
TD 1 - Rappels d'algorithmique et notions basiques sur les graphes.

Exercice 1.

On a trois algorithmes pour résoudre un problème. Le premier est de complexité $O(n^3 \log n)$, le deuxième de complexité $O(n(\log n)^{42})$ et le troisième de complexité $O(1.7^n)$. Lequel faut-il choisir si on a des données de grande taille ?

Exercice 2.

Classez par ordre croissant les ordres de grandeur suivants: $O(\frac{n}{\log n})$, $O(n)$, $O(1)$, $O(\log n)$, $O(\sqrt{n} \log n)$, $O(4^n)$, $O(n^2 3^n)$.

Exercice 3.

Est-ce que la complexité d'un algorithme peut être à la fois en $O(n^3)$ et en $O(\log n)$?

Exercice 4.

Donnez la complexité des algorithmes suivants :

ALGORITHME_1(n)

```

1 val ← 0
2 pour i allant de 1 à n faire
3   | val ← val + √i(n+2)
4 renvoyer val
```

ALGORITHME_2(n)

```

1 val ← 0
2 pour i allant de 1 à n faire
3   | pour j allant de 1 à i faire
4     | | val ← val + j2
5 renvoyer val
```

ALGORITHME_3(n)

```

1 val ← 0
2 i ← 0
3 tant que i × i < n faire
4   | val ← val + i
5   | i ← i + 1
6 renvoyer val
```

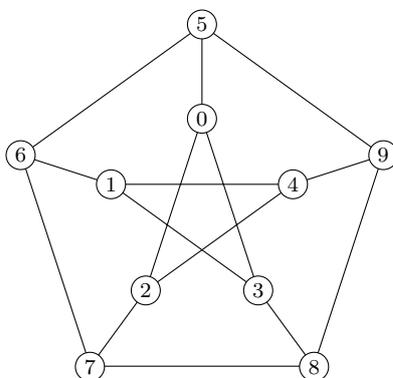
ALGORITHME_4(n)

```

1 val ← 0
2 i ← 1
3 tant que log2 i < n faire
4   | val ← val + i
5   | i ← i + 1
6 renvoyer val
```

Exercice 5.

Donnez la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous:

**Exercice 6.**

Voici une matrice d'adjacence: dessinez un graphe qui correspond à cette matrice.

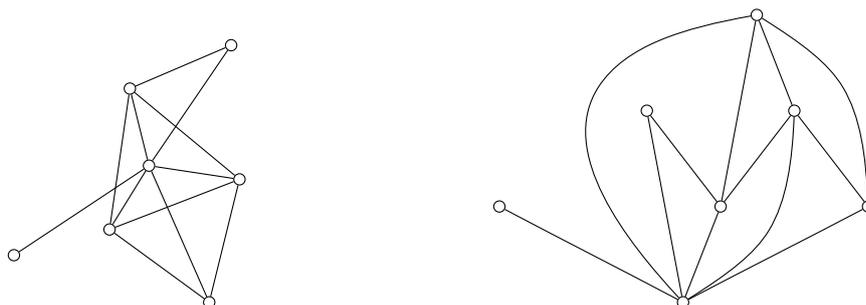
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
5	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
6	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
9	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0

Exercice 7.

Un *cycle élémentaire* ne contient pas de répétition de sommets ni d'arêtes. Donnez un graphe à 5 sommets contenant exactement (a) 1 cycle élémentaire, (b) 3 cycles élémentaires, (c) 6 cycles élémentaires. Justifiez vos réponses en donnant explicitement, pour chaque graphe, la liste de ses cycles.

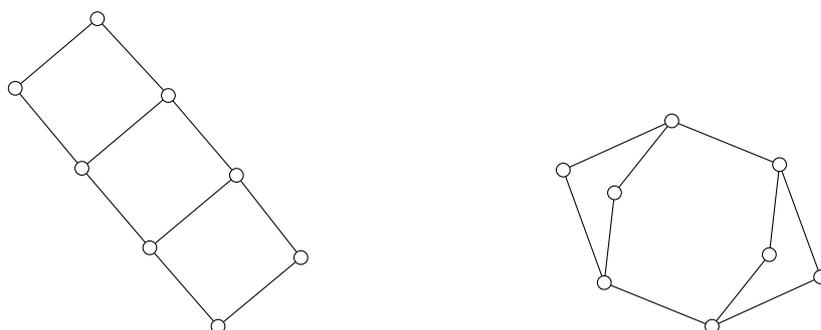
Exercice 8.

Montrez que les deux graphes suivants sont isomorphes (*c'est-à-dire que l'on peut numéroter leurs sommets de manière à obtenir le même ensemble d'arêtes*).



Exercice 9.

Montrez que les deux graphes suivants **ne sont pas** isomorphes.



Exercice 10.

- (a) Qu'est-ce que le degré d'un sommet dans un graphe?
- (b) Montrez que la somme des degrés des sommets de tout graphe vaut deux fois son nombre d'arêtes.
- (c) Montrez que le nombre d'arêtes d'un arbre vaut son nombre de sommets moins 1.
- (d) Montrez que si G est un arbre et si tous ses sommets sont de degré impair, alors son nombre d'arêtes est impair.

Exercice 11.

La *séquence des degrés* d'un graphe est une séquence (non strictement) décroissante de naturels, qui reprend les degrés de chacun des sommets du graphe.

- (a) Donnez la séquence des degrés des graphes des exercices 6, 7 et 9.
- (b) Existe-t-il un graphe dont la séquence des degrés est $(9, 9, 8, 6, 4, 2, 1)$? Si oui, dessinez-le; sinon, expliquez pourquoi.