Animaux dirigés et modèles de gaz
ou
Animaux dirigés dans le gaz.

Yvan Le Borgne et Jean-François Marckert

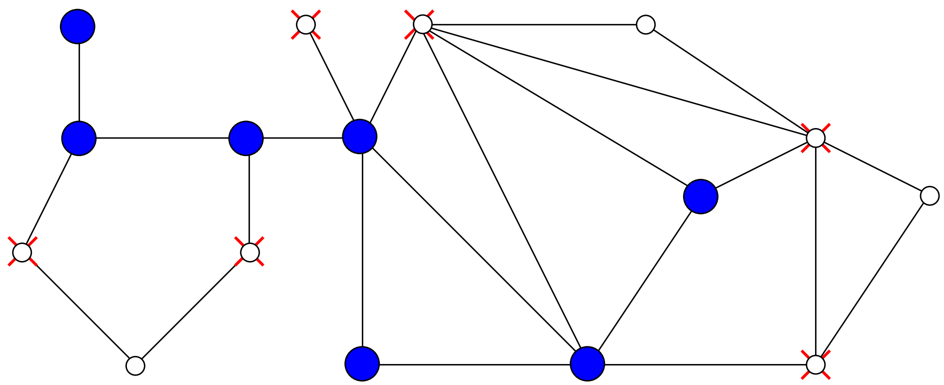
LaBRI - Bordeaux

http://www.labri.fr/∼borgne http://www.labri.fr/∼marckert.

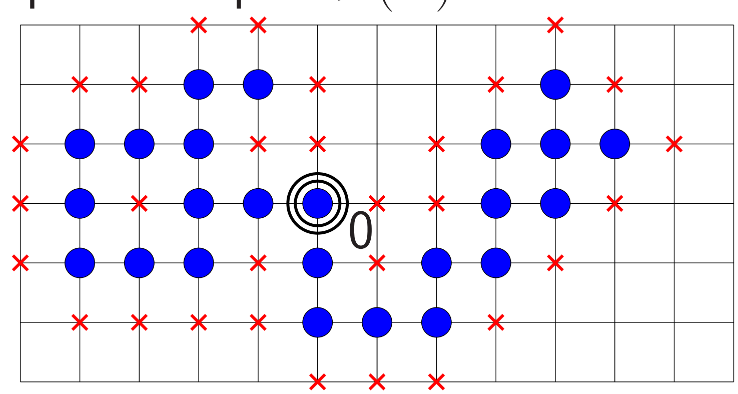
ALEA, 2007.

Les animaux

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un animal A sur G est une partie connexe (par arêtes) de V.



Les éléments de A sont appelés cellules; nb cellules(A) = Aire(A)=$|A|$
Les voisins de A = cellules périmétriques $\mathcal{P}(A)$.



a_n = nb d'animaux d'aire n.

a_n non connu sur tout réseau (non $\mathbb{Z}$).

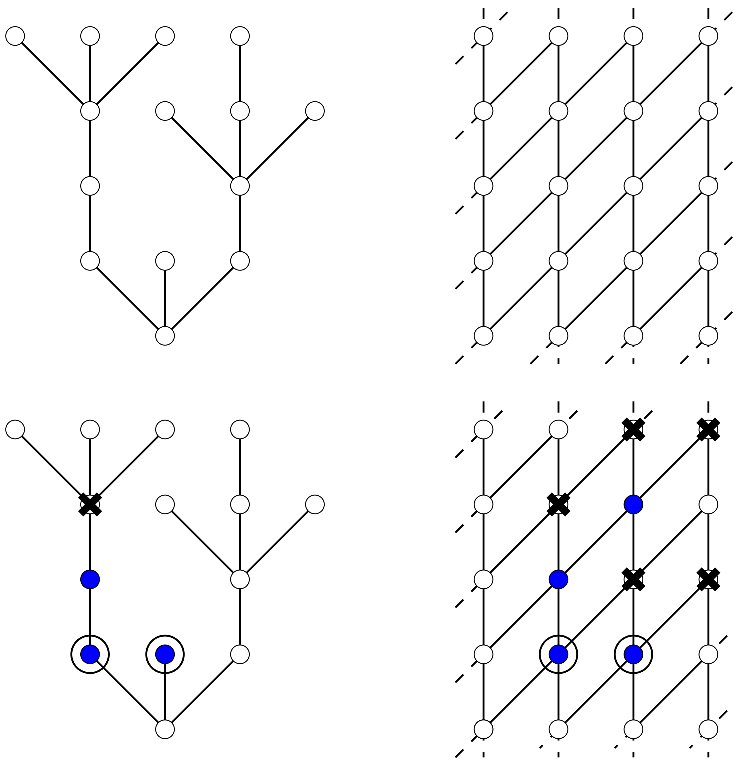
$$A(x) = \sum_{A \text{ fini}} x^{\mathrm{Aire}(A)} = \sum_{A \text{ fini}} a_n x^n$$

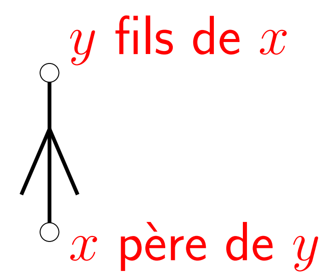
Les animaux dirigés (AD)

- Cette fois, le graphe $G = (V, E)$ est orienté (sans cycles).

Un appelle **animal dirigé A de source S une partie de V** telle que:

- A contient S.
- $\forall v \in A$, il existe un chemin orienté de S vers v entièrement contenu dans A.





(les arêtes sont orientées vers le haut)

- Aire : même définition = nb cellules
- périmètre=$\{v \in V, v \notin A, v$ a un père dans $A\}$
- pour certaines sources, l'AD peut-être non connexe

Combinatoire et dénombrement des animaux dirigés

C'est beaucoup plus facile!

Approches combinatoires :

– bijection avec des arbres, des chemins...
(Bétréma-Penaud, Viennot- Gouyou Beauchamps, Barcucci & al.)

– étude par des empilements : Viennot, Bétréma-Penaud, Corteel - Denise - Gouyou Beauchamps

– étude via des modèles de gaz: Dhar, Bousquet-Mélou, Le Borgne - JFM

En gros: on sait dénombrer les animaux dirigés sur des réseaux simples selon leur aire

$$G(p) = \sum_{A \text{ fini}} p^{|A|}$$

mais pas selon leur périmètre (encore moins selon les deux en même temps).

Illustration: dénombrement des AD sur réseau triangulaire

bijection: pont ± 1 longueur $2n$ avec AD ayant n cellules

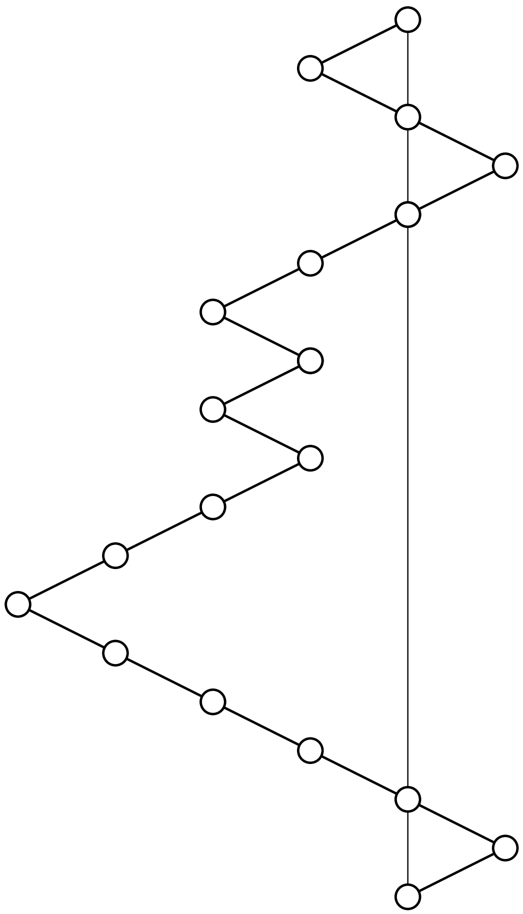


Illustration: dénombrement des AD sur réseau triangulaire

bijection: pont ± 1 longueur $2n$ avec AD ayant n cellules

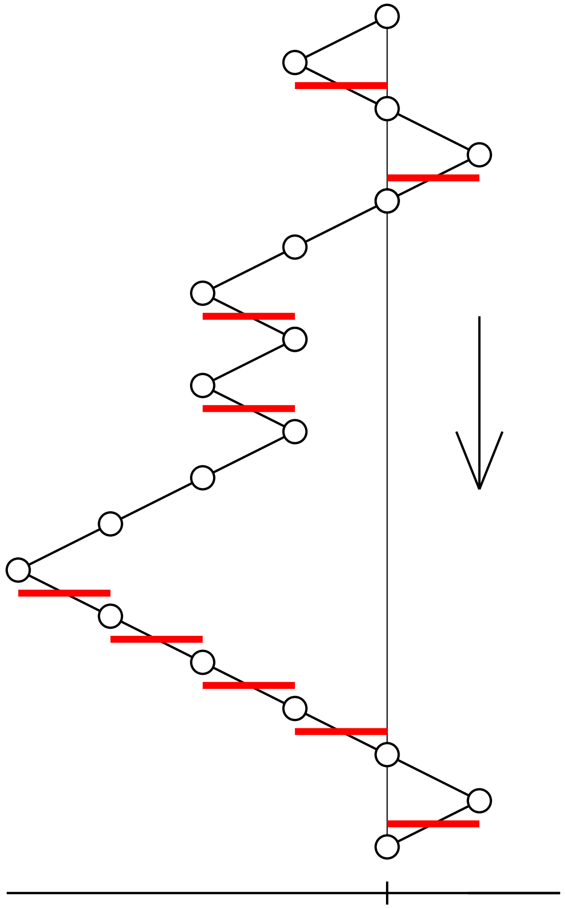


Illustration: dénombrement des AD sur réseau triangulaire

bijection: pont ± 1 longueur $2n$ avec AD ayant n cellules

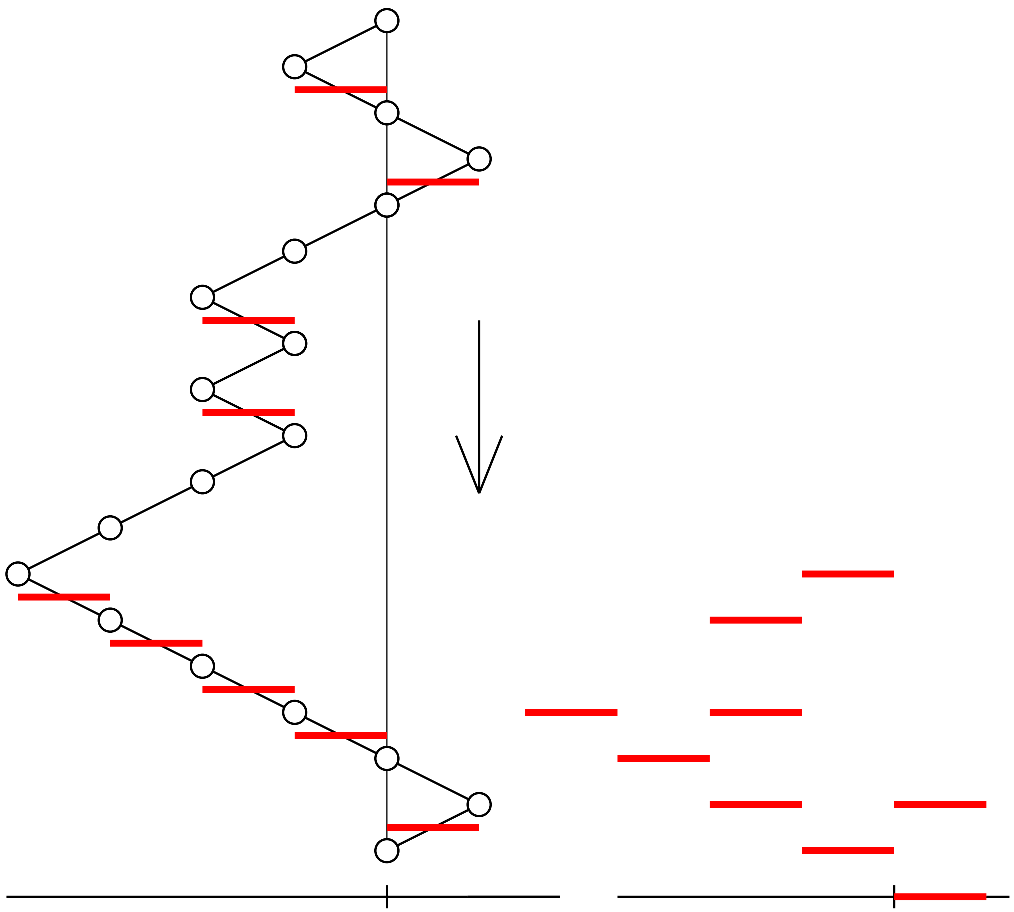


Illustration: dénombrement des AD sur réseau triangulaire

bijection: pont ± 1 longueur $2n$ avec AD ayant n cellules

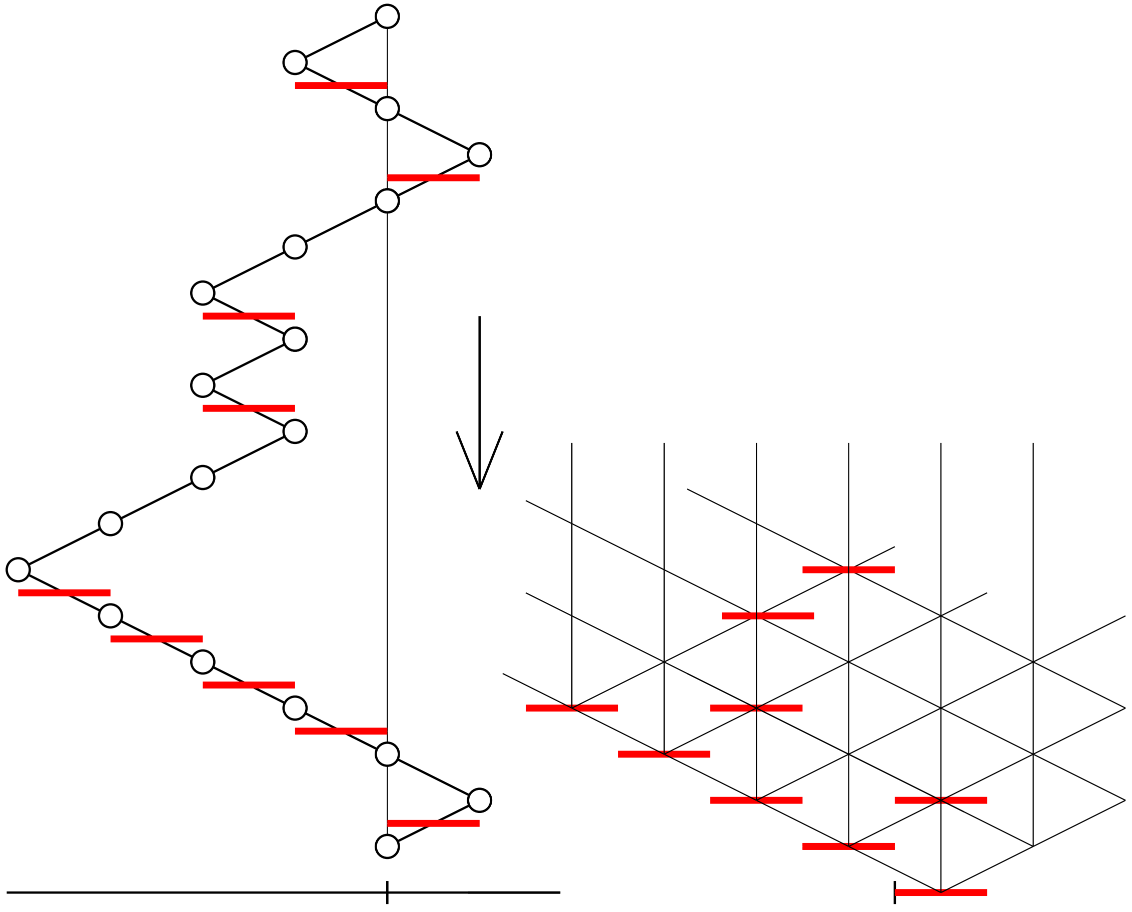
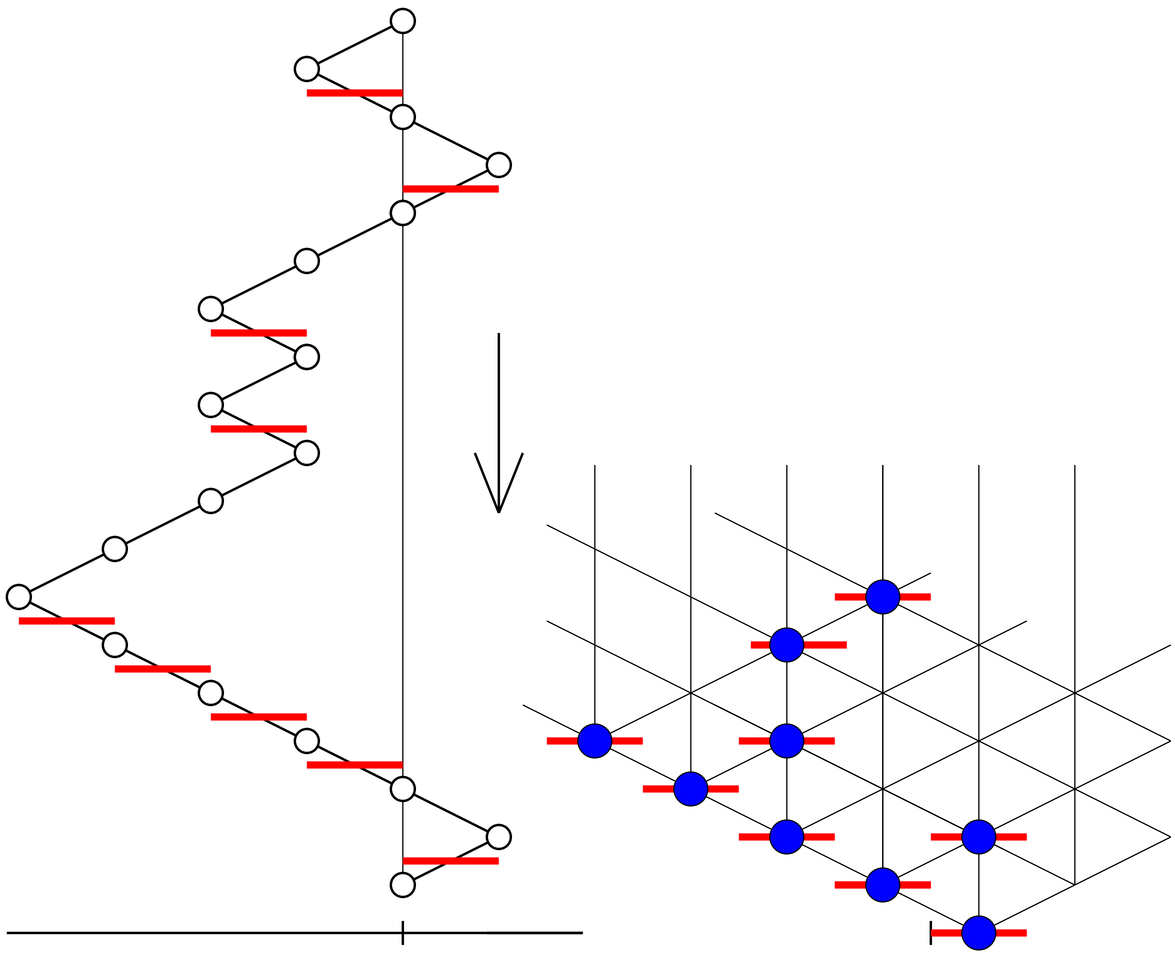


Illustration: dénombrement des AD sur réseau triangulaire

bijection: pont ± 1 longueur $2n$ avec AD ayant n cellules



Il y a $\binom{2n}{n}$ AD avec n cellules sur réseau triangulaire

Modèle de Gaz et AD sur le réseau carré

On s'intéresse à

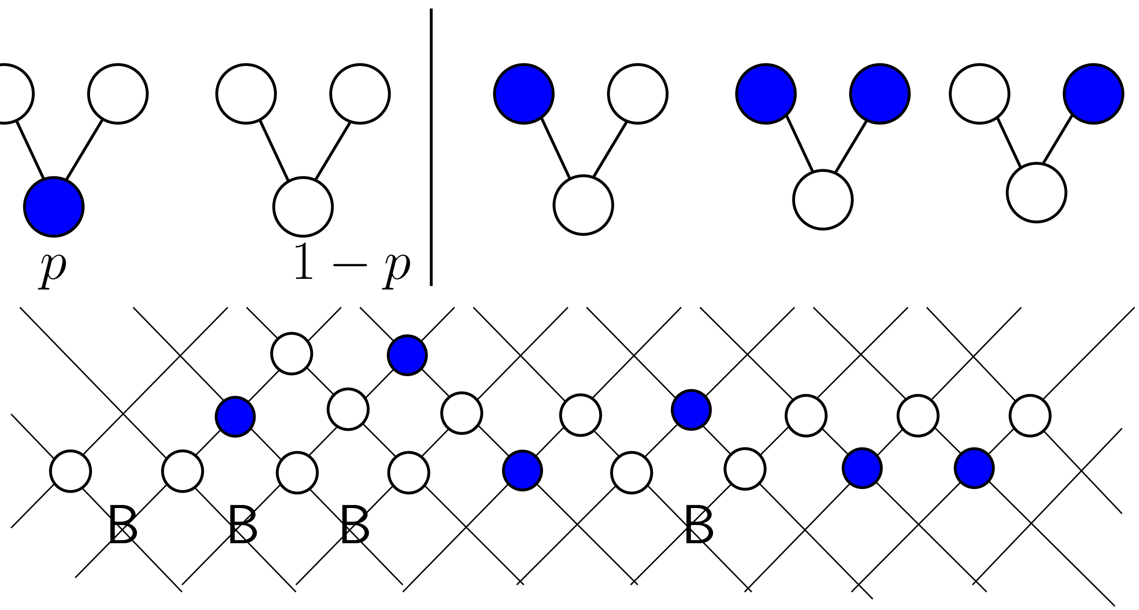
$$G(p) = \sum_{A \text{ fini}} p^{|A|} = \sum_n a_n p^n$$

la série dont le $n$ème coefficient est le nb d'AD ayant n cellules.

Théorème (Dhar (83), MBM (98))
La série alternée des AD satisfait

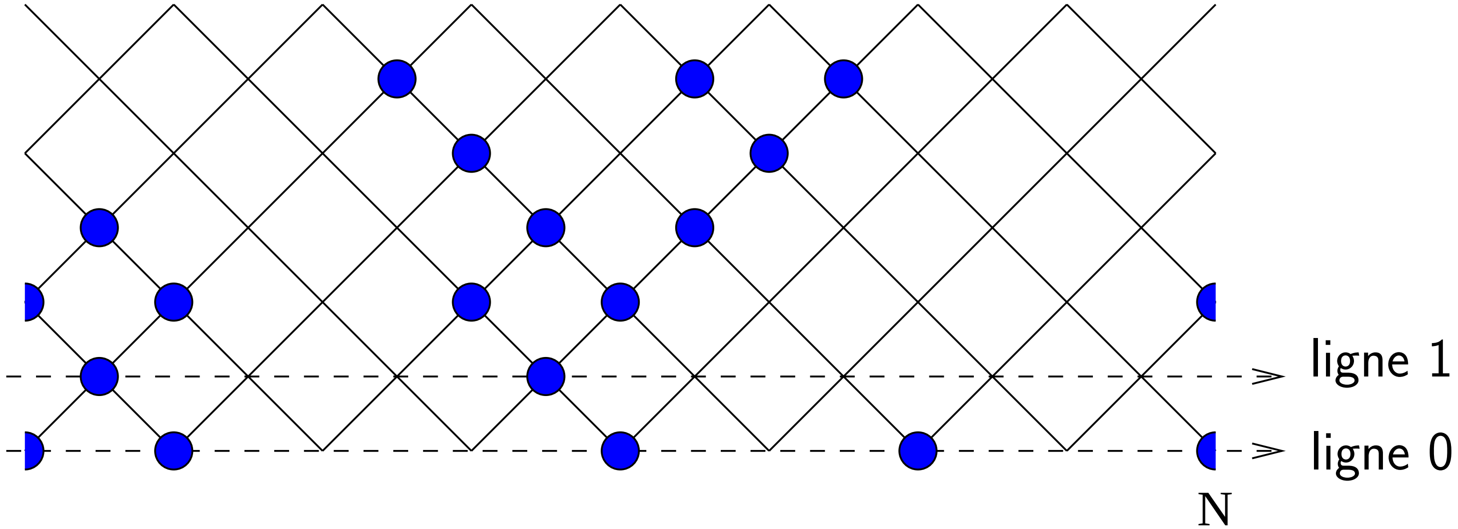
$$-G(-p) = \sum_{A \text{ fini}} p^{|A|}(-1)^{|A|+1} = \mathbb{P}_p(X_x = 1)$$

où (X_x) est un modèle de gaz à particules dures sur le réseau.

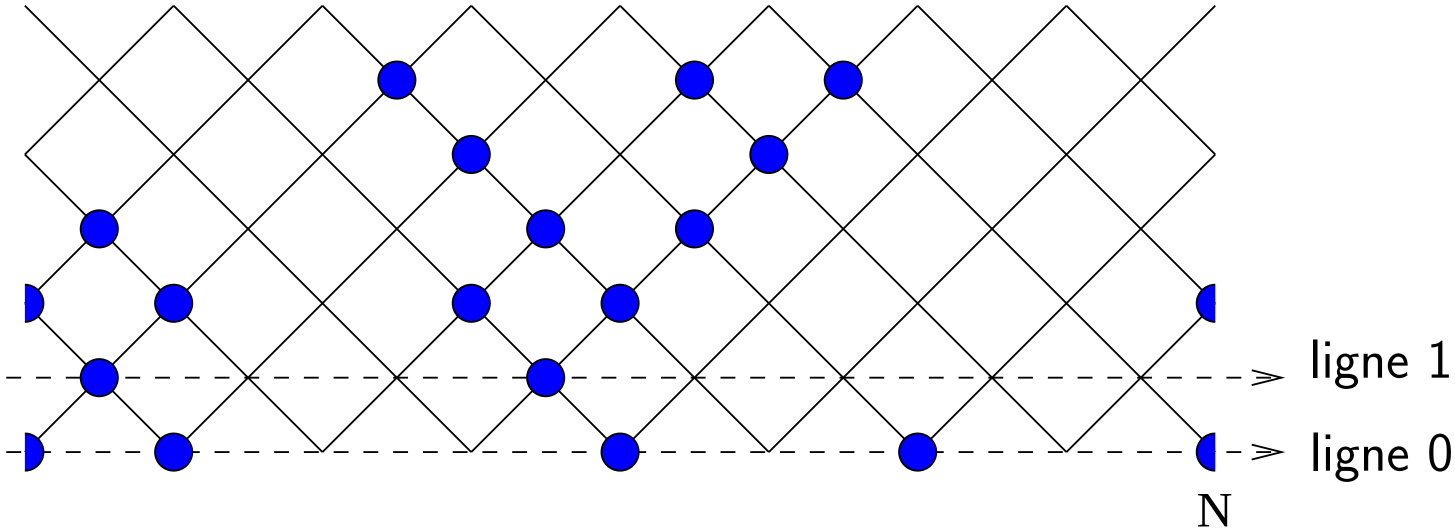


Preuve de Mireille

– On se place sur le cylindre (réseau carré + relation de congruence)



Preuve de Mireille



$(X^l) = (X^l_x)_{x \in [\![1,N]\!]}$ est une chaîne de Markov, apériodique, irréductible, ayant un nombre fini d'états,

– Soit C une partie de $\{1, \dots, N\}$.

On calcule explicitement $\mathbb{P}_p^N(X^x = 1, x \in C)$

et on vérifie que

$$\mathbb{P}(X_x = 1, x \in C, X_x = 0, x \in C^c) \;\; \text{proport.} \;\; \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|C|} (1-p)^{|\mathcal{N}(C)|}.$$

$\longrightarrow$ loi stationnaire se calcule avec un peu d'algèbre linéaire.

Preuve de Mireille

– On a pour tout $C \subset \{1, \ldots, N\}$

$$\mathbb{P}_p^N(X^x = 1, x \in C) = F_C(p) = (-1)^{|C|} G_C(-p)$$

où

$$G_C(x) = \sum_{A \text{ de source } C} p^{|A|}$$

et donc, en particulier

$$-G(-p) = \mathbb{P}_p(X_x = 1)$$

sur le cylindre de taille N...

Preuve de Mireille

On obtient

$$-G_N(-p) = \mathbb{P}_p^N(X_x = 1).$$

(série rationnelle en p).

- la série génératrice G_N converge formellement vers G (lorsque N tend vers $+\infty$).

on connaît G!!

$$-G(-p) = \frac{1 - p + \sqrt{1 + 2p - 3p^2}}{2\sqrt{1 + 2p - 3p^2}}$$

– Avantage de la méthode: rigoureuse, permet de calculer d'autres statistiques
– Désavantage: c'est formel, il y a un passage à la limite.

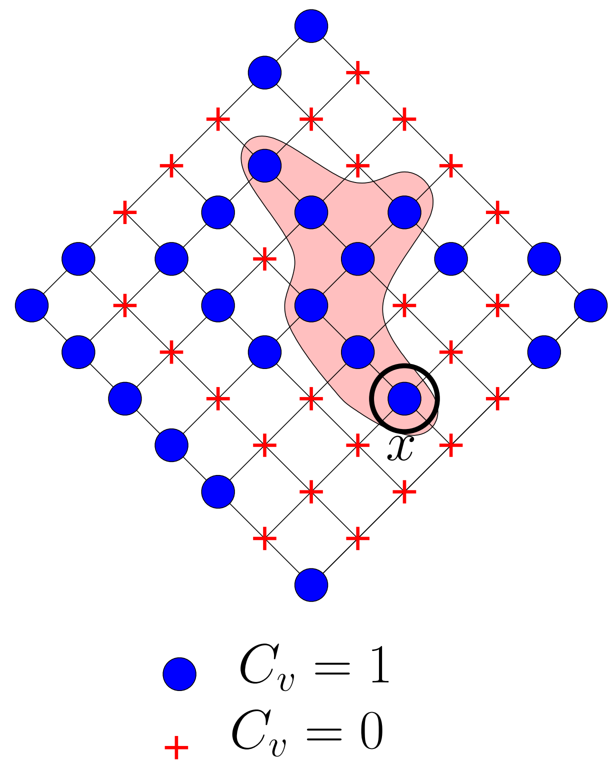
Animaux combinatoires versus animaux probabilistes

En combinatoire : On regarde les animaux de taille n (ayant n cellules).

$$A(x) = \sum_{A \text{ fini}} x^{\mathrm{Aire}(A)} = \sum_{A \text{ fini}} a_n x^n$$

Modèle probabiliste naturel : celui de la percolation de site.

– on colore chaque sommet $v \in V$ d'une couleur C_v aléatoire :
On prend les C_v i.i.d. Bernoulli(p).
– L'AD $\mathbf{A}_x$, aléatoire, de "sur-source" x, est la partie maximale (pour l'inclusion) des sommets de couleur 1, descendants de x.



Pour tout animal fini A de source x,

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}_x = A) = p^{|Aire(A)|}(1-p)^{|\mathcal{P}(A)|}.$$

Paramètre p_{crit} :

$$p_{crit} := \sup \left\{ p, \sum_{A \text{ fini}} \mathbb{P}(\mathbf{A}_x = A) = 1 \right\}.$$

Le résultat principal

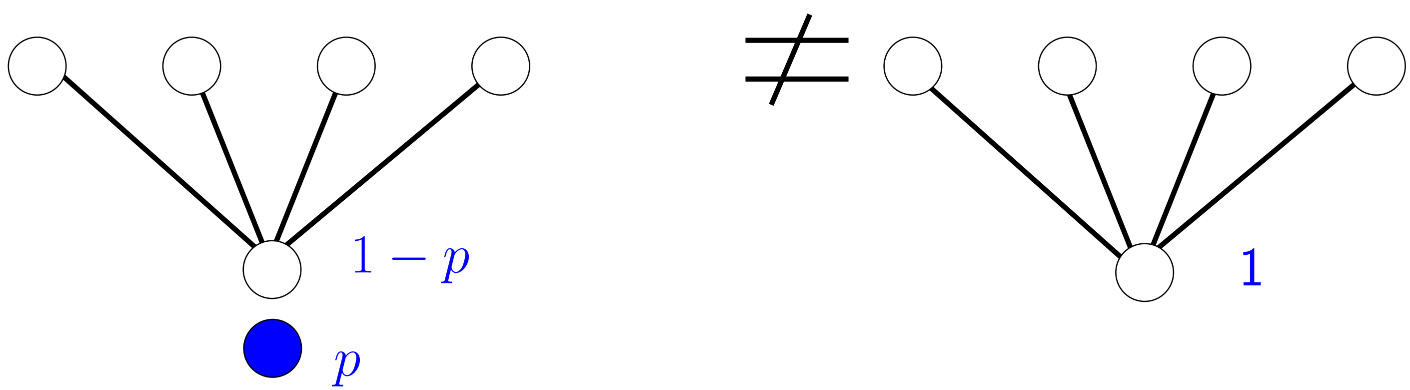
Théorème Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, acyclique, $x \in V$. La série génératrice $G_{\{x\}}$ des animaux dirigés sur G de source x satisfait

$$-G_{\{x\}}(-p) = \mathbb{P}_p(X_x = 1)$$

pour tout $p <$Rayon convergence($G_{\{x\}}$) pour le modèle de gaz sur G défini par :

$$X_x = B_x(p) \prod_{c \text{ enfants de x}} (1 - X_c)$$

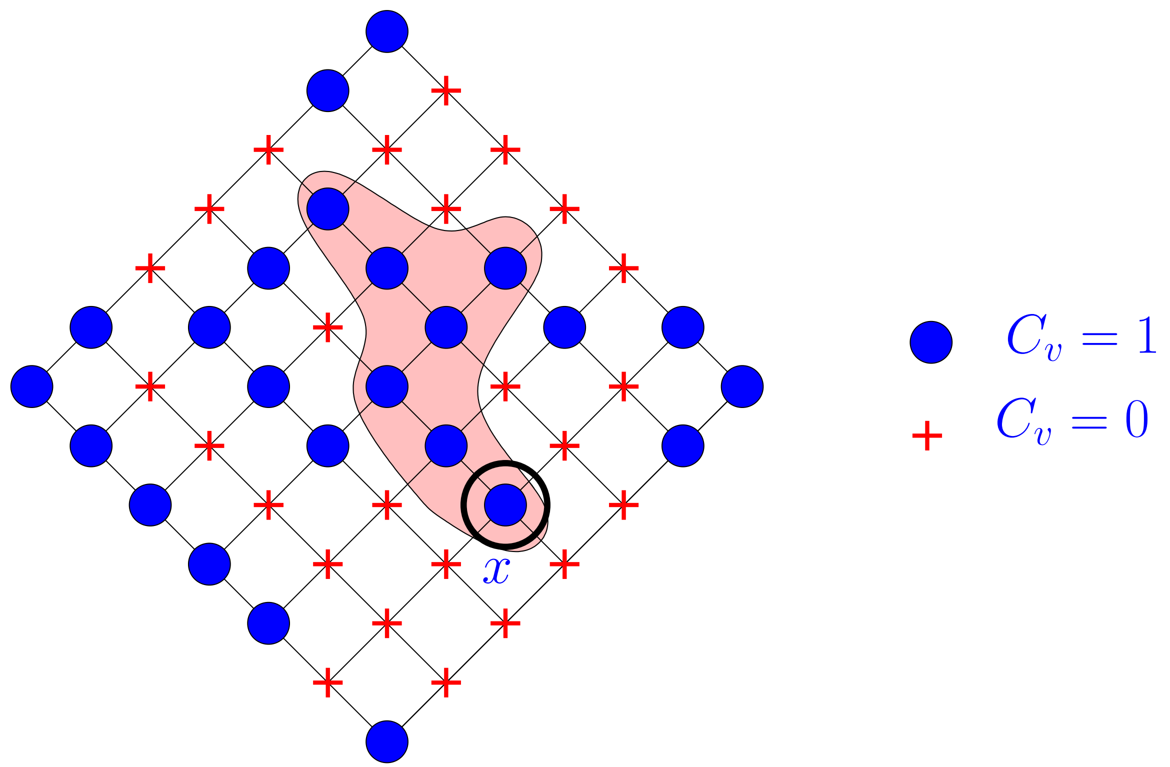
où les $B_x(p)$ sont i.i.d. Bernoulli(p).



Idée: Construire les AD et le gaz en même temps

(Dans le même espace de proba)

- On se sert des C_x pour construire l'animal



On trouve

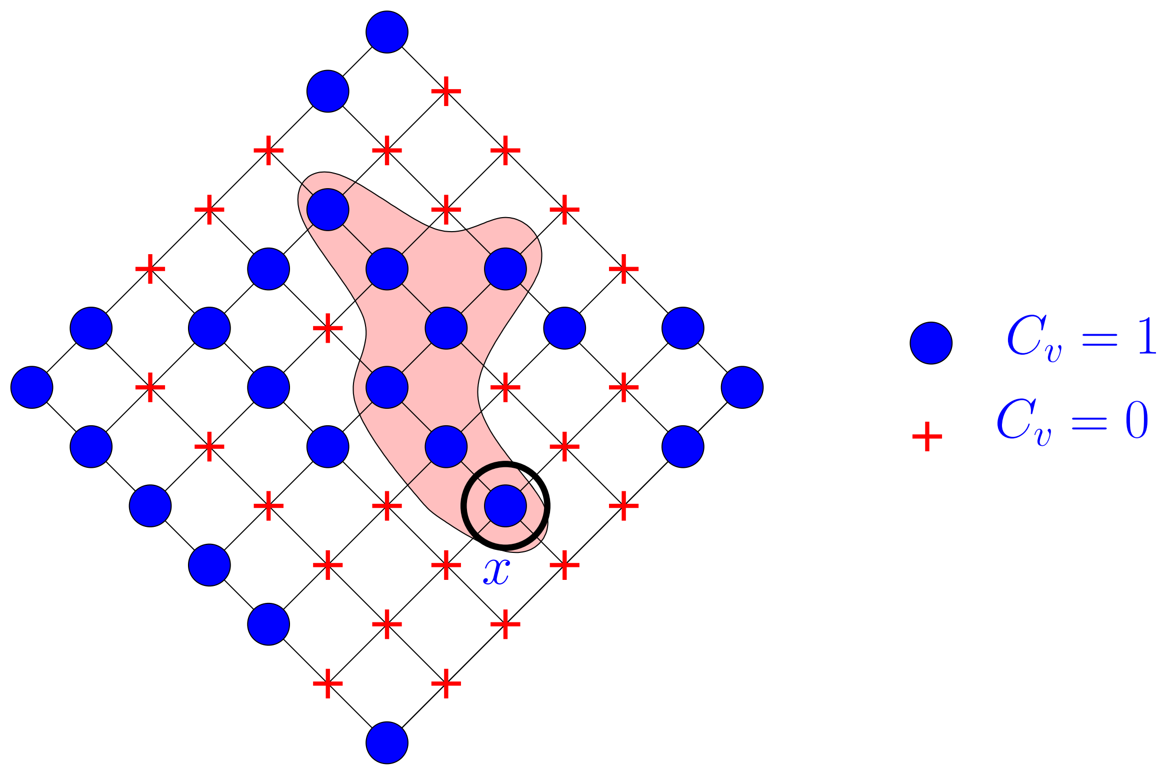
$$-G_{\{x\}}(-p) = \mathbb{E}_p(D(\mathbf{A}_x))$$

Idée: Construire les AD et le gaz en même temps

(Dans le même espace de proba)

- On se sert des C_x pour construire le modèle de gaz

$$X_x = B_x(p) \prod_{c \text{ enfants de x}} (1 - X_c)$$



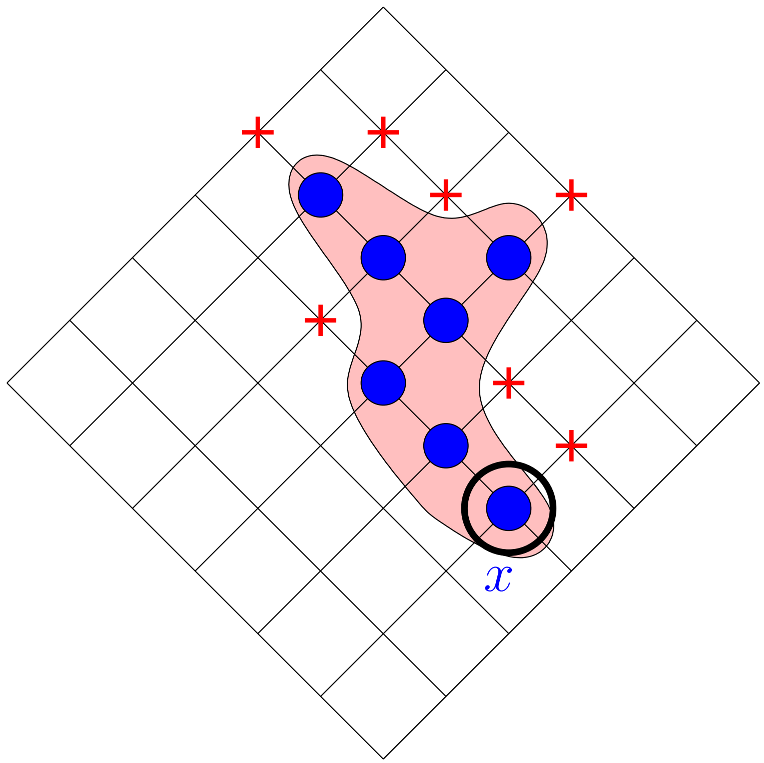
On prend

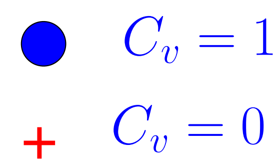
$$X_x = C_x \prod_{c \text{ enfants de x}} (1 - X_c)$$

Idée: Construire les AD et le gaz en même temps

(Dans le même espace de proba)
- On a

$$X_x = C_x(p) \prod_{c \text{ enfants de x}} (1 - X_c)$$

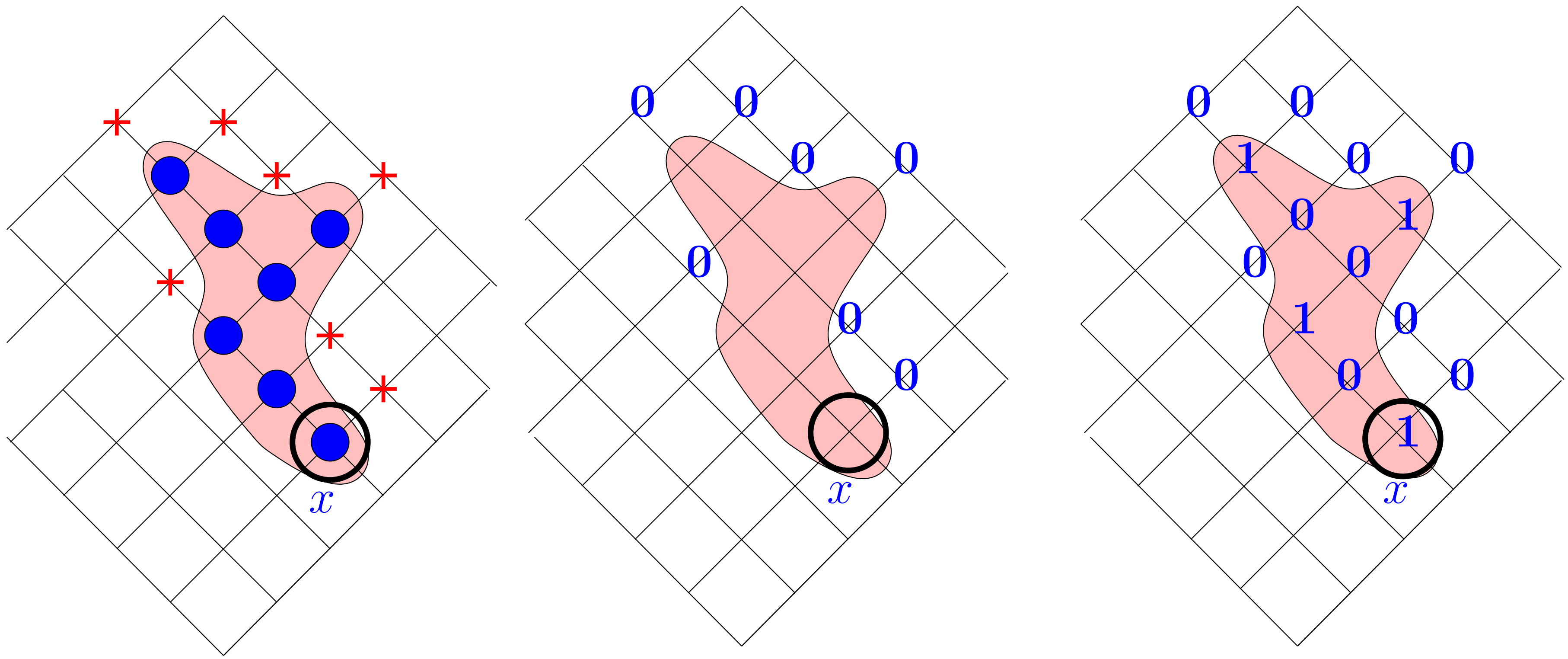




Idée: Construire les AD et le gaz en même temps

(Dans le même espace de proba)
On se sert des C_x pour construire le modèle de gaz

$$X_x = C_x(p) \prod_{c \text{ enfants de x}} (1 - X_c)$$



Sachant $\mathbf{A}_x$, on trouve

$$X_x = \chi(\mathbf{A}_x)$$

L'occupation de x par le gaz est une fonction déterministe de $\mathbf{A}_x$

Bilan

Ainsi, prouver $-G_{\{x\}}(-p) = \mathbb{P}_p(X_x = 1)$, revient à prouver que

$$\mathbb{E}_p(\chi(\mathbf{A}_x)) = \mathbb{E}_p(D(\mathbf{A}_x)).$$

Bilan

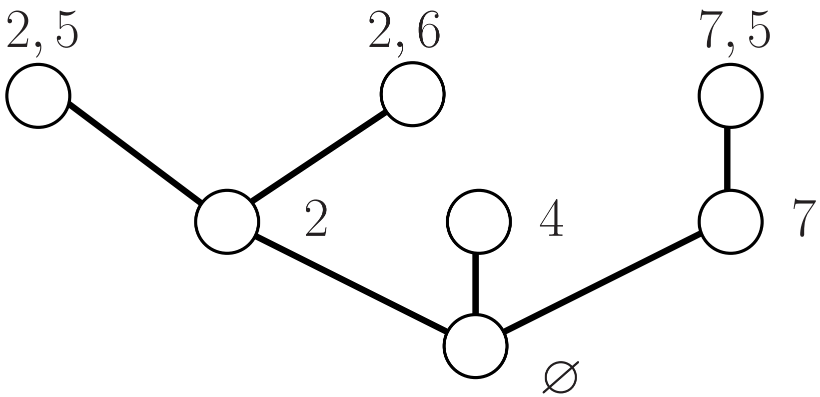
Ainsi, prouver $-G_{\{x\}}(-p) = \mathbb{P}_p(X_x = 1)$, revient à prouver que

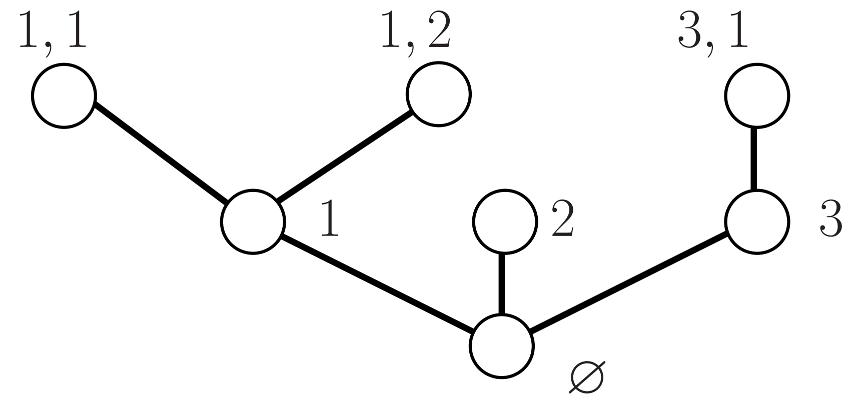
$$\mathbb{E}_p(\chi(\mathbf{A}_x)) = \mathbb{E}_p(D(\mathbf{A}_x)).$$

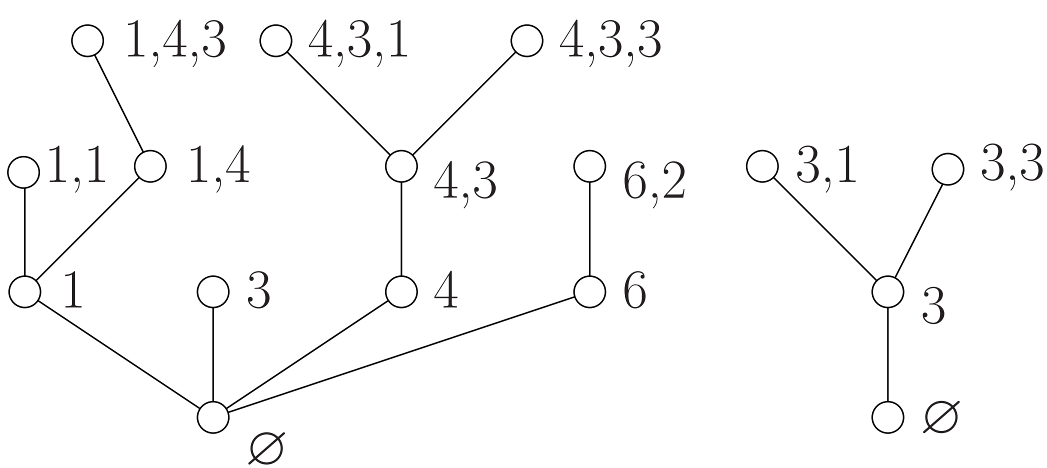
Proposition 1 *Pour tout AD A fini, on a*

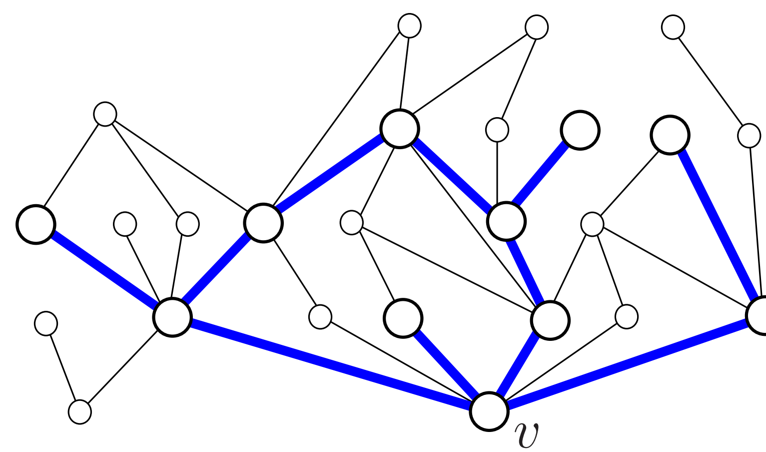
$$\chi(A) = D(A).$$

Arbres plongés dans un animal









Limite de la méthode

On a montré l'analogie complète sur tout graphe acyclique orienté du
– problème de l'énumération des animaux
– calculer la densité d'un modèle de gaz.

Pour calculer explicitement la série génératrice des AD, il faut réussir à calculer explicitement la densité du gaz.

Modèles de Gaz: résultats sur le réseau carré

$$Z_i(k) = B_k^i(p)\,(1 - Z_{i+1}(k))\,(1 - Z_{i+1}(k+1)) \tag{1}$$

Proposition 2 $\forall p \in [0, p_{crit})$, *il n'existe qu'une seule loi de processus* μ *solution de (1).*

Théorème Soit $p \in (0, p_{crit})$. La densité du modèle de gaz est

$$\mathbb{P}_p(Z(0) = 1) = \frac{1/\alpha_\bullet}{1/\alpha_\circ + 1/\alpha_\bullet},$$

où

$$\alpha_\bullet = \frac{-1 + p + \sqrt{1 + 2p - 3p^2}}{2p} \qquad \text{et} \qquad \alpha_\circ = \frac{-1 + p + \sqrt{1 + 2p - 3p^2}}{1 + p + \sqrt{1 + 2p - 3p^2}}.$$

Sous $\mathbb{P}_p$ les v.a. $B_i^\bullet$ et B_i° pour $i \geq 1$ sont independantes et indépedantes de $Z(0)$, et $B_i^\bullet \sim \mathcal{G}(\alpha_\bullet)$ et $B_i^\circ \sim \mathcal{G}(\alpha_\circ)$.

Modèle de gaz: résultats

Proposition 3 *Sous $\mathbb{P}_p$, le processus $(Z(x))_{x\in\mathbb{Z}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition*

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Z(1)=1|Z(0)=1) & \mathbb{P}(Z(1)=0|Z(0)=1) \\ \mathbb{P}(Z(1)=1|Z(0)=0) & \mathbb{P}(Z(1)=0|Z(0)=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_\bullet & \alpha_\bullet \\ \alpha_\circ & 1-\alpha_\circ \end{pmatrix} \tag{2}$$

sous la loi stationnaire.

On peut calculer la série génératrice des AD avec source fixée et finie.
$\longrightarrow$ généralise des résultats de Viennot- Gouyou Beauchamps.

Développement: modèle de gaz associé à la série aire-périmètre

On cherche

$$G_{A,\mathcal{P}}(\alpha, \beta) = \sum_{A \text{ finis}} \alpha^{|A|}\beta^{|\mathcal{P}(A)|}$$

BUT : Calculer

$$G_{A,\mathcal{P}}(p, 1-p) = \sum_{A \text{ finis}} p^{|A|}(1-p)^{|\mathcal{P}(A)|}$$

et pouvoir savoir où cette somme ne fait plus 1 : c'est p_{crit}.

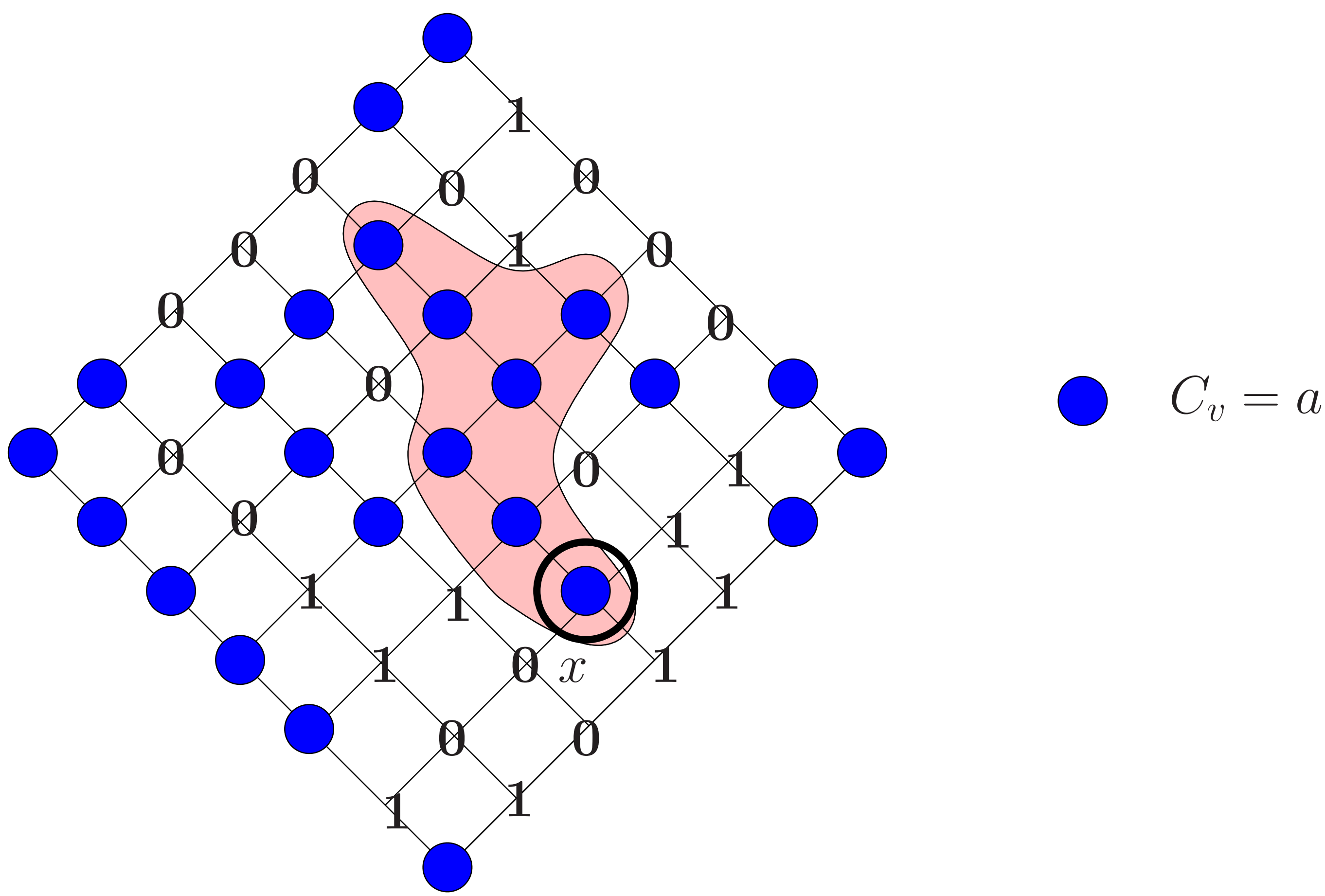
Idée: trouver une coloration et un modèle de gaz susceptible de de coder cette information

Développement: modèle de gaz associé à la série aire-périmètre

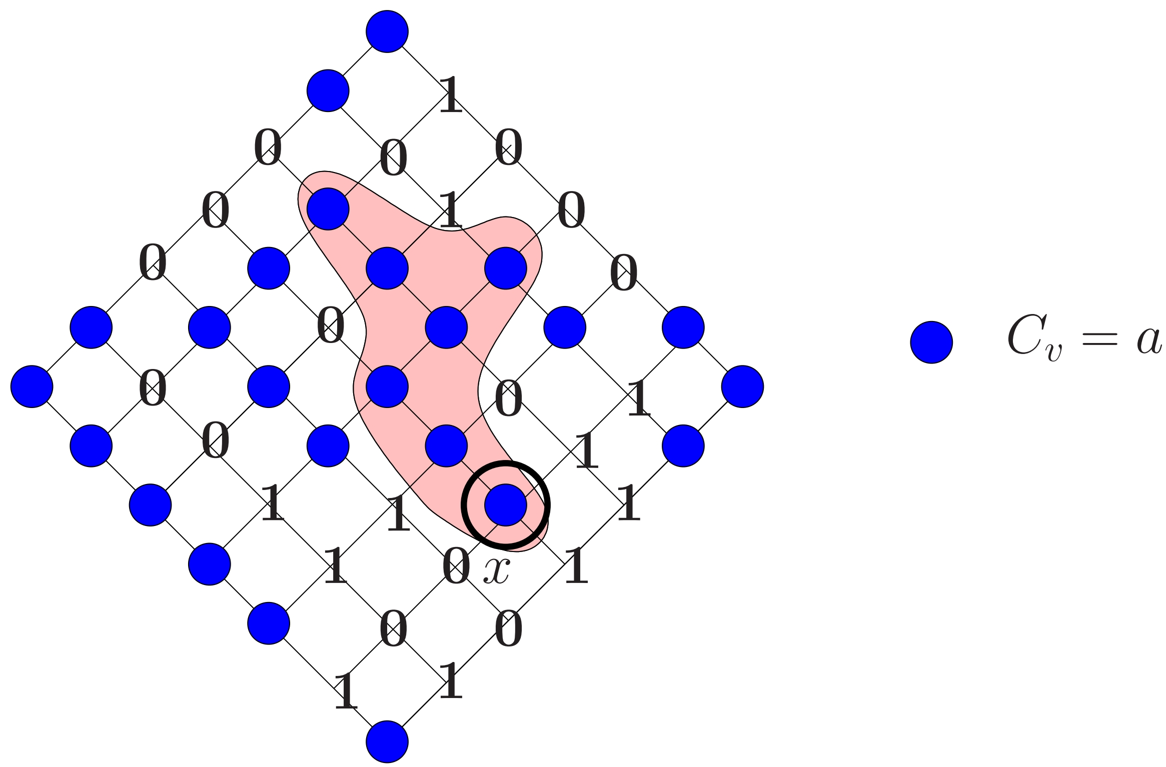
On prend la coloration de V aléatoire suivante :

$$\begin{cases} a & \text{avec proba } p_a \\ 0 & \text{avec proba } p_0 \\ 1 & \text{avec proba } p_1 \end{cases}$$

L'animal $A^\star$ est l'AD maximal pour l'inclusion dont les cellules sont des a.



Développement: modèle de gaz associé à la série aire-périmètre



Modèle de gaz:

$$X_x = 1_{C_x=a}\left(\prod_{c \text{ enfants de } x} X_c\right) \quad = 1_{C_x=a} \min_c X_c$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_x = 1) \;&=\; p_c + \sum_{A \text{ finis}} p_a^{|A|} p_1^{|\mathcal{P}(A)|} \\ &=\; p_c + G_{A,\mathcal{P}}(p_a, p_1)\end{aligned}$$

Merci