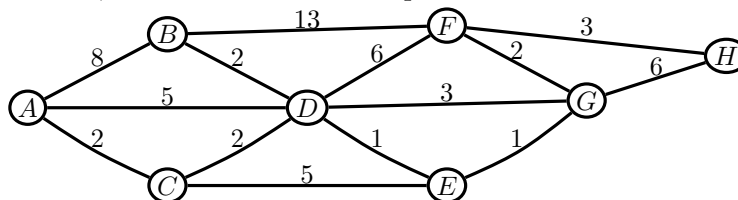

TD 4 - Plus courts chemins.

Exercice 1.

- (a) Montrez les étapes de l'exécution de l'algorithme de Dijkstra sur le graphe suivant au départ du sommet A , et dessinez l'arbre des plus courts chemins correspondant :



- (b) Modifiez l'algorithme de Dijkstra pour qu'il construise un **arbre** des plus courts chemins d'un sommet à tous les autres.

Exercice 2.

On dispose de trois bidons pouvant contenir respectivement 10, 7 et 4 litres d'eau. Initialement, le bidon de 10 litres est vide et les bidons de 7 et 4 litres sont pleins. La seule opération permise consiste à vider un bidon dans un autre jusqu'à ce que le bidon qui verse soit vide ou jusqu'à ce que le bidon que l'on remplit soit plein. *Attention, les méthodes proposées dans les questions suivantes doivent pouvoir être utilisées si on change les données du problème (nombre de bidons et volumes).*

- Décrivez la construction d'un graphe représentant tout ce que l'on peut faire avec ces bidons.
- En utilisant cette modélisation, que faut-il vérifier sur le graphe pour déterminer si l'on peut arriver à mesurer 2 litres d'eau avec ces règles? Quel algorithme pourriez-vous utiliser pour cela?
- Donnez un algorithme permettant de déterminer la méthode la plus rapide pour le faire.
- Bob s'est fait mal au dos et cherche à savoir quelle est la méthode pour mesurer 2 litres d'eau en ayant à soulever le moins de poids possible. Ajustez votre modélisation et proposez un algorithme pour résoudre le problème.

(Extrait de *Algorithms*, par S. Dasgupta, C.H. Papadimitriou, et U.V. Vazirani.)

Exercice 3.

Alice et Bob sont partis en vacances quand ils reçoivent leurs résultats de master. Ils ont tous les deux obtenu la mention très bien et décident de fêter ça ensemble le plus vite possible.

On dispose d'un graphe dont les sommets représentent les différents lieux de rencontre possibles et les arêtes correspondent aux liaisons entre deux lieux pondérées par le plus rapide temps de trajet correspondant.

- Donnez un algorithme pour trouver le meilleur point de rencontre pour Alice et Bob. Quelle est la complexité de votre solution?
- Supposons que Bob et Alice ne se déplacent pas de la même manière. On a donc deux graphes, un correspondant aux déplacements possibles d'Alice et un autre pour ceux de Bob. Que faut-il modifier dans votre algorithme pour trouver le point de rendez-vous?
- (*Généralisation*) Alice et Bob veulent fêter leur diplôme avec Averell qui a raté son master. Comment trouver le meilleur point de rencontre? Plus généralement, comment généraliser le problème à n personnes en supposant que le graphe de déplacement est commun à toutes les personnes? Quelle est la complexité de votre solution?

(Extrait de *Algorithms, Etc.*, par J. Erickson)

Exercice 4.

Mulder et Scully ont répertorié, pour toutes les routes des Etats-Unis, la probabilité exacte de **ne pas** se faire enlever par des extraterrestres en empruntant cette route. Ils ont stocké toutes ces données dans un graphe dont les sommets représentent les villes et les arêtes les liaisons routières entre ces villes, pondérées par la probabilité de ne pas se faire enlever en empruntant cette liaison. On suppose que les probabilités sont indépendantes sur chaque liaison. La probabilité de ne pas se faire enlever par des extraterrestres en empruntant un chemin donné est donc donnée par le produit des poids des arêtes du chemin.

Mulder doit se rendre de Langley en Virginie à la Zone 51 dans le Nevada. Quelle route doit-il emprunter pour avoir le plus de chances d'arriver ? Proposez un algorithme pour résoudre ce problème.

(Extrait de *Algorithms, Etc.*, par *J. Erickson*)