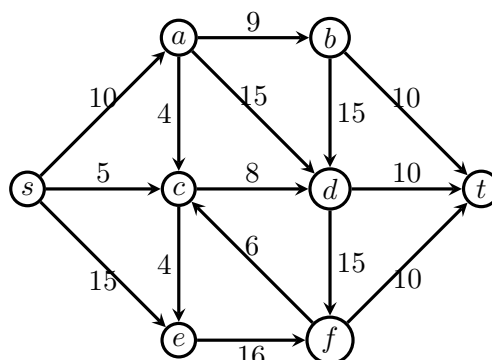

TD 7 - Flots.

Exercice 1.

Considérons le réseau de flot suivant où les capacités sont sur les arcs :

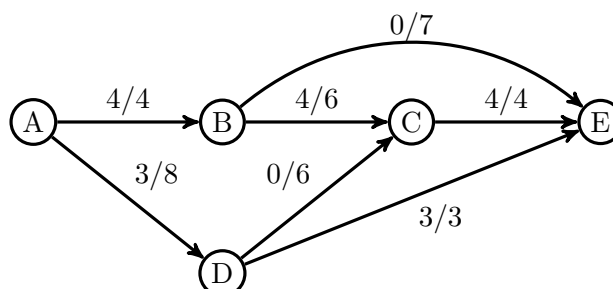


Utilisez l'algorithme d'Edmonds-Karp pour calculer un flot maximum de s à t .

- En utilisant la feuille donnée en annexe, donnez pour chaque étape le réseau résiduel et indiquez le chemin augmentant choisi.
- Donnez la valeur du flot maximum obtenu.
- Donnez également une coupe minimum obtenue à la dernière étape de l'algorithme.

Exercice 2.

- Montrez que le flot dans le graphe suivant n'est pas maximum.



- Appliquez l'algorithme d'Edmonds-Karp pour terminer le calcul d'un flot maximum et donnez une coupe minimum.

Exercice 3.

L'algorithme d'Edmonds-Karp vu au cours sélectionne comme chemin augmentant le plus court chemin — en termes de nombre d'arcs — de la source au puits dans le réseau résiduel. Mais on pourrait imaginer d'autres stratégies pour choisir ce chemin.

Par exemple, on peut choisir d'effectuer un parcours en largeur dans le réseau résiduel en sélectionnant en priorité à chaque étape les arcs de capacité résiduelle maximum. Appliquez cette stratégie au graphe de l'exercice 1.

Remarque : on se restreint toujours à des chemins simples (sans répétition de sommets).

- En utilisant la feuille donnée en annexe, donnez pour chaque étape le graphe résiduel et indiquez le chemin augmentant choisi.
- Donnez la valeur du flot maximum obtenu.
- Donnez également une coupe minimum obtenue à la dernière étape de l'algorithme.

Exercice 4.

- (a) Étant donné un graphe quelconque G de flot maximum f , quelle est la valeur du flot maximum du graphe obtenu à partir de G en multipliant la capacité de chaque arc par $\alpha > 1$?
- (b) Démontrez votre réponse.

Exercice 5.

Imaginons que l'on souhaite calculer un flot maximum dans un réseau G avec un ensemble S de sources et un ensemble P de puits. Comment pouvez-vous modifier le réseau pour vous ramener à un calcul de flot avec une seule source et un seul puits ?

Exercice 6.

Pour diminuer les émissions de CO₂ par des camions, la police souhaite effectuer des contrôles de poids lourds partant d'une région P et allant vers une autre région Q à travers un réseau autoroutier. Les contrôles sont effectués sur des tronçons d'autoroute. Faire un contrôle sur le tronçon allant d'un point i vers un point j coûte un montant entier c_{ij} . Le problème consiste à trouver le sous-ensemble de tronçons sur lesquels les contrôles doivent être effectués de manière à ce que tout camion allant de P à Q passe par un contrôle, et ce, à coût total minimum.

- (a) Comment peut-on modéliser ce problème ?
- (b) Donnez un algorithme pour le résoudre.
- (c) Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Exercice 7.

On veut emporter dans un Airbus Zéro utilisé lors de vols paraboliques un certain nombre d'instruments I_1, I_2, \dots, I_p . Le coût du transport de I_j est c_j . Des projets de réalisation d'expériences en apesanteur sont préparés. On les note E_1, E_2, \dots, E_q . Le bénéfice réalisé si on effectue l'expérience E_k est noté b_k .

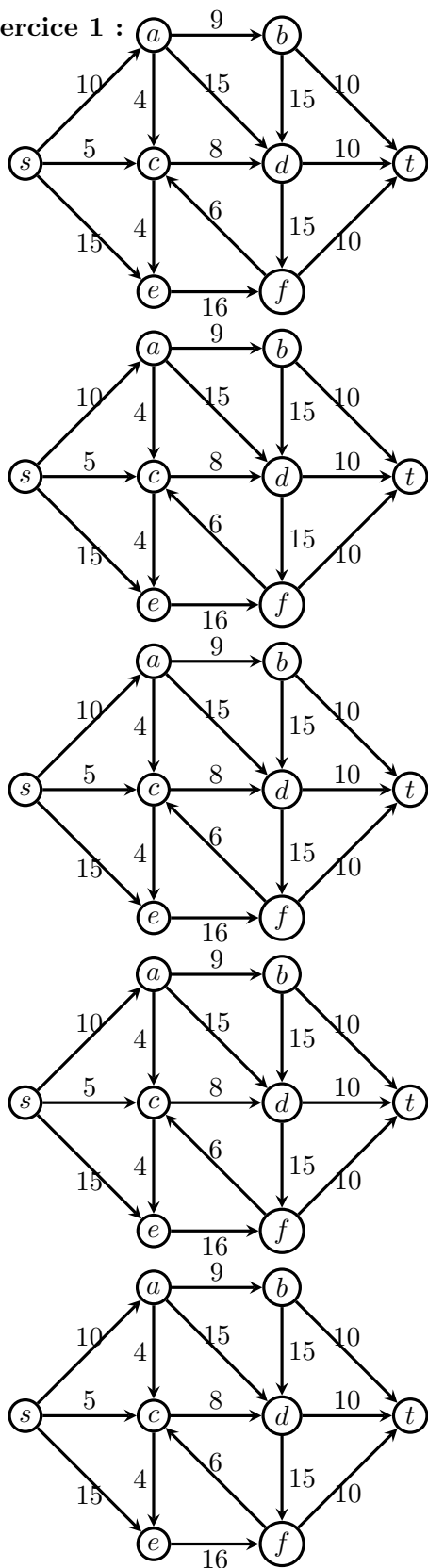
La réalisation de E_k nécessite d'avoir emporté un ensemble correspondant d'instruments. Un même instrument peut servir pour plusieurs expériences. On cherche à déterminer quels sont les instruments à emporter et quelles sont les expériences à réaliser afin de rendre le bénéfice de l'opération maximum.

Pour cela, on modélise le problème à l'aide d'un graphe orienté avec comme sommets les I_i et E_j ainsi qu'un sommet source s et un sommet puits t . Il existe un arc de s vers chaque E_j de capacité b_j et un arc de chaque I_i vers t de capacité c_i . Il existe un arc de capacité infinie de E_j vers I_i si la réalisation de E_j nécessite d'avoir emporté I_i .

- (a) On considère qu'une coupe (C, D) , avec s dans C et t dans D , est telle que C contient en plus de s les expériences faites et les instruments emportés. Montrez que si cette coupe a une valeur finie et si C contient une expérience, elle contient tous les instruments nécessaires à cette expérience.
- (b) Montrez que la valeur d'une telle coupe est égale à la somme des coûts des objets emportés et des bénéfices des expériences non réalisées.
- (c) Déduisez-en la valeur du bénéfice total en fonction des b_j et de la valeur de la coupe.
- (d) Déduisez-en un algorithme pour résoudre le problème suivant : quels sont les instruments à emporter et quelles sont les expériences à réaliser afin de rendre maximum le bénéfice de l'opération ?

Annexe

Exercice 1 :



Exercice 3 :

