TDs de Logique. Feuille 1

Partie 1

On définit les entiers à l'aide de 0 et de la fonction successeur S. Ainsi $2 = SS(0)$. On définit l'addition par :

$$\begin{aligned} 0 + y &= y \\ S(x) + y &= S(x+y) \end{aligned}$$

On définit la multiplication par :

$$\begin{aligned} 0 * y &= 0 \\ S(x) * y &= (x * y) + y \end{aligned}$$

Comment définir la factorielle ?
• Montrer que $\forall p\, p + 0 = p$.
Montrer que $\forall n\, \forall p\, p + S(n) = S(p+n)$.
Montrer la commutativité de l'addition.
• Montrer l'associativité de l'addition.
• Montrer la commutativité de la multiplication.

Partie 2

• Soient A, B, C des ensembles. Montrer que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Montrer que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
• Soient A, B, C des ensembles. Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
• Soient A et B des ensembles tels que

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Montrer que

$$A \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

• Montrer que

$$\bigcup_{i \in I} \Big(\bigcap_{j \in J} A_{ij} \Big) \subset \bigcap_{j \in J} \Big(\bigcup_{i \in I} A_{ij} \Big)$$

On dit qu'une relation R est une relation d'équivalence si R est réflexive, symétrique et transitive. On dit que R est un préordre si R est réflexive et transitive.
• Soit R une relation, On définit $\hat{R}$ par :

$$x \hat{R} y \Leftrightarrow (xRy \wedge yRx)$$

Montrer que si R est un préordre, $\hat{R}$ est une relation d'équivalence.
• Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.
• Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.

Partie 3

• Ecrire sous forme d'arbre les formules suivantes, en n'oubliant pas que les connecteurs $\vee$ et $\wedge$ ont une précédence plus forte que le connecteur $\to$.

- $A \wedge B \to C$
- $A \to B \wedge C$
- $A \to B \to C$
- $(A \to B) \to C$

• Les formules suivantes sont-elles des tautologies ?

- $A \to A$
- $A \wedge B \to A$
- $A \to A \vee B$
- $A \to (B \to A)$
- $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$
- $(B \to C) \wedge (A \to C) \to (A \vee B \to C)$
- $(p \vee q) \to (p \wedge q)$
- $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (B \wedge A) \to C)$
- $(A \wedge (A \to B)) \to B$.