) les k séries de n valeurs numériques dont on a calculé les $\begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix}$ covariances. Il est d'usage de vérifier l'ensemble des calculs (1) en formant la quantité $Z_j = \sum_i x_{ij}$ et en comparant les deux expressions $\text{Var } Z_j$ et $\sum_i \text{var } x_i + 2 \sum_{i < i'} \text{cov}(x_i, x_{i'})$ qui doivent être égales. On admet que le résultat "négatif" de cette observation, c'est-à-dire l'égalité des deux expressions garantit que tous les objets sont "neutres" (c'est-à-dire que chacun des covariances a été calculée exactement).

Voyons comment procéder pour retrouver le plus rapidement possible une erreur qui a été décelée par la méthode précédente.

(1) A moins que l'on ait employé des méthodes telles que celles de JOWETT, par exemple, qui donnent automatiquement une vérification des calculs. (Cf. J. Roy. Stat. Soc. (B) IX. (1949) p 89-90 et HAMMERSLEY (1952) Biometrics- (8) p. 156-168.

Naturellement il est difficile de chiffrer exactement le coût réel en temps des diverses opérations possibles. Nous ferons donc l'hypothèse très simple et assez rapprochée de la réalité que le coût est le même pour toute observation élémentaire consistant à comparer la variance de la somme d'un certain nombre de variables x_i obtenu par calcul direct à sa valeur déduite de la table des variances et covariances que l'on vérifie. D'autre part, il est souvent raisonnable de penser que la probabilité d'une erreur est assez faible pour que l'on puisse considérer comme négligeables les chances d'en rencontrer plusieurs dans le tableau.

Enfin, le problème ne se pose seulement que si k est grand (disons plusieurs dizaines comme cela se présente typiquement en psychométrie). La représentation graphique ci-jointe permet de rendre intuitifs les raisonnements.



Le triangle $O K K'$ symbolise la moitié inférieure gauche de la table des covariances et l'on fait correspondre les ordonnées aux indices k spécifiant la série des variables. Tout test basé sur le double calcul de la variance de la somme des k_i premières variables revient donc à savoir s'il y a ou non une erreur dans le triangle $O K_i K'_i$.

La procédure consiste donc d'abord à choisir successivement les valeurs de k_1, k_2, \dots etc et à effectuer les vérifications correspondantes.

Conformément au principe des tactiques d'ordre zéro, on commencera donc par vérifier les covariances entre les $k_1 \neq \frac{\sqrt{-2}}{2} k$ premières variables ce qui signifie que l'on choisit K tel que la probabilité d'avoir un résultat négatif soit la plus voisine de $1/2$.

Si le résultat est positif c'est qu'il y a sûrement une erreur parmi les covariances de ces variables et l'on est ramené au problème initial, mais avec k_1 variables seulement. Sinon on vérifierait les covariances entre les $k + k'' = k$ premières variables en prenant k'' de telle sorte que soit minimum la quantité :

$$\left(\begin{bmatrix} k_2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k' \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

qui détermine l'écart entre les probabilités de cette nouvelle observation et la valeur optimale $1/2$. Si ce nouveau résultat était encore négatif on choisirait une nouvelle valeur k''' à l'aide d'une équation analogue et il en serait de même si le résultat était encore positif.

LES MÉTHODES DE GROUPAGE

99

Après une suite de semblables observations, l'erreur se trouve localisée parmi les covariances entre une certaine variable x_i et les x'_i ($i \leq i'$) et il est alors probablement préférable de la rechercher directement.

A titre d'exemple de l'efficacité d'une telle procédure, on peut calculer que s'il n'y a effectivement qu'une seule erreur parmi les 45 covariances calculées entre dix variables, celle-ci peut être localisée en moyenne en 9,0 observations élémentaires seulement.

IV. - PROBLÈMES DE TRI

GÉNÉRALITÉS

Il est intéressant d'envisager les problèmes de tri en relation avec des probabilités d'absorption ; considérons en effet un observateur dont la situation sur le treillis des positions T se modifie en fonction du résultat de ses observations. Dans le cas des problèmes de diagnostic, T était fini et le processus se terminait quand l'observateur était parvenu à une position D . Dans les problèmes de tri, au contraire, T est supposé avoir un nombre infini de générateurs et le processus ne s'arrête que quand il atteint une position caractérisée par le fait que l'état de N^- objets est neutre et celui de N^+ autres marqué.

Il nous faudrait donc trouver une procédure telle que la somme infinie ; $\sum \text{Pr}(\alpha_i) L(\alpha_i)$ soit minimum et nous indiquerons des méthodes pour obtenir des solutions approchées dans le cas où l'un des deux nombres N^- ou N^+ est nul, c'est-à-dire où l'on se propose seulement de trier des objets neutres ou des objets marqués. Nous ferons en outre l'hypothèse que toutes les probabilités élémentaires sont égales.

TRI D'OBJETS NEUTRES

Remarquons d'abord que si une nouvelle observation élémentaire a donné un résultat positif, il faut évidemment laisser de côté les objets sur lesquels elle a porté puisque toute nouvelle observation comprenant l'un d'eux aurait plus de chance d'être positive que s'il n'y figurait que des objets libres.

Une procédure optimale consistera donc à faire des observations $X_i^{(n-1)}$ sur des lots de n_1 objets libres jusqu'à l'obtention d'un résultat négatif ; puis à recommencer sur des lots $X_i^{(n_2)}$ de n_2 puis sur des lots de $n_3 \dots n_k$; les nombres $n_1, n_2, n_3 \dots n_k$ ayant pour somme N .

A chaque fois il s'agira donc d'une distribution binomiale négative (distribution de PASCAL) avec le paramètre $(1-p)^{n_i}$. Le nombre moyen d'observations élémentaires sera :

$$L = \sum_{i=1}^k \left(\text{Pr}(X^{n_i}) \right)^{-1} = \sum_{i=1}^k (1-p)^{-n_i}.$$

Pour minimiser cette expression on observera d'abord si le nombre k est déjà fixé, la plus petite valeur de la somme correspond à :

$$r (1-p)^{-n_0} + r' (1-p)^{-n_0-1}$$

où n_0 est le plus grand entier contenu dans k , r' est le résidu de N , modulo k et enfin, $r = (N-r')k$ puisque l'on a toujours :

$$\frac{1}{(1-p)^{n_0-v}} + \frac{1}{(1-p)^{n_0+v}} \geq \frac{2}{(1-p)^{n_0}}$$

Pour déterminer maintenant l'ordre de grandeur de n_0 , nous supposons r' négligeable par rapport à k . On a alors :

$$L \approx \frac{N}{n_0} (1-p)^{-n_0} \text{ qui est minimum pour } n_0 \approx -1/\log(1-p)$$

On obtient ainsi pour p petit et N très grand, la valeur :

$L \approx N e^{-1} \log(1/(1-p))$ (où e désigne la base des logarithmes naturels) du nombre moyen d'observations élémentaires nécessitées par la procédure optimale.

TRI D'OBJETS MARQUÉS

Nos connaissances sur ce sujet sont beaucoup moins avancées et nous nous restreindrons au cas où l'on veut trier un seul objet marqué et ceci en employant exclusivement des procédures simples (c'est-à-dire qui ne comportent que des observations élémentaires X_i ordonnées par inclusion).

Il est vraisemblable que les procédures auxquelles nous aboutirons sont rigoureusement optimales, mais nous ne possédons pas encore la démonstration de cette hypothèse.

$L'(n)$ représentera le nombre moyen d'observations à effectuer quand on sait déjà que $X^{(n)+}$ où $X^{(n)}$ est un ensemble de puissance n .

Dans les hypothèses où nous nous plaçons, on effectuera donc d'abord des observations sur des $X_i^{(n_0)}$ jusqu'à obtention d'un résultat positif, puis à ce moment on recherchera un objet marqué dans le dernier ensemble ainsi observé.

On a donc :

$$L(n) = (\Pr(X^{(n_0)+})^{-1} + L'(n_0) = 1/(1-q^{n_0}) + L'(n_0)$$

en particulier (Cf. plus bas) :

$$L(1) = p^{-1}$$

$$L(2) = \frac{2 - q^2}{1 - q^2}$$

$$L(3) = \frac{2 + q - 2q^3}{1 - q^3}$$

$$L(4) = \frac{2 + q + q^2 + 3q^4}{1 - q^4}$$

ou suivant la nature de la seconde observation : $\frac{3 - 2q^4}{1 - q^4}$

Le problème se trouve maintenant reporté sur le calcul de $L'(n)$ pour une valeur donnée de q .

La règle suivante permet d'abréger les calculs :

Si X_n^+ et si $n' < N/2$, alors l'observation d'un sous-ensemble $Y=Y^{(n')}$ de X_n est plus efficace que celle de l'ensemble complémentaire $Z=Y^{(n-n')}$.

On a en effet (puisque nous nous limitons aux procédures simples) :

Si on effectue Y :

$$L''(n) = 1 + \Pr(Y^-|X^+) \times L'(n-n') + \Pr(Y^+|X^+) \times L'(n')$$

Si on effectue Z :

$$L'''(n) = 1 + \Pr(Z^-|X^+) \times L'(n') + \Pr(Z^+|X^+) \times L'(n-n')$$

soit encore :

$$\Pr(X^+) \times (L''(n) - L'''(n)) = L'(n') \times \Pr(Y^+) \times (1 - \Pr(Z^-)) - \Pr(Z^+) \times (1 - \Pr(Y)) L'(n-n').$$

d'où le résultat puis $n' \leq n-n'$ entraîne évidemment :

$$L(n') \leq L(n-n')$$

Pour les premières valeurs de n on trouve alors les fonctions suivantes :

$$L(n) = 3p(1+2q+2q^2)(1-q^3)^{-1} \quad (\text{Procédure : a, (b) Cf. notation du chapitre précédent}).$$

$n = 4$: si $q \geq 0.7549$, (racine de $x^3 + x^2 - 1 = 0$)

Procédure ab, (c), a.

$$L = p(2 + 2q + 2q^2 + 2q^3)(1 - q^4)^{-1}$$

si $q \leq 0.7549$...

Procédure a, (b), (c)

$$p(1 + 2q + 2q^3 + 3q^2 + 3q^3)(1 - q^4)^{-1}$$

$n = 5$: si $q \geq 0.6823$.. (racine de $x^4 + x^3 + x^2 - 1 = 0$)

Procédure ab, (c, d), a

$$p(2 + 2q + 2q^2 + 3q^3 + 2q^4)(1 - q^5)^{-1}$$

si $q \leq 0.6823$...

Procédure a,(b,c,d).

$$p (1 + 2 q + 3 q^2 + 4 q^3 + q^4) (1-q^5)^{-1}$$

Ce calcul devient rapidement inextricable quand n croît et nous nous bornerons aux indications suivantes :

si $p > \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,382 \dots$: trier objet par objet.

si $x_0 = 0,2451 \leq p \leq 0,382$: examiner des lots de 2 jusqu'à un résultat positif.

si $x_1 = 0,1809 \leq p \leq x_0$: examiner des lots de 3 jusqu'à un résultat positif.

$(1 - x_0)$ et $(1 - x_1)$ sont respectivement les racines de

$$x^3 + x^2 = 1 \text{ et de } x^4 + x^3 = 1).$$

La situation est donc très semblable à celle où nous nous sommes trouvés dans l'étude des problèmes de diagnostic et nous sommes conduits à faire appel à des méthodes d'approximation.

POSSIBILITÉ D'EMPLOI D'UNE INFORMATION

A - Cas des objets neutres.

Nous avons vu dans la première partie que l'information H_0 attachée à l'opérateur $[q d / d q]_q$ olivrait le nombre moyen de fois où l'évènement de probabilité q était réalisé. L'information $H_0(X)$ associée à l'observation X nous donne donc exactement ce que nous cherchons puisque, comme on l'a vu, il est impossible dans notre modèle d'apprendre qu'il existe un objet à l'état neutre sans l'identifier du même coup.

On vérifie facilement que $H_0(X)$ est maximum quand les n objets de X sont libres, enfin n est déterminé par la condition que $H_0(X) = q^n \times n + (1 - q^n) \times 0 = n q^n$ soit maximum.

Ceci redonne bien la règle: $n_0 = -1/\log q$ et la même limite inférieure asymptotique du nombre des observations.

B - Cas des objets marqués.

Considérons maintenant ce que donnerait l'usage de l'information H_1 associée à $[p d / d p]_p$ dans le cas des objets marqués.

Tout d'abord $H_1(X)$ pourrait être nul alors que manifestement un pas a été fait vers la solution : par exemple si on sait déjà que $(ab)^+$ l'observation de a termine la procédure.

Pourtant ;

$$H_1(a | ab) = p(1-q^2)^{-1} \left(\frac{pd}{dp} \log \frac{p}{1-q^2} \right)_{p=0} + p(1-p)(1-q^2)^{-1} \left(\frac{pd}{dp} \log \frac{pq}{1-q^2} \right)_{p=0}$$

est nul puisque l'on savait déjà que UN ob-

jet au moins était marqué et que l'observation de a n'a pas changé ce minimum.

Inversement H_1 peut être assez grande bien que l'utilité de l'observation soit fort restreinte du point de vue du tri. Par exemple si l'on sait déjà que :

$(abcd)^+$, $(abef)^+$, $(abgh)^+$ à l'observation $(c \ e \ g)$ correspond un gain d'information non nul puisque $(ceg)^+$ entraînerait qu'au moins DEUX objets au lieu d'UN seul soient marqués.

La raison de cette insuffisance est évidemment due au fait que — contrairement à ce qui se passe pour l'état neutre — l'identification d'un objet marqué n'est pas équivalente à la preuve de son existence.

Nous nous limiterons donc, comme nous l'avons déjà fait plus haut, aux procédures simples et nous supposons que nous savons déjà que l'ensemble Y_n^+ de puissance n contient un objet marqué. Le gain d'information H_1 associée à $[]_{p=0}$ aura alors une valeur finie pour toute observation d'un sous-ensemble X_n de puissance m de Y . En effet

$$H_1(X_m | Y_n^+) = \Pr(X_m^+ | Y_n^+) \log m - \Pr(X_m^- | Y_n^+) \log (n-m) + \log n$$

parce que d'une part Y_n^+ entraîne seulement qu'un seul objet soit marqué et ceci peut être de n manières différentes et, d'autre part, après l'observation de X_m ce nombre de possibilités est restreint à m ou $n-m$.

Ce résultat est d'ailleurs intuitif puisque, à la constante $1/\log 2$ près, $\log n$ donne le nombre moyen d'observations nécessaires pour achever le diagnostic.

Montrons qu'ici encore il vaut mieux si $m < n/2$ observer X_m que l'ensemble complémentaire X_{n-m} . On a en effet à comparer :

$$(1-q^m) \log m + (q^m - q^n) \log_2 (n-m)$$

avec :

$$(1-q^{n-m}) \log_2 (n-m) + (q^{n-m} - q^n) \log_2 m$$

qui est certainement plus grand en vertu des inégalités :

$$\log m \leq \log (n-m) \text{ et } (q^{n-m} - q^n) = q^{n-m}(1-q^m) \leq 1 - q^m$$

Théoriquement il faudrait résoudre en m l'équation : $[H_1] = \text{maximum}$. Dans la pratique il semble suffisant de considérer le problème comme un problème de diagnostic et de procéder comme il a été indiqué dans le chapitre précédent une fois que l'ensemble initial positif Y_{n_0} a été obtenu. Le coût total en moyenne de la procédure est alors :

$$L = 1/\Pr(Y_{n_0}^+) + \log_2 n_0$$

ce qui conduit, pour p petit, à déterminer n_0 par l'équation : $\frac{dL}{dn} = 0$ c'est-à-dire à choisir n_0 de telle sorte que $Q = q^{n_0}$ satisfasse à :

$$\frac{\text{Log } Q}{(1-Q)^2} + \frac{1}{\text{Log } 2} = 0 \text{ c'est-à-dire encore à prendre ;}$$

$$n_0 = \frac{1.71006}{\text{Log}_{10} q} \dots \text{ puisque } Q = 0.51293...$$

Nous pouvons donc considérer comme pratiquement résolus les deux problèmes de tri que nous nous étions posés. Il faut cependant remarquer que dans le second cas, la question du choix de la valeur n_0 qui caractérise les premières observations Y ne peut être résolue autrement que par un recours à un raisonnement extérieur au type d'information employé. C'est là une déficience de l'information H' que nous avons du utiliser puisqu'elle ne s'applique qu'à partir du moment où l'on a obtenu un résultat positif. A son tour ceci résulte du caractère assez grossier de l'opérateur associé à l'information. Il est certain que si l'on voulait résoudre des problèmes de tri moins élémentaires, il faudrait recourir à des considérations plus profondes sur les zéros des polynômes $P(p)$ car c'est d'eux que dépend en définitive toute information de ce type. Des calculs encore fragmentaires semblent indiquer que des règles simples pourraient gouverner la distribution de ces valeurs suivant la position α . Il y a là un domaine de recherches intéressant en lui même du point de vue algébrique, mais aussi extrêmement prometteur par les possibilités qu'il offre de mieux comprendre la signification et le rôle des opérateurs linéaires définissant les informations.

V. - PROBLÈMES DE TEST D'HYPOTHÈSE

TEST DE L'HYPOTHÈSE $q_1 \leq q \leq q_0$

Nous nous limiterons au cas très particulier où la fréquence q des objets neutres dans une population infinie étant inconnue on se propose de choisir entre les deux hypothèses.

H_0 : q est supérieur à une certaine valeur donnée q_0 .

H_1 : q est inférieur à une certaine valeur donnée $q_1 < q_0$.

Si l'on se fixe en outre les probabilités maximales α et β d'accepter H_0 quand $q = q_1$ et d'accepter H_1 quand inversement $q = q_0$, on sait qu'une procédure optimale consiste à utiliser le test séquentiel de WALD; mais ici de nouvelles possibilités sont ouvertes à cette méthode du fait que l'on peut remplacer l'observation élémentaire (x) ; l'objet x pris au hasard est-il ou non marqué ? par l'observation d'un événement α dont la probabilité est une fonction $P(q)$ et l'on peut se demander s'il n'est pas possible d'abrégier ainsi le nombre moyen des observations nécessitées par le test.

Comme on l'a vu dans la première partie, le nombre moyen d'observations indépendantes de α est de la forme :

$$\frac{K}{W(0)} \text{ (si } q = q_0) \text{ et } \frac{K'}{W(1)} \text{ si } q = q_1 \text{ où } K \text{ et } K' \text{ ne dépendent que}$$

de α et β et où W est "l'information de WALD", attachée à \mathcal{A} c'est-à-dire :

$$W(i) = P(q_i) \log \frac{P(q_i)}{P(q_j)} + (1-P(q_i)) \log \frac{1-P(q_i)}{1-P(q_j)}$$

Il semble difficile de discuter directement W d'autant d'ailleurs qu'il faudrait considérer à la fois $W(0)$ et $W(1)$.

En nous basant sur les inégalités obtenues dans la deuxième partie nous remplacerons ce problème par celui de rendre maximum $P(q_i) - P(q_j)$.

Supposons donc qu'un certain nombre d'observations élémentaires résumées dans le mot \mathcal{A}^+ aient été effectuées et comparons la différence :

$\Pr(X^+|\mathcal{A}^+)_{q=q_0} - \Pr(X^-|\mathcal{A}^+)_{q=q_1}$ où X est une observation de n objets pouvant appartenir au mot \mathcal{A} à la différence $[\Pr(X^-)_{q=q_0} - \Pr(X^-)_{q=q_1}]$ relative au cas où les n objets sont libres.

On a $\Pr(X^-|\mathcal{A}^+) = q^n Q R^{-1}$ où Q et R sont les polynômes en q définis par $R = \Pr(\mathcal{A}^+)$ et $Q = \Pr(\beta^+)$ avec $\beta^+ X^+ = \mathcal{A}^+ X^+$; d'après ce qui a été vu dans le deuxième chapitre on a $Q \leq R$ et la deuxième différence ci-dessus est plus grande que la première quand :

$$q^{n_0} - q^{n_1} \geq q^{n_0} \frac{Q(q_0)}{R(q_0)} - q^{n_1} \frac{Q(q_1)}{R(q_1)}$$

Une condition suffisante pour que cette inégalité soit satisfait est donc que $q^n (1 - Q(q)/R(q))$ soit fonction croissante de q ou encore que l'on ait identiquement :

$$\frac{d}{dq} \frac{Q(q)}{R(q)} \leq 0.$$

Dans ce cas (dont nous étudierons la signification au chapitre suivant), il est préférable d'observer n objets libres que les n objets de \mathcal{A} .

En particulier si \mathcal{A}^+ était simplement l'observation Y^+ d'un lot de m objets, il y aurait avantage à choisir un X disjoint de Y .

Nous sommes ainsi conduits à définir notre tactique optimale d'ordre zéro comme consistant à remplacer grâce au groupage, le test de $(q \geq q_0 \text{ ou } q \leq q_1)$ par celui de $(q' \geq q_0^{n_0} \text{ ou } q' \leq q_1^{n_0})$ avec n_0 tel que $W(i)$ soit maximum et à procéder ensuite comme dans un problème ordinaire d'analyse séquentielle.

En ce qui concerne la détermination de n_0 nous n'avons obtenu aucun résultat simple; il sera donc recommandé de chercher d'abord la valeur n_1 de n telle que $q_0^{n_1} - q_1^{n_1}$ soit maximum puis par tâtonnement de rendre les plus grandes possibles $W(0)$ et $W(1)$. Le tableau (page 107) donnant pour des valeurs typiques de q_0 et de q_1 la valeur qui rend maximum la différence $q_0^n - q_1^n$ permet de faciliter ces calculs. On remarquera que la méthode a un domaine d'application très large puisqu'il n'est pas préférable de faire les observations objet par objet que si $q_0 + q_1$

est plus petit que l'unité. Enfin, on pourra noter que si certaines conditions matérielles rendent aisée l'observation des mots symétriques auxquels il a été fait allusion à la fin du chapitre III, ceux-ci fournissent une transformation $q \rightarrow P(q)$ particulièrement efficace pour le test de $q \leq m/n$.

TEST DE L'HYPOTHÈSE: q_1 PLUS PETIT OU PLUS GRAND QUE q_2

Le problème, ici, est de savoir si la fréquence des objets neutres dans deux populations infinies E_1 et E_2 , est la même ou non. Nous supposons que l'on a décidé d'employer la méthode de A. WALD qui consiste, après avoir effectué un tirage aléatoire dans E_1 et dans E_2 , à observer selon laquelle des quatre modalités suivantes s'est réalisé un certain événement α construit à partir de ces objets.

α_1^+ et α_2^+ ou bien α_1^- et α_2^- c'est-à-dire α réalisé ou non à la fois dans les deux populations.

α_1^+ et α_2^- ou bien α_1^- et α_2^+ c'est-à-dire α réalisé seulement dans l'une des populations.

Pr (α^+) étant une fonction croissante de $p = 1 - q$, la comparaison du nombre des cas où α_1^+ et α_2^+ à ceux où α_1^- et α_2^+ donne un test commode et d'une efficacité très suffisante de l'hypothèse $q_1 = q_2$.

Nous devrions donc considérer comme précédemment quels sont les mots qui rendent une semblable procédure la moins coûteuse en observations élémentaires. De fait, il ne peut en être ainsi, tout au moins dans le cas général, car le test basé sur α est un test de nature chaque fois différente selon le choix de ce mot. En effet, si l'on prend le cas considéré par WALD où α est un seul objet x , ce que l'on testera c'est la présence du point (q_1, q_2) à l'intérieur du domaine où est satisfaite l'inégalité :

$$u_0 \leq \frac{(q_1 (1 - q_2))}{q_2 (1 - q_1)} \leq u, \text{ domaine qui n'est en aucune manière équiva-}$$

lent, même si l'on aboutit aux mêmes probabilités d'erreur de première et deuxième espèce, au domaine :

$$u'_0 \leq \frac{q_1^n (1 - q_2^n)}{q_2^n (1 - q_1^n)} \leq u'_1 \text{ correspond à un test où } \alpha \text{ est une observa-}$$

tion élémentaire sur un lot de n éléments. On pourrait arguer qu'il en était de même dans le chapitre précédent et que là aussi les "operating curves" étaient modifiées par l'utilisation du groupage. Mais du moins conservait-on ce qui paraissait l'essentiel du test à savoir des valeurs données des probabilités d'erreur α et β quand l'une des deux hypothèses H_0 ou H_1 était vraie alors que rien de semblable n'existe dans le cas présent.

Nous nous placerons donc à un point de vue en quelque sorte préliminaire et nous indiquerons seulement les améliorations manifestes que peut produire le remplacement de q par q^n .

Soit donc q_1, q_2 et soit λ le rapport $\frac{q_1^n (1-q_2^n)}{q_2^n (1-q_1^n)}$; λ est toujours

plus petit que l'unité et nous pouvons admettre que l'on aura avantage à remplacer n par n' au moins quand les deux conditions suivantes sont remplies :

1° - $\lambda_n \geq \lambda_{n'}$, puisque dans ce cas les probabilités $\Pr(A_1^+ A_2^- | A_1^- A_2^+)$ et $\Pr(A_1^- A_2^+ | A_1^+ A_2^-)$ seront plus éloignées de $1/2$.

2° - La probabilité P que $(A_1^+ A_2^+)$ ou que $(A_1^- A_2^-)$ n'aura pas augmenté.

Les résultats suivants facilitent la détermination de la valeur optimale de n quand on a déjà choisi le type "d'operating curve" que l'on désire réaliser.

1° - λ est une fonction décroissante de n

En effet l'inégalité $\lambda n \geq \lambda h + 1$ se ramène après quelques transformations simples à l'inégalité classique :

$$\frac{1-x_2}{1-x_1} \leq \frac{1-x_2^m}{1-x_1^m}$$

2° - Si $q_1 = q_2 = q$ la valeur minimum de P correspond à n tel que $q^n = 1/2$ ce qui est immédiat par calcul direct/

VALEURS OPTIMALES DE n

pour certaines valeurs courantes de q_0 et q_1

Valeurs de q_1 en pourcentage	Valeurs de q_0 en pourcentage									
	50	55	60	65	70	75	80	85	90	
55	2									
60	2	2								
65	2	2	2							
70	2	2	2	3						
75	2	2	3	3	3					
80	2	3	3	3	3	5				
85	3	3	3	4	4	5	5			
90	3	4	4	4	5	6	6	8		
95	4	5	5	6	6	7	9	11	14	

VI. - PROBLÈMES D'ESTIMATION

FRÉQUENCE DES OBJETS MARQUÉS DANS UNE POPULATION INFINIE

Les problèmes d'estimation au sens classique de la statistique mathématique offrent un large domaine aux méthodes de groupage que nous préconisons. Nous nous bornerons à traiter ici deux exemples typiques. Faisons d'abord observer que l'usage de l'information de FISHER est à peu près indispensable dans ce chapitre, car le calcul de la variance exacte d'une estimation est presque toujours extrêmement laborieux. Nous considérerons donc que le but à atteindre par une procédure quelconque est de choisir les observations successives de telle sorte qu'après N d'entre elles la limite supérieure de la variance de la valeur estimée du paramètre soit le plus faible possible. Il est classique que cette limite supérieure soit atteinte asymptotiquement quand N tend vers l'infini.

Dans ce premier chapitre, nous traiterons le cas où le paramètre inconnu $p = 1 - q$ est la fréquence des objets marqués dans une population infinie et où toutes les observations élémentaires sont possibles a priori.

Supposons que nous ayons déjà effectué un certain nombre d'observations résumées par l'ensemble des deux mots $\mathcal{A}^+ \mathcal{A}^-$.

Evidemment nous devons laisser de côté les objets qui figurent dans \mathcal{A}^- puisque leur état est connu. Considérons maintenant un lot X de m objets dont certains peuvent figurer dans \mathcal{A}^+ . La quantité d'information attachée à l'observation de X dépend des probabilités : $\Pr (X^+ | \mathcal{A}^+)$ et $\Pr (X^- | \mathcal{A}^+)$ qui sont respectivement :

$$\Pr \frac{(X^+ | \mathcal{A}^+)}{\Pr (\mathcal{A}^+)} \text{ et } \frac{\Pr (\mathcal{A}^- | \mathcal{A}^+)}{\Pr (\mathcal{A}^+)}$$

Nous écrirons $\Pr (\mathcal{A}^+) = P$. Comme nous l'avons vu dans le second chapitre, l'évènement $X^- \mathcal{A}^+$ est résumé par X^- et un autre mot \mathcal{B}^+ qui se déduit de \mathcal{A}^+ par suppression pure et simple des objets de \mathcal{A}^+ qui appartiennent à X . On a donc $\Pr (X^- \mathcal{A}^+) = q^m Q$ en posant $Q = \Pr (\mathcal{B}^+)$ et, par définition même, comme \mathcal{B}^+ entraîne \mathcal{A}^+ on a $Q \leq P$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si \mathcal{A}^+ et X n'ont aucun objet en commun.

Dans ces conditions, l'information attachée à l'observation de X est :

$$\left(P \frac{d}{dq} (q^m Q) - q^m Q \frac{d}{dq} P \right)^2 P^{-2} Q^{-1} (P - q^m Q)^{-1} q^{-m}$$

et peut se mettre sous la forme :

$$q^{m-2} \left[m + q \frac{P}{Q} \times \frac{d}{dq} \frac{Q}{P} \right]^2 \left[\frac{P}{Q} - q^m \right]^{-1}$$

qui se réduit à : $\boxed{q^{m-2} m^2 (1 - q^m)^{-1}}$

quand \mathcal{A}^+ et Q sont disjoints.

Comme $\frac{P}{Q}$ est plus grand que 1, il ressort de cette formule que l'information apportée par ces n objets est sûrement plus petite que l'information apportée par n objets libres (c'est-à-dire ne figurant pas dans \mathcal{A}).

Nous allons donner quelques cas où cette condition est remplie :

1° - Soit $\mathcal{A}^+ = C^+$ consistant en un lot de n objets dont on sait qu'il contient au moins un objet "marqué", soit m le nombre d'objets de C^+ qui appartiennent aussi à A ; on a : $P = 1 - q^n$; $Q = 1 - q^{n-m}$

$$\frac{d}{dq} \frac{P}{Q} = Q^{-2} q^{n-m-1} (n-m-nq^m + mq^n) \gg 0$$

d'après l'inégalité classique ; $n > m$ entraîne $\frac{1-x^n}{1-x^m} \leq n/m$

En particulier si $m = n$ c'est-à-dire si, sachant que C^+ , on effectue l'observation d'un lot d'objets pris parmi ceux-ci l'information apportée est sûrement inférieure à $(1-q^{n-m})$ fois l'information que procureraient ces objets si l'on ne savait pas à l'avance qu'ils font partie d'un lot ayant donné déjà un résultat positif.

2° - Soit q très voisin de 1. D'après la deuxième méthode indiquée au chapitre II, on peut écrire :

$P = p^r (a_1 + a_2 p + \dots)$ et $Q = p^{r'} (b_1 + b_2 p + \dots)$ où r (respectivement r') est le nombre minimum d'objets qui doivent être marqués pour que l'on puisse avoir \mathcal{A}^+ (respectivement \mathcal{B}^+) et où a_1 (respectivement b_1) est le nombre de systèmes différents de r (respectivement r') objets marqués qui permettent \mathcal{A}^+ (respectivement \mathcal{B}^+). Puisque \mathcal{B}^+ se déduit de \mathcal{A}^+ par suppression de certains objets, on a certainement, soit $r < r'$, soit $r = r'$ et $a_1 > b_1$.

Dans le premier cas on a donc au moins pour p tendant vers zéro : $\frac{d}{dq} \frac{P}{Q} \gg 0$. Par conséquent, l'observation de X apporte à la limite moins d'information que l'observation de n objets libres quand X^- et \mathcal{A}^+ entraîne l'existence de plus d'objets marqués que n'entraîne \mathcal{A}^+ seulement ce qui est un résultat assez surprenant a priori.

A titre de contre exemple, nous citerons enfin le cas de

$\mathcal{A}^+ = (a \ b)^+ (b \ c)^+$; $X = a$; $B = b$ et où $\frac{d}{dq} \frac{P}{Q} = 1 - 2q$ n'est donc pas entièrement positif.

On a d'ailleurs ici pour valeur de l'information :

$(1+q^2)^2 q^{-1} (1-q^2)^{-1} (1+q-q^2)^{-1}$ et le rapport de cette quantité à $1/qp$ qui est la valeur classique de l'information apportée par l'observation d'un seul objet libre, tend vers 2 quand q tend vers 1 ce qui montre que les résultats précédents ne pourraient

pas être étendus sans précaution à toutes les positions possibles.

La tactique optimale : D'après ce que l'on vient de voir, quels que soient les nombres n et m la deuxième observation que l'on a à effectuer après avoir obtenu un résultat positif sur un lot de n objets n'apporte jamais tant d'information que quand elle porte sur m objets tous distincts des précédents.

Il sera donc conforme aux principes des tactiques optimales d'ordre zéro que de choisir un nombre n tel que l'observation de n_0 éléments soit la meilleure possible et de répéter cette observation autant de fois qu'il sera nécessaire sur des objets toujours nouveaux pour obtenir la précision voulue.

Les tableaux I et II donnent les valeurs n_0 pour un certain nombre de valeurs de q .

Pour p voisin de zéro, il est intuitif que n_0 doit être grand. En dérivant par rapport à n l'expression

$$q^{n-2} n^2 (1-q)^{n-1}$$

on vérifie que, pour q donné, la courbe représentant la quantité d'information en fonction de n a bien un seul maximum et que celui-ci correspond à n tel que $q^{n_0} = Q_0$; où Q_0 est la racine unique entre zéro et un de l'équation :

$$1 - Q + 1/2 \log Q = 0$$

Ce résultat conduit à la règle pratique suivante :

n doit être tel que la probabilité d'une observation négative soit la plus voisine possible de $1/5$

En effet, le calcul donne $Q_0 = 0.2031882...$

($\log_{10} Q_0 = 1.3078985...$) et il est assez curieux tout à la fois que cette valeur soit si éloignée de la valeur $1/2$ qui apparaissait dans tous les problèmes de diagnostic et si près d'une autre valeur simple $1/5$. Il est à noter que cette règle fournit un moyen pratique de s'approcher de n optimal même si initialement on ignorait la valeur de q avec une approximation suffisante et si l'on ne voulait pas effectuer une estimation intermédiaire.

La tactique que nous proposons revient donc à remplacer l'estimation directe de q par celle de q^{n_0} puis à en déduire q . L'équation au maximum de vraisemblance donne la formule très simple $\hat{q} = (N^-/N)^{1/n_0}$ où N^- est le nombre de lots observés et N le nombre de ceux d'entre eux qui ont donné un résultat négatif.

Malgré l'importance de la réduction de variance qui résulte d'un groupage optimal quand p est petit (elle s'exprime par un coefficient de l'ordre de $1.54 (p-p^3/12)$) il est nécessaire de souligner que l'emploi de cette méthode reste probablement limitée au cas où l'on envisage d'effectuer un nombre N d'observations assez élevé en raison des distorsions qu'inflige l'opération "racine n -ième" à la distribution de la valeur estimée.

Pour N modérément grand, il est préférable de ne pas négliger le fait que \hat{q} présente une erreur systématique. [r étant la fréquence des résultats positifs dans les N observations nous développons en puissance de r la valeur estimée $\hat{q} = (1-r)^{1/n_0}$.

LES MÉTHODES DE GROUPE

III

D'autre part, les expressions classiques des moments autour de zéro d'une variable binomiale donnent :

$$\text{valeur moyenne de } r^k = -(1-q^{n_0})^k + \frac{k}{2} \frac{q^{n_0}(1-q^{n_0})^{k-1}}{N} + \dots$$

en négligeant les termes dont l'ordre en N est inférieur à moins un.

Il s'en déduit que, toujours avec la même approximation, la valeur moyenne de \hat{q} est donnée par :

$$q + \frac{n_0^2(n_0-1)}{2N} q^{1-n_0}(1-q^{n_0}) + \dots \quad \text{soit à peu près}$$

$q \left(1 + \frac{2}{n_0} \frac{1}{N}\right)$ ce qui permet de corriger la partie principale de l'erreur systématique.

Signalons enfin, pour terminer, que — toujours pour p petit — la seule connaissance du fait qu'un lot de n objets contient au moins un objet "marqué" apporte environ $1/3$ (exactement $(1+p/2)0.3288\dots$) de toute l'information relative au paramètre contenu dans ce lot.

UN PROBLÈME DE GÉNÉTIQUE MENDELIIENNE

Nous rappellerons sommairement qu'un individu peut — relativement à une paire d'allèles a/A — présenter l'un des trois génotypes ($a a$), ($a A$), ou ($A A$), les deux derniers étant indistinguables en raison du caractère "marqué" de l'allèle dominant. Donc quand nous dirons qu'un individu est phénotypiquement dominant nous employerons seulement une locution équivalente à "l'observation de ($x x$) donne un résultat positif "en raison de la correspondance

allèle dominant \longleftrightarrow objet "marqué"

allèle récessif \longleftrightarrow objet "neutre"

Nous étudierons ici un problème d'estimation de la fréquence p d'un allèle dominant dans une population monogame, isogamique panmixique et en équilibre génétique (c'est-à-dire telle que les fréquences respectives des trois génotypes ($a a$) ($a A$) ($A A$) soient respectivement q^2 , $2 p q$, p^2) quand l'échantillon prélevé contient à la fois des individus indépendants que nous appellerons "parents" et d'autres individus que nous appellerons "descendants" et qui résultent du croisement des précédents.

En effet, d'après la génétique mendélienne, les descendants d'un croisement ($x x'$) \times ($y y'$) où $x x' y y'$ symbolisent quatre allèles quelconques ont, indépendamment et avec des probabilités égales a priori, l'un des quatre génotypes ($x y$), ($x' y$), ($x y'$) ou ($x' y'$).

Par conséquent, si parmi les descendants d'un individu phénotypiquement dominant on observe un individu récessif on peut en conclure que ce parent était hétérozygote (c'est-à-dire ($a A$) et non homozygote ($A A$)).

Le problème que nous traiterons sommairement sera celui de l'efficacité relative de la détermination du phénotype soit d'un parent, soit d'un descendant pour l'estimation de la valeur de q dans la population où a été prélevé l'échantillon, en supposant qu'on a déjà examiné un nombre assez grand de parents pour qu'il soit toujours possible de choisir des descendants de parents dont le phénotype est connu. Pour cela, nous calculerons les quantités d'information I_x attachée à la détermination de divers phénotypes/

1° - PARENTS ; Les formules du chapitre précédent (cas de deux objets libres) redonnent le résultat classique $I = 4(1-q)$

2° - DESCENDANTS d'un croisement (récessif x récessif). L'information est nulle puisque le descendant a, nécessairement, lui aussi, le phénotype récessif.

3° - DESCENDANTS d'un croisement (récessif x dominant). Ici nous devons introduire une notion supplémentaire ; étant donné un couple (récessif x dominant) le fait qu'un seul de leurs descendants soit récessif permet de conclure que le parent dominant était hétérozygote et à partir de ce moment l'observation des autres descendants n'apporte rien. Nous précisons donc en ajoutant ; "quand" m descendants déjà examinés avaient montré un phénotype dominant.

On a alors ;

Probabilité a priori pour que le parent soit hétérozygote et qu'il ait m descendants dominant puis un récessif $2^{-m}pq$.

Probabilité a priori pour que les $m+1$ descendants soient dominants ; $p^2 + 2^{-m}pq$.

$$\text{D'où } I_{rm} = 2^{-m}q^{-1}(1-q-q^2)^{-1}(1-q+q^2)^{-2}$$

4° - DESCENDANTS d'un croisement (dominant x dominant). Des remarques analogues doivent être faites puisque le croisement ne donnera un individu récessif que si les deux parents sont hétérozygotes et dans ce cas la probabilité sera égale à $1/4$. Les probabilités résultantes sont ; $(3/4)^m p^2 q^2$.

Et $4 p^2 q^2 (3/4)^m + 4 q p^3 + p^4$ d'où enfin ;

$$I_{rm} = 4(3/4)^m (1+q)^2 (1+2q-3q^2+q^2(3/4)^m)^{-1}(1+2q-3q^2+q^2(3/4)^m)^{-2}$$

5° - Nous calculerons finalement l'information qu'apporterait la connaissance du génotype exact d'un individu dominant (cette connaissance pourrait résulter par exemple de l'examen d'un très grand nombre de descendants et d'une inférence statistique). On trouve ;

$$I_g = 2q^{-1}(1+q)^{-1}(1-q^2)^{-1}.$$

Après ces calculs préliminaires, nous pouvons aborder la discussion des tactiques possibles ;

1° - Puisque l'examen d'un descendant ne peut nous apporter que de façon aléatoire une connaissance sur le génotype des parents, on a certainement $I_{rm} \leq I_g$ et $I_{dm} \leq 2 I_g$ mais en comparant I_g à I_p on s'aperçoit que si $q(q+1)$ est plus grand que $1/2$

(c'est-à-dire si q n'est pas inférieur à $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) = 0.366\dots$), la dichotomie (récessif/dominant) apporte plus d'information que la dichotomie (homozygote/hétérozygote) parmi les individus à phénotype dominant. Il ne peut donc être intéressant de considérer les descendants des croisements (récessifs/dominants) que si q est inférieur à cette valeur puisque sinon il vaudra toujours mieux examiner le phénotype d'un nouveau parent.

2° - Sous l'hypothèse que $q < 1/2$, on vérifie par calcul direct pour les premières valeurs de m puis, en formant le rapport I_r^m/I_r^{m+1} qui tend vers :

$2(1-q)(1-q/2)(1-q/4)^{-2} \geq 1$ que I_r^m est une fonction décroissante de m .

Si donc on a déjà examiné un descendant d'un croisement (récessif/dominant) il est toujours préférable d'examiner un descendant d'un autre couple qu'un second descendant de celui-ci.

3° - L'information I_d apportée par l'examen de ce seul descendant est $q^{-1}(1-q)^{-2}$. Elle n'est supérieure à $4(1-q^2)^{-1}$ que si q est plus petit que $\frac{1}{8}(\sqrt{41}-5) = 0.178\dots$, ce qui constitue la valeur critique pour l'examen des descendants de ce croisement.

4° - De la même manière, on peut calculer l'information I_h qui serait attachée à l'observation d'une paire d'individus dominants et qui permettrait de savoir s'ils sont ou non tous les deux hétérozygotes. On trouve :

$I_h = 16(1+q)^{-2}(1-q)^{-1}(1+3q)^{-1}$ et cette quantité est sûrement inférieure à $4(1-q^2)^{-2}$ quand $q \geq 1/2$.

5° - D'autre part I_{dm} est sûrement inférieur $[I' = 4(1+q)^2 p^{-2}(1+3q)^{-2}]$; puisque cette valeur dérive de I_{dm} en faisant $m=0$ au numérateur et $m=\infty$ au dénominateur.

Mais I' n'est plus grand que $4(1-q^2)^2$ que pour $q > \frac{\sqrt{10}}{5} = 0.63\dots$ et par conséquent, l'observation d'un parent nouveau apportera toujours plus d'information que l'observation d'un descendant d'un croisement (dominant x dominant).

La tactique que nous venons de décrire en fonction de q conduit donc à distinguer éventuellement trois catégories de parents :

Les récessifs,

les dominants dont le descendant examiné est récessif

les dominants dont le descendant examiné est dominant.

Soient N_1, N_2, N_3 le nombre d'individus de l'échantillon rentrant dans chacune de ces catégories ; la valeur estimée de q donnée par l'équation au maximum de vraisemblance est alors :

$$\hat{q} = (2N_1 + N_2) / (2N_1 + 2N_2 + 2N_3)^{-1}$$

La valeur asymptotique de sa variance est :

$$q(1-q)(1+q)^{-1}(N_1 + N_2 + N_3)^{-1}$$

Année 1954 1954-3. Contribution aux applications statistiques de la théorie de...

114

M. P. SCHÜTZENBERGER : THÉORIE DE L'INFORMATION

TABLEAU I

No	Valeurs limites de q	No	Valeurs limites de q
			0.859
1	0.333	11	0.871
2	0.525	12	0.881
3	0.633	13	0.889
4	0.701	14	0.896
5	0.748	15	0.902
6	0.782	16	0.908
7	0.808	17	0.913
8	0.830	18	0.917
9	0.845	19	0.921
10	0.859	20	

TABLEAU II

Valeur de q	Valeur optimale de n
0.900	15
0.910	17
0.920	19
0.930	22
0.940	26
0.950	31
0.960	39
0.970	52
0.975	63
0.980	78
0.985	105
0.990	151
0.995	320
0.998	798
0.999	1592

ALGÈBRE. — *Un treillis universel des géométries projectives.*

Note de M. **MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER**, présentée par M. René Garnier.

On dira que le treillis modulaire \mathfrak{T} est un treillis universel des géométries projectives si le treillis \mathfrak{T}_n des variétés linéaires de l'espace projectif à n dimensions sur un corps K est, quel que soit le corps simple K , une image homomorphe de \mathfrak{T} pour les opérations de réunion et d'intersection. Cette définition est satisfaite en particulier si \mathfrak{T} est le treillis modulaire libre à $n+2$ générateurs. On montrera ici que :

Une condition nécessaire et suffisante pour que les $n+2$ éléments x_i engendrent un treillis universel des géométries projectives ne possédant aucune image homomorphe distributive non triviale, est qu'il existe $n+2$ éléments x_i tels que : 1° $x_i = p_i$ pour tout i , où les p_i sont des polynômes latticiels en les a_i , dont on donnera l'expression ci-dessous ; 2° l'un au moins des segments η_j (définis ci-dessous) ne soit pas dégénéré.

Notations. — i, j et k sont trois indices génériques distincts de l'intervalle $I = [1, n+2]$. E (respectivement : E') désigne l'ensemble des couples d'indices distincts de I (respectivement : de $I-j$). On pose

$$\begin{aligned} s_j &= \bigcap_{i \in I-j} a_i; & s &= \bigcup_{i \in I} s_i; & s_{jk} &= s_{kj} = \bigcap_{i \in I-j-k} a_i; & t_j &= \bigcup_{i \in I-j} s_{ji}; \\ r_{jk} &= r_{kj} = s_{jk} \cap \left(\bigcap_{i \in I-j-k} t_i \right); & q_j &= \bigcup_{e \in E'} r_e; & r &= \bigcup_{i \in I} q_i = \bigcup_{e \in E} r_e \end{aligned}$$

et enfin $p_i = q_i \cup s$.

1° La condition est nécessaire. Soient $x_i (i \in I)$, $n+2$ hyperplans à $n-1$ dimensions d'un espace projectif à n dimensions et $y_{jk} = \bigcap_{i \in I-j-k} x_i$ leurs intersections n à n . On vérifie que si tous les y_{jk} sont distincts, ce sont des points et que l'on a en posant $x_i = a_i$:

$$\phi = s_i = s; \quad a_i = t_i = q_i = p_i; \quad y_{jk} = s_{jk} = r_{jk}.$$

(2)

2° La condition est suffisante. Les calculs sont simplifiés en observant que d'après une remarque de Whitman ⁽¹⁾, les s_i sont distributifs, c'est-à-dire que $f(a_i \cup s_i) = f(a_i) \cup s_i$ quel que soit le polynôme f . On prouve ensuite :

a. $s_j \cup s_k \subset r_{jk} \subset s_{jk}$ d'où $a_j \cap r_{jk} = s_k$.

Comme $s_{jk} \subset a_i$ pour tout $i \in I - j - k$, on peut appliquer la loi modulaire successivement à chacun des termes $a_{i'}$ ($i' \neq i$) du monome s_{jk} dans l'expression $s_{jk} \cap a_i$ qui est donc égale à $a_i \cap (s_{ij} \cup s_{ik})$, d'où :

$$r_{jk} = s_{jk} \cap \left(\bigcap_{i \in I - j - k} (s_{ij} \cup s_{ik}) \right) = s_{jk} \cap \left(\bigcap_{i \in I - j - k} (a_i \cup s_{ik}) \right).$$

b. Si F est une partie de E et \bar{F} la fermeture d'équivalence de F :

$$\bigcup_{e \in F} r_e = \bigcup_{e \in \bar{F}} r_e.$$

Par symétrie il suffit de montrer que $r_{jk} \subset r_{ij} \cup r_{ik}$. On utilise la dernière expression précédente et, avec l'aide de la loi modulaire, on obtient en regroupant les termes

$$r_{ij} \cup r_{ik} = \{ s_{ij} \cup s_{ik} \} \cap \{ (a_j \cup s_{jk}) \cap (a_k \cup s_{jk}) \} \cap \left(\bigcap_{\substack{i' \in \\ I - i - j - k}} \{ (a_j \cup s_{ji'}) \cap (a_k \cup s_{ki'}) \} \right),$$

d'où le résultat, puisque chacune des accolades est en relation \supset avec l'accolade correspondante de

$$r_{ij} = \{ s_{ij} \cup s_{ik} \} \cap \{ s_{jk} \} \cap \left(\bigcap_{\substack{i' \in \\ I - i - j - k}} \{ s_{ji'} \cup s_{ki'} \} \right).$$

c. $q_j \cap r_{jk} = s_k$. ($r_{ik} \subset q_j$ entraîne $s_k \subset q_j$ et, d'autre part, pour tout $e \in E'$: $r_e \subset s_e \subset a_j$).

d. On écrit $s'_j, s'_{jk}, \dots, p'_i$ pour représenter le polynôme correspondant, mais où les a_i sont remplacés par les q_i . On a :

$$r'_{jk} = r_{jk} \quad \text{et} \quad q'_j = q_j$$

($q_i \subset a_i$ entraîne $s'_{ik} \subset s_{jk}$ et $r_{jk} \subset q_i$ entraîne $q_i \cap s_{jk} = r_{jk}$; donc $s'_{jk} = r_{jk}$, $t'_j = q_j$, etc.).

e. *Impossibilité d'une image homomorphe distributive non triviale.* — Tous les segments tels que $\eta_j = [q_j \cup s; r]$ sont projectivement équivalents et équivalents

(1) Amer. J. Math., 65, 1943, p. 79-96.

(3)

aux $\gamma_{ijk} = [s_j \cup s_k; r_{jk}]$. $((q_j \cup s) \cap r_{jk} = s_j \cup s_k$ et $q_j \cup s \cup r_{jk} = r$ entraînent l'équivalence de $[q_j \cup s; r]$ et de $[s_j \cup s_k; r_{jk}]$. D'où le résultat puisque γ_{ij} est symétrique en les $a_i (i \in I - j)$ et γ_{ijk} en a_j et a_k).

Dans une publication ultérieure on envisagera certaines conséquences des résultats précédents dans la théorie des lois universelles des treillis modulaires.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 239, p. 1754-1756, séance du 20 décembre 1954.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
147301-54 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

Année 1955

Bibliographie

- [1] Marcel-Paul Schützenberger. Théorie combinatoire des relations bilinéaires classiques. *Bull. Sci. Math. (2)*, 79 :12–32, 1955.
- [2] Marcel-Paul Schützenberger. Théorie combinatoire des relations bilinéaires classiques. II. *Bull. Sci. Math. (2)*, 79 :111–128, 1955.
- [3] Marcel-Paul Schützenberger. Sur les problèmes de communications métriques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 240 :724–726, 1955.
- [4] Marcel-Paul Schützenberger. Les problèmes de diagnostic et l’axiomatique des informations. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 62 :222–226, 1955.
- [5] Marcel-Paul Schützenberger. La statistique en psychiatrie. In *Encyclopédie médico-chirurgicale*, volume Psychiatrie-2, 37060-G10, pages 1–4. 1955.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

RÉDIGÉ PAR M. Paul MONTEL
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

PIERRE GAUJA, *secrétaire de la rédaction.*

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR G. DARBOUX,
CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR G. DARBOUX ET J. HOÜEL
DE 1876 A 1886 PAR G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
DE 1886 A 1905 PAR G. DARBOUX ET J. TANNERY
DE 1905 A 1910 PAR G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY
DE 1910 A 1917 PAR G. DARBOUX ET É. PICARD
ET DE 1917 A 1930 PAR É. PICARD ET P. APPELL.

DEUXIÈME SÉRIE
TOME — ANNÉE 19
Extrait du N°



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55 Quai des Grands-Augustins, 55

19

Ce Recueil paraît chaque mois.

**THÉORIE COMBINATOIRE
DES RELATIONS BILINÉAIRES CLASSIQUES;**

PAR M. MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER.

1. Introduction.

Nous emprunterons à M. M. H. Weyl et J. Dieudonné [1], [2] l'adjectif « classique » pour désigner collectivement les espaces vectoriels munis d'une forme bilinéaire $f(x, y)$ alternée ou symétrique ou antisymétrique et nous nous proposerons d'étudier ces espaces de façon purement combinatoire, c'est-à-dire sans faire appel explicitement ni aux particularités du corps de base K (nécessairement réflexif, néanmoins) sur lequel ils sont définis, ni à la nature même de $f(x, y)$ pourvu que le rang de celle-ci égale la dimension de l'espace considéré.

Dans ce but on partira d'un ensemble abstrait E muni d'une relation binaire symétrique ρ : la relation de conjugaison (ou d'orthogonalité).

Au cas où l'on saurait déjà que E est un treillis modulaire — c'est-à-dire un espace vectoriel si sa dimension est finie — un théorème bien connu [3] montre que ρ , dans des cas assez généraux, découle effectivement d'une forme bilinéaire antisymétrique. Nous ne développerons pas les recherches dans cette direction mais à l'inverse, nous nous efforcerons d'établir en utilisant exclusivement des conditions axiomatiques abstraites sur ρ le fait que E est un treillis modulaire, ce qui permet alors d'appliquer le théorème précédent.

Les conditions que l'on introduira successivement sont de deux types :

D'abord un axiome unique qui définit ce que nous appellerons *les structures de relations bilinéaires classiques* (RBC) compre-

— 2 —

nant, outre les espaces classiques, divers cas particuliers (« sommes directes », RBC quasi singulières) dont une étude jusqu'à un certain point exhaustive sera faite dans cette première partie.

Ensuite des conditions de bien moindre portée mais qui délimitent les structures les plus intéressantes c'est-à-dire, d'une part les espaces vectoriels classiques, d'autre part les structures consistant en la restriction de ces derniers à l'ensemble de leurs éléments autoconjugués (ou singuliers), c'est-à-dire les *hyperquadriques unitaires*, terme que nous utiliserons pour désigner ces objets mathématiques dans le cas général.

En effet bien que n'étant en aucune façon des espaces vectoriels, ces ensembles se trouvent rentrer dans notre définition des RBC et être justiciables des méthodes générales. Dans cette deuxième partie on montrera en outre que moyennant certaines conditions de dimension ou plus exactement, d'indice de la forme fondamentale, l'on peut reconstruire un espace vectoriel à partir de la seule donnée d'une hyperquadrique unitaire qu'il contient.

Afin de ne pas compliquer l'exposé, — et surtout les notations — par des digressions géométriques, il est peut-être plus aisé de résumer ici l'interprétation des concepts combinatoires qui seront utilisés par la suite.

Soit E d'éléments x, y, \dots un espace vectoriel sur un corps réflexif K dont l'antiautomorphisme involutif sera noté : $\bar{}$. ($\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 = \overline{\xi_2 \xi_1}$; $\bar{\bar{\xi}}_1 = \xi_1$ pour tout $\xi_1, \xi_2 \in K$).

Soit $f(x, y) = \bar{f}(y, x)$ une forme bilinéaire à symétrie hermitienne sur $E \times E$. Si K est commutatif on obtient le cas orthogonal en choisissant pour $\bar{}$ l'application identique ($\bar{\alpha} = \alpha$ pour tout $\alpha \in K$).

Si, en outre, K possède ε et ε' tels que $\varepsilon \bar{\varepsilon} = -1$; $\bar{\varepsilon} \varepsilon' = 1$; $\varepsilon \neq \bar{\varepsilon}'$, on peut mettre $f(x, y)$ supposée de rang pair sous la forme [4]

$$\sum_{i=0}^n \xi_{zi+1} \bar{\eta}_{zt+2} - \xi_{zi+2} \bar{\eta}_{zt+1}$$

et le cas symplectique correspond donc à la restriction de E à l'ensemble de ses vecteurs tels que $\bar{z} = z$.

— 3 —

Dans tous les cas on a, en désignant par x , y et z trois vecteurs quelconques sauf que les deux derniers sont distincts et non conjugués avec le premier :

$$y(f(y, x))^{-1} = z(f(z, x))^{-1} =$$

un vecteur t conjugué avec x et appartenant à la variété linéaire D fermeture de la base $\{y, z\}$. Évidemment t est encore défini de façon unique si $f(x, y) = 0$ puisqu'alors $t = y$.

Or cette construction peut être décrite de façon abstraite puisque D n'est autre que la fermeture de Galois [5], [6], attachée à ρ , de $y \cup z$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E conjugués avec tous les éléments de E qui sont eux-mêmes conjugués à la fois avec y et avec z . Écrivant de façon générale P^* pour désigner l'ensemble des éléments conjugués avec tous les éléments de la partie quelconque P de E , la construction précédente s'énonce (cf. 7) :

(I) Si $x, y, z \in E$, $x \notin y^* \cap z^*$, alors

$$x^* \cap ((y^* \cap z^*)^*) = \text{un élément unique } t \text{ de } E.$$

C'est cette condition purement combinatoire que nous pourrions prendre comme axiome de définition des relations bilinéaires classiques.

Remarquons toutefois que s'il se trouvait que

$$f(y, y) = f(z, z) = 0,$$

une condition suffisante pour qu'il en soit de même de *tout* vecteur $t = x\lambda + y\mu$ de D serait $f(y, z) = 0$, puisque

$$f(t, t) = \bar{\lambda} f(y, y)\lambda + \bar{\mu} f(z, z)\mu + \bar{\lambda} f(y, z)\mu + \bar{\mu} f(z, y)\lambda.$$

Par conséquent l'ensemble des vecteurs « singuliers » (ou « autoconjugués ») de E [c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs y tels que $f(y, y) = 0$] est « fermé » (dans un sens évidemment différent de celui utilisé plus haut) pour l'opération fondamentale $x^* \cap ((y^* \cap z^*)^*)$.

Or — et ceci est tout à fait remarquable — la majeure partie des résultats subsiste quand on n'impose de satisfaire à (I) qu'aux couples de vecteurs y, z , singuliers ou non, mais conjugués entre eux.

— 4 —

C'est cette forme affaiblie de (I) qui définira pour nous les RBC et que nous envisagerons par la suite.

On verra d'ailleurs dans la seconde partie que la théorie dans le cas où (I) est postulé pour tous les couples de vecteurs est extrêmement simple et que l'on prouve alors à peu près directement que E est un treillis modulaire.

Les conditions dans lesquelles ce travail a été rédigé seront peut-être une excuse pour la parcimonie de sa bibliographie.

Nous demanderons la même indulgence en ce qui concerne la terminologie qui est sans doute plus proche de celle en usage dans la théorie latticielle des géométries projectives [7] que dans les exposés habituels sur les espaces classiques. En particulier on a systématiquement appelé « points » les « vecteurs » habituels et « droite » les « plans » de J. Dieudonné.

2. Notations. Fermetures de Galois.

2.1. Notations (*cf.* 9). — On considérera un ensemble E d'éléments abstraits (les points) que l'on désignera toujours par des minuscules, les majuscules étant réservées aux parties de E et les lettres grecques aux relations. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre et sauf mention explicite du contraire, il sera entendu une fois pour toutes que les points $a, a_i, a', \dots; b, b_i, b', \dots; p, \dots, x, \dots$ sont respectivement des points génériques des ensembles A, B, \dots, P, \dots, X .

a_1, a_2, \dots, a_n [respectivement $b_1, b_2, \dots, x_1, x_2, \dots$] seront toujours des points distincts et a, a', \dots (respectivement b, b', b'', \dots) pourront éventuellement être des points confondus.

Quelle que soit la relation binaire μ , le diacritique ' en symbolisera la négation et le diacritique - la fermeture de transitivité.

L'intersection de deux relations μ et ν sera souvent écrite $\widehat{\mu\nu}$.

$\mu[P]$ sera l'ensemble des points x tels que $x\mu p$ pour tout $p \in P$ et l'on pourra donc écrire indifféremment : $x\mu P$ ou $x \subset \mu[P]$. Si μ est symétrique, $\mu_2[P]$ abrégera $\mu[\mu[P]]$. On conviendra que si $\mu[E] = \emptyset$, $\mu_2[E] = E$. Si $\mu[P] \supset P$, on dira que P est « connexe » pour μ .

Enfin les signes \cap , \cup et $--$ auront leur signification habituelle

en théorie des ensembles, le signe d'intersection \cap étant d'ailleurs le plus souvent omis.

Une relation binaire symétrique ρ , dite « de conjugaison » jouera un rôle privilégié. On écrira *toujours* : P^* pour $\rho[P]$; P^{**} pour $\rho_2[P]$ et P_* pour $E - \mu[P]$ (si P est un point p , $P_* = \mu'[p]$). P^* sera appelé « l'ensemble conjugué de P », et P^{**} « la fermeture de P » l'ensemble P lui-même étant réciproquement une base de P^{**} .

Un point conjugué avec lui-même sera dit « *singulier* » et « *non singulier* » dans le cas contraire.

On posera $\mathcal{S}(P) = \{p : p \subset P \text{ et } p \subset P^*\}$ la partie autoconjuguée de P , P_* = l'ensemble des points singuliers de P .

Un ensemble dont tous les points sont singuliers et conjugués entre eux sera dit *singulier* [= complètement isotrope de (2)].

Un point p , de P sera *central* dans P s'il est conjugué avec tous les points de P ($p \in P^*P$), l'on pourra dire sans inconvénient que P lui-même est *central* si sa *partie centrale* (« son centre ») ($P^* \cap P$) contient au moins un point.

Inversement, p sera *isolé* dans P si $p^* \cap P$ est soit vide soit réduite à p lui-même. Un ensemble dans lequel tous les points sont isolés sera dit « *discret* ».

Enfin la convention suivante sera toujours appliquée : a étant un point quelconque, \bar{a} désignera :

- soit a lui-même si $a \notin \gamma(E)$;
- soit un point quelconque de $\mathcal{S}(E) \cap a_*$ si $a \in \mathcal{S}(E)$.

Dans les deux cas, \tilde{a} représentera l'ensemble $\{a, \bar{a}\}$ que l'on appellera *doublet* (*faux* si $a = \bar{a}$, *propre* si $a \neq \bar{a}$) et que l'on pourra dans certains contextes considérer comme un point unique ⁽¹⁾.

2.2. Fermeture de Galois. — L'application $P \rightarrow P^{**} = \rho_2[P]$ est une application idempotente croissante de $\mathfrak{P}(E)$ sur un treillis

⁽¹⁾ Ceci se rattache au fait que l'espace vectoriel sur une extension de degré 2 du corps de base est isomorphe à un sous-treillis d'un espace vectoriel de dimension double sur le corps initial mais où certaines « droites » jouent le rôle d'éléments minimaux (« atomes »).

— 6 —

complet $\mathfrak{F}(E)$ dit « *treillis des fermés de E* ». On a les propriétés suivantes que nous nous bornons à rappeler :

1° L'application $P^{**} \rightarrow (P^{**})^* = P^*$ est un antiautomorphisme involutif de \mathfrak{F} ($P \subset Q$ entraîne $Q^* \subset P^*$ qui est équivalent à $P^{**} \subset Q^{**}$).

2° Si P et Q sont des éléments de $\mathfrak{F}(E)$, c'est-à-dire s'ils sont tels que $P^{**} = P$ et $Q^{**} = Q$, leur intersection R dans $\mathfrak{F}(E)$ (qui, par définition est fermée elle aussi) est identique à leur intersection en tant que partie de E , c'est-à-dire que $R = P^{**} \cap Q^{**}$.

3° Quels que soient P et Q ,

$$(P \cup Q)^{**} = (P^* \cap Q^*)^* = (P^{**} \cup Q^{**})^{**}$$

est leur réunion S dans \mathfrak{F} . En général, $S \neq P \cup Q$ et l'on réservera le signe $+$ pour indiquer cette nouvelle opération,

$$S = P + Q = P^{**} + Q^{**} = (P \cup Q)^{**}$$

que l'on appellera « *somme* ».

Voici maintenant quelques conventions de langage qui seront constamment utilisées.

Il sera commode de noter :

$$S = P_1 + P_2 + \dots + P_k$$

pour exprimer le fait que simultanément :

$$S = P_1 + P_2 + \dots + P_k, \quad P_i^{**} \cap P_j^{**} = \emptyset \quad \text{et} \quad P_i \subset P^*$$

pour tout $i \neq j$.

Par définition, $x \notin P^{**}$ implique l'existence d'au moins x' tel que $x' \rho' x$ et $x' \subset P^*$. On dira que x' *sépare* x de P et que x est *indépendant* de P . Si tout point p de P est indépendant de $P - p$, on dira que P est une base *indépendante* de P^{**} .

Q sera dit *équivalent* à P si $Q^{**} = P^{**}$.

P sera une *base maximale* de P^{**} si, étant une base indépendante, la puissance de ses points est un maximum dans l'ensemble des bases qui lui sont équivalentes.

On appellera cette puissance « *hauteur de P* » ($ht(P^{**})$).

P^{**} sera dit *modulaire*, *semi-modulaire* ou *semi-modulaire dual* s'il en est de même du treillis $[\emptyset, P^{**}]$, intervalle de $\mathfrak{F}(E)$.

— 7 —

On rappellera qu'une condition nécessaire et suffisante pour que P soit semi-modulaire (respectivement semi-modulaire dual) est que pour tout q_1, q_2, Q

$$q_1 + q_2 + Q \subset P^{**}, \quad q_1 \not\subset Q \quad \text{et} \quad q_2 \not\subset Q + q_1 \quad \text{entraînent} \quad q_1 \not\subset Q + q_2$$

(respectivement $Q \subset P$ et $q_1^* \subset q_2^* Q \not\subset P$ entraînent $q_1^* Q \not\subset q_2^* Q$).

Enfin s'il existe un seul $a' \subset P^{**}$ tel que $a^* P^{**} = a' P^{**}$ [c'est-à-dire si $(a^* P^{**})^* P^{**} = (a + P^*) P^{**} =$ un point unique], on dira que ce point a' est la « *projection* » de a dans P^{**} .

3. Relation d'alignement complémenté.

Définition. — On dira que les points distincts a et b sont « en relation d'alignement (complémenté) » et l'on écrira : $a \lambda b$ (équivalent à $b \lambda a$) si :

1° $a + b$ est la fermeture de la réunion de deux quelconques de ses points distincts ;

2° Quel que soit $z \in E$, l'intersection $z^*(a + b)$ n'est pas vide.

La fermeture de deux points en relation λ sera appelée « droite ». On désignera par $\mathcal{D}(P)$ l'ensemble des droites fermetures de deux points appartenant à l'ensemble P et par \mathcal{D}_p l'ensemble des droites contenant le point p .

3.1. Si D est une droite, $z^* D$ est, soit D elle-même, soit un point unique.

En effet si x et y sont deux points (distincts !) de $D = a + b$, $x + y \subset z^*(a + b)$ entraîne $z \subset x^* y^*$ et par conséquent,

$$z \subset D^* = x^* y^* = a^* b^*$$

puisque par définition $a + b = x + y$, c'est-à-dire $a^* b^* = x^* y^*$.

De 3.1 découlent immédiatement toute une série de conséquences :

3.2. Toute droite est semi-modulaire de hauteur 2.

3.3. L'intersection de deux droites distinctes est soit vide, soit un point unique.

3.4. Si un fermé contient deux points distincts d'une droite, il contient celle-ci tout entière.

— 8 —

Considérons maintenant deux droites C et D . Si $C \subset D^*$ on a aussi $D \subset C^*$ puisque $P \rightarrow P^*$ est un antiautomorphisme de $\mathfrak{E}(E)$ et il suffit pour cela, d'après 3.4, que C contienne deux points distincts de D . Si $CD^* = c$ et si $c \neq c' \in C$, l'intersection $c'^*D = d$, étant conjuguée avec les deux points distincts c et c' de C appartient à C^* et C^*D est donc aussi le point unique d . Enfin, si $C^*D = \emptyset$, il en est de même de D^*C et il existe une correspondance biunivoque $c_i \leftrightarrow d_i$ entre les points $c_i = d_i^*C$ de C et $d_i = c_i^*D$ de D . On écrira respectivement $C \rho D$, $C \sigma D$ et $C \tau D$ pour représenter les trois cas et l'on pourra résumer la discussion précédente par l'énoncé suivant qui n'est qu'un cas particulier de la relation générale :

$$ht(A) - ht(AB^*) = ht(B) - ht(BA^*).$$

3.5. Si C et D sont deux droites,

$$ht(C^*D) = ht(D^*C).$$

Ultérieurement il sera fréquemment fait appel au résultat partiel suivant :

3.6. Une condition nécessaire et suffisante pour que $C \tau D$ est qu'il existe c et c' dans C et d et d' dans D tels que

$$c \subset d^*, \quad d' \subset c_*, \quad c' \subset d_*.$$

En effet, c^*D ne contenant pas d' se réduit au seul point d qui ne peut pas appartenir à C^* puisqu'il n'est pas conjugué avec c' .

En particulier, si l'intersection de C et de D est le point non singulier a , elles ne peuvent pas être en relation ρ et une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient en relation τ est que les points a^*C et a^*D ne soient pas conjugués entre eux.

Les résultats précédents subsistent intégralement si C et D sont confondues.

En outre, si $d \subset D$, d^*D est soit un point unique, soit D elle-même. Par conséquent :

Si d est singulier, il est, ou bien central, ou bien isolé, dans D ;
Si d est non singulier, d^*D est un point unique.

3.7. Toute droite appartient à un et un seul des trois types suivants :

— 9 —

Droites singulières ($D \rho D$) ne contenant que des points singuliers tous conjugués entre eux;

Droites paraboliques ($D \sigma D$) contenant un seul point singulier central conjugué avec tous les autres points qui sont non singuliers et isolés, dans $D - D^*D$:

Droites hyperboliques ($D \tau D$) contenant des points singuliers isolés et des paires de points non singuliers conjugués entre eux.

Parmi les droites hyperboliques on distinguera les *droites spéciales* dont la partie non singulière est vide et qui ne contiennent donc que des points singuliers isolés. Géométriquement, les droites spéciales apparaissent seulement dans les espaces symplectiques et dans les espaces orthogonaux sur un corps de caractéristique 2.

Mentionnons enfin pour la suite la :

Définition. — Un ensemble tel que $a \not\sim b$ entraîne $a \lambda b$ sera dit *complet*.

4. Définition des relations bilinéaires classiques.

Définition I. — On dira que la structure $\mathcal{E} = (E, \rho)$ formée d'un ensemble E muni d'une relation binaire symétrique ρ est une relation bilinéaire classique (RBC) si la relation ρ entre points distincts est une relation d'alignement complémenté.

Une définition équivalente mettant en valeur l'opération fondamentale $z^*(a + b)$ est la suivante :

Définition I'. — On dira que la structure $\mathcal{E} = (E, \rho)$ est une RBC si pour tout triple de points dans E , z , a , et b tels que $a \rho b$, $a \neq b$, et $z \notin a^*b^*$ l'intersection $z^*(a + b)$ est un point unique.

Il est immédiat que I entraîne I'; réciproquement, si x et y étaient deux points distincts de $a + b$ tels que $x + y = a + b$, il existerait $z \subset x^*y^* - a^*b^*$ séparant $a + b$ de $x + y$ et l'on aurait $x \cup y \subset z^*(a + b)$, ce qui établit que moyennant I', ρ (entre points distincts) est une relation d'alignement complémenté.

Les notions d'isomorphisme et d'homomorphisme que l'on pourra avoir à utiliser par la suite seront toujours relatifs à la structure (E, ρ) d'ensemble muni de la relation symétrique ρ .

— 10 —

Par contre, on dira que la partie F de E est une « sous-RBC » si non seulement la restriction de $\mathcal{E} = (E, \rho)$ à $\mathcal{F} = (F, \rho)$ satisfait à la définition I, mais si encore $a, b, \in F$, $a \neq b$ et $a \rho b$ entraînent que l'ensemble D fermeture de $a \cup b$ dans \mathcal{F} soit identique à la droite $D = a + b$ dans \mathcal{E} .

On verra plus loin que F peut être une sous-RBC de E sans être fermée dans E (l'exemple le plus simple est celui des quadriques réglées dans l'espace projectif à trois dimensions) et qu'aussi bien un fermé de E n'est pas nécessairement une sous-RBC (exemple : l'ensemble a^* où a est singulier).

4.1. Si le centre E^*E de la RBC \mathcal{E} n'est pas vide :

- ou bien E se réduit à une droite singulière ou parabolique ;
- ou bien E se décompose en une famille de droites singulières dont l'intersection commune non vide est le centre de E qui est donc encore un point unique.

Le résultat est trivial si \mathcal{E} est discret. Soit donc $u \in E^*E$ et a et b deux points alignés. Par définition $a + b = \{x : a^*b^* \subset x^*\}$ et comme $a^*b^* \subset E \subset u^*$, $u \subset a + b$, c'est-à-dire que u appartient à toutes les droites de \mathcal{E} .

Si E est identique à sa partie singulière $\mathcal{S}(E)$, le résultat est établi car l'on sait que l'intersection de deux droites distinctes est au plus un point unique.

Si E contient, en outre, au moins un point non singulier a , $u + a$ est parabolique de centre u et E^*E se réduit encore à u . De plus comme $(u + a)^* = u$ (puisque a n'est contenu que dans la seule droite $a + u$), E se réduit à $a + u$ puisque pour toute droite D on a $(a + u)^* = u \subset D^*$, c'est-à-dire $D \subset a + u$.

4.2. Une condition nécessaire et suffisante pour que la RBC \mathcal{E} soit séparable est que son centre soit vide.

La condition est nécessaire car si E^*E contenait un point, celui-ci ne serait séparable d'aucun autre point de E . Réciproquement, supposons qu'il existe deux points distincts a et b tels que $a^{**} \subset b^{**}$, c'est-à-dire $b^* \subset a^*$.

Soit c distinct de b un point de $b^*b + c$ est une droite et, par hypothèse,

$$b^*c^* \subset b^*a^* = b^*, \quad \text{donc } a \subset b + c, \quad \text{donc } a \lambda b.$$

— 11 —

De plus, $b^* \subset a^*$ entraîne que tout point conjugué avec b appartient à $(a + b)^* = a^*b^*$. Si b était central, le résultat serait établi. Soient donc x non conjugué avec b ,

$$u = x^*(a + b) \quad \text{et} \quad v = b^*(u + x).$$

Par construction, $v \subset u^*$ (puisque $v \subset b^*$), donc u étant conjugué avec deux points distincts de $v + x$ appartient à son centre et est singulier.

Si b est non singulier, la démonstration est achevée : $a + b$ est une droite parabolique puisque le point $b^*(a + b)$ est conjugué avec a et b . Donc $b^*(a + b) = u$ et l'on vient de voir que ce dernier point est conjugué avec tous les points de b_* [pour tout $z \subset b_*$, $z^*(a + b)$ est singulier et $a + b$ ne contient qu'un seul point de ce type] et tous ceux de b^* (puisque $b^* \subset b^*a^* = b^*u^*$). u est donc central dans E .

Si b est singulier, $b \subset b^*$ entraîne $b \subset a^*$, c'est-à-dire $a \subset b^*$ et enfin $a \subset a^*$. $a + b$ est une droite singulière, et $v = u$ puisque $b^*(u + v)$ est le point unique u . Si \mathcal{E} ne contenait que les deux droites $u + b$ et $u + x$, le résultat serait établi. Supposons donc qu'il existe encore $y \not\subset u + x$ non conjugué avec b . Soit $w = y^*(a + b)$. Si x appartenait à $(y + w)^*$, w serait confondu avec u puisque $x^*(a + b)$ est un point unique. Sinon, soient $r = x^*(y + w)$ et $s = b^*(x + r)$. On a $s \subset a^*$, donc $r \subset u^*$ et comme $w \subset u^*$, on obtient enfin

$$w = r = s = u \quad \text{et} \quad y \subset u^*,$$

ce qui achève d'établir que u est dans le centre de E .

On observera qu'une fois établi le fait que a et b sont deux points alignés, le reste de la démonstration conduisant de l'hypothèse $b^* \subset a^*$ à l'existence de u ne fait appel qu'à des constructions valides dans tout fermé contenant a et b .

On a déjà vu que si $b^* \subset a^*$, $b \in \mathcal{S}(E)$ entraîne $b \lambda a$; si, au contraire, $b^*b = \emptyset$ mais $a \in \mathcal{S}(E)$, soit $c \subset b^*$.

— Ou bien $cc^* = \emptyset$; supposons que $b + c$ contienne un troisième point d . Par hypothèses,

$$e = b^*(d + d^*(a + c)) \subset a^*.$$

— 12 —

a étant central dans $a + c$, on a

$$d \subset d + e = e + d^*(a + c) \subset a^*, \quad \text{c'est-à-dire} \quad b \subset c + b \subset a^*.$$

— Ou bien $c^*c = c$; supposons que c ne soit pas central dans $a + b + c = C$ et soit $d \subset c_*C$. Je dis qu'il est impossible que $b \rho' a$ à moins que tout $d \subset Cc^*$ n'appartienne à a^* . En effet, si $d^*(a + c) = e \neq a$,

$$f = b^*(d + e) \subset a^* \quad \text{et} \quad d \subset e + f \subset a^*.$$

On verra plus loin que la restriction $c_*C \subset b^*$ entraîne $a + c = a \cup c$ et l'on pourra résumer la discussion précédente par :

4.3. a et b étant deux points distincts qui sont, soit alignés, soit non tous deux non singuliers d'une RBC de centre vide dont toutes les droites ont au moins trois points, ils sont séparables dans tout fermé de centre vide qui les contient. (On ne possède pas de démonstration pour le cas d'exception où a et b sont simultanément non singuliers, mais on peut prouver que $b^* \subset a^*$ entraîne $b^* = a^*$; le problème est lié au fait que l'opération fondamentale ne semble pas permettre de reconstruire tous les points de E à partir d'une de ses bases quand celle-ci ne satisfait pas à des conditions particulières, c'est-à-dire, en définitive au fait que l'opération fondamentale est associée à un semi-groupe et non à un groupe.)

Une conséquence intéressante de 4.3 est :

4.4. Si la droite D dans une RBC de centre vide contient trois points distincts a , b et c , aucun des trois ensembles tels que $a_*b_*c^*$ n'est vide.

On a, en effet, la partition suivante de E :

$$E = a^*b^*c^* \cup a^*b_*c_* \cup a_*b^*c_* \cup a_*b_*c^*,$$

puisque, par exemple, si $a^*b^*c_*$ n'était pas vide, $a + b$ serait différent de D . Si maintenant $a_*b_*c^*$ était vide c^* serait identique à $a^*b^*c^* \subset a^*$ et \mathcal{E} ne serait pas séparable.

Enfin l'énoncé suivant dont on donnera plus loin une généralisation, relève des mêmes méthodes de démonstration :

4.5. Quels que soient les points distincts a et b dans une RBC séparable, l'ensemble $a + b$ est semi-modulaire de hauteur 2.

— 13 —

Le résultat est axiomatique si $a \lambda b$. Si $a \lambda' b$, il suffit de montrer que, pour tout c distinct de a ,

$$a + c \subset a + b \quad \text{entraîne} \quad a + c = a + b;$$

soit, encore, que

$$b \not\subset a + c \quad \text{entraîne} \quad c \not\subset a + b;$$

soit enfin que

$$a^*c^*b_* \neq \emptyset \quad \text{entraîne} \quad a^*b^*c_* \neq \emptyset.$$

Soit donc $x \subset a^*c^*b_*$; $a + x$ et $c + x$ sont deux droites. Si elles sont distinctes, il existe y , distinct de x , séparant c de $a + x$ (c'est-à-dire $y \subset a^*x^*c_*$) et $z = b^*(a + y)$ appartient à $a^*b^*c_*$ qui n'est donc pas vide. Si $a + x = c + x = D$, x est central dans D .

Par hypothèse, $b \subset x_*$, donc $b^*D = d \neq x$. De même on peut supposer que $d \neq a$ car sinon on aurait $a \lambda b$ et $a \lambda c$ et le résultat serait trivial.

— Ou bien a est singulier : dans ce cas D est singulière et $a \rho c$. Il existe y distinct de a dans a^*c_* et le point z cherché est donné par

$$z = b^*(a + y) \neq c^*(a + y) = a.$$

— Ou bien a est non singulier et D est parabolique; il existe y distinct de d dans $b^*d^*c_*$ séparant c de $b + d$ et le point cherché est $z = a^*(y + d)$.

Un autre résultat intéressant dont on retrouvera plus tard une généralisation est le suivant :

4.6. Si $\mathcal{O}(E)$ contient au moins deux droites distinctes, a^* contient une droite quel que soit a

Le résultat est immédiat si $a \in \mathcal{S}(E)$ car a^* contient toutes les droites $a + a^*D$.

Soient donc

$$a \notin \mathcal{S}(E), \quad b \subset a^* - a, \quad c \not\subset a + b \quad \text{et} \quad x \subset a^*b^*c_*$$

séparant c de $a + b$. a^* contiendrait la droite $b + x$ si x était distinct de b ce qui serait nécessairement le cas si b était non singulier ou si c appartenait à b^*a_* . Le seul cas intéressant est donc celui où a^* est un ensemble discret, B , de points singulier

— 14 —

tels que $b \subset B$ entraîne $b^* = a + b$. On va montrer que dans ces hypothèses $B = \mathcal{S}(E)$ est une droite spéciale :

1° Si b et b' sont deux points distincts de B ,

$$b^* b'^* = a, \quad \text{donc} \quad b + b' = a^* = B = B^{**};$$

2° S'il existait $u \subset a_* \cap \mathcal{S}(E)$ ou bien on aurait $u \subset b^*$ ou bien $a^*(u + u^*(a + b))$ serait non singulier, deux cas que l'on sait déjà éliminer.

Donc $a^* = \mathcal{S}(E) = B^{**}$, c'est-à-dire $a = (\mathcal{S}(E))^*$ est déterminé de façon unique et pour tout autre $\rho \subset E$, ρ^* contient au moins une droite P . Comme $\rho^* B = a^* P \neq \emptyset$, B est bien une droite (spéciale).

Ce cas d'exception se rencontre dans les plans orthogonaux sur un corps de caractéristique 2.

5. Relations d'alignement duel.

Définition. — Deux points distincts a et b seront dits « en relation d'alignement duel » et l'on écrira $a \delta b$ (équivalent à $b \delta a$) si :

1° $a \lambda b$;

2° la droite $a + b$ ne contient que ces deux seuls points.

5.1. Dans toute RBC séparable une condition nécessaire et suffisante pour que $a \delta b$ quand $a \neq b$ est que $a_* b_* = \emptyset$.

La condition est évidemment nécessaire puisque $a \lambda b$ entraîne la non-vacuité de $z^*(a + b)$ pour tout $z \subset E$. Si l'on sait déjà que $a \lambda b$, la condition est suffisante d'après 4.3 et l'hypothèse de séparabilité de \mathcal{E} .

Or $a_* b_* = \emptyset$ entraîne $a \subset b^*$ et par conséquent, $a \lambda b$ dans tous les cas à l'exception de celui où a et b forment un doublet propre (a non conjugué avec a et b s'écrit $a \subset a_* b_*$).

Dans cette dernière hypothèse, soit c un point de $a + b$ distinct de a et soit $z \subset a^* c_*$. Soit encore $y = b^*(a + b)$. Comme $c \subset a + b$ équivaut à $a^* b^* \subset c^*$, y est conjugué avec c et puisque z ne l'est pas, c ne peut pas être conjugué avec a . Donc c n'est autre que le point a lui-même, car sinon il ne serait conjugué avec aucun des

— 15 —

deux points a ou b . On a donc $a + b = a \cup b$, ce qui achève la démonstration.

On aura besoin par la suite de distinguer un cas particulier de la relation d'alignement dual.

Définition. — Deux points distincts a et b seront dits en relation β si :

- 1° $a \delta b$;
- 2° a n'appartient pas au centre $\Delta(b) = (\delta[b])^* \cap \delta[b]$ de $\delta[b]$.

§.2. Dans toute RBC séparable la relation β est une relation symétrique.

Soient $a \in \delta[b]$ et \bar{b} quelconque formant doublet avec b . Puisque $a \notin \Delta(b)$, il existe au moins un \bar{a} non conjugué avec a dans $\delta[b]$. On a

$$\bar{b}^*(a + b) = a \quad \text{et} \quad \bar{b}^*(a + b) = \bar{a}$$

et, d'après 3.6

$$(a + b)\tau(\bar{a} + b) \quad \text{et} \quad (a + \bar{b})\tau(a + b),$$

ce qui montre que réciproquement

$$b \in \delta[a] \quad \text{et} \quad b \in \delta[a],$$

c'est-à-dire enfin $b \in \beta[a]$. Du même coup on a prouvé :

§.3 $a \in \beta[b]$ entraîne $a \in b^*$.

§.4 Si $\beta[a] \neq \emptyset$,

$$a \in \beta_2[a] = \beta_2[a].$$

Il en résulte :

§.5. Dans toute RBC séparable la relation binaire β_2 entre points, définie par :

$$a \beta_2 c \quad \text{si et seulement si} : \quad c \in \beta_2[a]$$

est une relation d'équivalence.

L'énoncé est trivial si $\beta[a]$ est vide.

On vient de voir qu'il est vérifié si $a \in c_*$.

— 16 —

Si $a \lambda c$ mais $a \in \delta'[c]$, il existe (d'après 4.3) $y \in \alpha_* c_*$ et l'on a (§.4)

$$\beta[a] = \beta_2[y] = \beta_2[c].$$

Si $a \delta c$ et $a \beta' c$, c' étant conjugué avec tous les points de $\delta(a)$, c_* , non vide, contient y appartenant à l'ensemble des points en alignement non duel avec a et l'on a encore

$$\beta_2[c] = \beta_2[y] = \beta_2[a].$$

Enfin si $a \beta c$, on a sûrement un $x \notin \beta_2[a]$ puisque par définition $c \notin \beta(c)$, ce qui achève la démonstration.

6. Somme directe.

Définition. — Si les $\mathcal{E}_i = (E_i; \alpha_i)$ sont des structures d'ensembles disjoints munis chacun d'une relation binaire symétrique α_i , on appellera « somme directe » $\mathcal{E} = \bigoplus_i \mathcal{E}_i$. La structure

$$\mathcal{E} = (E = \bigcup E_i, \alpha),$$

où la relation binaire symétrique α est définie pour tout $x \in E_i$ et $y \in E_j$ par

$$x \alpha y \begin{cases} \text{quand } i \neq j, \\ \text{si } x \alpha_i y \quad \text{quand } i = j. \end{cases}$$

6.1. Si les \mathcal{E}_i sont séparables, le treillis $\mathfrak{T}(E, \alpha)$ est le produit direct des treillis $\mathfrak{T}(E_i, \alpha_i)$ et \mathcal{E} est une RBC séparable si et seulement s'il en est de même de chacune des \mathcal{E}_i .

Soit $P = \bigcup_i P_i$ avec $P_i = P \cap E_i$ un élément du treillis $\mathfrak{P}(E)$.

On a

$$\alpha[P_i] = \alpha_i[P_i] \bigcup (E - E_i)$$

et, puisque $\alpha_i[E_i] = \emptyset$,

$$\alpha[E - E_i] = \bigcap_{j \neq i} (E - E_j) = E_i.$$

Donc

$$\alpha_2[P_i] = \alpha_{i2}[P_i] \quad \text{et} \quad \alpha_2[P] = \alpha_2 \left[\bigcup_i P_i \right] = \bigcup_i \alpha_{i2}[P_i].$$

— 17 —

Ceci établit la première partie de l'énoncé. En particulier, si $x \in E_i$ et $y \in E_j$ ($i \neq j$), on a

$$\alpha_i[x \cup y] = x \cup y \quad \text{et} \quad E_i = \beta[E - E_i],$$

ce qui montre que, si les α_i sont des relations de conjugaison, quels que soient le fermé $x + y$ et le point z , $z^*(x + y)$ n'est pas vide.

La réciproque de 6.1 découle immédiatement de 5.5 et de 5.3 :

6.2. Une condition nécessaire et suffisante pour que la RBC séparable \mathcal{E} soit décomposable en somme directe est que pour un au moins de ses points l'ensemble $\beta[a]$ ne soit pas vide. Dans ce cas on a $\mathcal{E} = \bigoplus_i (E_i, \rho)$ où les E_i sont les classes d'équivalence de E par la relation β_2 . La décomposition est unique.

7. RBC quasi singulières.

Une extension des résultats précédents permettra d'étudier les RBC telles que pour au moins un point a , $\delta[a]$ (et non pas seulement $\beta[a]$) ne soit pas vide.

Définition. — Une RBC séparable et indécomposable en somme directe sera dite « quasi singulière » si pour au moins un de ses points $\delta[a] \neq \emptyset$.

Il sera commode d'introduire les notations $\widehat{\delta\rho}$ et $\widehat{\delta'\rho}$ pour désigner respectivement les relations binaires symétriques entre points distincts :

$a \widehat{\delta\rho} b$ équivalent à $a \rho b$ et $a \delta b$;

$a \widehat{\delta'\rho} b$ équivalent à $a \rho b$ et $a \delta' b$.

7.1 Quels que soient la droite A et le point b n'appartenant pas à $A^* \cap \delta[a]$, il existe au moins une droite $B \subset \mathcal{O}_b$ en relation $\bar{\tau}$ avec A ($\bar{\tau}$, fermeture de transitivité de τ) dans laquelle b n'est pas isolé.

Supposons d'abord que b^*A soit un point unique a ; il existe $c \in b^*a_*$ séparant a de b . $c \neq b$ puisque $a \in b^*c_*$. D'après 3.6,

— 18 —

la droite $B = b + c$ est en relation τ avec A . Si, au contraire, $A \subset b^*$, il existe par hypothèse au moins un $a \in A$ tel que $a \widehat{\delta'\rho} b$ et par conséquent (4.3) un $c \in a_* b_*$.

$c^* A$ est un point unique et l'on vient de voir comment construire une droite $C \in \mathcal{O}_c$ et, puisque $b^* C$ est aussi un point unique, une droite $B \in \mathcal{O}_b$ telles que $A \tau C$ et $C \tau B$.

On en déduit immédiatement :

7.2. Si \mathcal{E} est une RBC quasi singulière, $E = \mathfrak{S}(E)$ et quel que soit $a \in E$, on a la partition

$$E = a \cup \widehat{\delta\rho}[a] \cup \widehat{\delta'\rho}[a] \cup \rho'[a],$$

où aucun des composants n'est vide.

En effet, d'après 7.1 $\widehat{\delta\rho}[a]$ et $\widehat{\delta'\rho}[a]$ ne sont vides pour a que s'ils sont vides pour tous les points de E .

De plus $a_* \neq \emptyset$ puisque \mathcal{E} est séparable.

7.3. Si B , C et D , sont trois droites distinctes telles que

$$\begin{aligned} BCD = a(a \neq \emptyset), \quad a^* B = B, \quad a^* C = C, \quad a^* D = D, \\ B \sigma C, \quad C \sigma B, \quad D \sigma B; \end{aligned}$$

alors

$$B \bar{\tau} C, \quad C \bar{\tau} D, \quad D \bar{\tau} B.$$

Soient en effet

$$a \in a_*, \quad b = \bar{a}^* B, \quad c = \bar{a}^* C, \quad d = \bar{a}^* D.$$

Toujours d'après 3.6 on a six relations du type

$$B \tau (\bar{a} + c), \quad B \tau (\bar{a} + d), \quad C \tau (\bar{a} + d), \quad \dots$$

7.4. Si \mathcal{E} est une RBC quasi singulière $a \in c_*$ entraîne $a \delta c$. Soit b un point quelconque dans $\widehat{\delta\rho}[a]$; b est conjugué avec c en vertu de l'existence de $c^*(a + b)$, et de plus $c \widehat{\delta'\rho} b$, car sinon $\widehat{\delta}[b]$ contiendrait deux points non conjugués a et c et $\beta[b]$ n'étant pas vide \mathcal{E} serait décomposable en somme directe. Il ne peut exister de point x appartenant à $a_* c_*$, car sinon les trois droites $b + c$, $b + a$ et $b + x$ satisfaisant aux conditions de 7.3 l'on devrait avoir $(b + a) \bar{\tau} (b + c)$, ce qui est impossible comme on vient de le voir.

— 19 —

Donc $a \subset c_*$ entraîne $a_* c_* = \emptyset$, c'est-à-dire (5.1) : $a \delta c$. Incidemment l'on a aussi prouvé que l'ensemble

$$\delta[a] = \widehat{\delta\rho}[a] \cup \rho'[a]$$

est singulier.

7.5. Si la droite B appartenant à a^* mais ne contenant pas ce point possède trois points distincts b , c et d , alors les trois droites $a + b$, $a + c$ et $a + d$ sont en relation $\bar{\tau}$.

Il suffit évidemment de montrer par exemple que $(a + b) \bar{\tau} (a + c)$. Soient $x \subset a^* d^* b_*$ séparant b (et c) de $a + d$ et $y \subset x^* a_*$. On a $(x + y) \tau (a + b)$ et $(x + y) \tau (a + c)$.

7.6. Si \mathcal{E} est une RBC quasi singulière,

$$b \subset \widehat{\delta\rho}[a] \text{ entraîne } \widehat{\delta'\rho}[a] \subset \delta[b].$$

Soit d un point de $\widehat{\delta'\rho}[a]$. Si $d \subset b_*$, le résultat est établi (7.4). Si $d \subset b^*$, par hypothèse $a + d$ contient au moins un troisième point et 7.5 montre que $(d + d) \bar{\tau} (a + b)$. Il résulte de 7.6 que $\widehat{\delta'\rho}[a]$ est singulier (sinon $\delta[b]$ contiendrait un doublet) et que si $a \widehat{\delta'\rho}$ et $a \widehat{\delta'\rho} d$, on ne peut avoir que $c = d$ ou $c \widehat{\delta'\rho} d$.

Cette dernière remarque permet enfin d'énoncer :

7.7. Une condition nécessaire et suffisante pour que la RBC séparable et indécomposable \mathcal{E} soit quasi singulière est que, pour au moins l'un de ses points, $\beta[a]$ ne soit pas vide. Dans ce cas il existe une partition unique de l'ensemble $E = F_1 \cup F_2$ telle que

$$F_1 \delta F_2, \quad F_1^* = F_1, \quad F_2^* = F_2.$$

Un cas particulièrement simple de RBC quasi singulière est celui de la RBC constituée par deux droites singulières en relation τ .

On observera que si A est un plan non arguésien et A^+ le plan dual de A la réunion $A \cup A^+$ peut être munie de façon évidente d'une structure de RBC quasi singulière. (si $a \subset A$, $a^* = A \cup a^+$). Celles-ci ne sont donc pas nécessairement géométriques.

— 20 —

8. Quadriques.

Définition. — On appellera « quadrique » toute RBC dont les points a_{ij} peuvent être repérés par un double système d'indices de telle sorte que $a_{ij} \rho a_{i'j'}$ si et seulement si $i = i'$ et/ou $j = j'$.

Une définition équivalente serait :

8.1. Une quadrique est une RBC identique à sa partie singulière dont l'ensemble des droites peut être partitionné en deux familles de droites (singulières) B_i et C_j telles que

$$\begin{aligned} B_i^* &= B_i, & C_j^* &= C_j, \\ C_j \cap C_{j'} &= B_i \cap B_{i'} = \emptyset, & (i \neq i' \quad \text{et} \quad j \neq j') \end{aligned}$$

et $B_i \cap C_j =$ un point quels que soient les indices i et j .

Il suffit de poser

$$B_i = \bigcup_j a_{ij}, \quad C_j = \bigcup_i a_{ij}, \quad B_i C_j = a_{ij}$$

pour vérifier l'équivalence des deux énoncés. On observera que si a_{ij} et $a_{i'j'}$ ne sont pas conjugués, l'ensemble conjugué de leur réunion est le doublet $\{a_{i'j'} \cup a_{ij}\}$ et que, par conséquent, $a_{ij} + a_{i'j'} = a_{ij} \cup a_{i'j}$ n'est une droite (spéciale) que si la RBC est quasi singulière. On fera désormais l'hypothèse que la RBC considérée est séparable, indécomposable et n'est pas quasi singulière, et l'on établira :

8.2. Si a est non singulier, \mathcal{O}_a est connexe pour τ .

Soient B et C deux droites distinctes d'intersection a et

$$b = a^* B \quad \text{et} \quad c = a^* C.$$

Si $b \rho' c$, on a $B \tau C$ (3.6). Si $b \rho c$, on a fait l'hypothèse que $b + c$ contenait au moins trois points et 7.5 livre directement $B \bar{\tau} C$.

8.3. Si a , singulier, est l'intersection de trois droites singulières distinctes B , C et D , celles-ci sont deux à deux en relation $\bar{\tau}$.

Le résultat est déjà établi (7.3) si B , C et D sont deux à deux en relation σ . D'après 7.5, on a aussi $B \bar{\tau} C$ si $B \rho C$. Comme par hypothèse deux quelconques des droites ne peuvent pas être en

— 21 —

relation τ puisque $\emptyset \neq a \subset B^*C^*D^*$, il ne reste à étudier que le cas $B \rho C$, $B \sigma D$, $C \sigma D$. Soient b , c , et d trois points distincts de a^* appartenant respectivement aux trois droites considérées et $e = d^*(b + c)$. La droite $a + e$ est en relation ρ avec D d'une part et avec C et B d'autre part. Donc, comme plus haut, $D \bar{\tau}(a + e)$ et $(a + e) \tau B$.

8.4. Si \mathcal{E} est une RBC séparable, indécomposable et non quasi singulière, une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble de ses droites ne soit pas connexe pour $\bar{\tau}$ est que \mathcal{E} soit une quadrique.

La condition est évidemment suffisante puisque si \mathcal{E} est une quadrique on a toujours

$$B_i \tau B_{i'}, \quad (i \neq i') \quad \text{et} \quad B_i \sigma C_j.$$

Réciproquement, d'après 7.1, il suffit pour que l'ensemble des droites de \mathcal{E} soit connexe pour $\bar{\tau}$ qu'il en soit de même de l'ensemble des droites contenant un point quelconque. Donc (8.2) E ne contient que des points singuliers et (8.3) par chaque point il ne passe que deux droites qui sont en outre en relation σ .

Faisons choix d'un point a_{00} contenu dans les deux droites B_0 (dont les points seront désignés par a_{i0}) et C_0 (dont les points seront les a_{0j}).

Tout point x de E est repéré de manière univoque par les deux points x^*B_0 et x^*C_0 , car si $y^*B_0 = x^*B_0 = a_{i0}$ on a certainement $x + a_{i0} = y + a_{i0}$ faute de quoi a_{i0} serait l'intersection de trois droites distinctes. Donc $x^*B_0 = y^*B_0$ entraîne $x \rho y$ et le repérage est biunivoque puisque l'intersection de deux droites est au plus un point.

On observera que si \mathcal{E} est décomposable en somme directe ou est quasi singulière, $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ n'est pas connexe pour τ . Il en est de même si \mathcal{E} , non séparable, n'est pas une droite unique.

Il suffira donc d'imposer la connexité pour τ à l'ensemble des droites de \mathcal{E} pour éliminer tous ces cas particuliers. C'est ce que nous ferons dans la seconde partie de ce Mémoire.

— 22 —

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. WEYL, *The Classical groups* (Princeton, 1939).
- [2] J. DIEUDONNÉ, *Sur les groupes classiques* (Paris, 1948).
- [3] E. BIRKHOFF et J. VON NEUMANN, *Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 835.
- [4] Cf. VAN DER WAERDEN, *Gruppen von Linearen Transformationen* (Berlin, 1935), p. 13.
- [5] Cf. E. BIRKHOFF, *Lattice Theory* (*Amer. Math. Soc.*, Coll. Pub. édition révisée, 1948). p. 56-59.
- [6] O. ORE, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 55, 1944, p. 493-513.
- [7] M. SCHÜTZENBERGER, *Rev. Sc.*, 1947, p. 782-784.
- [8] M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Théorie des treillis* (Paris, 1953).
- [9] J. RIGUET, *Relations binaires* (1952), *passim*.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*,
2^e série, t. LXXIX, janvier-février 1955.)

Année 1955 1955-2. Théorie combinatoire des relations bilinéaires classiques. II

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

RÉDIGÉ PAR M. Paul MONTEL
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

PIERRE GAUJA, *secrétaire de la rédaction*

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR G. DARBOUX,
CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR G. DARBOUX ET J. HOÜEL
DE 1876 A 1886 PAR G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
DE 1886 A 1905 PAR G. DARBOUX ET J. TANNERY
DE 1905 A 1910 PAR G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY
DE 1910 A 1917 PAR G. DARBOUX ET É. PICARD
ET DE 1917 A 1930 PAR É. PICARD ET P. APPELL.

DEUXIÈME SÉRIE
TOME — ANNÉE 19
Extrait du N°



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55 Quai des Grands-Augustins, 55

19

Ce Recueil paraît chaque mois.

**THÉORIE COMBINATOIRE
DES RELATIONS BILINÉAIRES CLASSIQUES (2^e partie) ⁽¹⁾ ;**

PAR M. MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER.

Dans la deuxième partie de ce travail, il sera toujours fait l'hypothèse que l'ensemble des droites de la RBC considérée est connexe pour la relation $\bar{\tau}$, ce qui élimine les divers cas tératologiques que nous avons discutés dans la première partie. Dans la section 9, on établira certaines conditions générales sous lesquelles le treillis des fermés d'une RBC est semi-modulaire ou modulaire. En application (section 10) on étudiera les RBC dont le centre n'est pas vide et on montrera qu'elles se ramènent à des structures plus simples. Dans la section 11 on établira une identité formelle qui est la restriction aux RBC de l'identité de Dedekind valable pour les treillis modulaires. La section 12 est consacrée aux ensembles qui sont la fermeture d'un système de points non singuliers deux à deux conjugués : géométriquement ce sont les espaces vectoriels unitaires ou orthogonaux et l'on parvient à montrer que le treillis de leurs fermés est effectivement un treillis modulaire. Enfin dans la section 13 on étudie les RBC qui ne contiennent que des points singuliers et qui sont la traduction abstraite de l'ensemble des vecteurs de norme nulle d'un espace orthogonal ou unitaire. Le résultat essentiel est que, moyennant des conditions assez peu restrictives sur la hauteur de la structure considérée, celle-ci peut être plongée dans un espace vectoriel qu'elle détermine univoquement.

9. Ensemble pseudo discrets.

Définition. — Un fermé F contenant au moins deux points distincts non alignés sera dit *pseudo discret* si pour tout $a, b \in F$, $a \lambda b$ entraîne $(a + b)FF^* \neq \emptyset$.

⁽¹⁾ Cf. *Bull. Sc. Math.*, (2), t. 79, 1955, p. 12-32.

— 2 —

Un fermé G sera dit « régulier » si quel que soit $A \subset G$, A^* n'est jamais pseudo discret.

L'exemple le plus simple d'ensemble pseudo discret est évidemment un ensemble discret fermé qui n'est ni un point unique ni une droite spéciale. Tout aussi évident sont :

9.1. Une condition suffisante pour que G soit régulier et que G^* contienne deux doublets conjugués.

En effet, si les deux doublets sont \tilde{a} et \tilde{b} , $a\rho b$ et comme $a\rho'\bar{a}$ et $\bar{b}^*(a + b) = a$, $a + b$ ne peut contenir aucun point central dans G^* et, *a fortiori*, dans $A^* \supset G^*$.

9.2. Tout ensemble complet est régulier.

9.3. Une condition nécessaire pour que l'ensemble a_*A^{**} ne soit pas connexe pour $\bar{\lambda}$ est que A^{**} soit pseudo discret de centre a^*A^{**} .

Il faut montrer que quels que soient y et y' dans a_*A^{**} , il existe une suite finie de points y_1, y_2, \dots, y_n appartenant tous à a_*A^* et tels que $y\lambda y_1; y_1\lambda y_2; \dots, y_n\lambda y'$ si $a^*A^{**} \neq A^*A^{**}$.

L'énoncé est trivial quand A^{**} est discret ou quand $A \subset a^*$. Supposons donc qu'il existe une droite $x + y$ avec $y \in a_*A^{**}$. On peut choisir x de telle sorte que $x = a^*(x + y)$. y est en relation $\bar{\lambda}$ avec tous les points de y^*A^{**} et aussi avec tous ceux de x_*A^{**} car, si z appartient à ce dernier ensemble, $u = z^*(x + y)$ n'est pas conjugué avec a et l'on a : soit $u = y$ et $z\lambda y$; soit $z\lambda u$ et $u\lambda y$.

Prenons donc maintenant un point $\bar{y} \in x_*y_*$. Si a^*A^{**} contient un point $\bar{x} \in x_*$, on a sûrement $\bar{y}\lambda y$: en effet soit t un point de $x + y$ distinct de x et de $z = \bar{x}^*(x + y)$. Soient, en outre,

$$\bar{z} = x^*(\bar{x} + y) \quad \text{et} \quad u = t^*(\bar{x} + \bar{z}).$$

u est distinct de \bar{x} et n'est pas conjugué avec a .

On a donc

$$y\lambda t \quad (\text{ou } y = t); \quad t\lambda u; \quad u\lambda \bar{z} \quad (\text{ou } u = \bar{z}); \quad \bar{z}\lambda y \quad (\text{ou } \bar{z} = y).$$

Par conséquent, a_*A^{**} ne peut contenir une paire de points distincts $\{y, y'\}$ qui ne soient pas en relation $\bar{\lambda}$ que si a^*A^{**} à la fois est singulier et est conjugué avec tous les points de a_*A^{**} . Comme, en outre, s'il existait un point u central dans A^{**} , mais

— 3 —

n'appartenant pas à a_* , on aurait $y\lambda u\lambda\bar{y}$, on a bien prouvé que a^*A^{**} doit être le centre de A . On pourrait montrer au moyen de l'énoncé suivant que la condition est aussi suffisante, mais nous n'aurons pas besoins de ce résultat.

9.4. Si $a^*B^* \neq B^*B^{**}$, il correspond à tout $c \in a + B$ aligné avec a , un point b de B^{**} tel que $c \in a + b$.

Soient $x \in a_*B^*$ séparant a de B et $b = x^*(a + c)$.

La démonstration se réduit à prouver que b est conjugué avec tous les points de B^* . Si y , aligné avec x , est un second point de a_*B^* , $z = a^*(x + y)$ est contenu dans a^*B^* , donc conjugué avec b puisque par construction,

$$b \in a + c \in a + B.$$

La droite $x + z$ est donc en relation σ avec la droite $a + b$ et $b = (x + z)^*(a + c)$ est conjugué avec y . Or, par hypothèse (9.2), a_*B^* est connexe pour $\bar{\lambda}$, donc b est conjugué avec tous les points de cet ensemble.

9.5. Si B est contenu dans l'ensemble polaire du doublet \tilde{a} et si $\tilde{a}^*B^* \neq B^*B^{**}$, alors

$$\tilde{a}^*(\tilde{a} + B) = B^{**}.$$

1° Supposons d'abord que $\tilde{a} = a$ soit un faux doublet. Tout point c de $a^*(a + B)$ est aligné avec a et, d'après 9.3, il existe pour chacun d'eux un $b \in B^{**}$ tel que

$$b + a = c + a.$$

Mais puisque $\tilde{a}\tilde{a} = \emptyset$,

$$a^*(a + b) = b = c.$$

2° Soient maintenant a et \bar{a} deux points singuliers distincts. Montrons d'abord que $c \in \tilde{a}^*(\tilde{a} + B)$ entraîne $c \in a + B$: s'il n'en était pas ainsi il existerait $x \in a^*B^*c_*$ puis $y \in \bar{a}^*(a + x) \neq x$ et y appartenant à \tilde{a}^*B^* serait conjugué avec c , ce qui ne se peut puisque $c^*(a + x)$ est le point unique a . Maintenant, a étant singulier appartient au centre de $a + B$ et est donc aligné avec tous les points de cet ensemble.

Par conséquent, toujours d'après 9.3, il existe $b \in B^{**}$ tel que

$$c \in a + b \quad \text{et} \quad c = b = a^*(a + b).$$

— 4 —

9.6. Une condition nécessaire pour que $b^*A^{**} \not\subseteq a^*A^{**} \neq A^{**}$ est que A^{**} soit pseudo discret et que son centre soit contenu dans b^* .

On peut écarter d'emblée le cas où A^{**} serait discret. Écrivons la partition

$$A = X \cup T \cup Y \cup Z,$$

où X est l'ensemble des points de b^*A^{**} alignés avec au moins un point de $Y = a^*A^{**} - b^*A^{**}$; $T = b^*A^{**} - X$ et $Z = A^{**} - a^*A^{**}$ et convenons que les minuscules x, y, \dots désignent des points génériques de l'ensemble représenté par la majuscule correspondante. Par hypothèse, ni Y ni Z ne sont vides. Comme toute droite de A^{**} contient au moins un point conjugué avec b , il existe, si A^{**} n'est pas discret, au moins une droite D telle que $a^*D = D$ et $b^*D \neq D$. Donc $X \neq \emptyset$.

Si z est aligné avec un point d'une droite $x + y$ que nous désignerons provisoirement par u , u doit être le point $a^*(x + y)$ lui-même, car sinon on aurait $z \subset a^*$. Mais, en outre,

$$u = x, \quad \text{car} \quad a^*(x + y) = b^*(x + y)$$

et $x + y$ par hypothèse ne contient qu'un seul point conjugué avec b .

Donc $X \rho Z$ et $Z \rho' Y$. De plus, $X \rho X$, car si $x_1 \neq x$, x_1 étant conjugué avec deux points z et z' , de $x + z$ est conjugué aussi avec x . De la même manière, $Y \rho X$, car on vient de voir que $y^*(x + z) \notin Z$.

Enfin, $T \rho X$ et $T \rho' Y$, car sinon $t^*(x + y)$ serait un y et l'on aurait $t \lambda y$. De même, $T \rho' Z$, car si $t + z$ était une droite il y aurait au moins un y tel que $y \rho z$ ou $y \rho t$. Donc X est le centre de A^{**} et toutes les droites de A contiennent au moins un point dans X .

9.7. Quels que soient a, b et F ,

$$b \not\subseteq a + F \neq F^{**} \quad \text{entraîne} \quad a \not\subseteq b + F$$

si l'une des quatre conditions suivantes est satisfaite :

- 1° F est régulier;
- 2° $a \subset F^*$ et $a^*a = \emptyset$;
- 3° $a \subset F^{**}$ et $a^*a = a$ et $b \subset a^*$;
- 4° $a \subset F^*$ et $a^*a = a$ et $b^*b = b \subset F^*$.

— 3 —

Par dualité, il suffit de montrer que si l'on avait $b^*F^* \subset a^*$ on ne pourrait pas avoir $a^*F^* \not\subset b^*F^*$. Le résultat est donc établi dans le cas 1°, puisque par hypothèse

$$a^*F^* = b^*F^*.$$

Dans 2°, il existe $\gamma \in a^*F^*b_*$ et la droite $a + \gamma$ est, soit hyperbolique soit parabolique de centre γ . Le point $x = b^*(a + \gamma)$ est donc distinct de γ , il n'appartient pas au centre de F^* et comme il est conjugué avec F , b , mais non pas a , on a bien $a \notin b + F$.

Dans 3°, il existe en outre $z \in F^*a_*$ et, cette fois,

$$x = b^*(z + z^*(a + \gamma)) \in F^*b^*a_*.$$

Enfin, 4°, soit G une partie fermée de F^{**} telle que $a + G \not\subset F$ et qu'il existe $f \in F$ avec $f + G = F$. Soit $u \in G^*a^*b_*$. On a encore

$$x = f^*(b + b^*(u + a)) \in F^*b^*a_*.$$

Il résulte de 9.7 et des propriétés générales des treillis semi-modulaires :

9.8. Tout fermé régulier est semi-modulaire, et l'ensemble polaire de tout fermé régulier est semi-modulaire dual.

9.9. Tout fermé singulier $R = R^*R$ est modulaire.

En effet, d'après 9.5, R est dualement semi-modulaire et d'après la condition de 9.7 il est aussi semi-modulaire.

Enfin on a :

9.10. Si A^{**} régulier contient un point non singulier x tel que

$$x^*A^{**} \subset \mathcal{S}(A),$$

alors

$$x^*A^{**} = \mathcal{S}(A).$$

Supposons qu'il existe un point singulier ν n'appartenant pas à x^*A^{**} et soit a un point de ce dernier ensemble. On a certainement $\nu \rho a$, car sinon $x^*(\nu + \nu^*(a + x))$ serait singulier, les deux droites $a + x$ et $\nu + \nu^*(a + x)$ étant paraboliques. Donc $x^*A^{**} \subset \nu^*$. Mais comme ν est singulier $\nu \subset \nu^*A^{**}$ et l'on a

$$x^*A^{**} \subset \nu^*A^{**}, \quad x^*A^{**} \neq \nu^*A^{**} \quad \text{et} \quad \nu^*A^{**} \neq A^{**},$$

qui est impossible puisque A est régulier. Il n'existe donc aucun ν singulier en dehors de x^*A^{**} , ce qui achève la démonstration.

— 6 —

10. Ensembles fermés de centre non vide.

Définition. — A étant un fermé tel que $\emptyset \neq R \equiv A^*A \neq A$, on écrira $a\theta b$, si et seulement si $(a+b)R \neq \emptyset$.

10.1. La relation $a\theta b$ est une relation d'équivalence entre points de $A - R$.

Remarquons d'abord que si $a \cup b \subset A - R$ et $(a+b)R \neq \emptyset$, $a+b$ est une droite parabolique ou singulière contenant un point unique $r \in R$ et que $a+r = b+r$ entraîne $a^*r^* = b^*r^*$, d'où, en particulier, $a^*A = b^*A$.

θ étant évidemment symétrique, il suffira de montrer que $a\theta b$ et $b\theta c$ entraînent $a\theta c$ ou encore que

$$r_1 \subset a+b \quad \text{et} \quad r_2 \subset b+c \quad (r_1 \neq r_2, r_1, r_2 \in R)$$

entraînent l'existence de $r_3 \in R$ ($a+c$).

Posons

$$r = x^*(r_1 + r_2), \quad \text{où} \quad x \in a^*c^*r_1^*.$$

On a

$$r \subset r_1 + a + c = r_1 + b + c = r_1 + r_2 + c.$$

Comme $r+r_1 \subset a^*c^*$, mais

$$x \in a^*c^*r_1^*, \quad r^*a^*c^* \neq (a^*c^*)^*(a^*c^*),$$

on a (d'après 9.7)

$$a+c = r+a = r+c, \quad \text{c'est-à-dire} \quad r = r_3.$$

10.2. A étant un fermé tel que $\emptyset \neq A^*$, $A^{**} \neq R \neq A^{**}$, il existe un fermé $B \subset A^{**}$ de centre vide tel que tout point de $A - (B \cup R)$ soit contenu dans une droite unique de la forme $r+b$, où $r \in R$ et $b \in B$. On appellera B un « noyau » de A . Si $r \in Rz_*$ ($z \in E$), tout point a de A appartient à une droite $r+c$, $c \in z^*A$, puisque $A - r \subset \lambda[r]$.

Donc $A = r + z^*A$ et z^*A contient un point au moins dans toutes les classes de $A - R$ selon la relation α entre points définie par $u\alpha v$ si, et seulement si, $u^*A = v^*A$.

Plus généralement, si les r_i forment une base indépendante de R et si les z_i sont tels que pour tout i et i' ($i \neq i'$) $r_i \rho' z_i$ et

— 7 —

$r_i \rho z_i$, alors on peut trouver un $B = \left(\bigcup z_i \right)^* A$ par induction au moyen de la construction précédente et l'on vérifie que B ne contient qu'un point de chaque α -classe en observant que si a' et a ($a' \alpha a$) appartenaient à B , ce dernier ensemble contiendrait le point $(a' + a)R$ de R , ce qui ne se peut pas, puisque $BR = \emptyset$.

10.3. Quel que soit le point x , si B est un noyau de A ,

$$x^* A = AR + x^* B.$$

En effet, à tout $a \in x^* A$ correspond par la construction précédente $b \in B$ et $x \rho a$ et $x \rho r$ entraînent $x \rho b$.

Enfin :

10.4. Si A est régulier et si B et B' sont deux noyaux de A , B et B' sont isomorphes.

On peut évidemment se limiter au cas où $B = Z^* A$, $B' = Z'^* A$, Z et Z' ne différant que par un seul point ($Z = Y \cup z$, $Z' = Y \cup z'$).

Si d et C sont respectivement un point et sous-ensemble de B , on sait (9.3) moyennant l'hypothèse que A soit régulier, que $d \in C^{**}$ équivaut à $r + d \in r + C$; par conséquent, si

$$d' = z'^*(r + d) \quad \text{et} \quad C' = z'^*(r + C),$$

on a

$$d' + r = d + r \in C + r = C' + r,$$

c'est-à-dire $d' \in C'$.

Il résulte donc finalement :

10.5. Si A de centre non vide est régulier, son image homomorphe par θ est la somme directe de son noyau avec un point singulier (qui est l'image de $A^* A$).

11. Ensembles normaux.

Définition. — On dira que T est une « base normale » (sous-entendu : de sa fermeture T^{**}) si la restriction de \mathcal{E} à (T, ρ) est identique à la somme directe de l points singuliers indépendants (formant la « partie centrale » de T), de n points non singuliers et de m doublets vrais. T (et, par extension, T^{**}) sera dit

— 8 —

« *acentral* » si $l = 0$, « *symplectique* » si $n = 0$, « *orthogonal* » si $m = 0$.

Une définition équivalente serait :

Un ensemble de points T est une « *base normale* », si les points de sa partie centrale sont indépendants et si à tout point $t \in T$ — T^*T correspond un point unique \bar{t} tel que

$$T = \bar{t} \in t^*.$$

11.1. Loi modulaire orthogonale. — Si A est la fermeture d'une base normale T et si $A + B$ est régulier, on a identiquement

$$A^*(A + A^*B) = A^*A + A^*B.$$

Le résultat est déjà prouvé (9.4) quand A est un doublet et il est trivial quand A est un point singulier unique. Procédons par récurrence sur la dimension de $A + T^{**}$ en posant

$$T = T_1 \subset T_2, \quad \text{avec} \quad T_1 \cap T_2 = \emptyset, \quad T_1 \rho T_2.$$

Il vient

$$A^* = T_1^*T_2^*, \quad A + A^*B = T_1 + T_1^*(T_1^*T_2 + T_1^*T_2^*B)$$

et, par hypothèse puisque $T_i^*T_j = T_j$,

$$\begin{aligned} T_1^*T_2^*(T_1 + T_1^*(T_1^*T_2 + T_1^*T_2^*B)) &= T_2^*(T_1^*T_1 + T_1^*(T_1^*T_2 + T_1^*T_2^*B)) \\ &= T_2^*(T_2 + T_2^*(T_2^*T_1^*T_1 + T_1^*T_2^*B)) \\ &= T_2^*T_2 + T_1^*T_1 + T_1^*T_2^*B \\ &= T_1^*T_2^*(T_1 + T_2) + T_1^*T_2^*B. \end{aligned}$$

La dernière égalité découlant de

$$\begin{aligned} T_2^*T_2 + T_1^*T_1 &= T_2^*T_2 + T_2^*T_1^*T_1 = T_2^*(T_2 + T_1^*T_1) \\ &= T_2^*(T_1^*T_2 + T_1^*T_1) = T_2^*T_1^*(T_2 + T_1). \end{aligned}$$

De 11.1 se déduisent une série de conséquences qui seront d'un usage constant par la suite.

11.2. Si P régulier est la fermeture d'une base normale T , son centre est la fermeture de la partie centrale R de sa base.

Il suffit de poser $A = R^{**}$ et $B = T - R$ et de vérifier par récurrence que $B^*B = \emptyset$.

11.3. Toute base normale est une base indépendante.

Soit t un point quelconque de T .

— 9 —

Si l'on avait $t \in (T - t)^{**}$, ceci entraînerait $(T - t)^{**} = T^{**}$, ce qui est impossible, car :

Si t appartenait à la partie centrale R de T on aurait encore $t \in (R - t)$, ce qui ne se peut puisque les l points de R sont supposés être indépendants.

Si t appartenait à $T - R$, il existerait \bar{t} formant doublet avec lui et \bar{t} serait central dans $(T - t)^{**}$ et non dans T^{**} .

11.4. Si P , régulier, est la fermeture d'une base normale $R \cup S$ où R est la base de centre de P et S celle de son noyau Q , la hauteur du centre de x^*P est

$$\begin{aligned} ht(R) + 1 & \quad \text{si } R \subset x^* \quad \text{et} \quad (x^*Q)^* x^*Q = R' \neq \emptyset, \\ ht(R) - 1 & \quad \text{si } R \not\subset x^* \quad \text{et} \quad (x^*Q)^* x^*Q = \emptyset, \\ ht(R) & \quad \text{dans les autres cas.} \end{aligned}$$

On a, d'après les résultats établis dans la section 10,

$$(x^*P)^* x^*P = x^*R + R', \quad \text{avec } x^*R \cap R' = \emptyset,$$

il suffit donc de montrer que R' est de plus un point, ce qui est évident en écrivant $Q = x^*Q + s$ (si $x^*Q \neq Q$), car si x^*Q contenait une droite D , le point s^*D serait central dans Q , ce qui est impossible par définition.

12. Ensembles orthogonaux.

Définition. — A étant un ensemble et x un point quelconque, on dira que la projection de x dans A existe, si A contient un point *unique* a tel que $a^*A = x^*A$, c'est-à-dire si $(x + A)^*$, A est un point.

12.1. — Si A régulier est la fermeture d'une base orthogonale acentrale et si $x \in E - A$, la projection de x dans A existe et x^*A possède une base normale.

Le résultat est immédiat si A est une droite hyperbolique non spéciale. Supposons-le vrai pour $ht(A') \leq n$ et soit A , de hauteur $n + 1$, fermeture de la base orthogonale $S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$. Si pour au moins une droite $s_i + s_j$ le point $x^*(s_i + s_j)$ est non singulier, le résultat est vrai car l'ensemble S' obtenu en rem-

— 40 —

plaçant dans S s_i par $s'_i = x^*(s_i + s_j)$ et s_j par $s'_j = s_i'^*(s_i + s_j)$ est encore une base orthogonale de A .

Par hypothèse, $x^*(S' - s'_i)^{**}$ possède une base normale S'' , donc une base normale de x^*A sera $S'' \cup s'_i$. De plus, comme $s_i'^*A = (S' - s'_i)^{**}$, la projection de x dans A est univoquement déterminée et est précisément la projection de x dans $(S' - s'_i)^{**}$.

Supposons maintenant que tous les points $x^*(s_i + s_j)$ soient singuliers et considérons en particulier la partie C de A fermeture de $\{s_0 \cup s_1 \cup s_2\}$.

Soient

$$s'_1 = x^*(s_0 + s_1) \quad \text{et} \quad s'_2 = x^*(s_0 + s_2),$$

$s_1'^*C$ est la droite parabolique $s_2 + s'_1$ et $y = s_2'^*(s'_1 + s_2)$ est un point non singulier. Par construction, y^*C contient les deux points distincts s'_1 et s'_2 , donc $y^*C = x^*C$ et y est la projection unique de x dans C . $S' = S - (s_0 \cup s_1 \cup s_2)$ forme avec y , s'_1 et s'_2 une base normale de A . Donc, si S'' est une base normale de $x^*(y + S')^{**}$, $S'' \cup s'_1 \cup s'_2$ est une base normale de x^*A et la projection de x dans A est encore définie univoquement comme la projection de x dans $(y \cup S')^{**}$.

12.2. Si A régulier est la fermeture d'une base orthogonale acentrale, il existe au plus un point unique u de A tel que u^*A ne possède pas de base orthogonale. Dans ce cas, u^*A est l'ensemble $\mathfrak{S}(A)$ de tous les points singuliers de A .

Considérons d'abord le cas de $A = s_0 + s_1 + s_2$, et supposons que les trois points $a^*(s_i + s_j)$ soient singuliers. On a vu que a est lui-même nécessairement non singulier et nous distinguerons :

- 1° $a^*A \subset \mathfrak{S}(A)$;
- 2° a^*A contient au moins un autre point non singulier b .

Dans le premier cas, on sait (9.10) que $a^*A \subset \mathfrak{S}(A)$ et $a^*a = \emptyset$ entraînent $a^*A = \mathfrak{S}(A)$; a est donc unique. Dans le second cas, on montrera que l'on peut construire une base orthogonale de A contenant a .

Pour cela on distinguera encore :

21. $s_0^*(a + b) = u$ est singulier. $a^*(s_0 + u) = u$ est non singulier (puisque $s_0 + u$ est parabolique), mais c étant conjugué

— 11 —

avec a et u l'est aussi avec $b \subset a + u$ et $\{a, b, c\}$ est bien une base orthogonale de A .

22. $s_0^*(a + b) =: u$ est non singulier. Soit $v =: u^*(s_1 + s_2)$, $\{s_0, u, v\}$ est une base orthogonale de A . $u^*(a + b) =: w$ est un point non singulier de $s_0 + v$ et $c =: w^*(s_0 + v)$, non singulier étant conjugué avec u et w l'est avec a et b et forme avec ces deux derniers points une base orthogonale de A .

Observons que dans le cas 1°, puisque a est unique, toute intersection x^*A est une droite (hyperbolique ou parabolique), sauf quand la projection de x dans A est a . Donc

$$x^*n(a^*nC) = a^*n(x^*nC) = \text{un point},$$

donc $a^*C = s'_1 + s'_2$ est une droite (hyperbolique spéciale).

Revenons au cas général et supposons le résultat 12.2 établi pour $ht(A') \leq n$. Le résultat est encore vrai pour $ht(A) =: n + 1$ si l'un des points $x^*(s_i + s_j)$ est non singulier ou, dans le cas contraire, si l'une des intersections $x^*(s_i + s_j + s_k)$ est une droite hyperbolique non spéciale. Reste donc le cas où

$$x^*(s_0 + s_1 + s_2) = s'_1 + s'_2,$$

par exemple ne contient aucun point non singulier. Si la base normale $S'' =: x^*A$ contient encore un point non singulier u , montrons que l'on peut remplacer dans S'' le triple de points $\{s'_1, s'_2, u\}$ par un triple de points $\{s''_0, s''_1, s''_2\}$ ayant la même fermeture, mais formant une base orthogonale : pour cela prenons pour s''_1 un point (non singulier) quelconque dans $(u + s'_1) - u$. Soient

$$s''_2 = s''_1^*(s'_2 + u) \quad \text{et} \quad v = u^*(s''_1 + s''_2),$$

v est singulier et s''_2 non singulier. Soit enfin

$$s''_0 = s''_1^*(v + u).$$

s''_0 est non singulier et étant conjugué avec s''_1 et v , il l'est aussi avec s''_2 , ce qui établit le résultat. On peut donc se limiter au cas où S'' ne contient que des points singuliers. Mais dans ce cas par hypothèse il existe un seul point dans $As''_1s''_2$ qui satisfasse aux conditions et le résultat est donc établi.

La discussion précédente permet donc de conclure :

— 12 —

12.3. Tout ensemble régulier fermeture d'une base orthogonale est modulaire.

Le champ d'application des résultats précédents est considérablement étendu si l'on admet la possibilité de trouver au moins un point singulier sur toute droite hyperbolique.

Définition. — L'ensemble A sera dit « *Pythagoricien* » si quel que soit a non singulier et b quelconque dans A , il existe au moins un x non singulier dans a^*b^* tel que l'on sache trouver un point singulier u dans $a + x$.

12.4. Si a est un point de l'ensemble pythagoricien A , a est aligné avec tous les points de $A - a$.

Soient, en effet, b , x et u comme dans la définition et

$$c = x^*(u + u^*(x + b)) \subset x^*(x + a + b) = a + b.$$

u n'étant pas isolé dans $u + a$ est central et c étant conjugué avec u et x est conjugué avec a . Donc

$$a + b = a + c = \text{une droite.}$$

12.5. Tout fermé pythagoricien A possède une base orthogonale.

Comme d'habitude, on peut supposer que $A^*A \neq \emptyset$ et $\mathcal{S}(A) \neq A$.

Procédons par récurrence en faisant l'hypothèse que l'on a déjà obtenu une base orthogonale S_1 de hauteur n d'une partie fermée B de A dont le centre contient au plus un point r . Soient s_1, s_2, \dots, s_n , les points de $S' = S_1 - S_1^*S_1$ et a un point quelconque de $A - B$. On construit successivement

$$a_1 = s_1^*(a + s_1), \quad a_2 = s_2^*(a_1 + s_2) \quad \text{et} \quad a_n = s_n^*(a_{n-1} + s_n)$$

et l'on vérifie que a_i est conjugué avec tous les s_j ($j \leq i$).

Donc $S'_1 \cup a_n$ forme une base normale de $S'_1 + a$.

Si $S_1 = S'_1$, le résultat est établi. Si $S'_1 = S_1 \cup r$ (r , central), il est toujours possible de choisir initialement a non conjugué avec r puisque $A^*A = \emptyset$ et que a_n est aussi non conjugué avec r . Si a_n est non singulier, $a_n + r$ est une droite hyperbolique et une base de $S_1 + a$ est, par exemple, $S'_1 \cup a_n \cup a_n^*(r + a_n)$.

Si a_n est singulier, considérons, par exemple, le fermé $T = r + a_n + s_1$. On a vu plus haut comment trouver une base

— 13 —

orthogonale acentrale de T et le résultat est enfin établi dans tous les cas.

Remarque. — La discussion qui mène aux énoncés 12.1 et 12.3 n'est rendue délicate que par la nécessité d'éliminer les cas où existent des droites hyperboliques spéciales. Géométriquement ces difficultés correspondent au cas où le corps de base serait un corps modulo 2^p qui présente aussi des particularités notables dans l'étude des groupes classiques.

13. Ensembles symplectiques.

Dans cette section il sera toujours fait l'hypothèse que E est une RBC réduite à l'ensemble de ses points singuliers.

13.1. $A = A^*$, régulier et de centre vide étant la fermeture d'une base symplectique et x étant un point quelconque de $E - A^*$, on peut construire une base symplectique

$$S = S' \cup \tilde{u} \cup \tilde{v}$$

de A telle que

$$x^*A = S' \cup \tilde{u} \cup \alpha, \quad \text{avec } \alpha \subset \tilde{u} + \tilde{v}.$$

Procédons par récurrence sur le nombre des doublets d'une base de A contenus dans x^* . Soient deux doublets \tilde{s} et \tilde{t} tels que x ne soit conjugué ni avec s ni avec t . Posons

$$s' = x^*(s + t), \quad \tilde{s}' = x^*(\tilde{s} + \tilde{t}), \quad t' = t, \quad \tilde{t}' = \tilde{s}'(s + s^*(\tilde{s} + \tilde{t})).$$

On a

$$\tilde{s}' \subset x^* \quad \text{et} \quad \tilde{s}' + \tilde{t}' = \tilde{s} + \tilde{t}.$$

La construction précédente permet donc à chaque fois d'augmenter le nombre des doublets indépendants conjugués avec x et il ne reste à discuter que le cas où un seul doublet v n'est pas contenu dans x^* .

Deux possibilités existent :

1° $x^*(v + \tilde{v}) =$ un point r ; dans ce cas x^*A est la fermeture de $r \cup (S - \tilde{v})$ et admet le centre r . Ceci se présente en particulier chaque fois que $x \in A$ puisque alors $r = x$;

— 14 —

2° $x^*(v + \bar{v}) = \emptyset$. Soient

$$\tilde{u} \subset x^*, \quad z \subset u + v - (\tilde{u} \cup \tilde{v}), \quad a = x^*(z + z^*(\bar{u} + \bar{v})).$$

Par construction,

$$a \subset \tilde{u} + \tilde{v}; \quad a \not\subset (S + v)^{**}$$

et le résultat est établi. On observera que cette construction serait encore possible si $x^*(v + \bar{v}) \neq \emptyset$. Enfin, si A est complet (c'est-à-dire si $v + \bar{v}$ est une droite hyperbolique spéciale), on peut toujours se ramener au premier cas et démontrer ainsi que A est modulaire.

Dans le cas général, les choses sont sensiblement plus compliquées et nous aurons besoin de toute une série de résultats préliminaires avant d'arriver au théorème.

Étant donné A de centre vide, fermeture d'une base symplectique de hauteur au moins égale à 6, on supposera qu'il est possible de trouver dans E une base P et une base Q toutes deux de hauteur au moins égale à 4 et telles que $S \cup P \cup Q$ soit aussi une base symplectique. On posera

$$B = (S + P)^{**} \quad \text{et} \quad C = (S + Q)^{**}.$$

Évidemment, A est régulier et est l'intersection de B et de C .

On définira une relation d'équivalence α entre points de E par

$$x \alpha y \Leftrightarrow x^* A = y^* A$$

et l'on rappellera que par $\alpha[x]$ on entend la α -classe de x , c'est-à-dire l'ensemble des y tels que $x \alpha y$. Enfin il sera commode de distinguer trois types de points de E :

1° Les points α -équivalents à \emptyset , c'est-à-dire les points x tels que $A \subset x^*$. Leur ensemble forme une seule α -classe et, d'après la loi modulaire orthogonale,

$$\alpha[\emptyset] \cap B = P^{**}.$$

2° Les points « réels » formant l'ensemble $\mathcal{R}(E)$

$$x \in \mathcal{R}(E) \Leftrightarrow x \not\subset \alpha[\emptyset] \quad \text{et} \quad \alpha[x] \cap A = \hat{x} \neq \emptyset.$$

D'après 13.1, en effet, si $A \not\subset x^*$, ou bien $x^* A$ est de centre vide

— 15 —

(et, par conséquent, il n'existe aucun $a \in A$ tel que $a \alpha x$), ou bien il existe un point unique (disons \hat{x}) qui est le centre de x^*A tel que $x^*A = \hat{x}^*A$. Les réels sont donc les points qui possèdent une projection \hat{x} dans A .

3° Les autres points de E seront appelés « virtuels ».

Nous établirons maintenant :

13.2. \tilde{p} étant un doublet de P et b un point de

$$(S + p)^{**} = (p^{**} \cup S^{**}),$$

$x \in \mathcal{R}(E)$ est équivalent à $x^*p^{**} \neq \emptyset$.

En effet, si

$$S = S' \cup \tilde{x} \cup \tilde{u},$$

le point $\tilde{x}^*(x + \hat{x})$ appartient à \tilde{p}^{**} et, réciproquement, si $x \cap p \subset \tilde{p}^{**}$, le point $\tilde{p}^*(x + p) = \hat{x}$ appartient à A .

13.3. Quel que soit x , l'intersection $\alpha[x]B$ contient au moins un point b et

$$(\alpha[x] \cap B) \cup P^{**} = b + P.$$

En particulier, si $x \in \mathcal{R}(E)$,

$$(\alpha[x] \cap B) \cup P^{**} = \hat{x} + P.$$

D'après 13.1, x^*A (si $x \notin A^*$) est égal à $S' + \tilde{u} + a$, où $a \in \tilde{u} + \tilde{v}$ et où $S' \cup \tilde{u} \cup \tilde{v}$ est une base symplectique de A . Or

$$\alpha[x] \cap B = (x^*A)^*B = (S' + \tilde{u} + a)^*(S' + \tilde{u} + \tilde{v} + P) = a^*(\tilde{v} + P).$$

De nouveau, d'après 13.1,

$$a^*(\tilde{v} + P) = (P - \tilde{p}) + \tilde{p} + b,$$

où $b \in \tilde{p} + \tilde{v}$ appartient à $\alpha[x]$. Incidemment on a montré :

13.3 bis. Quel que soit le doublet \tilde{p} dans A^* , et le point $x \in E$,

$$\alpha[x] \cap (A + p) \neq \emptyset.$$

13.3 ter. Dans les mêmes conditions, quel que soit $\tilde{q} \in A^*\tilde{p}^*$, y non α -équivalent à \emptyset et $a \in (A + p) \cap A$, il existe $b \in \alpha[y] \cap (A + \tilde{p} + \tilde{q})$ aligné avec a .

— 16 —

En effet, il existe toujours au moins un $p \in \tilde{p}$ non conjugué avec α . Considérons

$$c \in \alpha[y] \cap (A + \tilde{q}) \subset p^*$$

et la droite $c \vdash p$ dont tous les points sauf p appartiennent à $\alpha[y]$.

On a

$$b = \alpha^*(p + c) \neq p.$$

13.4. Une condition nécessaire et suffisante pour que $y^*z^*A \subset x^*$ (quand x, y et z appartiennent à $B - P^{**}$) est qu'il existe trois points x', y' et z' sur une certaine droite D de B tels que $x' \alpha x, y' \alpha y$ et $z' \alpha z$.

La condition est évidemment suffisante, car $x' \subset y' \vdash z'$ entraîne

$$y'^*z'^*A = y^*z^*A \subset x'^*A = x^*A.$$

Dans tous les cas, on sait construire y' et z' alignés (d'après 13.3 *ter*). Si l'on avait $y \alpha z$, on aurait aussi $x \alpha y$ et tous les points de $D = y' \vdash z'$ satisferaient à la condition.

Si y et z ne sont pas α -équivalents, mais si

$$ht(y^*z^*A) = ht(A) - 2,$$

le résultat est prouvé, car une base de x^*A de la forme $\alpha \cup y^*z^*A$ peut être trouvée et l'on aura

$$x' = \alpha^*(y' \vdash z') \subset \alpha[x].$$

Or si $ht(A) \geq 6$, y^*A n'est pas pseudo-discret puisqu'il contient au moins deux doublets conjugués (9.1) et, par conséquent,

$$ht(y^*z^*A) = ht(y^*A) - 1 = ht(A) - 2,$$

ce qui achève la démonstration.

Définition. — x et y étant deux points de $B - P^{**}$, on posera

$$x \omega y \Leftrightarrow x^* \cap C \cap \alpha[y] \neq \emptyset.$$

13.5. La relation ω est une relation entre α -classes de B .

En effet, si $y' \subset C \cap \alpha[y]$ est conjugué avec x , ce point est aussi conjugué avec tous les points de $x \vdash P \supset \alpha[x] \cap B$. Réciproquement, si $y' \rho x$, ceci entraîne $y'' \rho x$ pour tout

$$y'' \subset \alpha[y'] \cap C = \alpha[y] \cap C.$$

— 17 —

Une définition équivalente serait donc

$$\alpha[x] \omega \alpha[y] \Leftrightarrow (\alpha[x] \cap B) \rho (\alpha[y] \cap C).$$

13.6. ω est une relation symétrique. — Supposons d'abord que y est réel. Soit

$$y' \subset \alpha[y] \cap C \subset \hat{y} + Q.$$

Comme $x \rho Q$, $x \rho y'$ et $x \rho \hat{y}$ sont équivalents. Donc si x' est un point de $\alpha[x] \cap C$, on a

$$(\alpha[y] \cap B) \rho (\alpha[x] \cap C).$$

On remarquera que si x et y sont réels,

$$\alpha[x] \omega \alpha[y] \Leftrightarrow \hat{x} \rho \hat{y}$$

et, en particulier, $\alpha[x] \omega \alpha[x]$. Supposons maintenant que ni x ni y ne sont réels. On peut se ramener au cas où ils appartiennent tous deux à $A + \tilde{p}$. Soit encore $y' \subset \alpha[y] \cap C$. Prenons un point quelconque a dans $y'^* x_* A$ et construisons

$$z = x^*(a + p) \subset x^* y'^*, \quad t = \bar{p}^*(x + z) \subset x^* y'^*.$$

z et t sont réels, car $p^*(t + \bar{p})$ et $\bar{p}^*(z + p)$ appartiennent à A . Donc $y' \subset z^* t^*$ et, par conséquent, $y \subset \hat{z}^* \hat{t}^*$. Soient maintenant

$$z' \subset \alpha[z] \cap C \quad \text{et} \quad t' \subset \alpha[t] \cap C$$

deux points alignés que l'on sait toujours trouver si $ht(C) \geq 4$, $(z' + t') \cap \alpha[x] = x'$ est un point (13.4) et $y \subset \hat{z}^* \hat{t}^*$ entraînant $y \subset z'^* t'^*$, il vient $y \rho x'$, ce qui achève la démonstration.

13.7. THÉORÈME. — *La structure quotient de B par la relation α est une RBC complète pour la relation de conjugaison ω , la classe $\alpha[\emptyset]$ correspondant à l'ensemble vide.*

Définissons $\alpha[x] + \alpha[y]$ comme l'ensemble des α -classes appartenant à $\omega[\alpha[x] \cap \omega[y]]$, c'est-à-dire

$$\alpha[z] \subset \alpha[x] + \alpha[y] \Leftrightarrow x^* y^* C \subset z^*.$$

Si $x \omega t$ et $y \omega t$, $z \subset x + y$ entraîne $z \omega t$. Donc

$$z \subset x + y \quad \text{entraîne} \quad \alpha[z] \subset \alpha[x] + \alpha[y].$$

— 18 —

En particulier $x \alpha y$ entraîne

$$\alpha[x] = \alpha[y] = \alpha[x] + \alpha[y].$$

Réciproquement, quels que soient x et y , il existe x' et y' qui leur sont α -équivalents et qui sont alignés. L'ensemble des α -classes $\alpha[z] \subset \alpha[x] + \alpha[y]$ est donc en correspondance biunivoque avec celui des points de $x' + y'$.

Enfin, si $\alpha[x] \neq \alpha[y]$ et quel que soit $u \in B - P^{**}$, soit u' un point de $\alpha[u] \cap C$. $v = u'^*(x' + y')$ appartient à une classe qui est en relation ω avec u , ce qui montre que l'intersection $\alpha[u] \cap (\alpha[x] + \alpha[y])$ n'est jamais vide ou, encore, que $B | \alpha$ est bien une RBC complète.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*,
2^e série, t. LXXIX, Juillet-Août 1955.)

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur les problèmes de communications métriques.*

Note de M. MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER, présentée par M. Joseph Pérès.

On dira qu'un problème de communications est *métrique* (opposé à *discret* ou *booléen*) si la fonction de perte est une forme quadratique définie $\mathcal{L}(\xi - x)$ ne s'annulant que pour $\xi = x$, entre les vecteurs ξ et x qui représentent respectivement l'état à transmettre et l'état décodé (on dit aussi : *estimé*) ⁽¹⁾. Dans ce cadre rentrent évidemment les problèmes classiques d'estimation (et ceux propres aux séries temporelles) mais aussi l'analyse discriminative ⁽²⁾ et la Théorie des « D²-statistics » de P. C. Mahalanobis ⁽³⁾.

On supposera désormais que ξ possède une distribution *a priori*.

Dans la pratique la transmission de l'état de ξ comportera les étapes suivantes :

1° une *partition du domaine de variation* Ω de ξ en sous-domaines disjoints $\Omega_i (i \in I)$;

2° l'*émission d'un message* $\mu_i (i \in I)$ repérant de façon codée celui des Ω_i qui contient ξ dans l'épreuve considérée;

3° la *transmission de* μ_i qui, reçu sous forme d'un message $m_j (j \in J)$, n'est identique à μ_i que si la transmission est exempte de bruit;

4° Le *décodage de* m_j c'est-à-dire l'attribution à tout m_j d'une valeur estimée x_j telle qu'en moyenne (à la fois sur la répartition *a priori* de ξ et la répartition des erreurs de transmission), $\mathcal{L}(\xi - x)$ soit minimum.

On introduira les notations suivantes :

$P(i, j)$, probabilité *a priori* pour que $\mu = \mu_i$ et $m = m_j$;

$\pi_i = \sum_j P(i, j)$, probabilité *a priori* pour que $\mu = \mu_i$;

$p_j = \sum_i P(i, j)$, probabilité *a priori* pour que $m = m_j$;

⁽¹⁾ B. MANDELROT, *Publ. Inst. Stat. Univer. Paris*, 2, 1953, p. 55.

⁽²⁾ R. A. FISHER, *Ann. Eug.*, 7, 1936, p. 179.

⁽³⁾ *J. Asiat. Soc. Beng.*, 26, 1930, p. 541.

(2)

 E_i , opérateur de moyenne conditionnelle quand $\mu = \mu_i$; E^j , opérateur de moyenne conditionnelle quand $m = m_j$;

$$E = \sum_i \pi_i E_i = \sum_j p_j E^j;$$

 $\eta_i = E_i \xi$, valeur moyenne (*a priori*) de ξ quand $\mu = \mu_i$; $\gamma_j = E^j \xi$, valeur moyenne (*a posteriori*) de ξ quand $m = m_j$.

Évidemment :

$$\bar{\xi} = Ey = E\eta = E\xi.$$

On supposera pour simplifier que $\mathcal{L}(\xi - x)$ est la norme du vecteur $\xi - x$, c'est-à-dire que les erreurs sur toutes les composantes ont la même pondération.

1° *Le décodage est optimal quand on choisit pour chaque x_j la valeur γ_j (*) :*

En effet

$$E(\xi - x)^2 = E(\xi - \eta + \eta - x)^2 = \sum_i \pi_i E_i(\xi - \eta_i)^2 + 2 \sum_i \pi_i E_i(\xi - \eta_i)(\eta_i - x) + E(\eta - x)^2.$$

Le premier terme est indépendant de la transmission et du décodage et est égal à $E(\xi - \bar{\xi})^2 = E(\eta - \bar{\xi})^2$. Le second terme est nul puisque, pour chaque μ_i , les vecteurs $\xi - \eta_i$ et $\eta_i - x$ sont indépendants et que le premier d'entre eux a une valeur moyenne nulle. Le troisième terme s'écrit encore : $\sum_j p_j [E^j(\eta)^2 - 2x_j E^j \eta + x_j^2]$ et atteint bien son minimum : $E(\eta - \bar{\xi})^2 = E(\gamma - \bar{\xi})^2$ pour $x_j = E^j \eta = \gamma_j$. On observera que si Ω est décomposable en sous-espaces $\Omega^{(\alpha)}$ tels que les projections correspondantes $\xi^{(\alpha)}$ de ξ soient indépendantes et que l'on effectue le codage et la transmission de telle sorte que les erreurs soient indépendantes elles aussi, alors, d'une part x est une somme de vecteurs indépendants $\gamma^{(\alpha)}$, d'autre part $E(\xi - x)^2$ est une somme de termes de même forme relatifs à chacune des projections.

Il est logique de normaliser $E(\xi - x)^2$ et de considérer comme mesure de l'efficacité de l'ensemble du processus de communication le rapport

$$\lambda = 1 - \frac{E(\xi - x)^2}{E(\xi - \bar{\xi})^2}.$$

Les résultats précédents montrent alors que la valeur maximum de λ est de la forme $\alpha\tau$ où les coefficients

$$\alpha = \frac{E(\eta - \bar{\xi})^2}{E(\xi - \bar{\xi})^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{E(\gamma - \bar{\xi})^2}{E(\eta - \bar{\xi})^2}$$

sont toujours compris entre 0 et 1.

(*) Ceci généralise : le théorème II.2-2 dans D. BLACKWELL et M. A. GIRSHICK, *Theory of Games*, New-York, 1954, p. 299.

(3)

Le premier ne dépend que de la partition $\{\Omega_i\}$ et exprime donc la perte d'information due au groupage qui remplace les ξ par les η [cf. ⁽⁵⁾]. Le second au contraire dépend à la fois de γ et des paramètres caractérisant la transmission et quelques soient les x , n'est égal à 1, que si la transmission est sans bruit.

Dans le cas important où $I = J$ et où les probabilités $P(i, i) \cdot \pi_i^{-1}$ sont uniformément $\geq 1 - \varepsilon$, on montre que

$$\tau \geq 1 - \max \left(\frac{P(i, j) + P(j, i)}{\pi_i \pi_j} \right) \geq 1 - \varepsilon \max (\pi_i^{-1} + \pi_j^{-1}),$$

en considérant le décodage (non optimal) qui consiste à prendre $x_j = \eta_j$ puisque alors $E(\eta - x)^2 = \sum_{ij} P(i, j) (\eta_i - \eta_j)^2$.

(⁵) M. P. SCHÜTZENBERGER, *Publ. Inst. Stat. Univers. Paris*, 1953, p. 49 et seq.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 240, p. 724-726, séance du 14 février 1955.)

Année 1955 1955-4. Les problèmes de diagnostic et l'axiomatique des informations

91604

REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES

PURES ET APPLIQUÉES
PUBLIÉE AVEC LE CONCOURS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ET BULLETIN DE L'ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

91604

Président du Comité de Direction :

Georges BOULIGAND

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Correspondant de l'Institut

Vice-Président

Jean VERNE

Professeur à la Faculté de Médecine de Paris

Membre de l'Académie de Médecine



Tome LXII - 1955

SOCIÉTÉ D'ÉDITION D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

5, place de la Sorbonne - PARIS V^e

Les problèmes de diagnostic et l'axiomatique des informations⁽¹⁾

par P. SCHÜTZENBERGER

Le problème de la définition rigoureuse de l'information s'est posé aux physiciens et aux géomètres depuis le jour où des considérations d'ordre technologique ont fourni une base concrète à l'évaluation simultanée de sa valeur et du coût de son acquisition. Ainsi, en statistique, comme dans le domaine des télécommunications est apparu le besoin de chiffrer l'efficacité relative des procédures ou des appareillages et pour cela d'introduire une certaine quantité nouvelle « l'information » jouant, dans ces problèmes, un rôle analogue à celui de l'énergie dans les sciences développées à partir de la construction des machines.

D'autre part, dans la logique, dans certains chapitres de la physique théorique, etc..., on avait cherché également à définir certaines « informations » et peut-être près d'une dizaine de concepts différents portant ce nom peuvent être recensés dans la littérature. Sans méconnaître les mérites propres de ces diverses approches, nous essayerons ici une synthèse provisoire qui rassemble certains d'entre eux sous une axiomatique unique, à la fois formelle et pragmatique : formelle, parce que nous chercherons selon un mouvement classique dans les sciences de la nature non point tant ce qu'est l'information, qu'une expression analytique susceptible d'en exprimer les variations tout en satisfaisant à des critères abstraits d'additivité ou de commutativité ; pragmatique en ce sens que nous postulerons ceci : l'information ne peut être définie que relativement à une décision à prendre, à un but à atteindre et que notre objectif sera en définitive « des informations ».

* * *

Fixons d'abord les conditions dans lesquelles il y aura pour nous *changement d'information* : essentiellement quand un observateur O, en présence d'un système physique dont l'état ξ lui est inconnu, effectue une observation qui élimine diverses possibilités qui existaient *a priori*.

(1) Les mots *information*, *diagnostic*, ont beaucoup dépassé le sens qui leur est attribué dans la vie courante : ce qu'indique, d'ailleurs, la première section du présent article, dont le thème est inséparable d'une étude de M. Benoit MANDELBROT, qui paraîtra bientôt.

Les connaissances que O possède sur ξ , nous supposons qu'elles peuvent être réduites à une distribution de probabilités *a priori*, chacun des états possibles X_1, X_2, \dots, X_n ayant une probabilité $P(X_1), P(X_2), \dots, P(X_n)$ d'être l'état inconnu de ξ .

Naturellement, il serait tout à fait concevable *in abstracto* que ξ fut susceptible de prendre un état non pas dans un ensemble discret, mais sur un continuum uni ou multi-dimensionnel ; c'est ce qui paraît légitime quand ξ est une mesure. De fait, la restriction que nous nous imposons en quantifiant ξ est assez peu importante, car en définitive toute mesure n'est jamais effectuée qu'avec une précision finie et nous pouvons donc toujours supposer qu'il existe une partition discrète ($X_1 ; X_2 ; X_3 ; \dots, X_n$) de l'intervalle de variation de la variable considérée.

La seconde restriction, que ξ soit une aléatoire, est plus fondamentale et écarte malheureusement le cas important où ξ s'obtiendrait non pas par une mesure, mais par un calcul ou par un raisonnement, à moins que par un artifice l'on ne parvienne à réintroduire les probabilités. Notons, cependant, que nous n'exigeons pas que les $P_r(X_i)$ soient entièrement spécifiés : il est parfaitement possible et c'est là d'ailleurs le cas le plus intéressant, que dans leur expression interviennent des paramètres non aléatoires encore qu'inconnus. Nous symboliserons ceux-ci par θ .

D'autre part, l'observateur a un but à atteindre pour lequel la détermination de ξ n'est qu'un moyen.

Par exemple, selon les trois cas classiques :

- O cherche à estimer la valeur de θ ;
- O veut savoir si θ est ou non contenu dans un certain intervalle (ξ_0, ξ_1) (problèmes de test d'hypothèse) ;
- O veut savoir si θ est ou non dans un certain sous-ensemble Ξ des (X) (problèmes de tri).

Dans tous les cas, il lui est donc indifférent, du point de vue du « gain » qu'il réalise en effectuant ses observations que ξ soit un état ou un autre du moment qu'une certaine fonction donnée *a priori* de ces états a la même valeur.

Pour chaque situation concrète, il existe une *relation d'équivalence* (exactement une *projection*) entre les états X_1 .

A la base se trouve évidemment le problème plus simple où l'objectif à atteindre est simplement la détermination de ξ : c'est le cas limite commun à tous les autres et celui qui se rencontre en théorie des communications en l'absence de bruit : nous l'appellerons le *problème de diagnostic*, selon une terminologie que nous avons introduite avec M. VILLE.

Venons-en maintenant au mécanisme même des observations : *a priori*, on pourrait considérer des observations quelconques dont chacune aurait pour seul effet de changer les $Pr(X_i)$. Pour des raisons

224 P. Schützenberger : Les problèmes de diagnostic T. LXII

de simplicité, on se bornera cependant à considérer des suites d'observations constituant des « diagnostics séquentiels ».

En empruntant aux systématiciens — botanistes ou zoologistes — leur notation par clefs dichotomiques nous pourrions, par exemple, représenter ainsi deux procédures typiques pour le diagnostic séquentiel de ξ entre les cinq états X_1, X_2, \dots, X_5 .

PROCÉDURE I

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ observation} \\ \xi \in X_1 + X_2 \\ \text{ou } \xi \in X_3 + X_4 + X_5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{si } \xi \in X_1 + X_2 \\ 2^{\text{e}} \text{ observation} \\ \xi = X_1 \text{ ou } \xi = X_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \xi = X_1 \\ \xi = X_2 \end{array} \right. \\
 \left. \begin{array}{l} \text{si } \xi \in X_3 + X_4 + X_5 \\ 2^{\text{e}} \text{ observation} \\ \xi = X_3 \\ \text{ou } \xi \in X_3 + X_4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xi = X_3 \\ \text{si } \xi \in X_3 + X_4 \\ 3^{\text{e}} \text{ observation} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \xi = X_3 \\ \xi = X_4 \end{array} \right.
 \end{array}$$

PROCÉDURE II

$$\begin{array}{l}
 1^{\text{re}} \text{ observation} \left\{ \begin{array}{l} \xi = X_1 \\ \text{si } \xi \neq X_1 \\ 2^{\text{e}} \text{ observation} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = X_2 \\ \text{si } \xi \neq X_2 \\ 3^{\text{e}} \text{ observation} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = X_3 \\ \text{si } \xi \neq X_3 \\ 4^{\text{e}} \text{ observation} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = X_4 \\ \xi = X_5 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Il est clair que si les probabilités *a priori* de X_1, X_2, \dots, X_5 étaient respectivement $1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ et $1/16$, la procédure II serait préférable puisqu'elle n'entraînerait en moyenne que $1/2 + 2 \times 1/4 + 3 \times 1/8 + 4 \times (1/16 + 1/16) = 15/8$ observations contre $2 \times (1/2 + 1/4) + 2 \times 1/8 + 3 \times (1/16 + 1/16) = 17/8$ observations pour la première procédure.

Nous postulons :

A chaque observation est attachée une partition de l'ensemble des X_i en plusieurs sous-ensembles disjoints et l'observation nous apprend quel est celui d'entre eux qui contient ξ (*). L'effet sur les $Pr(X_i)$ est donc particulièrement simple : $Pr(X_i)$ devient zéro ou est multiplié par un coefficient qui normalise les probabilités des états encore possibles après l'observation.

Nous sommes en mesure maintenant de définir ce que nous appellerons une « quantité d'information » : à une observation à laquelle

(*) Par exemple : la première observation de la procédure I correspond à la partition $(X_1 + X_2) (X_3 + X_4 + X_5)$. La deuxième observation de la procédure II correspond à $(X_2) (X_3 + X_4 + X_5)$, etc...

est attachée une partition (X) (Y) ... (Z), nous ferons correspondre « l'information » $H(X, Y, \dots Z)$ qui est une fonctionnelle continue et symétrique des probabilités $Pr(X), Pr(Y), \dots Pr(Z)$ satisfaisant à l'axiome unique d'associativité suivant :

Axiome : si $\xi \in X + Y + Z$ et si X, Y et Z sont disjoints, on a identiquement :

$$A : H(X, Y + Z) + Pr(Y + Z) H(Y, Z) = H(X, Y, Z)$$

La signification de cet axiome est immédiate si l'on interprète H comme un coût : il revient à postuler que le coût moyen du diagnostic de ξ entre X, Y et Z est exprimable en fonction du coût des deux observations dichotomiques ((X) (Y + Z)) et ((Y) (Z)) d'une façon qui — en raison de la symétrie — ne dépend pas du choix de ces dichotomies : ou si l'on veut, que les trois schémas suivants ont le même coût :

Procédure (1)	Procédure (2)	Procédure (3)
$\left\{ \begin{array}{l} \xi = X \\ \xi \in Y + Z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = Y \\ \xi = Z \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \xi = Y \\ \xi \in X + Z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = X \\ \xi = Z \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \xi = Z \\ \xi \in X + Y \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = X \\ \xi = Y \end{array} \right\}$

L'axiome est donc tout aussi bien un *axiome de commutativité* ou encore de *linéarité de la combinaison des coûts*.

Il ne saurait entrer dans notre propos de dériver de l'équation précédente la forme générale de H par un raisonnement rigoureux et nous nous bornerons à indiquer que celui-ci se ferait en deux étapes successives :

1. H est une somme de termes de la forme

$$h(X) + h(Y) + h(Z) - h(X + Y + Z)$$

où h est une certaine fonctionnelle qui

2. a la forme particulière :

$$Pr(X) D \log Pr(X)$$

où D symbolise un opérateur linéaire quelconque.

On aura donc pour valeur de l'information attachée à la partition X_1, X_2, \dots :

$$\sum P(X_i) D \log P(X_i)$$

Considérons maintenant les trois cas classiques.

Si D est une constante, H, au signe près, est l'entropie attachée à la distribution *a priori* de ξ . Un théorème fondamental montre alors que pour effectuer le diagnostic complet de π , il faudra en moyenne un nombre d'observations dichotomiques qui ne saurait être inférieur à C^e/H , quelle que soit la procédure employée.

226 P. Schützenberger : Les problèmes de diagnostic T. LXII

Si les $P(X)$ dépendent d'un paramètre inconnu et que nous cherchions à estimer la valeur de celui-ci au moyen d'un échantillon contenant n valeurs indépendantes de ξ , la précision de notre estimation (exprimée par sa variance) ne peut pas être inférieure à C^2/F où F est l'information correspondant à l'opérateur $D = - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$: c'est le théorème de FRECHET-DARMOIS.

Si, dans les mêmes conditions, nous voulons seulement savoir si le paramètre θ est ou non compris dans un certain intervalle (θ_0, θ_1) et ceci avec des probabilités d'erreur fixées *a priori*, il existe encore une information qui livre une borne inférieure au nombre minimum moyen d'observations qui doivent être effectuées.

Or, si les deux derniers problèmes, l'estimation d'un paramètre inconnu et le test d'une hypothèse, constituent en quelque sorte l'essentiel de la statistique mathématique, le premier problème, au contraire, appartient à un chapitre distinct du calcul des probabilités la théorie des communications. Ainsi donc, l'information telle qu'elle a été introduite ici semble destinée à jouer un rôle unificateur malgré — ou peut-être à cause — du caractère formel de sa définition.

P. SCHÜTZENBERGER

La statistique en psychiatrie

par

M. P. SCHÜTZENBERGER

Docteur ès-sciences mathématiques.

En psychiatrie, comme ailleurs, la question de la valeur des méthodes statistiques se trouve quelque peu obscurcie par les sens différents qu'a pris le mot statistique lui-même au cours de l'évolution de cette technique. Tantôt on n'y veut voir qu'une fonction comptable, limitée à recenser et à mettre en graphiques certains aspects numériques du fonctionnement d'un service ou d'une entreprise; tantôt, au contraire, on demande aux statisticiens de porter un jugement sur la valeur probante d'une série d'expériences ou d'observations. Entre ces limites se situe évidemment toute une gamme d'intermédiaires, mais il est commode d'établir clairement la distinction entre deux attitudes ou plutôt deux méthodes répondant d'ailleurs à des buts distincts :

— l'une qui a trouvé son sommet dans l'art de la comptabilité, que celle-ci soit exclusivement financière ou dénombre les scarlatines en Finlande et les agrumes consommés au Pérou;

— l'autre qui n'est en définitive qu'un chapitre du calcul des probabilités : c'est la « statistique mathématique », et c'est celle dont il sera surtout question ici.

On pourrait sans peine balancer les antithèses entre ces deux conceptions. J'ai sous les yeux deux documents, dont l'un affirme que 47.685.917 habitants ont été recensés en 19... dans un pays où naissent et meurent chaque jour près d'une dizaine de milliers d'hommes, et, à cette précision qui laisse rêveur, le second répond que la thèse d'un accroissement de la même population est « prouvée au niveau de 5 % » (sous-entendu : « de chances d'erreur et qu'il s'agisse en vérité plutôt d'une décroissance »). Plus profitable sera donc de considérer ces points de vue comme deux étapes successives au cours d'un seul et même raisonnement général, dont on s'efforcera ici d'indiquer les grandes lignes.

1) La première question est celle du **bout exact de l'analyse statistique envisagée**. Il est parfois surprenant qu'un chercheur, dont l'autorité rend impossible l'idée seule de suggérer le moindre changement aux méthodes avec lesquelles il réunit ses observations, vienne déverser celles-ci devant un statisticien professionnel avec la ferme, mais unique recommandation « d'en tirer toutes les conclusions statistiquement valables ». La victime n'a évidemment d'autre ressource que de suivre l'exemple du *Cheshire Cat*, quand Alice lui pose une question aussi vague. Au risque d'être dogmatique, il faut répéter que les « expériences pour voir » ne montrent généralement rien quand s'y ajoutent encore des difficultés de nature statistique et que, si celui qui a compilé des documents

ignore quelles déductions peuvent en être tirées, nul ne peut le savoir pour lui. C'est une boutade, mais non sans valeur, que d'exiger d'un chercheur, avant tout autre travail, la rédaction — conclusions comprises — de sa thèse ou de son mémoire; il ne lui restera plus alors qu'à effectuer les expériences pour remplir par « est » ou « n'est pas » les seuls blancs laissés dans le manuscrit.

Presque toujours on pourra classer chaque segment d'une enquête ou d'une expérimentation sous l'une des rubriques suivantes :

— vérification (ou réfutation) d'une théorie ou plus modestement d'une hypothèse;

— évaluation de la valeur numérique d'un paramètre.

Par exemple, un psychiatre voudra apprendre si tel symptôme est plus ou moins fréquent que tel autre dans une certaine catégorie de malades, s'il est ou non associé à tel commémoratif, l'âge moyen d'un certain groupe de sujets, leurs chances de répondre favorablement au traitement, etc. Dans tous les cas, une analyse préliminaire sérieuse doit s'efforcer de préciser au maximum le but à atteindre. Si l'on veut estimer la différence d'âge moyen entre deux catégories d'aliénés, c'est pour soutenir ou combattre une certaine théorie, et ce doit être partie intégrante de celle-ci que le seuil (mois, année?) à partir duquel, toute question de statistique mise à part, une différence éventuelle présentera une signification par rapport aux hypothèses envisagées. De même, presque toujours, en comparant deux thérapeutiques, fera-t-on implicitement la convention qu'une différence de moins de quelques unités pour cent est sans intérêt. Cette appréciation préalable n'est au demeurant, dans la plupart des cas, ni une question de bon sens ni une question de statistique pure : dans certains chapitres de la psychologie, il est relativement peu d'expériences dans lesquelles la preuve d'une différence inférieure à 10 % soit digne d'attention, et pourtant ce serait peut-être là souvent un « gros phénomène » en génétique mendélienne. D'ailleurs, le plus fréquemment, les chercheurs spécialisés savent déjà fort bien quel est l'ordre de grandeur de la précision du résultat qui leur importe, mais il est toujours bon de formuler explicitement cette notion, car c'est d'elle que dépend le choix de la technique statistique la plus avantageuse. Observons au passage que le problème de déterminer « quelle est la normale », qui est souvent posé aux statisticiens, entre lui aussi dans la classe des questions préliminaires qui doivent être résolues par le spécialiste lui-même avec ou sans l'aide du calcul; aucune des statistiques

que l'on peut recueillir dans certains pays ne permettrait de conclure qu'il n'est pas « normal » que 10 ou 15 % de la population soit victime de *Treponema pertenue*, non plus que dans tel autre il soit quelque peu antisocial de loger sous le même toit quatre de ses épouses. Cela nous entraînerait trop loin de discuter plus longuement la distinction nécessaire entre « moyenne » et « normale », et nous supposons que le chercheur est déjà en possession de concepts qualitativement bien définis grâce auxquels il a classé ses observations.

2) Tout d'abord, il se peut qu'aucune statistique mathématique proprement dite ne soit même nécessaire : la première guérison d'une maladie réputée incurable établit l'intérêt du nouveau traitement et, à l'autre extrême, il arrive (comme c'est fréquemment le cas en démographie par exemple) que le phénomène recherché soit si net que le seul travail consiste dans la compilation et la critique de documents existants, qui, une fois réunis, parleront d'eux-mêmes sans qu'il soit besoin d'autre chose que d'additions et de pourcentages. Pour ce genre d'investigations, où la difficulté réside dans le sujet lui-même plus que dans les méthodes, il semble impossible de formuler des règles générales (cf., encore une fois, la comptabilité ou les statistiques de morbidité ou les indices du prix de la vie), à moins de développer des prodiges de sens commun ou des recommandations relevant plus de la typographie et de l'art des graphiques que de la statistique.

Les cas qui nous occuperont désormais se définissent à l'opposé par le fait que, d'une part, ni la théorie *sub judice experimentalis*, ni son contraire ne sont censés conduire à des résultats catégoriques et que, d'autre part, l'ensemble des objets sur lesquels elle porte est inaccessible, illimité ou même virtuel. Alors qu'une enquête sur la consommation du vin en France, en 1952, pourrait idéalement donner une réponse chiffrée sans ambiguïté sur la différence entre la consommation générale et celle des entrants dans les hôpitaux psychiatriques en 1953, la question qui intéresserait un psychiatre serait de connaître la relation entre alcoolisme et aliénation mentale non pas pour le « Français 1953 », mais pour tout être humain soumis à des conditions analogues. De même, la publication intitulée « Sur un cas de X^* dans une série de Y^{**} » ne vise sans doute pas tant à consigner pour son seul mérite cet événement touchant, qu'à saper la théorie du P^r A... selon laquelle la population (infinie et virtuelle) des Y^{**} est indemne de la maladie de X^* .

C'est précisément le but de la statistique mathématique que d'effectuer la médiation entre une conclusion universellement valable (sous certaines conditions bien entendu) et une observation limitée à un ensemble fini d'objets ou d'individus. Comme telle, il sera loisible de la rattacher à la logique générale et de ne voir que différence de degrés entre :

« D'après la théorie de A..., aucun Y^{**} ne devrait être atteint de X^* , or j'ai observé un tel cas, donc A... a tort » et :

« D'après la théorie de B..., moins de 20 % des Y^{**} devrait être atteint de X^* , or j'ai observé 900 X^* dans un échantillon de 1.000 Y^{**} , donc B... a tort aussi ».

Cependant les controverses ne se laissent pas toujours régler de façon définitive : que vaudrait l'argument si les derniers chiffres étaient 9 X^* sur 10 Y^{**} ? 2.500 sur 10.000 ? et que répondre si B... objectait que, les observations ayant été rassemblées dans un service spécialisé dans le traitement des X^* , il est peu surprenant qu'un tel pourcentage ait été obtenu ? Ces questions nous mènent directement au problème central de la statistique moderne :

3) L'échantillonnage. — En même temps qu'il a formulé le plus explicitement possible la question qu'il va « poser à la nature », le chercheur a donc déjà défini la population pour laquelle il désire une réponse : les membres de tel ou tel groupe de la société, les familles de telle catégorie de malades ou, de façon moins concrète, mais peut-être plus précise, les réactions encéphalographiques à tel stimulus, les résultats de tel test psychologique ou de tel examen de laboratoire, etc.

Par leur définition même, ces ensembles sont infinis, et il faut s'assurer d'une méthode qui permette d'en choisir une partie (un échantillon) capable, à lui seul, de renseigner sur leur totalité. Ici encore, la technique générale : « prendre l'échantillon au hasard », ne va pas toujours sans quelques complications propres à chaque domaine de recherche. Un exemple classique est celui de la population des feuilles d'un arbre, et un peu de réflexion convainc aisément que toute méthode d'échantillonnage conduit à des résultats favorisant indûment un certain type de feuilles (les plus grandes, les plus hautes, les plus jeunes, etc.).

Il en est bien souvent de même en psychiatrie, et il sera peut-être plus sûr d'attendre une confirmation du parallélisme des résultats obtenus dans divers sous-groupes bien délimités que d'une seule enquête, même portant sur des milliers de cas. Il est bien connu qu'une forte corrélation est obtenue entre la qualité de l'orthographe et la pointure de souliers quand on s'adresse à un échantillon réellement pris au hasard dans la population française et si l'on ne prend pas soin d'éliminer par le calcul l'influence de l'âge. On ne saurait affirmer qu'un échantillon est « au hasard » (par rapport à la théorie étudiée) que si l'on a contrôlé indépendamment chacun des facteurs susceptibles d'altérer son caractère représentatif et notamment l'influence de la sélection automatique qu'exerce sur les malades l'effet lui-même de la thérapeutique et de son acceptation. Ici encore, la richesse des informations que l'on possède à l'avance et que l'on peut employer pour sélectionner un échantillon est de plus de poids que le nombre brut des cas.

Nous ne pouvons, évidemment, discuter ici la thèse radicale selon laquelle aucune statistique n'a de sens dans les sciences psychiatriques. On mentionnera, cependant, que l'analyse des résultats d'un test psychologique ne semble avoir de sens autre que poétique qu'à condition de considérer ceux-ci comme un échantillon valable de l'ensemble (virtuel) des réactions du malade à la situation.

4) Nous voici donc en possession d'une théorie — ou plutôt d'un choix de théories, mutuellement contradictoires, entre lesquelles il s'agit de trancher — relative à une certaine population dans laquelle a été prélevé, puis examiné, un échantillon que nous pensons devoir la représenter valablement. Quels sont maintenant les **calculs à effectuer** ?

Test d'hypothèse. — Le principe du raisonnement est, pour chaque hypothèse, de calculer quelles seraient les chances *a priori* d'obtenir un échantillon tel que celui que l'on possède si celle-ci était vraie. Par exemple (cf. plus haut), si la théorie de B était correcte, il y aurait moins de 1 chance sur 1.000 de trouver plus de 125 X^* dans un échantillon de 500 Y^{**} ; c'est cette fois-ci une question de bon sens, éclairé par les autres éléments d'information que l'on possède par ailleurs, que de décider si les faits démentent ou non la théorie de B. Dans la pratique et en l'absence d'autre indication, tout le monde s'accordera sans doute pour admettre que, s'il y a plus de 5 chances pour 100 — ou à peu près — pour qu'un échantillon ait été obtenu selon une certaine hypothèse, aucune preuve sérieuse n'a été fournie contre celle-ci. Inversement préférera-t-on souvent suspecter une hypothèse plutôt que de croire que c'est par le seul hasard que l'on a obtenu un échantillon aussi en désaccord avec elle quand les chances sont inférieures à 1 sur 1.000.

On remarquera que nulle part nous n'avons parlé de « probabilité pour que la théorie soit vraie », expression parfaitement incorrecte encore que trop fréquemment utilisée. Le statisticien est comme l'expert en empreintes digitales, qui n'a aucune qualité pour estimer les chances de culpabilité de l'accusé, mais dont le rôle est de renseigner le jury sur la question de savoir si les empreintes observées sont semblables à celles de l'inculpé ou si elles ne sont pas réellement les siennes. Poussant plus loin la comparaison, on notera que, si l'absence de preuve n'est pas preuve d'innocence, de même en statistique l'impossibilité d'établir par le calcul une différence significative entre observation et hypothèse ne peut être automatiquement considérée comme une confirmation de cette der-

nière. Une théorie prétendant que la descendance de certains malades contient seulement 47 % de femmes ne peut pratiquement être discutée qu'après compilation d'au moins 1.000 naissances. Enfin il faut observer que, le plus souvent, dans l'une seulement des alternatives il est aisément possible de calculer les chances *a priori* : la statistique n'est pas « *der Geist der stets verneint* », mais en général prouver la dépendance de deux facteurs s'effectue en montrant que de l'hypothèse leur indépendance rendrait trop improbables les observations étudiées.

Problèmes d'estimation. — Là encore la réponse est indirecte. En toute rigueur, le calcul permet seulement de fournir un intervalle contenant la vraie valeur inconnue, à moins d'une malchance pratiquement impossible : ainsi, si la proportion des X^* parmi les Y^{**} est de 30 % et si l'on cherche à l'estimer au moyen d'un échantillon de 100 sujets, on obtiendra, dans à peu près 5 % des cas, une valeur extérieure à l'intervalle (20 %, 39 %). Il faut, à ce sujet, faire la remarque que la précision de l'estimation ne croît que comme la racine carrée du nombre des observations : par exemple, l'intervalle précédent serait seulement réduit d'un tiers (27 %, 33 %) si 1.000 sujets et non 100 avaient été examinés. Cela explique pourquoi, lorsqu'une enquête statistique n'a pas produit les résultats attendus, il est en général vain de chercher une amélioration par la simple répétition du travail déjà effectué : doubler le nombre des cas étudiés ne saurait guère que réduire l'imprécision par un facteur de l'ordre de 0,7. De là découle également que, contrairement à la tradition selon laquelle le statisticien professionnel n'aurait à intervenir que quand des dizaines de milliers de cas sont en jeu, celui-ci a pour fonction d'interpréter les chiffres quand le nombre limité des observations rend spécialement importante l'évaluation précise du rôle joué par le seul hasard. Un des fondateurs de la statistique moderne doit une partie de sa renommée à un test qui n'a de mérites pratiques particuliers que pour des échantillons de moins d'une trentaine d'objets.

Nous énumérerons maintenant quelques formules d'usage courant dans presque tous les domaines d'application de la statistique.

5) χ^2 . — Soit à tester une théorie prévoyant que les individus composant la population se rangent avec les fréquences respectives p_1, p_2, \dots, p_n dans n catégories mutuellement exclusives. Un échantillon valable de N sujets a été examiné, et l'on a dénombré a_1, a_2, \dots, a_n d'entre eux dans lesdites catégories. Si la théorie était vraie, ces chiffres devraient être à peu près Np_1, Np_2, \dots, Np_n . La comparaison entre ces « valeurs théoriques » et les « valeurs observées » se fait en général en calculant un nombre, χ^2 , par la formule suivante :

$$\chi^2 = \frac{(a_1 - Np_1)^2}{Np_1} + \frac{(a_2 - Np_2)^2}{Np_2} + \dots + \frac{(a_n - Np_n)^2}{Np_n}$$

Il est remarquable que, sous des conditions très larges, la probabilité pour que χ^2 dépasse une certaine valeur, la théorie étant vraie, puisse être donnée par des tables et ne dépende que du nombre des catégories. Exemple : selon certains auteurs la distribution des groupes sanguins n'est pas la même chez certains malades que dans la population générale. Un échantillon (tous les chiffres suivants sont fictifs) de 200 patients a fourni les valeurs suivantes : 0 : 80 cas ; A : 93 cas ; B : 20 cas ; AB : 7 cas. Dans la population (fictive) d'où proviennent ces malades, les proportions sont telles que l'on aurait dû avoir à peu près : 0 : 72 ; A : 90 ; B : 26 ; AB : 12. On a donc :

$$\chi^2 = 8^2 : 72 + 3^2 : 90 + 6^2 : 26 + 5^2 : 12 = 4,534.$$

Un échantillon ne différant pas plus de la distribution dans la population générale serait obtenu dans plus de 20 % des cas ; les observations recueillies n'apportent aucune preuve permettant de rejeter l'hypothèse selon laquelle les groupes sanguins n'auraient rien à voir en psychiatrie.

Une deuxième application extrêmement importante du test par χ^2 se trouve dans la comparaison de deux échantillons dont on veut

savoir s'ils proviennent ou non de la même population. Limitons-nous au cas de deux catégories, et soit à discuter la thèse selon laquelle la maladie X^* aurait la même fréquence chez les hommes et chez les femmes. Un échantillon de 500 femmes et 1.000 hommes a été examiné, et l'on a trouvé respectivement 67 et 218 malades. S'il n'existait aucune différence due au sexe, on aurait dû trouver la même proportion $(67 + 218) : 1.500 = 19\%$ dans les deux sous-échantillons, soit encore 95 malades femmes et 190 malades hommes. Le désaccord entre ces chiffres et les chiffres effectivement obtenus s'exprime par :

$$28^2 : 95 + 28^2 : 405 + 28^2 : 190 + 28^2 : 810 = 15,28 = \chi^2$$

et une différence aussi grande aurait moins de 1 chance sur 10.000 de se produire si la thèse de l'indépendance de X^* par rapport aux facteurs sexuels était vraie. En l'absence de preuve de la non-validité de l'échantillon, on est donc conduit à rejeter cette théorie.

Valeur moyenne; déviation standard (écart-type). — La notion de valeur moyenne est trop familière pour requérir de longues explications. On remarquera, toutefois, que l'utilisation de cette grandeur peut conduire à des conclusions abusives quand on s'adresse à une population trop hétérogène : par exemple, la valeur moyenne de la taille d'un groupe de sujets dépend principalement de la composition en âge de l'échantillon, si celui-ci provient d'une population contenant des enfants, et la dite moyenne ne saurait être comparée à une autre que si cette dernière contient à peu près le même pourcentage d'adultes. De même, si la distribution est par trop asymétrique (par exemple, temps mis pour achever un test psychologique : un petit nombre de sujets dépasse de plusieurs fois le temps moyen de l'ensemble du groupe, qui ne diffère pas sensiblement du temps minimum observé), on préférera pour caractériser la tendance centrale utiliser le médian (dans l'exemple indiqué : temps tel que 50 % des sujets soient en deçà et 50 % en delà de cette limite). Ici encore se retrouve la nécessité de l'analyse qualitative préalable de la population permettant de la classer en sous-groupes à l'intérieur desquels les calculs ont un sens. Moins immédiate est la notion de « déviation standard », dont la définition technique est « la racine carrée de la valeur moyenne du carré de l'écart entre les mesures individuelles et la moyenne générale » et qui est estimée par la formule :

$$\frac{1}{N-1} (\sum a_i^2 f_i - Nm^2) =: \sigma^2$$

où : N est le nombre total de sujets dans l'échantillon ; f_i le nombre de ceux-ci auxquels correspond la valeur a_i de la mesure dont on cherche la moyenne et enfin $m = 1/N \sum a_i f_i$ la valeur moyenne de cette mesure. La déviation standard exprime commodément l'étalement, la dispersion des mesures autour de leur valeur moyenne.

Inversement, connaissant la déviation standard d'une population d'où a été extrait un échantillon de N sujets, on peut calculer les chances pour que la moyenne s'écarte de 1, 2, 3 fois, etc., la déviation standard multipliée par l'inverse de la racine carrée de N . On retrouve encore ce fait que la précision s'accroît sensiblement plus lentement que le nombre des observations. Dans la pratique où l'on a le plus souvent à comparer deux moyennes et à établir si leur différence résulte du seul hasard ou est due réellement à une différence entre les populations d'où elles proviennent, on pourra souvent se contenter de remarquer que, si les nombres N_1 et N_2 de sujets dans les deux échantillons sont assez grands, la différence entre les deux moyennes est distribuée avec une déviation standard égale à

$$\sigma^2 = (N_1 + N_2 - 1)^{-1} [(N_1 - 1) \sigma_1^2 + (N_2 - 1) \sigma_2^2]$$

et que par conséquent, si cette différence excède 3 fois σ , ou bien les deux populations sont effectivement différentes ou bien un événement s'est produit qui avait *a priori* moins de 5 chances sur 1.000. En l'absence d'autre indication, on conclura donc que la différence « est significative ».

Observons pour terminer que cette appréciation « significatif » ou « non significatif », que l'on demande à la statistique, est un

jugement porté sur la valeur probante de l'expérimentation ou de l'enquête et nullement sur l'importance du phénomène : si deux drogues ont procuré respectivement 20 et 80 % de guérisons sur deux échantillons de dix cas chacun, la différence entre leur valeur thérapeutique peut être grande, mais l'expérience n'est pas significative en ce sens qu'un semblable résultat pourrait parfaitement avoir été obtenu au cours de deux essais du même produit. Par contre, l'écart entre 20 et 30 % de succès serait significatif si chacun des échantillons comprenait plus de 2.000 patients.

Coefficient de corrélation. — Etant données deux séries de mesures effectuées sur les sujets d'un même échantillon — disons les résultats de deux tests psychologiques, la manière la plus usuelle d'exprimer la dépendance apparente qui existe entre elles est de calculer le coefficient de corrélation de Bravais-Pearson par la formule :

$$r = \frac{N \sum f_{ij} a_i a_j - m_1 m_2}{(\sigma_1 \sigma_2)^{-1}}$$

où f_{ij} est le nombre de sujets ayant obtenu la note a_i dans le premier test et la note a_j dans le second, m_1 et m_2 les moyennes des deux tests, σ_1 et σ_2 leurs déviations standard. La formule est telle que, sous des conditions très larges, $r = 0$ si les deux tests sont tels que la connaissance de la note d'un sujet dans l'un d'eux ne permet pas d'améliorer la prédiction du résultat du même sujet dans l'autre; $r = 1$ si les deux tests sont identiques. A titre d'exemple la corrélation entre la taille des mères et la taille de leur fille est à peu près de 0,50.

Du point de vue échantillonnage, il suffira de remarquer que des tables existent qui donnent, pour chaque valeur de la corrélation observée et pour chaque nombre de sujets dans l'échantillon, la probabilité pour que semblable valeur ait résulté du seul hasard, si aucune dépendance n'existait réellement dans la population. Dans la pratique, la difficulté proviendra plus souvent de l'interprétation des résultats que de la technique de calcul elle-même, et ce sera à chaque fois un cas d'espèce que de décider si la valeur obtenue — même significative — découle d'une véritable liaison ou seulement de la présence d'un troisième facteur négligé ou inconnu.

Régression. — Ici encore, supposons qu'il s'agisse de deux tests, mais que cette fois l'on ne se préoccupe pas tant de chiffrer leur liaison que de prévoir les résultats dans le second au moyen des notes dans le premier. Il est clair que, si l'échantillon observé était extrêmement grand, la meilleure méthode consisterait à calculer pour chaque valeur de la note dans le premier test la moyenne dans le second. Cela est, en général, pratiquement infaisable, les moyennes ainsi obtenues pour chaque sous-échantillon étant par trop dispersées. On fait donc souvent l'hypothèse que la dépendance entre les deux notes est correctement représentée par une droite et le calcul montre que la meilleure estimation de celle-ci est :

$$y - m_2 = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_1)$$

où y représente la valeur la plus probable dans le second test pour chaque note x dans le premier.

6) A côté de ces calculs de routine qui ne demandent aucun entraînement spécial, nous ne ferons que citer, pour finir, trois

grandes **méthodes qui peuvent rendre service au chercheur** et dont l'apparente similarité de nom ne doit pas masquer la complète hétérogénéité, tant sur les plans conceptuels que pratiques.

Analyse factorielle. — Quoique peut-être légèrement passée de mode, cette technique jouit de la faveur de certains psychologues. Typiquement, étant donné un système de mesures effectué sur tous les sujets d'un échantillon, l'analyse factorielle se propose de rendre compte des corrélations observées au moyen d'un nombre plus restreint de paramètres (hypothétiques) caractérisant chacun des individus. Ses adversaires lui reprochent de faire appel implicitement à tant d'hypothèses simplificatrices qu'ils doutent de l'utilité des calculs généralement pénibles qu'elle nécessite. Ses partisans y voient au moins un moyen de décrire simplement une masse confuse de données et d'indiquer la voie à de nouvelles recherches. Au plus, ils espèrent que l'analyse factorielle combinée avec la méthode des tests permettra de résoudre le « problème des facultés ».

Analyse de variance. — Au contraire de la précédente, l'analyse de variance n'est qu'une technique statistique, et ses applications à la psychologie sont encore relativement limitées. Ici, au lieu de chercher des facteurs inconnus, on s'efforce par une seule expérience de peser la part qui revient à chacun d'eux dans le résultat des mesures (par exemple : sur les scores d'un test, jouent à la fois, l'âge des sujets, leur entraînement préalable, leur niveau d'instruction et diverses circonstances extérieures que l'on peut soumettre au contrôle; comment organiser une expérience qui tienne compte à la fois de tous ces facteurs et permette d'apprécier leur importance relative?).

Analyse séquentielle. — Encore plus restreinte dans son objet, l'analyse séquentielle n'est que (au niveau discursif où nous nous plaçons) le développement conséquent des idées fondamentales de la statistique moderne. Puisqu'il ne s'agit le plus souvent que de trancher entre deux hypothèses, pourquoi ne pas organiser les expériences de telle sorte que la collecte des observations s'arrête, comme d'elle-même, aussitôt que le degré de certitude voulu est atteint ? L'analyse séquentielle, qui est appliquée sur une grande échelle dans l'industrie pour le contrôle de fabrication, semble pouvoir jouer un rôle singulièrement utile dans les recherches de laboratoire où, les hypothèses étant en général aisées à définir clairement, un problème essentiel est celui du coût de l'expérimentation.

7) Les indications très brèves qui viennent d'être données ne sauraient prétendre à autre chose qu'à orienter le psychiatre dans la table des matières des innombrables manuels de statistiques parus depuis la guerre et qui sont pour la plupart excellents.

Faute de pouvoir en faire un choix, on se bornera à en citer deux : l'un, en anglais, qui tient une place à peu près unique en raison de son caractère résolument médical (1); l'autre, en français, qui contient l'essentiel des techniques statistiques utilisées en psychométrie (2).

(1) BRADFORD HILL. — Principes de statistiques médicales. — *Lancet*, édit., Londres.

(2) FAVERGE J. M. — Méthodes statistiques en psychologie appliquée. — *Presses univ. France*, Paris.

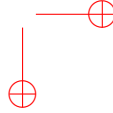
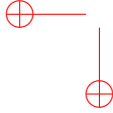
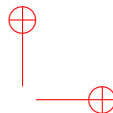
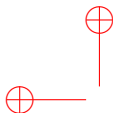
Table des matières

Tome III

Introduction	iii
1953	1
1953-1 Contribution à l'étude du rôle des facteurs héréditaires dans le cancer	2
1953-2 Évolution de la sensibilité aux antibiotiques des germes isolés chez les malades de ville de 1949 à 1952	14
1953-3 Remarques sur le problème du codage binaire	19
1953-4 Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle: $F(x+y) = F(x)F(y)$	24
1953-5 Sur l'extension d'un groupe de permutations d'un ensemble fini à l'ensemble des parties de celui-ci	27
1953-6 Le problème des mots dans les treillis modulaires libre . .	30
1953-7 Remarques sur l'étude formelle de la consanguinité dans les populations monogames	33
1953-8 Résultats d'une enquête sur l'influence des facteurs progénésiques sur les malformations humaines	39
1953-9 Analyse statistique de l'activité d'un service parisien de pédiatrie	41
1954	47
1954-1 Sur une définition combinatoire des espaces vectoriels classiques	48
1954-2 A tentative classification of goal-seeking behaviours	50
1954-3 Contribution aux applications statistiques de la théorie de l'information	56
1954-4 Un treillis universel des géométries projectives	162
1955	165
1955-1 Théorie combinatoire des relations bilinéaires classiques . .	166

Table des matières

1955-2	Théorie combinatoire des relations bilinéaires classiques. II	189
1955-3	Sur les problèmes de communications métriques	208
1955-4	Les problèmes de diagnostic et l'axiomatique des informations	211
1955-5	La statistique en psychiatrie	217



Marcel-Paul Schützenberger

ŒUVRES COMPLÈTES

éditées par Jean Berstel, Alain Lascoux et Dominique Perrin

Les treize tomes de cette édition contiennent l'ensemble des œuvres de Marcel-Paul Schützenberger qui ont fait l'objet d'une publication dans une revue scientifique ou un livre. Ses travaux couvrent une période de plus de 50 ans, depuis sa première note aux Comptes Rendus en 1943 jusqu'à son dernier article, paru en 1997.

Les publications sont présentées dans l'ordre chronologique. Chaque tome est précédé d'une courte introduction qui essaie d'éclairer certains des travaux, tant pour leur intérêt scientifique intrinsèque que pour l'écho qu'ils ont rencontré et les développements qu'ils ont suscités.

Tome 3 : 1953 – 1955

Durant ces trois années, Schützenberger a effectué des recherches dans de nombreux domaines : médecine, statistique appliquée et naturellement mathématiques.

Le mémoire « Contribution aux applications statistiques de la théorie de l'information » est sa thèse de doctorat d'État. Elle fut soutenue à la Faculté des Sciences de Paris le 20 juin 1953, devant le jury composé de Maurice René Fréchet, Albert Châtelet et Georges Darmois. La thèse contient, entre autres, une tentative de globalisation des deux quantités d'information récemment introduites, celle de Shannon-Wiener en théorie des communications et celle de Fisher en théorie de l'estimation statistique.