Université de Marne-la-Vallée

Master Science Informatique 2ème année
Examen d'algorithmique du texte
Novembre 2005, durée : 2h

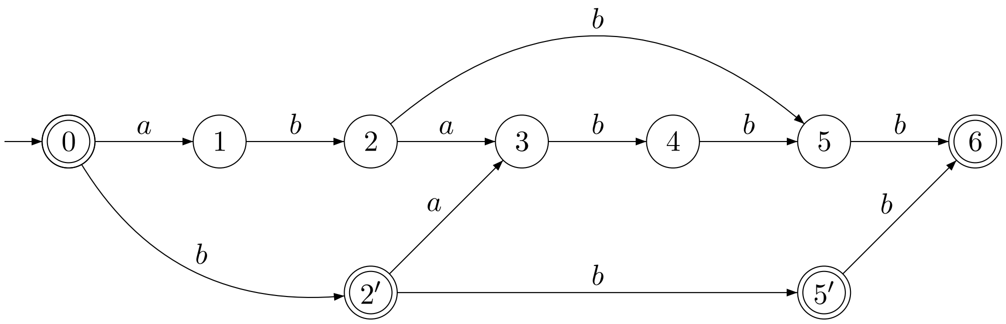
Les documents sont autorisés.

Exercice 1.— Construire un automate déterministe avec un unique état initial acceptant les mots finis qui évitent les blocs de l'ensemble de mots finis antifactoriel $I = \{010, 1001\}$ sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$. L'automate devra donc accepter le langage $A^* - A^*IA^*$. On utilisera la construction linéaire vue en cours et on indiquera sur l'automate les liens suffixes.

Exercice 2.— On note $\mathcal{A}(y)$ l'automate minimal déterministe acceptant les suffixes d'un mot non vide y. Son unique état initial est noté i.

1) Si p est un état de $\mathcal{A}(y)$, on note $P(p)$ l'ensemble des mots étiquettes d'un chemin de i à p. Soit u le plus long mot de $P(p)$. Montrer que les mots de $P(p)$ sont tous suffixes de u.

2) Donner un algorithme avec la meilleure complexité en la taille de y donnant un plus long facteur de y apparaissant au moins 2 fois comme facteur de y. Prouver sa validité. Donner un tel facteur pour $y = ababbb$ dont l'automate $\mathcal{A}(y)$ est :



Exercice 3.— On rappelle la définition d'un code circulaire. Soit A un alphabet fini. Un ensemble de mots X de A^* est un code circulaire si et seulement si l'égalité

$$sx_2 \ldots x_n p = y_1 y_2 \ldots y_m,$$
$$x_1 = ps,$$

avec $x_i, y_j \in X$, n, m entiers positifs, $p \in A^*$, et $s \in A^+$, entraîne $n = m$, $p = \varepsilon$, et $x_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

1) L' ensemble $X = \{a, aba, baabab\}$ est-il circulaire ? Pourquoi ?

2) Est-il un code ? Pourquoi ?

Exercice 4.— Un mot non vide x est dit *primitif* s'il n'est puissance d'aucun autre mot que lui-même, c'est-à-dire si $x = u^n$ entraîne $x = u$ et $n = 1$.

1) Traduire la notion de primitivité à l'aide des notions de bords ou de périodes vues en cours.

On appelle conjugué d'un mot non vide x un mot w tel qu'il existe deux mots u et v avec $x = uv$ et $w = vu$. Un mot x de longueur n a au plus n conjugués. Par exemple les conjugués de $x = bbaaba$ sont

$$\begin{gathered} bbaaba \\ baabab \\ aababb \\ ababba \\ babbaa \\ abbaab \end{gathered}$$

2) Montrer qu'un mot primitif a exactement n conjugués.

3) On suppose que x est un mot primitif non vide. On appelle $l(x)$ le plus petit des conjugués de x pour l'ordre lexicographique. Sur l'exemple, $l(x) = aababb$. On dit qu'un mot non vide w est sans bord si w ne se chevauche pas avec lui-même de façon non triviale, c'est-à-dire si tout mot à la fois préfixe et suffixe de w est le mot vide ou le mot w. Montrer que si x est primitif, $l(x)$ est sans bord.

Exercice 5.— On rappelle la définition d'un automate (m,a)-local où m et a sont des entiers positifs ou nuls (m pour mémoire, a pour anticipation). Un automate $\mathcal{A} = (Q, E)$ où Q est l'ensemble des états et E l'ensemble des flèches est (m,a)-local si et seulement si, lorsque l'on a dans $\mathcal{A}$ deux chemins de même étiquette de longueur $m + a$:

$$\begin{array}{l} p_{-m} \xrightarrow{a_{-(m-1)}} p_{-(m-1)} \xrightarrow{a_{-(m-2)}} \dots p_{-1} \xrightarrow{a_0} p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \dots p_{a-1} \xrightarrow{a_a} p_a \\ q_{-m} \xrightarrow{a_{-(m-1)}} q_{-(m-1)} \xrightarrow{a_{-(m-2)}} \dots q_{-1} \xrightarrow{a_0} q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots q_{a-1} \xrightarrow{a_a} p_a, \end{array}$$

où les a_i sont des lettres, alors $p_0 = q_0$.

Si $\mathcal{A} = (Q, E)$ est un automate (pas forcément déterministe), on note $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ l'automate $(Q \times Q, F)$, où $(p, q) \xrightarrow{a} (p', q')$ est dans F si et seulement si $p \xrightarrow{a} p'$ et $q \xrightarrow{a} q'$ sont dans E.

1) Donner un algorithme linéaire permettant de calculer le diamètre d'un DAG (un graphe orienté sans circuit). Le diamètre d'un DAG est la longueur d'un plus long chemin dans le DAG.

2) Trouver un algorithme linaire en la taille de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ permettant de calculer, à partir d'un automate local $\mathcal{A}$, deux entiers m et a tels que $\mathcal{A}$ est (m,a)-local avec $m+a$ minimal. Les valeurs de m et a avec $m+a$ minimal sont-elles uniques ?