TDs de Logique. Feuille 2

Partie 1

• Un habitant X se tient à l'embranchement de deux routes. Une des deux routes va vers Paris (route gauche ou route droite). X est soit menteur (systématiquement), soit sincère (systématiquement), et ne repond que par oui ou par non. Quelle question peut-on poser à X pour déterminer la route conduisant à la capitale?
Indication : Si P est "X dit la vérité" et Q est "la route de gauche va à Paris", constuire une formule φ sur $\{P, Q\}$ telle que la réponse de X à la question "φ est-elle vraie?" est oui ssi Q est vraie.
• Les trois personnes X, Y, Z sont assises à une table. X dit la vérité, Y ment, Z est lunatique. Les personnes ne répondent que par oui ou par non. Poser deux questions à ces personnes de façon à en déduire qui est X, qui est Y et qui est Z. La première question peut être posée aux trois personnes.

Partie 2

Si A est un arbre étiqueté où les noeuds peuvent être unaires ou binaires, on définit taille(A) par récurrence structurelle :
taille$(a) = 1$ si A est la feuille a
taille$(A) = 1+$taille(B) si A est l'arbre constitué d'un noeud unaire a qui admet comme fils le sous-arbre B.
taille$(A) = 1 +$ taille$(B) +$ taille(C) si A est l'arbre constitué d'un noeud binaire a qui admet comme fils gauche le sous-arbre B et comme fils droit le sous-arbre C.

On définit hauteur(A) par récurrence structurelle :
hauteur$(a) = 0$ si A est la feuille a
hauteur$(A) = 1 +$ hauteur(B) si A est l'arbre constitué d'un noeud unaire a qui admet comme fils le sous-arbre B.
hauteur$(A) = 1 + \max(\text{hauteur}(B), \text{hauteur}(C))$ si A est l'arbre constitué d'un noeud binaire a qui admet comme fils gauche le sous-arbre B et comme fils droit le sous-arbre C.

1• Montrer que pour tout A, taille$(A) \leq 2^{\text{hauteur}(A)+1} - 1$.
2• On considère des arbres tels que les étiquettes des noeuds binaires sont dans $\{\wedge, \vee\}$, celles des noeuds unaires dans $\{\neg\}$, celles des feuilles dans $\{0, 1\}$. On note P_C l'ensemble de ces arbres. Définir une fonction val qui évalue 0 ou 1 un tel arbre où les étiquettes des noeuds internes représentent les fonctions booléennes correspondantes.
3• On autorise de plus les feuilles étiquetées x, où x est un nom de variable. On note $P_C(\{x\})$ l'ensemble de ces arbres. Définir une fonction subst(x, A, B) qui associe à toute variable x, à tout arbre A de $P_C(\{x\})$, et à tout arbre B de P_C, l'arbre obtenu en remplaçant dans A toutes les feuilles étiquetées par x par l'arbre B.
4• Montrer par induction structurelle que subst$(x, A, B) \in P_C$.
5• On suppose maintenant que val(subst$(x, A, 0)) =$ val(subst$(x, A, 1)) = 1$. (Ici 0 désigne l'arbre feuille d'étiquette 0).
En déduire que $\forall B \in P_C$ val(subst$(x, A, B)) = 1$.
(Indication : Montrer que $\forall B \in P_C$val(subst$(x, A, B)) =$ val(subst$(x, A,$ val$(B)))$, où val(B) désigne l'arbre feuille d'étiquette val(B).
6• On note $\mathcal{P}$ un ensemble d'atomes propositionnels. On note $P_C(\mathcal{P})$ l'ensemble des arbres étiquetés comme en 2 mais où on autorise les éléments de $\mathcal{P}$ comme étiquettes des feuilles. Définir une fonction At(A) qui à $A \in P_C(\mathcal{P})$ associe l'ensemble des atomes propositionnels qui y figurent. Montrer que At(A) est un ensemble fini.
7• Définir une fonction apparait(x, A), qui à $x \in \mathcal{P}$ et à $A \in P_C(\mathcal{P})$ associe la réponse vraie ou faux à la question "est-ce-que x apparaît dans A?".
8• Soit $x \in$ At(A). Montrer que card(At(subst(x,A,0))) $\leq$ card(At(A)).
9• Soit X un sous-ensemble de $\mathcal{P}$. Une interprétation sur X est une fonction de X dans $\{0, 1\}$. Définir une fonction interp(X) qui à tout sous-ensemble fini X de $\mathcal{P}$ associe l'ensemble des interprétations sur X. Si X est fini de cardinal k, on pourra représenter une interprétation par une liste de k-uplets : (il y aura 2^k interprétations).
10• Définir la fonction val(A, I) qui à $A \in P_C(\mathcal{P})$ et à une interprétation I définie sur At(A), renvoie la valeur de A dans cette interprétation.
11• Définir une fonction valide(A) qui dit si A est vraie pour toute interprétation.

Partie 3

• Montrer que les ensembles de connecteurs suivants sont fonctionnellement complets :
$\{\wedge, \neg\}$, $\{\rightarrow, \bot\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$.
• Définir la longueur d'une formule (son nombre de symboles) par récurrence structurelle.
• Soient
$F = (p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q)$
$G = p$
$H = p \vee q$.
Calculer $F[p \leftarrow H, q \leftarrow H]$,
$F[p \leftarrow H]$, et
$(F[p \leftarrow H])[q \leftarrow H]$.
Que remarque-t-on ?
• Soit $F = (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ et
$G = (\neg p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$.
A t-on F est une tautologie, une antilogie, ou ni l'un ni l'autre ? Même question pour G.

• Montrer que $F = ((x \rightarrow y) \wedge (z \rightarrow t)) \rightarrow ((x \wedge z) \rightarrow (y \wedge t))$ est une tautologie.

• On définit σ une substitution de $\mathcal{P} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots\}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ par
$\sigma(q_0) = q_0$
$\sigma(q_1) = q_1 \rightarrow q_0$
$\sigma(q_2) = q_2 \rightarrow (q_1 \rightarrow q_0)$
$\ldots$
$\sigma(q_n) = q_n \rightarrow (\sigma(q_{n-1}))$.
Montrer que la longueur de $\sigma(q_n)$ est $2n + 1$.
On pose $F_n = q_n \vee q_{n+1}$. Calculer $\sigma(F_0)$, $\sigma(F_1)$. Calculer la longueur de $\sigma(F_n)$.

• Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ avec
$A_1 = p \rightarrow (q \rightarrow p)$
$A_2 = \neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$
$A_3 = p \wedge q$.
Soient F, G, H, K les formules:
$F = p \wedge (\neg p \vee q)$
$G = \neg q \vee (r \rightarrow p)$
$H = (q \leftrightarrow r) \vee (p \leftrightarrow r)$
$K = (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$.
Montrer que $\mathcal{A} \models F$, $\mathcal{A} \models G$, $\mathcal{A} \models K$. Montrer que l'on n'a pas $\mathcal{A} \models H$.

On dit que $\mathcal{A}$ est insatisfiable ssi $\mathcal{A} \models \bot$.
• Montrer que si $\mathcal{A}$ est insatisfiable, alors $\forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$, $\mathcal{A} \models F$.
• Montrer que si $\models F$, alors $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$, $\mathcal{A} \models F$.
• Montrer que $\mathcal{A} \models F$ ssi $\mathcal{A} \cup \{\neg F\}$ est insatisfiable.
• Montrer que $\mathcal{A} \cup \{F_1, \ldots, F_n\} \models F$ ssi $\mathcal{A} \models (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow F$.

• Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ avec
$A_1 = (p \rightarrow q) \rightarrow r$
$A_2 = p \rightarrow r$
$A_3 = q \rightarrow r$
$A_4 = r \rightarrow (q \rightarrow p)$
$A_5 = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
Trouver un sous-ensemble de $\mathcal{A}$ équivalent à $\mathcal{A}$ et indépendent.
On dit que deux ensembles de formules $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont équivalents ssi $\mathcal{B} \models \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \models \mathcal{B}$.
On dit qu'un ensemble de formules $\mathcal{B}$ est indépendant ssi $\forall F \in \mathcal{B}$, on n'a pas $\mathcal{B} - \{F\} \models F$.