

Marches aléatoires sur les groupes et files d'attente  
Notes de cours ALEA 2007

Jean MAIRESSE \*

**Contents**

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>4</b>
2.1	Présentation de monoïde et de groupe . . . . .	4
2.2	Marches aléatoires sur les groupes et monoïdes . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Marches aléatoires sur les produits libres</b>	<b>7</b>
3.1	Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$ . . . . .	7
3.2	Marches aléatoires sur les produits libres . . . . .	15
3.3	Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}_k \star \mathbb{Z}_k$ . . . . .	23
3.4	Marche aléatoire simple sur $\mathbb{F} = \langle a, b, c \mid ab = ba \rangle$ . . . . .	24
3.5	Extensions . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Files d'attente et réseaux</b>	<b>34</b>
4.1	Du côté des files d'attente . . . . .	34
4.2	Du côté des marches aléatoires . . . . .	36
4.3	Files 0-automatiques . . . . .	38
4.4	L'exemple de la file $\mathbb{N} \star \mathbb{B}$ . . . . .	41
4.5	Les réseaux 0-automatiques . . . . .	42

---

\*LIAFA, CNRS-Université Paris 7, case 7014, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. E-mail: Jean.Mairesse@liafa.jussieu.fr

## 1 Introduction

Ce cours n'est *pas* un cours sur les marches aléatoires sur les groupes. Ou plus exactement, il n'a aucune prétention à l'exhaustivité en ce domaine. Il existe de nombreux aspects importants qui ne seront même pas mentionnés ici, par exemple la théorie des frontières ou les théorèmes de la limite locale. Sur ces aspects, on pourra se reporter avantageusement à [15, 32, 35] et aux références qu'on y trouvera.

Ce cours n'est *pas* un cours sur les files d'attente et les réseaux. Ou plus exactement, il n'a aucune prétention à l'exhaustivité en ce domaine. Il existe de nombreux aspects importants qui ne seront même pas mentionnés ici, par exemple les files non-markoviennes ou les approximations fluides. Sur ces aspects, on pourra se reporter avantageusement à [1, 27] et aux références qu'on y trouvera.

Après ces précautions d'usage, je vais essayer de décrire le contenu de façon plus concrète et effective !

Soit  $G$  un groupe, ou monoïde, infini et finiment engendré, et  $\Sigma$  un ensemble fini de générateurs. Soit les deux questions suivantes.

A- *Énumération*. On veut énumérer les éléments de  $G$  en fonction de leur longueur par rapport à  $\Sigma$ , notée  $|\cdot|_{\Sigma}$ . On s'intéresse en particulier à la série de croissance  $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \#\{g \in G, |g|_{\Sigma} = n\} x^n$ . Une situation favorable est celle où l'on peut montrer l'existence d'un ensemble de *formes normales géodésiques*  $L \subset \Sigma^*$ , en bijection avec  $G$ , et reconnu par un automate fini. Les éléments de  $G$  sont alors énumérés par l'intermédiaire de  $L$ , et la série de croissance  $S$  est rationnelle.

B- *Marche aléatoire*. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\Sigma$  et soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi  $\mu$ . La marche aléatoire sur  $G$  de loi  $\mu$  est définie par :  $X_n = X_{n-1} \cdot a_{n-1} = a_0 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$ , où  $\cdot$  est la loi de  $G$ . On s'intéresse au comportement asymptotique de la marche  $(X_n)_n$ . Par exemple, on souhaite calculer, sous la forme la plus explicite possible, la *vitesse de fuite*, c'est-à-dire la constante  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  définie par :  $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n|_{\Sigma}/n = \gamma$  presque sûrement. Plus généralement, on souhaite obtenir une description explicite de la *mesure harmonique*, c'est-à-dire de la loi de  $X_{\infty} = \lim_n X_n$ , qui donne la direction prise par la marche dans sa fuite vers l'infini.

Le problème A est l'archétype des questions traitées en combinatoire. Ici, on s'intéresse au problème B. Ce dernier est plus difficile que le problème A. Avoir une bonne compréhension de la combinatoire peut être vu comme un préalable pour pouvoir étudier de façon effective la marche aléatoire. Une façon de préciser l'interaction entre les problèmes A et B est la suivante. Soit  $\pi : \Sigma^* \rightarrow G$  le morphisme canonique qui associe à un mot l'élément

de  $G$  obtenu en remplaçant la concaténation par la loi de  $G$ . Étudier la combinatoire de  $G$  revient à s'intéresser à la mesure uniforme sur  $G_n = \{g \in G, |g|_\Sigma = n\}$ . Étudier la marche aléatoire simple ( $\mu$  uniforme) revient à s'intéresser à l'image par  $\pi$  de la mesure uniforme sur  $\Sigma^n = \{u \in \Sigma^*, |u| = n\}$ .

Les groupes et monoïdes que l'on va rencontrer dans ce mémoire auront une structure combinatoire riche. En particulier, il va exister des automates finis pour manipuler et compter les éléments. La présence de tels automates fournit un levier combinatoire puissant pour aborder l'étude des marches aléatoires.

L'idée clef est ensuite que la structure combinatoire devrait se refléter au niveau de la mesure harmonique de la marche, et donc que cette dernière devrait aussi, en un sens, se décrire à l'aide d'automates finis. Une retombée importante est alors la capacité à calculer explicitement la vitesse de fuite ou l'entropie de la marche. (Ces quantités existent par sous-additivité mais leur détermination explicite est un problème notoirement difficile.)

Dans la première partie, on réalise ce programme dans un certain nombre de situations où le graphe de Cayley de  $G$  a une structure arborescente : produits libres de groupes ou monoïdes finis, certains groupes de trace. Un autre cas (non traité ici) que l'on peut étudier suivant cette démarche est le groupe de tresse à trois brins  $B_3$ . L'exemple de  $B_3$  est emblématique. Il faut en effet effectuer une étude précise de la combinatoire de  $B_3$ , avant de réinvestir cette connaissance dans l'analyse de la marche aléatoire. Pour plus de détails, voir [23, 25].

Dans une deuxième partie, on propose une synthèse inattendue entre les files d'attente Markoviennes et les marches aléatoires du type de celles étudiées en première partie. Le modèle est une file avec des arrivées, un buffer et un serveur, mais le contenu du buffer évolue, sous l'effet des arrivées, comme une marche aléatoire sur un (semi)groupe. Ces files sont baptisées *0-automatiques*.

Dans une file 0-automatique, le contenu de la salle d'attente n'est pas codé par un entier mais par un mot non-commutatif sur un alphabet. Ceci permet d'introduire une notion de classes de clients et de modéliser des phénomènes nouveaux tels que l'annulation ou la fusion entre clients. Le résultat saillant est que toutes les files 0-automatiques ont un processus de départs Poissonnien (quasi-réversibilité).

Concrètement, cela entraîne que l'analyse mathématique développée pour les files classiques, s'adapte à ce contexte. En particulier, la riche théorie des réseaux dits à *forme produit* s'enrichit d'une nouvelle branche : les réseaux 0-automatiques.

La première partie repose, pour la partie originale, sur les articles [19, 20, 21, 24] (avec Frédéric Mathéus de l'Université de Bretagne-Sud) et la seconde sur les articles [5, 6] (avec Thu-Ha Dao-Thi du LIAFA).

## 2 Préliminaires

### 2.1 Présentation de monoïde et de groupe

On travaille sur des groupes et monoïdes définis par générateurs et relations. Rappelons les définitions de base.

Étant donné un ensemble non-vide  $A$ , le *monoïde libre*  $A^*$  est le monoïde constitué de l'ensemble des mots finis sur l'alphabet  $A$  avec la concaténation comme loi interne. Le mot vide est noté 1. La longueur d'un mot  $u$  (nombre de lettres) est notée  $|u|$ .

Soit  $(M, *)$  un groupe ou monoïde finiment engendré et soit  $\Sigma$  un ensemble fini de générateurs. On note  $\pi : \Sigma^* \rightarrow M$  le morphisme de monoïde qui à un mot  $a_1 \cdots a_k$  associe l'élément de monoïde  $a_1 * \cdots * a_k$ . Un mot  $u \in \pi^{-1}(m)$  est un *représentant* de  $m$ . Il existe une notion canonique de longueur d'un élément dans un monoïde.

**Définition 2.1.** La longueur (par rapport à  $\Sigma$ ) d'un élément  $m$  de  $M$  est définie par

$$|m|_{\Sigma} = \min\{k \mid m = u_1 * \cdots * u_k, u_i \in \Sigma\}.$$

Un représentant  $u$  de  $m$  est géodésique si  $|u| = |m|_{\Sigma}$ .

Le *graphe de Cayley*  $\mathcal{X}(M, \Sigma)$  du monoïde  $M$  par rapport aux générateurs  $\Sigma$  est le graphe orienté d'ensemble de nœuds  $M$  et d'ensemble d'arcs  $\{m \rightarrow m * a, m \in M, a \in \Sigma\}$ . On remarque que  $|m|_{\Sigma}$  est la distance géodésique (en nombre d'arcs) pour aller de  $1_M$  à  $m$  dans  $\mathcal{X}(M, \Sigma)$ .

Des exemples de graphe de Cayley apparaissent en figures 3 ou 6. Par souci de lisibilité, les doubles arcs orientés  $\longleftrightarrow$  sont représentés par des arêtes non-orientées  $--$ .

Un langage  $L$  de  $\Sigma^*$  est une *section* ou un ensemble de *formes normales* de  $M$  (par rapport à  $\Sigma$ ) si la restriction de  $\pi : \Sigma^* \rightarrow M$  à  $L$  définit une bijection, c'est-à-dire si tout élément de  $M$  possède un unique représentant dans  $L$ . Si tous les mots de  $L$  sont géodésiques, on dit que  $L$  est une section géodésique.

**Définition 2.2.** Soit  $\Sigma$  un ensemble fini non-vide. Le monoïde présenté par  $\Sigma$  et  $R \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$  est le quotient du monoïde libre  $\Sigma^*$  par la plus petite congruence contenant les relations  $u \sim v, (u, v) \in R$ . On le note  $\langle \Sigma \mid u = v, (u, v) \in R \rangle^+$ .

Deux mots de  $\Sigma^*$  représentent le même élément de  $\langle \Sigma \mid u = v, (u, v) \in R \rangle^+$  si on peut passer de l'un à l'autre par substitutions successives du type  $xuy \rightarrow xvy, (u, v) \text{ ou } (v, u) \in R$ .

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini non-vide et soit  $\Sigma^{-1} = \{a^{-1}, a \in \Sigma\}$  une copie disjointe de  $\Sigma$ . Le monoïde présenté par

$$\langle \Sigma \sqcup \Sigma^{-1} \mid \forall a \in \Sigma, aa^{-1} = 1, a^{-1}a = 1 \rangle^+$$

est un groupe. On l'appelle le *groupe libre* engendré par  $\Sigma$  et on le note  $\mathbb{F}(\Sigma)$ . Les graphes de Cayley de  $\mathbb{F}(a, b)$  par rapport à différents ensembles de générateurs sont représentés en figure 12.

**Définition 2.3.** Soit  $\Sigma$  un ensemble fini non-vide et soit  $\Sigma^{-1}$  une copie disjointe de  $\Sigma$ . Soit une relation  $R \subset (\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^* \times (\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^*$ . Le groupe présenté par  $\Sigma$  et  $R$ , noté  $\langle \Sigma \mid u = v, (u, v) \in R \rangle$ , est le quotient de  $\mathbb{F}(\Sigma)$  par la plus petite congruence contenant les relations  $u \sim v, (u, v) \in R$ .

On remarque qu'on adopte une notation différente pour les présentations de groupe, déf. 2.3, et les présentations de monoïdes, déf. 2.2.

## 2.2 Marches aléatoires sur les groupes et monoïdes

**Définition 2.4.** Soit  $(M, *)$  un monoïde discret et soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $M$ . La marche aléatoire  $(M, \mu)$  est la chaîne de Markov d'espace d'états  $M$  et de matrice de transition  $P$  donnée par

$$\forall u, v \in M, P_{u,v} = \mu(\{m \mid u * m = v\}).$$

Lorsque  $M$  est un groupe, on a  $P_{u,v} = \mu(u^{-1} * v)$ .

Soit  $(x_n)_n$  une suite de v.a. i.i.d. (variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées) de loi  $\mu$ . Posons

$$X_0 = 1_M, \quad X_{n+1} = X_n * x_n = x_0 * x_1 * \cdots * x_n. \quad (1)$$

La suite de v.a.  $(X_n)_n$  est une *réalisation* de la marche aléatoire  $(M, \mu)$ . La loi de  $X_n$  est  $\mu^{*n}$ , le  $n$ -ième produit de convolution de  $\mu$ .

Lorsque  $\mu(\Sigma) = 1$ , on dit que  $(M, \mu)$  est une marche aléatoire *au plus proche voisin* (par rapport à  $\Sigma$ ). En effet, les sauts de la marche aléatoire s'effectuent entre nœuds voisins dans le graphe de Cayley  $\mathcal{X}(M, \Sigma)$ . Lorsque  $\mu$  est en plus uniforme sur  $\Sigma$ , on dit que  $(M, \mu)$  est la marche aléatoire *simple* (par rapport à  $\Sigma$ ).

Le résultat ci-dessous, remarqué pour la première fois par Guivarc'h [13], est une conséquence du théorème ergodique sous-additif de Kingman.

**Proposition 2.5.** *Soit  $M$  un monoïde finiment engendré et soit  $\Sigma$  un ensemble fini de générateurs. Soit  $(M, \mu)$  une marche aléatoire et soit  $(X_n)_n$  une réalisation de cette marche. Si on suppose que  $\int |x|_\Sigma d\mu(x) < \infty$ , alors*

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|_\Sigma}{n} = \gamma \text{ p.s., dans } L^1.$$

On appelle  $\gamma$  la dérive ou la vitesse de fuite de la marche aléatoire.

On peut voir la prop. 2.5 comme une extension non-commutative de la loi forte des grands nombres, cette dernière correspondant au cas  $M = (\mathbb{Z}, +)$ . Intuitivement,  $\gamma$  est la vitesse à laquelle la marche s'échappe vers l'infini.

Lorsque  $M$  est infini, la première question qui se pose est de savoir si la marche aléatoire est récurrente ou transiente.

On rappelle qu'une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états dénombrable est *récurrente* si une réalisation revient p.s. à son point de départ, et *transiente* si elle n'est pas récurrente, ou de façon équivalente si une réalisation quitte p.s. tout ensemble fini d'états.

Le résultat le plus célèbre sur les marches aléatoires est le théorème de Pólya : la marche aléatoire simple sur  $(\mathbb{Z}^d, +)$  est récurrente pour  $d = 1$  ou  $2$  et transiente pour  $d \geq 3$ . De façon beaucoup plus générale, le résultat qui suit nous apprend que  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}^2$  sont les "seuls" groupes pour lesquels il existe une marche récurrente.

**Théorème 2.6.** *Soit  $G$  un groupe infini et finiment engendré. Il existe une mesure de probabilité  $\mu$  dont le support engendre  $G$  et telle que  $(G, \mu)$  soit récurrente ssi  $G$  contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou à  $\mathbb{Z}^2$ .*

Ce théorème, très puissant, est dû à Varopoulos, voir [31] ou [35, Chap. 1.3]. On en déduit en particulier que les marches aléatoires sur les groupes sur lesquelles on travaillera seront toujours transientes. (Il y a d'ailleurs des façons plus élémentaires de le montrer que de faire référence au théorème 2.6.) Il en sera de même pour les marches aléatoires sur les monoïdes considérées ici.

### 3 Marches aléatoires sur les produits libres

On étudie les marches aléatoires transientes sur les groupes et monoïdes infinis de type produit libre. On propose un résultat structural sur la forme de la mesure harmonique (théorème 3.7). Une retombée du résultat est de permettre le calcul explicite de la vitesse de fuite ou de l'entropie de la marche.

#### 3.1 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$

Considérons un buffer (une salle d'attente, si on n'aime pas les anglicismes) dans lequel viennent prendre place des clients de deux types : les joueurs de tennis (classe  $a$ ) et les jazzmen amateurs de trio (classe  $b$ ). L'objectif de ces clients est de trouver un ou des partenaires. À son arrivée, un client prend place en fin de buffer et interagit avec le client situé devant lui. Si tous deux sont joueurs de tennis, ils quittent instantanément le buffer pour aller faire une partie. De même, trois jazzmen consécutifs quittent sans attendre le buffer.

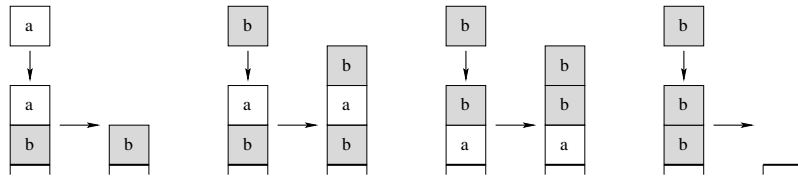


Figure 1: Évolution du contenu du buffer.

On peut représenter les clients par des pièces et visualiser le contenu du buffer à l'aide d'un empilement. On a un modèle proche des empilements de Tetris, mais différent, sans commutations et avec de nouveaux mécanismes d'annulation des pièces, illustrés en fig. 1.

*Remarque.* On se gardera de décrire ce modèle comme une file d'attente. En effet, s'il y a des annulations de clients en fin de buffer, il n'y a pas de départs consécutifs à des services en tête de buffer. On remédie à ce manque en §4.

On peut résumer le mécanisme par les règles de simplification :  $a^2 = 1$ ,  $b^3 = 1$ . L'ensemble des contenus possibles pour le buffer est donné par le langage rationnel

$$L = \{u_1 u_2 \cdots u_k \in \{a, b, b^2\}^* \mid \forall i, u_{i+1} \in \text{Next}(u_i)\}, \quad (2)$$

avec

$$\text{Next}(a) = \{b, b^2\}, \quad \text{Next}(b) = \text{Next}(b^2) = \{a\}. \quad (3)$$

On considère maintenant un modèle aléatoire. Le type de chaque client est aléatoire, indépendant de celui des autres clients, et égal à  $a$ , resp.  $b$ , avec probabilité  $\mu(a) > 0$ , resp.  $\mu(b) = 1 - \mu(a) > 0$ . Soit  $Y_n$  le contenu du buffer après l'arrivée des  $n$  premiers clients, et  $|Y_n|$  le nombre de clients correspondant. La suite  $(Y_n)_n$  est une chaîne de Markov sur  $L$ .

*Première question.* Peut-on déterminer la vitesse de croissance du buffer, c'est-à-dire la limite p.s.  $\gamma = \lim_n |Y_n|/n$  (qui existe par sous-additivité) ?

Appelons  $\gamma$  la *vitesse de fuite*. Supposons que  $(Y_n)_n$  est transient. Alors le contenu du buffer converge vers un empilement infini  $Y_\infty$  qui peut être vu comme une v.a. à valeurs dans

$$L^\infty = \{u_1 \cdots u_k \cdots \in \{a, b, b^2\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i, u_{i+1} \in \text{Next}(u_i)\}.$$

*Deuxième question.* Peut-on déterminer la loi de l'empilement infini  $Y_\infty$  ?

On note la loi de  $Y_\infty$  par  $\mu^\infty$  et on l'appelle la *mesure harmonique*. Intuitivement, la mesure harmonique décrit la "direction" suivie par  $(Y_n)_n$  dans sa fuite vers l'infini.

On va répondre aux deux questions et donner une description explicite de la mesure harmonique et de la vitesse de fuite. Mais avant cela, on reformule le modèle dans le cadre des marches aléatoires sur les groupes, cf. §2.2.

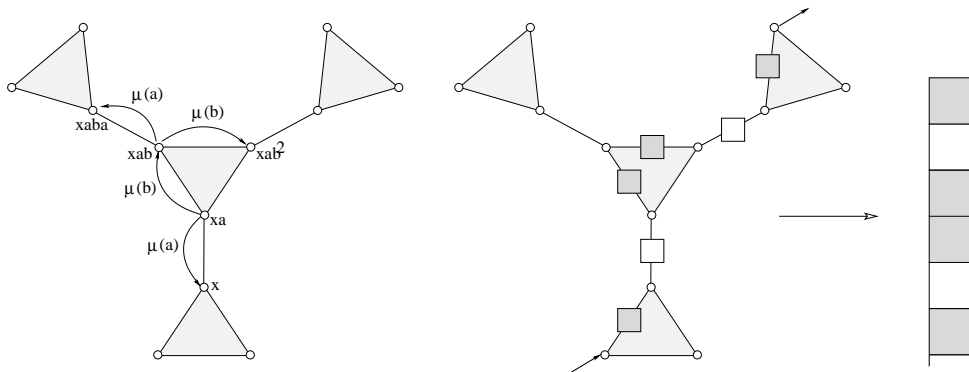


Figure 2: Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$ .

Le groupe  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$  est défini par la présentation de groupe

$$\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1 \rangle. \tag{4}$$

Ce groupe est isomorphe au *groupe modulaire*  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , c'est-à-dire le groupe des matrices  $2 \times 2$  à coefficients entiers et déterminant 1, quotienté par  $\pm \text{Id}$  (la matrice identité).



On peut réinterpréter  $(Y_n)_n$  comme une réalisation de la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$  définie par  $\mu$ . En particulier, par application directe du théorème 2.6, on a effectivement que  $(Y_n)_n$  est transiente. La mesure harmonique  $\mu^\infty$  vit sur la *frontière* du groupe, voir fig. 3. (La ‘frontière’ en question est, ici, aussi bien la frontière hyperbolique que la frontière des bouts.)

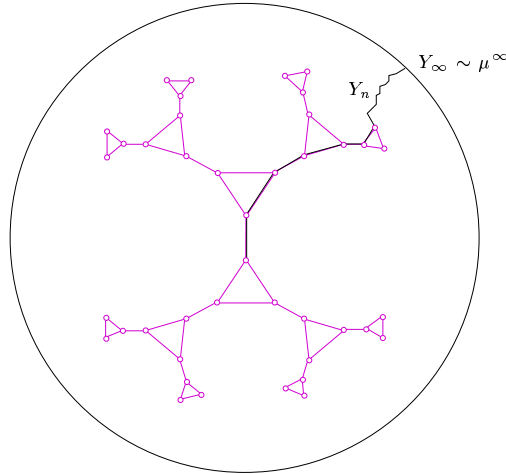


Figure 3: Frontière de  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$  et mesure harmonique.

Rappelons que le graphe de Cayley d’un groupe a été défini en §2.2. Posons  $\Sigma = \{a, b, b^{-1} = b^2\}$ . On peut voir  $(Y_n)_n$  comme une marche au plus proche voisin sur le graphe de Cayley  $\mathcal{X}(\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3, \Sigma)$ . On illustre ce point de vue, ainsi que la correspondance avec les empilements, en fig. 2.

*Remarque.* Ci-dessus, on a défini la longueur  $|\cdot|$  comme étant égale au nombre de clients, avec par exemple  $|b^2| = 2$ . En d’autres termes, on calcule la longueur dans le groupe au sens de la déf. 2.1 mais par rapport à l’ensemble de générateurs  $\{a, b\}$ . Il faudrait légèrement adapter calculs et formules pour passer de  $\{a, b\}$  à  $\Sigma$ .

De prime abord, il paraît plus simple de déterminer  $\gamma$  qui est un scalaire plutôt que  $\mu^\infty$  qui est une mesure sur des mots infinis. L’approche, introduite dans M. [19] et M. & Mathéus [24], va être au contraire de déterminer explicitement  $\mu^\infty$ , puis d’en déduire la valeur de  $\gamma$ .

*Intermède.* On propose au lecteur la question suivante pour mettre à l’épreuve son intuition probabiliste. Quelle proportion tennismen/jazzmen faut-il absolument éviter ? En termes plus formels, comment choisir  $\mu(a)$  et  $\mu(b)$  pour maximiser la vitesse de fuite  $\gamma$  ? (Réponse en (15).) *Fin de l’intermède.*

Procédons par étapes et commençons par expliquer pourquoi il n’est pas élémentaire de calculer  $\gamma$ .

Modifions dans un premier temps le modèle en supposant que la classe d'un client est de loi  $\nu$  définie par  $\nu(a) = p > 0$  et  $\nu(b) = \nu(b^2) = q = (1-p)/2 > 0$ . (Les jazzmen peuvent donc arriver par 2, en quête d'un troisième partenaire.)

Posons  $\Delta = |Y_{n+1}| - |Y_n|$ . On a

$$\begin{aligned} Y_n = ua &\implies P\{\Delta = -1\} = p, P\{\Delta = 1\} = q, P\{\Delta = 2\} = q \\ Y_n = uab &\implies P\{\Delta = -1\} = q, P\{\Delta = 1\} = p + q \\ Y_n = uab^2 &\implies P\{\Delta = -2\} = q, P\{\Delta = -1\} = q, P\{\Delta = 1\} = p. \end{aligned}$$

Comme  $(Y_n)_n$  est transiente, on a  $|Y_n| > 0$  pour tout  $n$  assez grand. Pour de tels  $n$ , notons  $\ell_n \in \{a, b\}$  la dernière lettre de  $Y_n$  vu comme un mot sur l'alphabet  $\{a, b\}$ . On vérifie que  $(\ell_n)_n$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $Q$  et de distribution stationnaire  $\Lambda$  données par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p+q & q \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1-q}{2-q} & \frac{1}{2-q} \end{pmatrix}.$$

Le seul point un peu subtil consiste à voir que  $Q_{b,a} = p + q$ . On le justifie comme suit

$$\begin{aligned} P\{\ell_{n+1} = a \mid \ell_n = b, Y_n = uab\} &= \nu(a) + \nu(b^2) = p + q \\ P\{\ell_{n+1} = a \mid \ell_n = b, Y_n = uab^2\} &= \nu(a) + \nu(b) = p + q. \end{aligned} \quad (5)$$

On a  $\gamma = E_\Lambda[\Delta]$ , où  $E_\Lambda[\cdot]$  est l'espérance sous la loi  $\Lambda$ . Or  $\Delta$  ne dépend de  $Y_n$  qu'à travers  $\ell_n$ . On en déduit, en utilisant (5), que la vitesse de fuite est donnée par

$$\gamma = \frac{1-q}{2-q} (-p + 3q) + \frac{1}{2-q} (-q + p) = \frac{q(3-5q)}{2-q}.$$

On a donc déterminé  $\gamma$  par une méthode essentiellement élémentaire.

Revenons maintenant au modèle initial et montrons qu'il est de nature différente. On rappelle que  $\mu(a) = p > 0$  et  $\mu(b) = 1 - p > 0$ .

Au lieu de (5), on a maintenant

$$\begin{aligned} P\{\ell_{n+1} = a \mid \ell_n = b, Y_n = uab\} &= \mu(a) = p \\ P\{\ell_{n+1} = a \mid \ell_n = b, Y_n = uab^2\} &= \mu(a) + \mu(b) = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

On ne peut donc pas regrouper ensemble les états de type  $uab$  et  $uab^2$ . En d'autres termes,  $(\ell_n)_n$  n'est pas une chaîne de Markov. En particulier lorsque  $Y_n = ua$  et  $Y_{n+1} = u$ , il est essentiel de savoir si  $u$  est de type  $wab$  ou  $wab^2$ . Comme on peut continuer à dépiler, on voit qu'il est en fait nécessaire de conserver l'information complète sur le contenu de l'empilement  $Y_n$ .

En résumé, il n'est pas possible de contracter  $(Y_n)_n$ , qui est une chaîne de Markov sur un espace d'états infini, en une chaîne de Markov sur un

espace d'états fini. En conséquence, il n'y a pas de méthode élémentaire pour calculer  $\gamma$ .

Expliquons maintenant comment calculer  $\gamma$  à partir de  $\mu^\infty$ . L'idée générale, variante du couplage arrière (cf. le cours de Philippe Duchon, ALEA 2006), est due à Furstenberg [11], voir aussi Derriennic [7].

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des clients. Posons  $Y_n = \pi(x_0 \cdots x_{n-1})$ . Pour l'empilement limite, on écrit  $Y_\infty = \pi(x_0 x_1 x_2 \cdots)$ . Soit  $x_{-1}$  une v.a. de loi  $\mu$  indépendante de  $(x_n)_n$ . On s'intéresse à l'empilement limite  $\pi(x_{-1} x_0 x_1 \cdots)$  obtenu à partir de  $Y_\infty$  par "ajout à gauche" de  $x_{-1}$ . Si  $Y_\infty = y_0 y_1 y_2 \cdots$ ,  $y_i \in \Sigma$ , on se convainc aisément que l'on a,

$$\pi(x_{-1} x_0 \cdots) = \begin{cases} x_{-1} y_0 y_1 \cdots & \text{si } y_0 \in \text{Next}(x_{-1}) \\ b^2 y_1 y_2 \cdots & \text{si } x_{-1} = y_0 = b \\ y_1 y_2 \cdots & \text{si } x_{-1} = y_0 = a \\ y_1 y_2 \cdots & \text{si } x_{-1} = b, y_0 = b^2 \end{cases} \quad (7)$$

Notons  $\Delta$  la variation de la longueur de l'empilement  $Y_\infty$  par ajout à gauche de  $x_{-1}$ . Comme  $Y_\infty$  est un empilement infini, il faut sans doute être plus précis : on pose  $\Delta = 1$  lorsqu'on se trouve dans le premier cas dans (7),  $\Delta = 0$  dans le second cas,  $\Delta = -1$  dans le troisième cas et, enfin,  $\Delta = -2$  dans le dernier cas. En utilisant (7), on peut exprimer  $E[\Delta]$  en fonction de la loi de  $Y_\infty$ . On obtient

$$\begin{aligned} E[\Delta] &= \mu(a) [\mu^\infty(b\Sigma^\mathbb{N}) + \mu^\infty(b^2\Sigma^\mathbb{N})] + \mu(b)\mu^\infty(a\Sigma^\mathbb{N}) \\ &\quad - \mu(a)\mu^\infty(a\Sigma^\mathbb{N}) - 2\mu(b)\mu^\infty(b^2\Sigma^\mathbb{N}). \end{aligned} \quad (8)$$

On rappelle que  $\gamma = \lim_n E[|Y_n|]/n$  (prop. 2.5). Admettons que la suite  $(E[|Y_{n+1}| - |Y_n|])_n$  converge. On a alors  $\gamma = \lim_n E[|Y_{n+1}| - |Y_n|]$ . En utilisant que les suites  $(x_{-1}, \dots, x_{n-1})$  et  $(x_0, \dots, x_n)$  ont la même loi, on obtient,

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_n E[|\pi(x_0 x_1 \cdots x_n)| - |\pi(x_0 x_1 \cdots x_{n-1})|] \\ &= \lim_n E[|\pi(x_{-1} x_0 \cdots x_{n-1})| - |\pi(x_0 x_1 \cdots x_{n-1})|] \\ &= E[\lim_n |\pi(x_{-1} x_0 \cdots x_{n-1})| - |\pi(x_0 x_1 \cdots x_{n-1})|]. \end{aligned} \quad (9)$$

(Les v.a.  $|\pi(x_{-1} x_0 \cdots x_{n-1})| - |\pi(x_0 x_1 \cdots x_{n-1})|$  sont uniformément bornées par 2. L'inversion de la limite et de l'espérance se fait donc sans douleur.)

Par définition,  $\Delta = \lim_n |\pi(x_{-1} x_0 \cdots x_{n-1})| - |\pi(x_0 x_1 \cdots x_{n-1})|$ . En particulier, la suite  $(E(|Y_{n+1}| - |Y_n|))_n$  converge bien. On conclut donc que  $\gamma = E[\Delta]$ .

En particulier,  $\gamma$  est donné par (8) et s'exprime donc en fonction des marginales de dimension 1 de  $\mu^\infty$ .

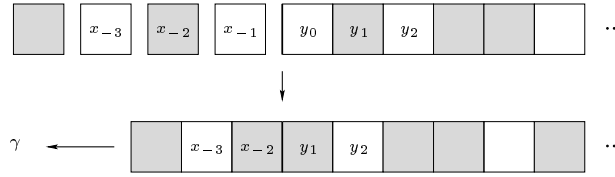


Figure 4: Calcul de la vitesse de fuite à partir de la mesure harmonique.

On peut présenter ce dernier argument de façon légèrement différente, et tenter une illustration visuelle, voir fig. 4.

Après  $x_{-1}$ , on ajoute par la gauche à l'empilement infini les pièces  $x_{-2}$ ,  $x_{-3}$ ,  $\dots$ , toutes indépendantes les unes des autres et de loi  $\mu$ . La partie gauche de l'empilement ainsi constitué grandit à la vitesse  $\gamma$ . Or, par stationnarité, la variation moyenne de longueur de l'empilement est la même par ajout de toute pièce  $x_{-i}$ , elle est donc égale à  $\gamma$ .

Il reste donc, mais c'est évidemment le point crucial, à déterminer  $\mu^\infty$ . Pour tout  $u \in L$ , définissons

$$q(u) = P\{\exists n, Y_n = u\},$$

la probabilité d'atteinte de  $u$ . On a les propriétés suivantes,

$$\forall uv \in L, \quad q(uv) = q(u)q(v), \quad \mu^\infty(uv\Sigma^\mathbb{N}) = q(u)\mu^\infty(v\Sigma^\mathbb{N}). \quad (10)$$

Pour démontrer (10), on utilise à bon escient trois arguments : (i) pour aller de 1 à  $u_1 \cdots u_k$  dans  $\mathcal{X}(\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3, \Sigma)$ , on passe forcément par  $u_1 \cdots u_i$ ,  $i < k$ ; (ii) le graphe  $\mathcal{X}(\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3, \Sigma)$  est le même vu depuis n'importe quel nœud; (iii) la marche  $(Y_n)_n$  vérifie la propriété de Markov forte.

En particulier, (10) implique,

$$\forall x \in \Sigma, \quad \mu^\infty(x\Sigma^\mathbb{N}) = \sum_{y \in \text{Next}(x)} \mu^\infty(xy\Sigma^\mathbb{N}) = q(x)\mu^\infty(\text{Next}(x)\Sigma^\mathbb{N}). \quad (11)$$

Posons  $r(x) = \mu^\infty(x\Sigma^\mathbb{N})$  pour  $x \in \Sigma$ . On a donc  $q(x) = r(x)/r(\text{Next}(x))$ . En réappliquant (10), on exprime  $\mu^\infty$  en fonction de  $r$  uniquement. Pour  $u = u_1 \cdots u_k \in L$ ,

$$\begin{aligned} \mu^\infty(u\Sigma^\mathbb{N}) &= q(u_1) \cdots q(u_{k-1})r(u_k) \\ &= \frac{r(u_1)}{r(\text{Next}(u_1))} \cdots \frac{r(u_{k-1})}{r(\text{Next}(u_{k-1}))} r(u_k) \\ &= r(u_1) \frac{r(u_2)}{r(\text{Next}(u_1))} \cdots \frac{r(\text{Next}(u_k))}{r(u_{k-1})}. \end{aligned}$$

On peut donc décrire  $\mu^\infty$  comme la mesure de probabilité *Markovienne* de distribution initiale  $r$  et de matrice de transition  $Q$  définie par :  $\forall u, v \in \Sigma$ ,  $Q_{u,v} = r(v)/r(\text{Next}(u))$  si  $v \in \text{Next}(u)$ , et  $Q_{u,v} = 0$  sinon.

En explicitant  $\mu^\infty$  dans (8), on obtient la formule suivante pour la vitesse de fuite,

$$\gamma = \mu(a)(-r(a) + r(b) + r(b^2)) + \mu(b)(r(a) + r(b) - 2r(b^2)). \quad (12)$$

Il reste à déterminer  $r$ . Pour ce faire, on réutilise l'idée suivante : la loi de l'empilement infini est invariante par ajout à gauche d'une pièce de loi  $\mu$ , c'est-à-dire  $\pi(x_{-1}x_0 \cdots) \sim \pi(x_0x_1 \cdots)$ . Cet équilibre en loi implique en particulier les équations,

$$\begin{aligned} r(a) &= \mu(a)(r(b) + r(b^2)) + \mu(b)\mu^\infty(b^2 a \Sigma^{\mathbb{N}}) \\ r(b) &= \mu(b)r(a) + \mu(a)\mu^\infty(ab \Sigma^{\mathbb{N}}) \\ r(b^2) &= \mu(b)r(b) + \mu(a)\mu^\infty(ab^2 \Sigma^{\mathbb{N}}). \end{aligned}$$

En utilisant (10) et (11), on peut réécrire ces équations en fonction de  $r$  uniquement; on obtient,

$$\begin{aligned} r(a) &= \mu(a)(r(b) + r(b^2)) + \mu(b)r(b^2) \\ r(b) &= \mu(b)r(a) + \mu(a)\frac{r(a)}{r(b) + r(b^2)}r(b) \\ r(b^2) &= \mu(b)r(b) + \mu(a)\frac{r(a)}{r(b) + r(b^2)}r(b^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Les équations (13) jouent un rôle central et méritent donc un nom. On les appelle *Équations de Trafic* de la marche.

Il ne reste plus qu'à constater que les Équations de Trafic ont une unique solution et caractérisent donc bien  $r$ . Cette solution est la suivante, en fonction de  $\mu(a) = p$ ,

$$\begin{aligned} r(a) &= \frac{4 - p + p^2 - (1 - p)\sqrt{4 + p^2}}{2(3 + p^2)} \\ r(b) &= \frac{-1 + \sqrt{4 + p^2}}{3 + p^2} \\ r(b^2) &= \frac{4 + p + p^2 - (1 + p)\sqrt{4 + p^2}}{2(3 + p^2)} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (12), on obtient la vitesse de fuite sous forme close. On trouve

$$\gamma = \frac{(-1 + p)((p + 2)(p + 3) - (3 + 5p)\sqrt{4 + p^2})}{2(3 + p^2)}. \quad (14)$$

*Intermède.* À partir de (14), on obtient la valeur du paramètre  $p$  qui maximise  $\gamma$ . Il s'agit de la plus grande racine réelle du polynôme

$$6X^6 + 79X^4 - 28X^3 + 353X^2 - 204X + 15. \quad (15)$$

Numériquement, on a  $p = 0.48426\dots$  et la vitesse de fuite correspondante est  $\gamma_{\max} = 0.19932\dots$ . *Fin de l'intermède.*

Remplaçons la loi  $\mu$  par la loi  $\nu$  définie par  $\nu(a) = 1 - p - q > 0$ ,  $\nu(b) = p > 0$ ,  $\nu(b^2) = q > 0$ . On a représenté en fig. 5 la vitesse de fuite de la marche aléatoire  $(\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3, \nu)$  pour la longueur par rapport à  $\{a, b, b^2\}$  (contrairement aux calculs précédents où la longueur était calculée par rapport à  $\{a, b\}$ ).

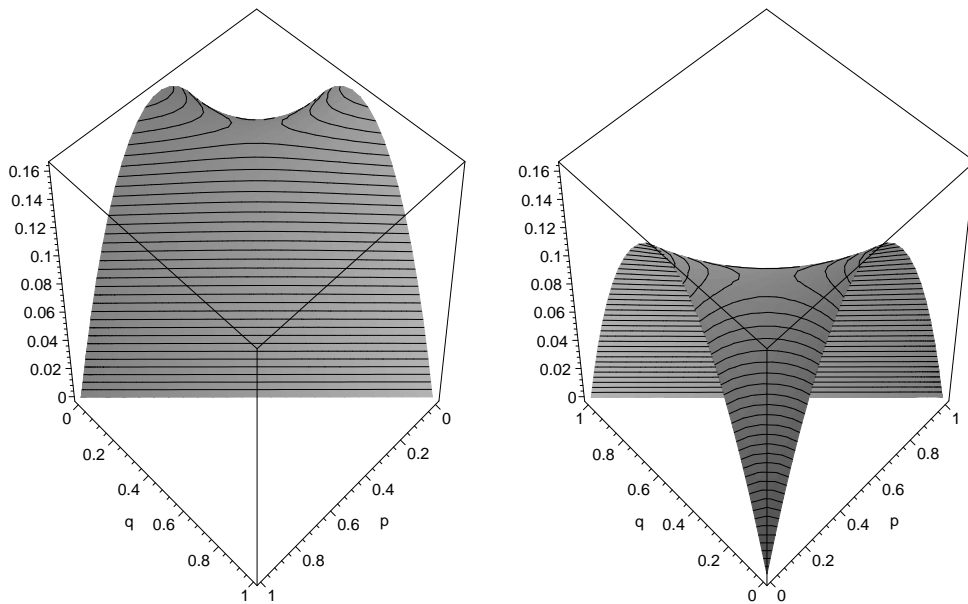


Figure 5: La vitesse de fuite de  $(\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3, \nu)$  en fonction de  $p = \nu(b)$  et de  $q = \nu(b^2)$ , vue sous deux angles différents.

#### *Méthode de Sawyer & Steger.*

L'approche que l'on vient de suivre est celle de M. [19] et M. & Mathéus [24]. Décrivons une autre méthode pour calculer  $\gamma$ . Elle a été introduite par Sawyer & Steger [28] pour le groupe libre, mais s'adapte au contexte présent.

Ici on interprète  $(Y_n)_n$  comme une réalisation de la marche aléatoire  $(\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3, \nu)$ , et on calcule la longueur par rapport à  $\{a, b, b^2\}$ .

Pour  $u \in \mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$ , on définit la v.a.  $\tau(u) = \min\{n \mid Y_n = u\}$  (avec  $\tau(u) = \infty$  si  $u$  n'est pas atteint). Définissons la *série génératrice de premier passage*  $S \in \mathbb{R}[[y, z]]$  par :

$$S(y, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} y^k \sum_{|u|=k} \sum_{n \in \mathbb{N}} P\{\tau(u) = n\} z^n. \quad (16)$$

Soit  $S_y$  et  $S_z$  les dérivées partielles de  $S$  par rapport à  $y$  et  $z$ . En adaptant les résultats de [28, Th. 2.2 et section 6] (voir aussi [26, Section 6]), on obtient la formule suivante pour la vitesse de fuite :

$$\gamma = S_y(1, 1)/S_z(1, 1). \quad (17)$$

Posons  $q(u, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P\{\tau(u) = n\}z^n$ . En particulier,  $q(u, 1) = q(u)$ , la probabilité d'atteinte de  $u$  définie précédemment. Une analyse de type "un pas en avant" permet d'obtenir,

$$\begin{aligned} q(a, z) &= \nu(a)z + \nu(b)q(b^2, z)q(a, z)z + \nu(b^2)q(b, z)q(a, z)z \\ q(b, z) &= \nu(b)z + \nu(b^2)q(b^2, z)z + \mu(a)q(a, z)q(b, z)z \\ q(b^2, z) &= \mu(b)q(b, z)z. \end{aligned}$$

En utilisant ces équations, les équations correspondantes pour  $dq(\cdot, z)/dz$  et en jouant avec les équations (16) et (17), on obtient,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{q(a)/(1+q(a))^2 + (q(b) + q(b^2))/(1+q(b) + q(b^2))^2}{q'(a)/(1+q(a))^2 + (q'(b) + q'(b^2))/(1+q(b) + q(b^2))^2} \quad (18) \\ u \in \{a, b, b^2\}, \quad q'(u) &= \left[ \frac{dq(u, z)}{dz} \right]_{|z=1}. \end{aligned}$$

Au prix de quelques efforts, on peut résoudre entièrement les équations et récupérer  $\gamma$  sous forme close.

*Mise en perspective.*

La formule (18) est plus compliquée que la formule (12). Notre approche utilise en effet la nature Markovienne de la mesure harmonique et fournit un chemin plus direct pour le calcul de  $\gamma$ . En conséquence, elle offre plus de chances de résoudre explicitement les équations pour obtenir  $\gamma$  sous forme close. Dans le cas de  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$ , les deux méthodes permettent d'accéder au résultat. En revanche, les résultats qui seront présentés en §3.3 et §3.4 paraissent totalement hors d'atteinte par la méthode de Sawyer-Steger.

Notons au passage qu'aucune formule close pour la vitesse de fuite (du type de la formule (14)) n'apparaissait dans la littérature avant [19] et [24], bien que la méthodologie générale de Sawyer-Steger ait été bien connue.

### 3.2 Marches aléatoires sur les produits libres

Les résultats précédents sont vrais dans un cadre général que l'on va maintenant préciser.

**Définition 3.1.** Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille de groupes de présentations  $\langle \Sigma_i \mid R_i \rangle$ , avec  $\forall i, j, \Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ . Posons  $\Sigma = \sqcup_{i \in I} \Sigma_i$ . Le produit libre de  $(G_i)_{i \in I}$

est le groupe défini par la présentation de groupe  $\star_{i \in I} G_i = \langle \Sigma \mid \sqcup_{i \in I} R_i \rangle$ . On définit de façon analogue le produit libre de monoïdes.

Un groupe libre fleuri est le produit libre d'un groupe libre finiment engendré et d'une famille finie de groupes finis. Un monoïde libre fleuri est le produit libre d'un groupe libre finiment engendré, d'un monoïde libre finiment engendré et d'une famille finie de monoïdes finis.

Le terme *groupe libre fleuri* est notre traduction (libre et fleurie) du terme anglais *plain group* proposé par Haring-Smith [14].

Le groupe modulaire  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$  de §3.1 est un groupe libre fleuri. C'est le produit libre du groupe cyclique d'ordre 2 et du groupe cyclique d'ordre 3.

Considérons un groupe libre fleuri infini  $(G, *)$  avec  $G = F(U) \star G_1 \star \cdots \star G_k$ . Posons  $I = \{0, 1, \dots, k\}$  et

$$\Sigma_0 = U \sqcup U^{-1}, \quad \forall i \in I \setminus \{0\}, \quad \Sigma_i = G_i \setminus \{1_{G_i}\}, \quad \Sigma = \sqcup_{i \in I} \Sigma_i.$$

L'ensemble  $\Sigma$  est un ensemble de générateurs pour  $G$ , qu'on appelle *générateurs naturels*. Posons

$$\forall a \in \Sigma_0, \text{Next}(a) = \Sigma \setminus \{a^{-1}\}, \quad \forall i \in I \setminus \{0\}, \forall a \in \Sigma_i, \text{Next}(a) = \Sigma \setminus \Sigma_i.$$

On a :  $[b \in \text{Next}(a)] \iff [a \in \text{Next}(b)] \iff [a * b \notin \Sigma \cup \{1_G\}] \iff [b * a \notin \Sigma \cup \{1_G\}]$ . Définissons

$$L(G, \Sigma) = \{u_1 \cdots u_k \in \Sigma^* \mid \forall i \in \{1, \dots, k-1\}, u_{i+1} \in \text{Next}(u_i)\}. \quad (19)$$

Le langage  $L(G, \Sigma)$  est une section rationnelle de  $G$ , géodésique par rapport à  $\Sigma$ . On identifie  $G$  et  $L(G, \Sigma)$ . Avec cette identification, on peut décrire la loi de groupe  $*$  de  $G$  récursivement. Soit  $u = u_1 \cdots u_k$  et  $v = v_1 \cdots v_l$ , on a,

$$u * v = \begin{cases} u_1 \cdots (u_{k-1})(u_k)(v_1)(v_2) \cdots v_l & \text{si } v_1 \in \text{Next}(u_k) \\ u_1 \cdots (u_{k-1})(w)(v_2) \cdots v_l & \text{si } u_k * v_1 = w \in \Sigma, \\ u_1 \cdots u_{k-1} * v_2 \cdots v_l & \text{si } u_k = v_1^{-1} \end{cases}$$

Intuitivement la loi de  $G$  est la concaténation, avec simplifications éventuelles au point de contact jusqu'à obtenir un mot sous forme normale.

Soit  $\mu$  une mesure de probabilité dont le support est inclus dans  $\Sigma$  et engendre  $G$ . On considère la marche aléatoire  $(G, \mu)$  que l'on suppose transiente.

*Remarque.* Supposer la transience n'est pas une hypothèse très restrictive. Parmi les groupes libres fleuris,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ont un statut à part. Sur  $\mathbb{Z}$ , toute marche aléatoire symétrique est récurrente, et sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,



toute marche aléatoire est récurrente. En dehors de ces cas, et en application du théorème 2.6, la marche aléatoire  $(G, \mu)$  est transiente.

Considérons  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  muni de la topologie produit. On définit

$$L^\infty(G, \Sigma) = \{u_0 u_1 u_2 \cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}, \forall i \in \mathbb{N}, u_{i+1} \in \text{Next}(u_i)\}. \quad (20)$$

L'ensemble  $L^\infty(G, \Sigma)$  est une identification de la frontière du groupe (il s'agit, ici, à la fois de la frontière des bouts, et de la frontière hyperbolique du groupe).

Soit  $(X_n)_n$  une réalisation de la marche aléatoire  $(G, \mu)$ . Comme  $(X_n)_n$  est transiente et que par ailleurs la distance préfixe entre  $X_n$  et  $X_{n+1}$  est au plus 2, on en déduit qu'il existe une v.a.  $X_\infty$  à valeurs dans  $L^\infty(G, \Sigma)$  telle que p.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty,$$

c'est-à-dire que la longueur du préfixe commun de  $X_n$  et  $X_\infty$  tend vers l'infini p.s. Soit  $\mu^\infty$  la loi de  $X_\infty$ . On appelle  $\mu^\infty$  la *mesure harmonique* de  $(G, \mu)$ .

Soit  $(x_i)_i$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $\mu$ . On suppose que  $(X_n)_n$  est la réalisation de  $(G, \mu)$  correspondante, i.e.  $X_n = \pi(x_0 \cdots x_{n-1})$ . Il est naturel d'introduire la convention de notation :  $X_\infty = \pi(x_0 x_1 x_2 \cdots)$ . Maintenant considérons la v.a.  $\pi(x_{-1} x_0 x_1 x_2 \cdots)$  (même convention de notation). Clairement les v.a.  $X_\infty$  et  $\pi(x_{-1} x_0 x_1 x_2 \cdots)$  ont la même loi. Ce qui se traduit par le fait que la mesure harmonique  $\mu^\infty$  doit vérifier les équations : pour tout  $u = u_1 \cdots u_k \in L(G, \Sigma), k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \mu^\infty(u \Sigma^{\mathbb{N}}) &= \mu(u_1) \mu^\infty(u_2 \cdots u_k \Sigma^{\mathbb{N}}) + \sum_{x * y = u_1} \mu(x) \mu^\infty(y u_2 \cdots u_k \Sigma^{\mathbb{N}}) \\ &+ \sum_{x \in \text{Next}(u_1)} \mu(x^{-1}) \mu^\infty(x u \Sigma^{\mathbb{N}}). \end{aligned} \quad (21)$$

En fait, ces équations caractérisent la mesure harmonique.

**Proposition 3.2.** *La mesure harmonique est l'unique mesure de probabilité vérifiant les équations (21).*

Commentons la prop. 3.2. Notons  $\mu * \mu^\infty$  la mesure définie par la partie droite des équations (21). Les équations en question s'écrivent donc :  $\mu^\infty = \mu * \mu^\infty$ . Cette égalité peut être vue comme un analogue de l'égalité  $\pi P = \pi$  caractérisant la distribution stationnaire  $\pi$  d'une chaîne de Markov *ergodique* de matrice de transition  $P$ . Ici, on est parti d'une chaîne de Markov  $(X_n)_n$  non pas ergodique mais *transiente*. Cependant, le détour consistant à travailler sur l'objet limite  $X_\infty$  permet de se ramener à l'étude

d'une équation à l'équilibre :  $\mu^\infty = \mu * \mu^\infty$ . C'est précisément cette équation que l'on va résoudre dans la suite (cf. la preuve du lemme 3.6).

En utilisant un argument similaire à celui utilisé pour justifier (8), on obtient le résultat suivant.

**Proposition 3.3.** *La vitesse de fuite de la marche aléatoire est donnée par*

$$\gamma = \sum_{a \in \Sigma} \mu(a) \left[ -\mu^\infty(a^{-1}\Sigma^\mathbb{N}) + \sum_{b \in \text{Next}(a)} \mu^\infty(b\Sigma^\mathbb{N}) \right]. \quad (22)$$

Les arguments clés à l'œuvre dans les propositions 3.2 et 3.3 sont dûs à Furstenberg [10, 11]. On peut trouver une preuve complète pour le groupe libre, ainsi que des références précises, dans Ledrappier [18, Th. 1.12 et Th. 4.10].

**Définition 3.4.** *Soit  $r \in \{x \in \mathbb{R}^\Sigma \mid \forall i, x_i > 0, \sum_i x_i = 1\}$ . Soit la matrice  $Q$  de dimension  $\Sigma \times \Sigma$  donnée par*

$$Q_{u,v} = \begin{cases} r(v)/r(\text{Next}(u)) & \text{si } v \in \text{Next}(u), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*La mesure Markovienne multiplicative de base  $r$  est la mesure de probabilité  $\nu^\infty$  sur  $\Sigma^\mathbb{N}$  définie par  $\nu^\infty(u_1 \cdots u_k \Sigma^\mathbb{N}) = r(u_1)Q_{u_1, u_2} \cdots Q_{u_{k-1}, u_k}$ .*

Posons  $q(u) = r(u)/r(\text{Next}(u))$ . On a

$$\nu^\infty(u_1 \cdots u_k \Sigma^\mathbb{N}) = \begin{cases} q(u_1) \cdots q(u_{k-1})r(u_k) & \text{si } u_1 \cdots u_k \in L(G, \Sigma), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (23)$$

Observons que la mesure  $\nu^\infty$  n'est pas en général stationnaire par rapport au décalage  $\tau : \Sigma^\mathbb{N} \rightarrow \Sigma^\mathbb{N}, (x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n$ . En effet, la première marginale de  $\nu^\infty$  est  $r$  alors que la distribution stationnaire de  $Q$  est  $\pi = p/p(\Sigma)$  où  $p = (r(a)r(\text{Next}(a)))_{a \in \Sigma}$ .

**Définition 3.5** (Équations de Trafic). *Les Équations de Trafic associées à  $(G, \mu)$  sont définies par,  $\forall a \in \Sigma$ ,*

$$x(a) = \mu(a)x(\text{Next}(a)) + \sum_{u*v=a} \mu(u)x(v) + \sum_{u \in \text{Next}(a)} \mu(u^{-1}) \frac{x(u)}{x(\text{Next}(u))} x(a). \quad (24)$$

Le lien entre les Équations de Trafic et la mesure harmonique s'établit par l'intermédiaire du lemme suivant.

**Lemme 3.6.** *Si la mesure harmonique  $\mu^\infty$  est Markovienne multiplicative de base  $r$ , alors  $r$  est une solution des Équations de Trafic. Réciproquement, si les Équations de Trafic admettent une solution  $r \in \{x \in \mathbb{R}^\Sigma \mid \forall i, x_i > 0, \sum_i x_i = 1\}$ , alors la mesure harmonique  $\mu^\infty$  est la mesure Markovienne multiplicative de base  $r$ .*

*Preuve.* Supposons que la mesure harmonique  $\mu^\infty$  est la mesure Markovienne multiplicative (MMM) de base  $r$ . La mesure harmonique doit vérifier les équations (21). En particulier, on doit avoir, pour tout  $a \in \Sigma$ ,

$$\begin{aligned} \mu^\infty(a\Sigma^\mathbb{N}) &= \mu(a) \sum_{x \in \text{Next}(a)} \mu^\infty(x\Sigma^\mathbb{N}) + \sum_{u*v=a} \mu(u)\mu^\infty(v\Sigma^\mathbb{N}) \\ &\quad + \sum_{x \in \text{Next}(a)} \mu(x^{-1})\mu^\infty(xa\Sigma^\mathbb{N}). \end{aligned}$$

Si on simplifie à l'aide de (23), on obtient

$$r(a) = \mu(a) \sum_{x \in \text{Next}(a)} r(x) + \sum_{u*v=a} \mu(u)r(v) + r(a) \sum_{x \in \text{Next}(a)} \mu(x^{-1}) \frac{r(x)}{r(\text{Next}(x))}.$$

On en déduit que  $r$  est une solution des Équations de Trafic.

Réciproquement, soit  $r \in \{x \in \mathbb{R}^\Sigma \mid \forall i, x_i > 0, \sum_i x_i = 1\}$  une solution des Équations de Trafic. Soit  $\nu^\infty$  la MMM de base  $r$ . D'après la proposition 3.2, la mesure  $\nu^\infty$  est la mesure harmonique si et seulement si les équations (21) sont vérifiées, c'est-à-dire, pour tout  $u = u_1 \cdots u_k \in L(G, \Sigma), k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \nu^\infty(u\Sigma^\mathbb{N}) &= \mu(u_1)\nu^\infty(u_2 \cdots u_k\Sigma^\mathbb{N}) + \sum_{x*y=u_1} \mu(x)\nu^\infty(yu_2 \cdots u_k\Sigma^\mathbb{N}) \\ &\quad + \sum_{x \in \text{Next}(u_1)} \mu(x^{-1})\nu^\infty(xu\Sigma^\mathbb{N}). \end{aligned}$$

Posons  $q(a) = r(a)/r(\text{Next}(a))$  pour tout  $a$ . Les équations précédentes sont vérifiées si et seulement si :

$$\begin{aligned} q(u_1) &= \mu(u_1) \frac{q(u_2) \cdots q(u_{k-1})r(u_k)}{q(u_2) \cdots q(u_{k-1})r(u_k)} + \sum_{x*y=u_1} \mu(x) \frac{q(y)q(u_2) \cdots q(u_{k-1})r(u_k)}{q(u_2) \cdots q(u_{k-1})r(u_k)} \\ &\quad + \sum_{x \in \text{Next}(u_1)} \mu(x^{-1}) \frac{q(x)q(u_1) \cdots q(u_{k-1})r(u_k)}{q(u_2) \cdots q(u_{k-1})r(u_k)}. \end{aligned}$$

Ou de façon équivalente :

$$\begin{aligned} r(u_1) &= \mu(u_1)r(\text{Next}(u_1)) + \sum_{x*y=u_1} \mu(x)r(y) \frac{r(\text{Next}(u_1))}{r(\text{Next}(y))} \\ &\quad + \sum_{x \in \text{Next}(u_1)} \mu(x^{-1}) \frac{r(x)}{r(\text{Next}(x))} r(u_1). \quad (25) \end{aligned}$$

En vérifiant tous les cas possibles un par un, on montre que

$$x * y \in \Sigma \implies \text{Next}(x * y) = \text{Next}(y).$$

On en déduit que  $r(\text{Next}(u_1)) = r(\text{Next}(y))$ . Donc les équations (25) sont équivalentes à :

$$r(u_1) = \mu(u_1)r(\text{Next}(u_1)) + \sum_{x*y=u_1} \mu(x)r(y) + \sum_{x \in \text{Next}(u_1)} \mu(x^{-1}) \frac{r(x)}{r(\text{Next}(x))} r(u_1).$$

Or ces dernières équations sont bien vérifiées puisque  $r$  est une solution des Équations de Trafic. On en conclut que  $\nu^\infty$  est bien la mesure harmonique.  $\square$

On peut maintenant énoncer et démontrer le résultat principal.

**Théorème 3.7.** *Soit  $G$  un groupe libre fleuri infini et  $\Sigma$  un ensemble de générateurs naturels. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité dont le support est inclu dans  $\Sigma$  et engendre  $G$ . On suppose que la marche aléatoire  $(G, \mu)$  est transiente. Les Équations de Trafic (24) ont une unique solution  $r$  dans  $\{x \in \mathbb{R}^\Sigma \mid \forall i, x_i > 0, \sum_i x_i = 1\}$ . La mesure harmonique  $\mu^\infty$  de la marche est la mesure Markovienne multiplicative de base  $r$ .*

*Preuve.* Pour tout  $a \in \Sigma$ , posons  $q(a) = P\{\exists n \mid X_n = a\}$ , la probabilité d'atteinte de  $a$ . On a clairement  $0 < q(a) < 1$ . Par ailleurs, on a,  $\forall a \in \Sigma$ ,

$$q(a) = \mu(a) + \sum_{u*v=a} \mu(u)q(v) + q(a) \sum_{c \in \Sigma \setminus \Sigma_a} \mu(c)q(c^{-1}). \quad (26)$$

Les deux premiers termes sur la droite de (26) sont plus ou moins évidents. Supposons maintenant que le premier pas du marcheur aléatoire est du type  $c \in \Sigma \setminus \Sigma_a$ . Étant donné la structure arborescente du graphe de Cayley, le marcheur doit revenir en  $1_G$  avant de pouvoir éventuellement atteindre  $a$ . Cependant la probabilité d'atteinte de  $1_G$  partant de  $c$  est égale à la probabilité d'atteinte de  $c^{-1}$  partant de  $1_G$ . Ce qui correspond au troisième terme de droite dans (26).

Une simple réécriture des Équations de Trafic (24) donne :

$$\frac{x(a)}{x(\Sigma \setminus \Sigma_a)} = \mu(a) + \sum_{u*v=a} \mu(u) \frac{x(v)}{x(\Sigma \setminus \Sigma_v)} + \frac{x(a)}{x(\Sigma \setminus \Sigma_a)} \sum_{u \in \Sigma \setminus \Sigma_a} \mu(u^{-1}) \frac{x(u)}{x(\Sigma \setminus \Sigma_u)}. \quad (27)$$

Il est donc naturel de rechercher une solution  $r$  vérifiant :

$$\forall a \in \Sigma, \quad \frac{r(a)}{r(\Sigma \setminus \Sigma_a)} = q(a). \quad (28)$$

Il reste à démontrer que les équations (28) possèdent une solution en  $r$ . Il est clair qu'il existe une solution si et seulement si les équations suivantes en ont une :

$$\begin{cases} r(\Sigma_i) = q(\Sigma_i)r(\Sigma \setminus \Sigma_i) & (i) \\ \sum_{j \in I} r(\Sigma_j) = 1 & (\text{sum}) \end{cases} . \quad (29)$$

Pour un  $i$  donné, considérons les équations :  $\{(i), (\text{sum})\}$ . Leur solution est :  $r(\Sigma_i) = q(\Sigma_i)/(1 + q(\Sigma_i))$ ,  $r(\Sigma \setminus \Sigma_i) = 1/(1 + q(\Sigma_i))$ . Pour obtenir une solution globale à (29), la condition nécessaire et suffisante est d'avoir :

$$\sum_{i \in I} \frac{q(\Sigma_i)}{1 + q(\Sigma_i)} = 1 . \quad (30)$$

Il reste à démontrer (30). En partant de (26) et en sommant sur  $\Sigma_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} q(\Sigma_i) &= \mu(\Sigma_i) + \sum_{a \in \Sigma_i} \sum_{u*v=a} \mu(u)q(v) + q(\Sigma_i) \sum_{a \in \Sigma \setminus \Sigma_i} \mu(a^{-1})q(a) \\ &= \mu(\Sigma_i) + \mu(\Sigma_i)q(\Sigma_i) - \sum_{a \in \Sigma_i} \mu(a^{-1})q(a) + q(\Sigma_i) \sum_{a \in \Sigma \setminus \Sigma_i} \mu(a^{-1})q(a) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{q(\Sigma_i)}{1 + q(\Sigma_i)} = \mu(\Sigma_i) + \frac{q(\Sigma_i)}{1 + q(\Sigma_i)} \sum_{a \in \Sigma \setminus \Sigma_i} \mu(a^{-1})q(a) - \frac{1}{1 + q(\Sigma_i)} \sum_{a \in \Sigma_i} \mu(a^{-1})q(a)$$

$$\sum_i \frac{q(\Sigma_i)}{1 + q(\Sigma_i)} = 1 + \sum_i \left[ \sum_{a \in \Sigma_i} \mu(a^{-1})q(a) \right] \left[ \sum_{j \neq i} \frac{q(\Sigma_j)}{1 + q(\Sigma_j)} - \frac{1}{1 + q(\Sigma_i)} \right]$$

$$\sum_i \frac{q(\Sigma_i)}{1 + q(\Sigma_i)} - 1 = \left[ \sum_{a \in \Sigma} \mu(a^{-1})q(a) \right] \left[ \sum_i \frac{q(\Sigma_i)}{1 + q(\Sigma_i)} - 1 \right] .$$

Comme  $0 < q(a) < 1$  pour tout  $a$ , on a  $\sum_{a \in \Sigma} \mu(a^{-1})q(a) < 1$ . On en conclut que l'on doit avoir :  $\sum_i q(\Sigma_i)/(1 + q(\Sigma_i)) - 1 = 0$ . Donc l'équation (30) est vérifiée. Il en résulte que les Équations de Trafic ont une solution qui est :

$$\forall a \in \Sigma, \quad r(a) = \frac{q(a)}{1 + q(\Sigma_a)} . \quad (31)$$

D'après le lemme 3.6, une telle solution est unique et la mesure harmonique est la mesure Markovienne multiplicative de base  $r$ .  $\square$

**Corollaire 3.8.** *Sous les hypothèses du théorème 3.7, la dérive est donnée par*

$$\gamma = \sum_{a \in \Sigma} \mu(a) [-r(a^{-1}) + \sum_{b \in \text{Next}(a)} r(b)], \quad (32)$$

où  $r$  est la base de la mesure harmonique.

Le théorème 3.7 est prouvé dans le contexte des couples 0-automatiques, voir §3.5, dans M. [19], et pour les produits libres de groupes finis dans M. & Mathéus [24]. Lorsqu'on spécialise le théorème au cas du groupe libre  $G = \mathbb{F}(\Sigma)$ , on retrouve un résultat classique essentiellement dû à Dynkin & Maljutov [9] mais énoncé sous cette forme dans Sawyer & Steger [28], voir aussi Ledrappier [18].

### Extension aux produits libres de groupes dénombrables

Les résultats s'étendent aux produits libres de groupes dénombrables. Plus précisément, soit  $G = \star_{i \in I} G_i$ ,  $|I| > 2$ , le produit libre d'une famille finie de groupes dénombrables. Soit l'ensemble dénombrable de générateurs  $\Sigma = \sqcup_i G_i \setminus \{1_{G_i}\}$ . Soit  $\mu$  une mesure de probabilité dont le support est inclus dans  $\Sigma$  et engendre  $G$ . On suppose que la marche aléatoire  $(G, \mu)$  est transiente.

Définissons les Équations de Trafic exactement comme en (24). Il s'agit d'un ensemble dénombrable d'équations en un nombre dénombrable d'indéterminées.

Les énoncés du théorème 3.7 et du corollaire 3.8 s'étendent à ce cadre.

En guise d'illustration, considérons le groupe libre  $G = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ . Soit  $a$  et  $b$  les générateurs respectifs des deux groupes cycliques infinis. On a  $\Sigma = \{a^i, i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{b^j, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ .

Soit  $\mu$  une probabilité dont le support est inclus dans  $\Sigma$  et engendre  $G$ . D'après ce qui précède, la mesure harmonique vérifie, e.g.,

$$\mu^\infty(a^{k_1} b^{k_2} \dots a^{k_\ell} \Sigma^{\mathbb{N}}) = q(a^{k_1}) q(b^{k_2}) \dots q(b^{k_\ell-1}) r(a^{k_\ell}).$$

Lorsque  $\mu$  est concentré sur  $\{a, a^{-1}\} \cup \{b^j, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ , le résultat se précise. On a en effet les simplifications suivantes,

$$\begin{aligned} \forall k > 0, \quad q(a^k) &= q(a)^k, & r(a^k) &= q(a)^{k-1} r(a) \\ \forall k < 0, \quad q(a^k) &= q(a^{-1})^{-k}, & r(a^k) &= q(a^{-1})^{-k-1} r(a^{-1}). \end{aligned}$$

Enfin si  $\mu$  est concentré sur  $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ , alors les simplifications analogues pour  $b$  se produisent. On retrouve l'énoncé du théorème 3.7.

**Extension aux monoïdes libres fleuris**

Soit  $M = \mathbb{F}(U) \star V^* \star M_1 \star \dots \star M_k$  un monoïde libre fleuri, cf. 3.1. On pose  $\Sigma = U \sqcup U^{-1} \sqcup V \sqcup (M_1 \setminus \{1_{M_1}\}) \sqcup \dots \sqcup (M_k \setminus \{1_{M_k}\})$ .

Lorsque  $M$  est infini, les seuls cas où la marche aléatoire  $(M, \mu)$  peut ne pas être transiente sont ceux discutés plus haut, c'est-à-dire lorsque  $M$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Le théorème 3.7 et le corollaire 3.8 s'étendent aux marches aléatoires transientes  $(M, \mu)$  où le support de  $\mu$  est inclus dans  $\Sigma$  et engendre  $M$ .

Quelques légères adaptations sont nécessaires. Tout d'abord, pour  $v \in V$ , on pose  $\text{Next}(v) = \Sigma$ . Ensuite, on définit les Équations de Trafic par

$$x(a) = \mu(a)x(\text{Next}(a)) + \sum_{u*v=a} \mu(u)x(v) + \sum_{\substack{t*u=1_M \\ a \in \text{Next}(u)}} \mu(t) \frac{x(u)}{x(\text{Next}(u))} x(a).$$

Enfin, la vitesse de fuite est donnée par

$$\gamma = \sum_{a \in \Sigma} \mu(a) \left[ - \sum_{a*b=1_M} r(b) + r(\text{Next}(a)) \right].$$

On s'attend à ce que les résultats restent valides pour les produits libres de monoïdes dénombrables. Cependant des difficultés techniques apparaissent pour le démontrer.

**3.3 Marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}_k \star \mathbb{Z}_k$**

L'exemple ci-dessous, extrait de [24], illustre les possibilités de calcul explicite offertes par le corollaire 3.8.

Notons  $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  le groupe cyclique d'ordre  $k$ . On considère le produit libre

$$\mathbb{Z}_k \star \mathbb{Z}_k = \langle a, b \mid a^k = 1, b^k = 1 \rangle,$$

et la marche aléatoire simple  $(\mathbb{Z}_k \star \mathbb{Z}_k, \mu)$  où  $\mu$  est défini par  $\mu(a) = \mu(a^{-1}) = \mu(b) = \mu(b^{-1}) = 1/4$ . On pose  $\Sigma = \{a^i, b^i, i = 1, \dots, k-1\}$  et on définit la mesure harmonique  $\mu^\infty$  sur  $\Sigma^\mathbb{N}$ .

En fig. 6, on a représenté cette marche aléatoire pour le cas  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

Soit les applications  $F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , définies par

$$F_0(x) = 1, \quad F_1(x) = x, \quad \forall n \geq 2, \quad F_n(x) = 2(2-x)F_{n-1}(x) - F_{n-2}(x).$$

On a, par exemple,  $F_4 = -8x^4 + 48x^3 - 96x^2 + 72x - 15$ .

**Lemme 3.9.** *Pour  $k \geq 3$ , l'équation  $F_k(x) = 1$  possède une unique solution  $x_k$  dans  $]0, 1[$ .*

On peut maintenant énoncer le résultat principal.





**Définition 3.11.** Soit  $\Sigma$  un ensemble fini non-vide. Soit  $I \subset \Sigma \times \Sigma$  une relation anti-réflexive et symétrique, appelée relation d'indépendance ou de commutation. Le monoïde de trace  $\mathbb{M}(\Sigma, I)$  est défini par la présentation de monoïde

$$\mathbb{M}(\Sigma, I) = \langle \Sigma \mid ab = ba, \forall (a, b) \in I \rangle^+. \quad (33)$$

Les éléments de  $\mathbb{M}(\Sigma, I)$  sont appelés des traces. On appelle  $D = \Sigma \times \Sigma \setminus I$  la relation de dépendance.

Aux deux extrêmes, on retrouve le monoïde libre  $\Sigma^*$  lorsque  $I = \emptyset$  et le monoïde commutatif libre  $(\mathbb{N}^\Sigma, +)$  lorsque  $I = \Sigma \times \Sigma \setminus \{(a, a), a \in \Sigma\}$ .

À la suite de Viennot [33], on peut incarner les traces par des empilements de pièces. Illustrons ceci sur un exemple. Soit le monoïde de trace  $M = \langle a, b, c \mid ab = ba \rangle^+$ . Soit le modèle de Tetris constitué des colonnes  $\{1, 2\}$ , et des pièces  $a, b$  et  $c$ , rectangulaires de hauteur un, et occupant les emplacements  $R(a) = \{1\}$ ,  $R(b) = \{2\}$  et  $R(c) = \{1, 2\}$ .

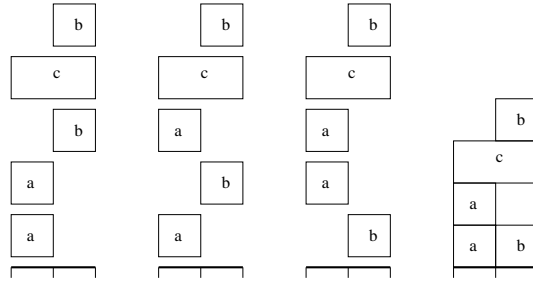


Figure 7: De gauche à droite, les mots  $aabcba$ ,  $abacba$ ,  $baacba$  et la trace associée.

À un mot sur l'alphabet  $\{a, b, c\}$ , on associe la suite de pièces correspondante qui, soumises à la gravité, s'empilent suivant le principe du jeu de Tetris. Deux mots sont équivalents, c'est-à-dire correspondent à la même trace, si et seulement si les empilements de Tetris associés sont identiques. On illustre ceci en figure 7.

**Définition 3.12.** Soit  $\Sigma$  un ensemble fini non-vide et soit  $\Sigma^{-1}$  une copie disjointe de  $\Sigma$ . Soit  $I \subset \Sigma \times \Sigma$  une relation anti-réflexive et symétrique, dite relation d'indépendance ou de commutation. Le groupe de trace  $\mathbb{F}(\Sigma, I)$  est défini par la présentation de groupe

$$\mathbb{F}(\Sigma, I) = \langle \Sigma \mid ab = ba, \forall (a, b) \in I \rangle. \quad (34)$$

Les éléments de  $\mathbb{F}(\Sigma, I)$  sont appelés des traces.

Tout groupe de trace peut s'incarner en un modèle de Tetris avec pièces colorées. Illustrons ceci sur un exemple.

Soit le groupe de trace  $\mathbb{F} = \langle a, b, c \mid ab = ba \rangle$ . Partons du modèle de Tetris associé à  $\mathbb{M} = \langle a, b, c \mid ab = ba \rangle^+$ . A chaque pièce  $u$ , on associe une pièce  $u^{-1}$ , identique mais de "couleur" différente. Dans l'empilement, deux pièces consécutives identiques et de couleurs différentes s'annulent mutuellement. On illustre ceci en fig. 8.

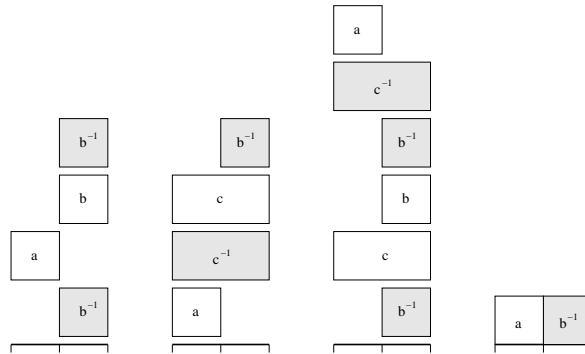


Figure 8: Les mots  $b^{-1}abb^{-1}$ ,  $ac^{-1}cb^{-1}$ ,  $b^{-1}cbb^{-1}c^{-1}a$  et la trace associée.

Les monoïdes et groupes de trace sont très étudiés en Informatique théorique et en mathématiques, cf. par exemple [8]. Ce sont en effet des structures naturelles pour modéliser le parallélisme.

Abordons le problème de l'analyse de la marche aléatoire. Considérons la marche  $(\mathbb{F}, \mu)$  où  $\mathbb{F} = \langle a, b, c \mid ab = ba \rangle$  et où  $\mu$  est la mesure de probabilité uniforme sur  $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}\}$ .

Posons  $\Sigma = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}\}$  et  $S = \Sigma \cup \{ab, ab^{-1}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}\}$ . Si  $u$  est une trace alors  $|u|_S$ , sa longueur par rapport à  $S$ , est la hauteur de l'empilement de Tetris associé à  $u$ .

Soit  $(X_n)_n$  une réalisation de la marche  $(\mathbb{F}, \mu)$ . On veut déterminer les vitesses de fuite

$$\gamma_\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|_\Sigma}{n} \text{ p.s.}, \quad \gamma_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|_S}{n} \text{ p.s.} \quad (35)$$

La vitesse de fuite  $\gamma_\Sigma$ , resp.  $\gamma_S$ , est la vitesse de croissance de la longueur, resp. de la hauteur, de l'empilement aléatoire.

On dispose des outils pour mener à bien cette étude. En effet, on a

$$\mathbb{F} \sim \langle a, b \mid ab = ba \rangle \star \langle c \mid - \rangle = \mathbb{Z}^2 \star \mathbb{Z}.$$

On est donc dans le cadre d'application des résultats précédents, version produit libre de groupes dénombrables. Posons

$$\bar{\Sigma} = \{a^i b^j, (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} \cup \{c, c^{-1}\}.$$

On prend  $\bar{\Sigma}$  comme ensemble de générateurs. On a

$$\text{Next}(c) = \bar{\Sigma} \setminus \{c^{-1}\}, \quad \text{Next}(c^{-1}) = \bar{\Sigma} \setminus \{c\}, \quad \forall i, j, \text{Next}(a^i b^j) = \{c, c^{-1}\}.$$

On écrit les Équations de Trafic correspondant à ces générateurs. On a donc un ensemble infini d'équations en un ensemble infini d'indéterminées indicées par  $\bar{\Sigma}$ .

Ces équations admettent une unique solution  $r = (r(u))_{u \in \bar{\Sigma}}$ , et on exprime la mesure harmonique en fonction de  $r$ .

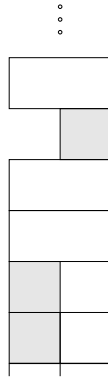


Figure 9: L'empilement infini de forme normale de Cartier-Foata  $(a^{-1}b)(a^{-1})(c)(c)(b^{-1})(c)\dots$ .

Par exemple la probabilité pour que le bas de l'empilement infini soit celui représenté en fig. 9 est exactement (en utilisant l'égalité  $r(c) = r(c^{-1})$ , évidente par symétrie),

$$\mu^\infty(a^{-2}bc^2b^{-1}c\bar{\Sigma}^{\mathbb{N}}) = \frac{r(a^{-2}b)}{2r(c)} \frac{r(c)^2}{(1-r(c))^2} \frac{r(b^{-1})}{2r(c)} r(c) = \frac{r(a^{-2}b)r(c)r(b^{-1})}{4(1-r(c))^2}.$$

On a donc une description Markovienne de la loi de l'empilement infini, pour une décomposition qui n'est pas niveau par niveau, mais en 'paquets' séparés par des  $c$  ou  $c^{-1}$ . En particulier, il n'y a pas de dépendance Markovienne entre les niveaux successifs de l'empilement infini.

Une analyse combinatoire précise permet de déterminer explicitement  $r$ . On obtient le résultat suivant.

**Théorème 3.13.** *Les vitesses de croissance de la longueur et de la hauteur sont données respectivement par*

$$\gamma_{\Sigma} = \frac{1}{3}(1 - \delta) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1 - \delta}{3 - 2\delta}} \quad (36)$$

$$\gamma_S = \frac{1}{3}(1 - \delta) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1 - \delta}{5 - 3\delta}}, \quad (37)$$

avec  $\delta$  caractérisé par

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{2n}{n}^2 \left( \frac{2 - \delta}{4(3 - 2\delta)} \right)^{2n} = \frac{\delta(3 - 2\delta)}{1 - \delta}. \quad (38)$$

Il s'agit du premier exemple d'un tel calcul pour un groupe de traces qui ne soit pas un groupe libre ou un groupe commutatif libre. Ce travail est en cours de rédaction.

L'apparition des termes  $\binom{2n}{n}^2$  dans (38) est un reflet de la combinatoire du problème, il s'agit en effet du nombre de chemins de longueur  $2n$  allant de  $(0, 0)$  en  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ .

### Un défi intéressant ?

La méthodologie suivie pour  $\mathbb{F} = \langle a, b, c \mid ab = ba \rangle$  peut être utilisée pour les marches aléatoires sur les groupes (ou monoïdes) de trace pouvant se décomposer sous la forme d'un produit libre non-trivial. Évidemment l'obtention de formules aussi explicites que celles du th. 3.13 est conditionnée par la capacité à résoudre explicitement un ensemble infini d'équations algébriques.

Caractérisons précisément les groupes de trace isomorphes à un produit libre non-trivial. Soit le groupe de trace  $\mathbb{F}(\Sigma, I)$ , voir déf. 3.12. Soit  $D = (\Sigma \times \Sigma) \setminus I$ . Appelons  $(\Sigma, I)$  le *graphe de commutation* et  $(\Sigma, D)$  le *graphe de dépendance* de  $\mathbb{F}(\Sigma, I)$ . On voit  $(\Sigma, I)$  et  $(\Sigma, D)$  comme des graphes non-orientés.

Supposons que  $(\Sigma, D)$  n'est pas connexe, et soit  $(\Sigma_1, D_1)$  et  $(\Sigma_2, D_2)$  deux sous-graphes d'union disjointe  $(\Sigma, D)$ . Soit  $I_1 = (\Sigma_1 \times \Sigma_1) \setminus D_1$  et  $I_2 = (\Sigma_2 \times \Sigma_2) \setminus D_2$ . On a alors

$$\mathbb{F}(\Sigma, I) \sim \mathbb{F}(\Sigma_1, I_1) \times \mathbb{F}(\Sigma_2, I_2).$$

Si on s'intéresse aux marches aléatoires  $(\mathbb{F}(\Sigma, I), \mu)$  où le support de  $\mu$  est inclus dans  $\Sigma^{\pm}$ , alors il est clair qu'il suffit d'analyser séparément  $(\mathbb{F}(\Sigma_1, I_1), \mu_1)$  et  $(\mathbb{F}(\Sigma_2, I_2), \mu_2)$ , où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les restrictions renormalisées de  $\mu$  à  $\Sigma_1^{\pm}$  et  $\Sigma_2^{\pm}$ . La mesure harmonique de  $(\mathbb{F}(\Sigma, I), \mu)$  est le

produit de celles de  $(\mathbb{F}(\Sigma_1, I_1), \mu_1)$  et  $(\mathbb{F}(\Sigma_2, I_2), \mu_2)$ . Notons  $\gamma_\Sigma, \gamma_{\Sigma_1}$  et  $\gamma_{\Sigma_2}$  les vitesses de croissance respectives de la longueur; et notons  $\gamma_S, \gamma_{S_1}$  et  $\gamma_{S_2}$  les vitesses de croissance respectives de la hauteur. On a, en particulier,

$$\gamma_\Sigma = \mu(\Sigma_1^\pm) \gamma_{\Sigma_1} + \mu(\Sigma_2^\pm) \gamma_{\Sigma_2}, \quad \gamma_S = \mu(\Sigma_1^\pm) \gamma_{S_1} \vee \mu(\Sigma_2^\pm) \gamma_{S_2}.$$

On va donc se restreindre, sans perte de généralités, au cas où  $(\Sigma, D)$  est connexe. On a le résultat suivant.

**Proposition 3.14.** *Soit  $\mathbb{F}(\Sigma, I)$  un groupe de trace de graphe de dépendance connexe. Le groupe  $\mathbb{F}(\Sigma, I)$  est isomorphe à un produit libre non-trivial si et seulement si  $(\Sigma, I)$  n'est pas connexe. Dans ce cas, si  $(\Sigma_i, I_i), i = 1, \dots, k$ , est la décomposition de  $(\Sigma, I)$  en composantes connexes, on obtient  $\mathbb{F}(\Sigma, I) \sim \mathbb{F}(\Sigma_1, I_1) \star \dots \star \mathbb{F}(\Sigma_k, I_k)$ .*

L'implication " $[(\Sigma, I) \text{ non-connexe}] \implies [\mathbb{F}(\Sigma, I) \text{ produit libre}]$ " est évidente. La réciproque peut se montrer en utilisant la notion de "bouts" d'un graphe.

On peut donc proposer un nouveau défi. Le plus petit groupe de trace qui n'est pas isomorphe à un produit libre non-trivial est :

$$\mathbb{F} = \langle a, b, c, d \mid ac = ca, ad = da, bd = db \rangle.$$

Le modèle de Tetris correspondant est représenté en fig. 10.

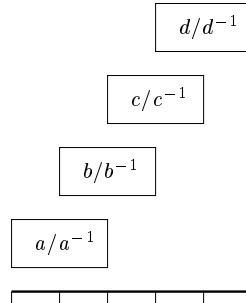


Figure 10: Ceci n'est pas un produit libre !

Soit  $\mu$  la mesure de probabilité chargeant chacun des éléments de  $\{a, b, c, d\}^\pm$  avec masse  $1/8$ .

*Question :* Est-il possible de donner une information quantitative sur la vitesse de fuite de la marche aléatoire  $(\mathbb{F}, \mu)$  ?

Pour donner la mesure du challenge, notons que même pour le monoïde associé on ne sait pas calculer la vitesse de fuite. C'est même l'unique monoïde sur 4 lettres ou moins pour lequel le problème est ouvert.

### 3.5 Extensions

Le modèle de marche aléatoire au plus proche voisin sur  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$ , ainsi que le modèle de §3.3 appartiennent à un même et premier niveau en terme de complexité. Le modèle de §3.4 appartient à un second niveau. En fait, on va savoir analyser la marche aléatoire pour trois niveaux de complexités croissantes. On se limite aux groupes dans la discussion qui suit. Par ailleurs l'ensemble de générateurs considéré doit être interprété comme le support des sauts élémentaires pour la marche. Plus cet ensemble est large, plus le modèle est général (et, en contrepartie, plus il est difficile à analyser).

*Niveau 1.*

- Groupe libre fleuri et générateurs naturels :

$$G = \mathbb{F}(S) \star G_1 \star \cdots \star G_k, \quad \Sigma = S \cup S^{-1} \cup G_1 \setminus \{1_{G_1}\} \cup \cdots \cup G_k \setminus \{1_{G_k}\},$$

avec  $S$  ensemble fini et  $G_1, \dots, G_k$  groupes finis.

- Couple zéro-automatique (voir déf. 3.15).

*Niveau 2.*

- Produit libre de groupes dénombrables et générateurs naturels :

$$G = \mathbb{F}(S) \star G_1 \star \cdots \star G_k, \quad \Sigma = S \cup S^{-1} \cup G_1 \setminus \{1_{G_1}\} \cup \cdots \cup G_k \setminus \{1_{G_k}\},$$

avec  $S$  ensemble fini et  $G_1, \dots, G_k$  groupes dénombrables.

*Niveau 3.*

- Groupe libre fleuri et ensemble de générateurs fini quelconque.
- Produit libre amalgamé de groupes finis et ensemble de générateurs fini quelconque.
- Extension HNN construite sur des groupes finis et ensemble de générateurs fini quelconque.

Pour illustrer, on a représenté en fig. 11 le graphe de Cayley d'un couple groupe - générateurs  $(G, \Sigma)$  pour chaque niveau :

1.  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle$ ,  $\Sigma = \{a, b, b^{-1}\}$ ;
2.  $\mathbb{Z}^2 \star \mathbb{Z} = \langle a, b, c \mid ab = ba \rangle$ ,  $\Sigma = \{c, c^{-1}\} \cup \{a^i b^j, (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ ;
3.  $\mathbb{F}(a, b) = \langle a, b \mid - \rangle$ ,  $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ ,  $\Sigma = S \cup \{uv \mid u, v \in S, v \neq u^{-1}\}$ .

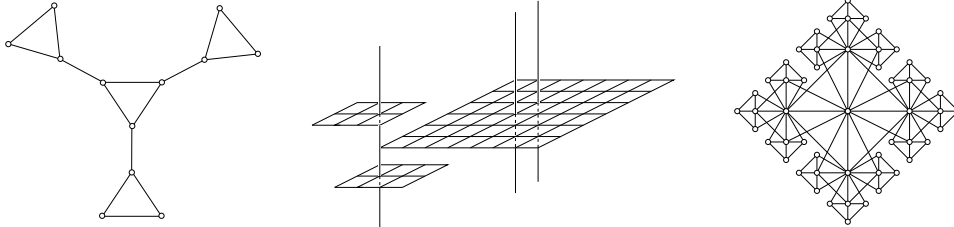


Figure 11: De la gauche vers la droite, les trois niveaux par ordre de complexité croissante.

Du niveau 1 au niveau 2, l'accroissement de la complexité est de nature "combinatoire". En effet, la forme de la mesure harmonique reste exactement la même mais s'écrit sur un ensemble fini de générateurs dans le premier cas, et sur un ensemble infini dans le second. Obtenir des formules explicites pour la vitesse de fuite suppose la résolution d'un ensemble fini d'équations pour le niveau 1 et infini pour le niveau 2. Pour le niveau 3, l'accroissement de la complexité est de nature "probabiliste".

*Zéro-automaticité.*

On va caractériser de façon précise l'appartenance au niveau 1 pour un couple groupe - générateurs. Considérons à titre d'exemple le groupe libre à deux générateurs  $\mathbb{F} = \mathbb{F}(a, b)$ . On a représenté en fig. 12 le graphe de Cayley de  $\mathbb{F}$  pour trois ensembles de générateurs de taille croissante, à savoir

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}, & \Sigma' &= \Sigma \cup \{ab, b^{-1}a^{-1}\}, \\ \Sigma'' &= \Sigma \cup \{uv \mid u, v \in \Sigma, v \neq u^{-1}\}. \end{aligned}$$

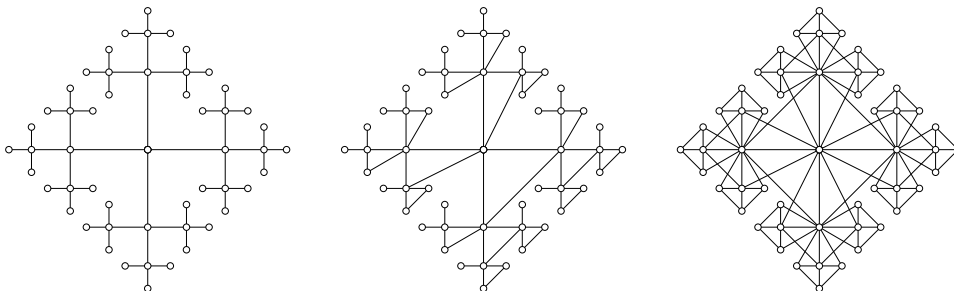


Figure 12: De la gauche vers la droite, les graphes de Cayley  $\mathcal{X}(\mathbb{F}, \Sigma)$ ,  $\mathcal{X}(\mathbb{F}, \Sigma')$  et  $\mathcal{X}(\mathbb{F}, \Sigma'')$ .

Il existe une différence combinatoire notable entre les deux graphes de

gauche et le graphe de droite sur la figure 12. Dans  $\mathcal{X}(\mathbb{F}, \Sigma)$ , il y a 4 circuits (orientés) simples passant par un nœud donné (les 4 circuits sont de longueur 2 : une arête non-orientée sur la fig. 12 s'interprète comme deux arcs orientés...). Dans  $\mathcal{X}(\mathbb{F}, \Sigma')$ , il y a 10 circuits simples passant par un nœud donné. Enfin, dans  $\mathcal{X}(\mathbb{F}, \Sigma'')$ , on se convainc aisément qu'il y a une infinité de circuits orientés simples passant par un nœud donné. Proposons la définition suivante.

**Définition 3.15.** *Un couple  $(G, \Sigma)$  formé par un groupe et un ensemble fini de générateurs est zéro-automatique si le nombre de circuits simples passant par un nœud donné est fini.*

La notion de 0-automatisme est directement reliée aux groupes libres fleuris, comme le montre le théorème suivant dû à Stallings [30] et Haring-Smith [14].

**Théorème 3.16.** *Si  $(G, \Sigma)$  est un couple 0-automatique alors  $G$  est isomorphe à un produit libre fleuri.*

En revanche, l'ensemble de générateurs  $\Sigma$  peut être strictement plus large qu'un ensemble de générateurs naturels de  $G$ , comme l'illustre la fig. 12. On peut être plus précis en utilisant les résultats de [30]. Soit  $G$  un groupe libre fleuri et  $\Sigma$  un ensemble de générateurs naturels. Si  $(G, \Sigma)$  est un couple 0-automatique alors on a forcément :  $\forall u \in \Sigma, |u|_{\Sigma} = 1, 2$  ou  $3$ .

Dans M. [20], on propose au moyen d'un algorithme une classification complète de tous les couples 0-automatiques associés à un groupe libre fleuri donné.

*Discussion bibliographique.*

Il y a deux aspects distincts dans les résultats qui précèdent. Le premier aspect concerne la structure Markovienne multiplicative de la mesure harmonique.

Les propriétés de la mesure harmonique associée à une marche aléatoire au plus proche voisin sur le groupe libre, ou les produits libres de groupes, ont été extensivement étudiées, voir [9, 28, 17, 18, 34], ou la monographie de Woess [35] et les références qui s'y trouvent. Dans ce contexte, le noyau de Green a une structure multiplicative, et en conséquence, la mesure harmonique est Markovienne, voir en particulier [28, Section 5] et [34, Section 6]. Le théorème 3.7 est démontré dans M. [19] pour les couples 0-automatiques et revisité dans M. & Mathéus [24] pour les produits libres de groupes finis. Il fournit une perspective différente sur les résultats classiques que l'on vient de rappeler. Le point central est le caractère combinatoire spécial de la mesure harmonique Markovienne, encapsulé sous le terme "Markovien multiplicatif". Cette propriété Markovienne multiplicative est très spécifique



et (je pense) importante. Par exemple, dans un contexte voisin qui est celui des marches aléatoires sur les “arbres avec un nombre fini de types de cônes”, la mesure harmonique est Markovienne mais pas Markovienne multiplicative, voir [26]. C’est cette spécificité qui permet d’obtenir les résultats de M. [21] sur toutes les marches aléatoires à *support fini* sur ces mêmes groupes (le niveau 3 mentionné ci-dessus). Ces derniers résultats (le caractère Markovien multiplicatif de la mesure harmonique par rapport à un ensemble de paramètres cachés) sont originaux et vraisemblablement assez inattendus.

Le second aspect consiste en la possibilité de mener des calculs effectifs et d’obtenir la mesure harmonique, la vitesse de fuite ou l’entropie sous forme close. Un intérêt est de fournir une large source potentielle d’exemples et de contre-exemples. Ici, la comparaison pertinente à faire est celle entre notre méthode et celle de Sawyer & Steger [28]. On se reportera pour la discussion afférente à la fin de §3.1. Notons que tous les calculs proposés dans ce chapitre sont originaux. Les plus simples de ces calculs peuvent également être obtenus par la méthode de Sawyer & Steger, mais certainement pas les plus sophistiqués. Ces derniers utilisent de façon cruciale l’information supplémentaire sur la structure de la mesure harmonique.

## 4 Files d'attente et réseaux

On synthétise de nouveaux modèles de file d'attente Markovienne. Le contenu de la salle d'attente évolue suivant une marche aléatoire sur un (semi)groupe discret du type étudié en §3. Ces files généralisent largement les modèles classiques, offrent une bonne flexibilité en terme de modélisation, et sont analysables de façon effective.

On propose deux descriptions complémentaires du modèle, la première avec le prisme “files d'attente” et la seconde avec le prisme “marches aléatoires”.

### 4.1 Du côté des files d'attente

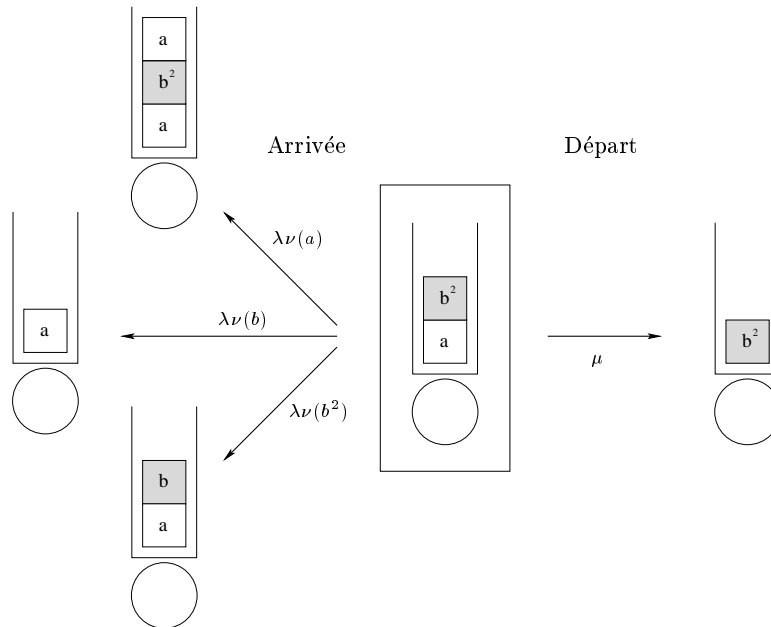


Figure 13: Évolutions possibles du contenu du buffer.

Reprenons le modèle de buffer introduit en §3.1. Des clients de type  $a$ ,  $b$  ou  $b^2$  arrivent dans le système, prennent place en queue de buffer et interagissent suivant les règles de simplification induites par la loi du groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1 \rangle$ . En particulier, le contenu du buffer est une suite alternée de  $a$  et de  $b$  ou de  $b^2$ , voir (2). Maintenant, enrichissons le modèle en rajoutant un serveur en tête de buffer qui sert les clients un par un et dans l'ordre de leur arrivée (discipline de service FIFO, i.e. First In First Out). Fixons des hypothèses stochastiques : les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , possèdent un type aléatoire

distribué suivant une loi  $\nu$  sur  $\{a, b, b^2\}$ , les types étant indépendants les uns des autres, et les clients sont servis en tête de buffer à un taux constant  $\mu$ . Le modèle que l'on vient de décrire est la file 0-automatique associée au couple  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \{a, b, b^2\})$  et de paramètres  $(\nu, \lambda, \mu)$ .

En figure 13, on a représenté les évolutions possibles du contenu du buffer sous l'effet soit d'une arrivée, soit d'un départ, en indiquant les taux d'occurrence de chacun des événements.

Plus généralement, on peut associer des files 0-automatiques à tout couple formé par un groupe ou monoïde libre fleuri et des générateurs naturels, voir §3.2. Ceci engendre une richesse en terme de modélisation, avec divers types de comportements pour les clients, correspondant aux divers (semi)groupes. Décrivons 4 types qui constituent un échantillon représentatif sans pour autant épuiser les possibilités du modèle.

*Le type classique.* Les clients sont servis un par un, sans simplification dans le buffer :  $aa \rightarrow aa$ . Le couple correspondant est  $(\mathbb{N}, \{1\}) \sim (\{a\}^*, \{a\})$ .

*Le type positif-négatif.* Les clients sont soit 'positifs' ( $a$ ), soit 'négatifs' ( $a^{-1}$ ) et deux clients consécutifs de signes opposés s'annulent :  $aa^{-1} \rightarrow 1, a^{-1}a \rightarrow 1$ . On obtient ici un analogue de la  $G$ -file de Gelenbe [12]. Le couple correspondant est  $(\mathbb{Z}, \{1, -1\}) \sim (\mathbb{F}(a), \{a, a^{-1}\})$ .

*Le type menu déroulant.* Servir un ou plusieurs clients de ce type prend exactement la même durée :  $aa \rightarrow a$ . On peut penser par exemple à un système de réservations de billets, où la quantité de billets commandés n'est reflétée que par l'intermédiaire d'une valeur entière dans un menu déroulant. Le couple correspondant est  $(\mathbb{B}, \{a\})$  où  $\mathbb{B}$  est le monoïde booléen  $\mathbb{B} = \langle a \mid a^2 = a \rangle$ .

*Le type agence matrimoniale.* Deux clients consécutifs s'annulent l'un l'autre :  $aa \rightarrow 1$ . On peut imaginer qu'un client est un joueur de tennis cherchant un partenaire (fourni par le serveur); lorsque deux tels clients se retrouvent côte à côte dans le buffer, ils partent immédiatement jouer un match plutôt que d'attendre dans la file. En lieu et place des tennismen, on peut considérer des jazzmen amateurs de trio ou des joueurs de bridge, les règles de simplification étant alors  $aaa \rightarrow 1$  ou  $aaaa \rightarrow 1$ . Le couple correspondant à ce type est  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle, \{a\})$  pour les tennismen (respectivement,  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle, \{a\})$  ou  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle a \mid a^4 = 1 \rangle, \{a\})$ ).

Dans la file, plusieurs types peuvent coexister, tout comme plusieurs copies du même type. On obtient alors le (semi)groupe associé en effectuant le produit libre des (semi)groupes des différents types. Par exemple, la file associée au groupe  $\mathbb{F}(a) \star \langle b \mid b^2 = 1 \rangle$  contient à la fois des clients de type positif/négatif ( $a/a^{-1}$ ) et des tennismen ( $b$ ), et il n'y a pas d'interactions entre les clients  $a/a^{-1}$  d'une part et  $b$  de l'autre.

L'exemple le plus simple de (semi)groupe libre fleuri est le monoïde libre à un générateur. Celui-ci est isomorphe à  $(\mathbb{N}, +)$  et l'ensemble de générateurs naturels est le singleton  $\{1\}$ . Soit la file 0-automatique associée à  $(\mathbb{N}, \{1\})$  et de paramètres  $(\nu, \lambda, \mu)$ , avec ici, nécessairement,  $\nu : \nu\{1\} = 1$ . La marche (très peu) aléatoire associée est :  $n \rightarrow n + 1$  avec probabilité 1. Le contenu du buffer est un processus de Markov à temps continu sur  $\mathbb{N}$  de type naissance et mort avec taux respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ . On retrouve ici la file simple ou file  $M/M/1$ , c'est-à-dire le modèle le plus classique de la théorie des files d'attente auquel au moins un livre est consacré en propre [4].

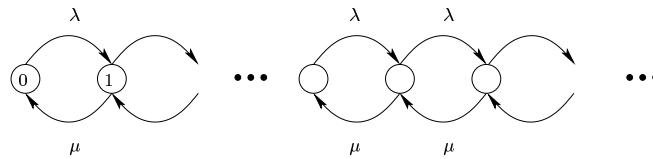


Figure 14: Taux de transition du contenu du buffer pour la file  $M/M/1$ .

Le graphe du générateur infinitésimal du contenu du buffer est représenté en figure 14. Les équations d'équilibre (ou équations de balance) correspondantes sont

$$\pi(0)\lambda = \pi(1)\mu, \quad \forall n > 0, \quad \pi(n)(\lambda + \mu) = \pi(n - 1)\lambda + \pi(n + 1)\mu. \quad (39)$$

On peut résoudre ces équations. Sous la condition de stabilité  $\lambda/\mu < 1$ , la distribution stationnaire  $\pi$  du contenu du buffer est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \pi(n) = (1 - \lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n. \quad (40)$$

Soit maintenant une file 0-automatique générale, associée au couple  $(X, \Sigma)$  et de paramètres  $(\nu, \lambda, \mu)$ . Soit  $L(X, \Sigma)$  l'ensemble des contenus de buffer admissibles. Soit  $\hat{\gamma}$  la vitesse de fuite de la marche aléatoire  $(X, \nu)$ . La condition de stabilité de la file est  $\lambda\hat{\gamma}/\mu < 1$ . Sous cette condition, la distribution stationnaire  $\pi$  du contenu du buffer est donnée par :

$$\forall a_1 \cdots a_n \in L(X, \Sigma), \quad \pi(a_1 \cdots a_n) = (1 - \rho)\rho^n r(a_1)q(a_2) \cdots q(a_n), \quad (41)$$

pour  $\rho \in ]0, 1[$ ,  $r \in \mathbb{R}_+^\Sigma$ ,  $\sum_{a \in \Sigma} r(a) = 1$ , et  $q(a) = r(a)/r(\text{Next}(a))$  pour tout  $a \in \Sigma$ . Rappelons que  $\text{Next}(a)$  est l'ensemble des types de clients n'interagissant pas avec le type  $a$ , cf. Section 3.2.

On peut isoler deux termes dans (41), le premier,  $(1 - \rho)\rho^n$ , est l'analogue exact de (40) et code la longueur du buffer, et le second code le contenu précis du buffer.

## 4.2 Du côté des marches aléatoires

Considérons le couple  $(X, \Sigma)$  constitué par un (semi)groupe libre fleuri et un ensemble de générateurs naturels. Soit  $\nu$  une probabilité sur  $\Sigma$  dont le support engendre  $X$ .

Identifions les éléments de  $X$  aux mots réduits du langage  $L(X, \Sigma)$ , voir (19). Soit  $u$  et  $v$  deux mots de  $L(X, \Sigma)$  avec  $u$  préfixe de  $v$ . Dans le graphe de Cayley  $\mathcal{X}(X, \Sigma)$ , il existe un unique plus court chemin ou *géodésique* allant de  $u$  à  $v$ . Appelons  $u$  la *tête* de la géodésique et  $v$  sa *queue*.

On peut voir la marche aléatoire classique  $(X, \nu)$ , voir Définition 2.4, comme une chaîne de Markov évoluant sur l'espace d'état des géodésiques de tête  $1_{\Sigma^*}$ . À chaque étape, la chaîne évolue par modification, ajout ou suppression de la dernière lettre de la queue de la géodésique.

Considérons maintenant un modèle différent de chaîne de Markov. L'espace d'état est l'ensemble des géodésiques de tête  $u$  et de queue  $v$ , avec  $u$  préfixe de  $v$ . À chaque étape la chaîne évolue :

- soit au niveau de la queue de la géodésique, suivant le mécanisme de la marche aléatoire;
- soit au niveau de la tête de la géodésique, l'effet étant alors de rapprocher la tête de la queue d'un pas.

Illustrons le mécanisme sur l'exemple du groupe modulaire  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  en figure 15.

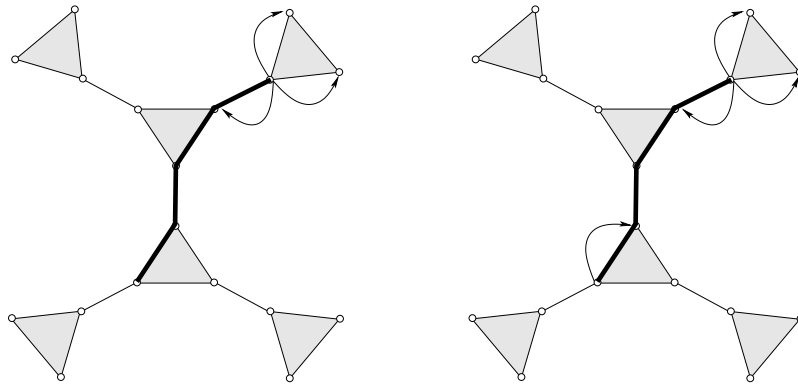


Figure 15: Transitions possibles pour la marche aléatoire (à gauche) et la file d'attente (à droite).

Lorsque la proportion des modifications affectant la tête de la géodésique augmente, on passe d'un modèle transient à un modèle récurrent positif. À l'un des extrêmes se situe la marche aléatoire  $(X, \nu)$  pour laquelle la mesure harmonique a une structure multiplicative (voir Section 3) donnée par

$$\forall a_1 \cdots a_n \in L(X, \Sigma), \quad \mu^\infty(a_1 \cdots a_n \Sigma^{\mathbb{N}}) = \hat{q}(a_1) \cdots \hat{q}(a_{n-1}) \hat{r}(a_n),$$

pour un  $\hat{r} \in \mathbb{R}_+^\Sigma$ ,  $\sum_{a \in \Sigma} \hat{r}(a) = 1$  et  $\hat{q}(a) = \hat{r}(a) / \hat{r}(\text{Next}(a))$  pour tout  $a \in \Sigma$ .

Les modèles récurrents positifs, quant à eux, ont une distribution stationnaire  $\pi$  qui hérite de cette structure multiplicative particulière :

$$\forall a_1 \cdots a_n \in L(X, \Sigma), \quad \pi(a_1 \cdots a_n) = (1 - \rho) \rho^n r(a_1) q(a_2) \cdots q(a_n),$$

pour  $\rho \in ]0, 1[$ ,  $r \in \mathbb{R}_+^\Sigma$ ,  $\sum_{a \in \Sigma} r(a) = 1$  et  $q(a) = r(a)/r(\text{Next}(a))$  pour tout  $a \in \Sigma$ .

### Synthèse

Si on récapitule, on voit que la distribution stationnaire  $\pi$  est constituée de deux termes,  $(1 - \rho)\rho^n$  d'une part et  $r(a_1)q(a_2) \cdots q(a_n)$  de l'autre. Le premier s'interprète grâce au prisme "files d'attente" et le second grâce au prisme "marches aléatoires".

### 4.3 Files 0-automatiques

On va maintenant définir avec précision le modèle et les résultats principaux.

**Définition 4.1.** *Un triplet  $(X, \Sigma, \nu)$  est fleuri si : (i)  $X$  est un monoïde libre fleuri infini non isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ; (ii)  $\Sigma$  est un ensemble de générateurs naturels; (iii)  $\nu$  est une mesure de probabilité dont le support est inclu dans  $\Sigma$  et engendre  $X$ .*

Si  $(X, \Sigma, \nu)$  est un triplet fleuri, alors la marche aléatoire  $(X, \nu)$  est transiente, voir la discussion en §3.2.

La définition formelle d'une file 0-automatique se fait par l'intermédiaire du générateur infinitésimal du contenu du buffer.

**Définition 4.2** (File zéro-automatique). *Soit  $(X, \Sigma, \nu)$  un triplet fleuri. Soit  $L(X, \Sigma)$  l'ensemble des mots réduits défini en (19). Soit  $r \in \{x \in \mathbb{R}_+^\Sigma \mid \sum_i x(i) = 1\}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ . La file 0-automatique de type  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$  est définie comme suit. Le contenu du buffer est un processus Markovien de saut à temps continu  $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  sur l'espace d'états  $L(X, \Sigma)$ . Son générateur infinitésimal  $Q$  est défini par :  $\forall u = u_1 \cdots u_n \in L(X, \Sigma) \setminus \cup_{a \in \Sigma} \{a\}^*$ ,*

$$\begin{cases} Q(u, ub) &= \lambda \nu(b), & \forall b \in \text{Next}(u_n) \\ Q(u, u_1 \cdots u_{n-1}c) &= \lambda \sum_{b|u_n * b = c} \nu(b), & \forall c \in \Sigma \setminus \{u_n\} \\ Q(u, u_1 \cdots u_{n-1}) &= \lambda \sum_{b|u_n * b = 1_X} \nu(b) \\ Q(u, u_2 \cdots u_n) &= \mu \end{cases} \quad (42)$$

et, pour tout  $a \in \Sigma$  tel que  $a \in \text{Next}(a)$ , et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} Q(a^n, a^n b) &= \lambda \nu(b), & \forall b \in \text{Next}(a) \\ Q(a^n, a^{n-1}c) &= \lambda \sum_{b|a * b = c} \nu(b), & \forall c \in \Sigma \setminus \{a\} \\ Q(a^n, a^{n-1}) &= \mu + \lambda \sum_{b|a * b = 1_X} \nu(b) \end{cases} \quad (43)$$

et, enfin, la condition à la frontière est,

$$Q(1_{\Sigma^*}, a) = \lambda \nu(a) r(\text{Next}(a)), \quad \forall a \in \Sigma. \quad (44)$$

Dans (42), les trois premières lignes correspondent à une arrivée en queue de buffer, avec les effets respectifs d'ajouter un client au buffer, de modifier le type du dernier client, et d'annuler le dernier client. La quatrième ligne correspond à un départ en tête de buffer. Le mécanisme est exactement le même pour (43), mais il est nécessaire de distinguer ce cas car les deux dernières lignes de (42) sont maintenant confondues en raison de la forme symétrique du buffer.

Enfin l'intuition qui se cache derrière la forme de la condition à la frontière (44) est la suivante : le contenu du buffer est vu comme la partie immergée d'un iceberg constitué d'un mot infini aléatoire de  $L^\infty$ , voir (20). Lorsque le buffer est vide, les nouveaux clients sont incorporés dans la file en fonction de la partie cachée de l'iceberg aléatoire, dont la première marginale est supposée être  $r$ . Ce dernier point trouvera sa justification a-posteriori dans le théorème 4.4.

Dans la file 0-automatique, si on bloque le serveur, le buffer se remplit au taux  $\lambda\hat{\gamma}$ , où  $\hat{\gamma}$  est la vitesse de fuite de la marche  $(X, \nu)$ . L'inégalité  $\lambda\hat{\gamma} < \mu$  est donc la condition de stabilité attendue, ce qui sera confirmé par le théorème 4.4.

On introduit les Équations de Trafic Tordues, qui vont jouer pour la file 0-automatique un rôle analogue à celui des Équations de Trafic (Déf. 3.5) pour la marche aléatoire.

**Définition 4.3** (Équations de Trafic Tordues). *Les Équations de Trafic Tordues ETT associées à  $(X, \Sigma, \nu, \lambda, \mu)$  sont les équations des variables  $(\eta, x)$ ,  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x = (x(a))_{a \in \Sigma} \in \mathbb{R}_+^\Sigma$ , définies par :*

$$\begin{aligned} \eta(\lambda + \mu)x(a) &= \eta^2 \mu x(a) + \lambda \nu(a)x(\text{Next}(a)) + \eta \lambda \sum_{b^*d=a} \nu(b)x(d) \\ &\quad + \eta^2 \lambda \sum_{\substack{d \in \text{Next}(a) \\ b^*d=1_X}} \nu(u) \frac{x(d)}{x(\text{Next}(d))} x(a). \end{aligned} \quad (45)$$

Pour avoir un avant-goût du rôle des ETT, examinons le cas de la file simple, i.e.  $(X, \Sigma) = (\{a\}^*, \{a\})$ . Si on simplifie les ETT, on obtient :

$$\rho(\lambda + \mu) = \rho^2 \mu + \lambda. \quad (46)$$

Comparons avec les équations de balance de la file  $M/M/1$ , cf. (39) :

$$\pi(n)(\lambda + \mu) = \pi(n-1)\lambda + \pi(n+1)\mu. \quad (47)$$

Si on effectue la substitution  $\pi(n) = \pi(0)\rho^n$  dans (47), on reconnaît (46).

On peut maintenant énoncer le résultat principal démontré dans Dao-Thi & M. [5].

**Théorème 4.4.** *Soit un triplet fleuri  $(X, \Sigma, \nu)$  et  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Soit  $(\rho, r)$  une solution des Équations de Trafic Tordues dans  $\mathbb{R}_+^* \times \{x \in \mathbb{R}_+^\Sigma \mid \sum_i x(i) = 1\}$ . Considérons la file 0-automatique  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ . Soit  $M_r = (M_r(t))_t$  le processus du contenu du buffer. On a :*

$$\begin{aligned} [\rho < 1] &\iff [\lambda\hat{\gamma} < \mu] \iff [M_r \text{ ergodique}] \\ [\rho = 1] &\iff [\lambda\hat{\gamma} = \mu] \iff [M_r \text{ récurrent nul}] \\ [\rho > 1] &\iff [\lambda\hat{\gamma} > \mu] \iff [M_r \text{ transient}]. \end{aligned}$$

*Supposons que  $\lambda\hat{\gamma} < \mu$ . Alors les Équations de Trafic Tordues ont une unique solution  $(\rho, r)$  dans  $]0, 1[ \times \{x \in \mathbb{R}_+^\Sigma \mid x(i) > 0, \sum_i x(i) = 1\}$ . La distribution stationnaire  $\pi_{\rho, r}$  du processus  $M_r$  est donnée par :  $\forall a_1 \cdots a_n \in L(X, \Sigma)$ ,*

$$\pi_{\rho, r}(a_1 \cdots a_n) = (1 - \rho)\rho^n r(a_1)q(a_2) \cdots q(a_n), \quad (48)$$

où  $q(a) = r(a)/r(\text{Next}(a))$  pour tout  $a \in \Sigma$ .

Il n'est pas évident de trouver une explication a-priori pour la forme des ETT. En revanche, on dispose d'une explication a-posteriori. Écrivons les équations de balance pour la distribution stationnaire  $\pi$  (qui sont en nombre infini). *Supposons que  $\pi$  a une forme multiplicative donnée par (48).* On peut alors simplifier les équations de balance, et on constate que l'on tombe sur un ensemble fini d'équations : les Équations de Trafic Tordues.

*Théorème de Burke.*

Le célèbre théorème de Burke (voir, par exemple, Brémaud [3, Chap. 9.4]) nous dit que le processus des départs d'une file  $M/M/1$  stable est un processus de Poisson de même taux que le processus des arrivées. Une conséquence du théorème 4.4 est l'existence d'un analogue au théorème de Burke pour les files 0-automatiques.

Dans une file 0-automatique, le contenu du buffer peut diminuer du fait d'une arrivée-annulation en queue de buffer ou d'un départ en tête de buffer. Ici on ne considère que les départs ayant lieu en tête de buffer, c'est-à-dire ceux correspondant à la complétion d'un service. Le *processus des départs* est le processus ponctuel des instants de départs de clients.

**Théorème 4.5.** *Le modèle est le même qu'en théorème 4.4. Supposons que  $\lambda\hat{\gamma} < \mu$ . Soit  $(\rho, r) \in ]0, 1[ \times \{x \in \mathbb{R}_+^\Sigma \mid x(i) > 0, \sum_i x(i) = 1\}$  l'unique solution des ETT. Considérons la file 0-automatique  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ . En régime stationnaire, le processus des départs est un processus de Poisson de taux  $\rho\mu$ . De plus, pour tout  $t$ , le contenu du buffer à l'instant  $t$  est indépendant du processus des départs jusqu'à l'instant  $t$ .*

*Principe de saturation.*



Le principe de saturation de Baccelli & Foss [2] est vérifié dans de nombreux modèles classiques de files d'attente. En voici une description informelle.

Considérons une file d'attente avec un buffer de capacité infinie. Soit  $\mu_0$  le taux de départ pour le système *saturé* dans lequel une infinité de clients sont présents dans le buffer. Si la file vérifie le principe de saturation, et si le taux d'arrivées dans le système est  $\lambda < \mu_0$ , alors le système est stable et le taux de départ est  $\lambda$ .

Une présentation duale du même principe est la suivante. Soit  $\lambda_0$  le taux de croissance du nombre de clients dans le buffer pour le système *bloqué* dans lequel on a supprimé le serveur. Si le principe de saturation est vérifié, et si le taux de service dans le système est  $\mu > \lambda_0$ , alors la file est stable et le taux de départ est  $\lambda_0$ .

Les files 0-automatiques *ne vérifient pas* le principe de saturation. On a en effet les inégalités suivantes (qui peuvent se déduire du théorème 4.5) :

$$\lambda \hat{\gamma} \leq \rho \mu < \mu,$$

où  $\rho \mu$  est le taux de départ à l'équilibre,  $\mu$  est le taux de départ du système saturé, et  $\lambda \hat{\gamma}$  est le taux de croissance du buffer dans le système bloqué.

#### 4.4 L'exemple de la file $\mathbb{N} \star \mathbb{B}$

Considérons le triplet libre fleuri  $(\{a\}^* \star \langle b \mid b^2 = b \rangle^+, \Sigma = \{a, b\}, \nu)$ , où  $\nu(a) = p$ ,  $\nu(b) = 1 - p$ ,  $p \in ]0, 1[$ . En figure 16, on illustre le fonctionnement de la file 0-automatique associée à ce triplet.

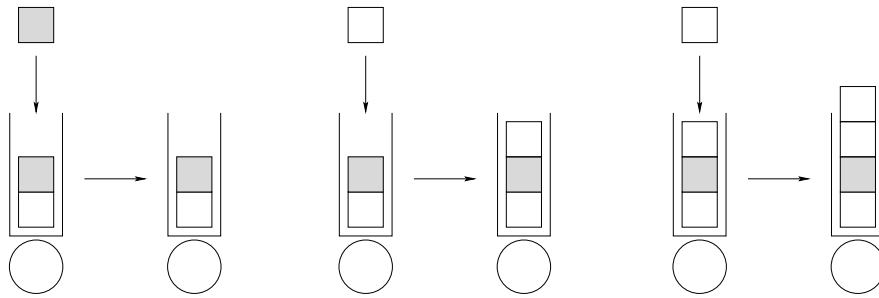


Figure 16: La file associée à  $\mathbb{N} \star \mathbb{B}$  avec  $a$  en blanc et  $b$  en gris.

L'unique solution des Équations de Trafic est :  $\hat{r}(c) = p$ ,  $\hat{r}(b) = 1 - p$ . La vitesse de fuite de la marche aléatoire est  $\hat{\gamma} = (2 - p)p$ .

Supposons la file stable. D'après le th. 4.4, les Équations de Trafic Tordues ont une unique solution dans  $]0, 1[ \times \{x \in \mathbb{R}_+^\Sigma \mid x(i) > 0, \sum_i x(i) = 1\}$  que l'on note  $(\rho, r)$ . En résolvant les ETT, on trouve que  $\rho$  est une

solution de  $f(Y) = 0$ , avec

$$f(Y) = \mu^2 Y^3 + (\mu^2 + \mu\lambda + \lambda\mu p)Y^2 + (\lambda^2 p + \lambda\mu p)Y - \lambda^2 p^2 + \lambda^2 p.$$

La relation entre  $r$  et  $\rho$  est donnée par :  $\rho = [r(b)(1 - p) + p]\lambda/\mu$ .

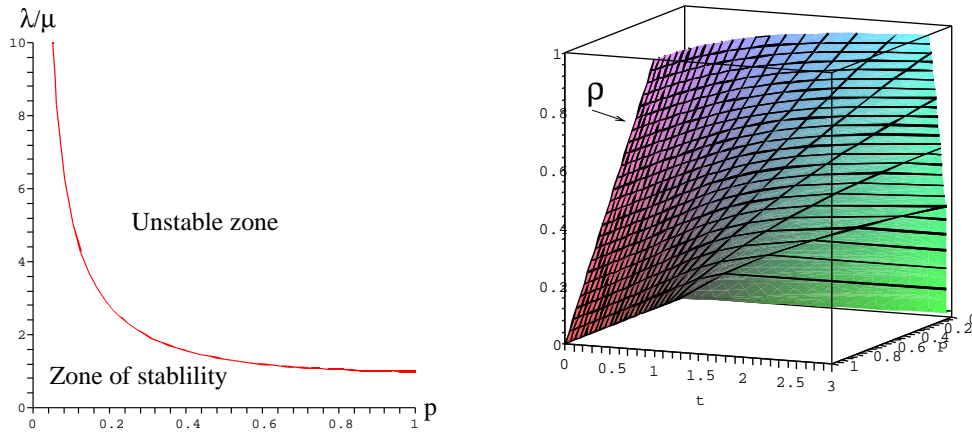


Figure 17:  $N \star B$  : La zone de stabilité (à gauche) et la charge  $\rho$  (à droite).

En figure 17 (gauche), on a représenté la région de stabilité de la file. L'abscisse est  $p$  et l'ordonnée est  $\lambda/\mu$ . En figure 17 (droite), on a représenté la charge  $\rho$  en fonction de  $p$  et de  $t = \lambda/\mu$ , pour  $p \in ]0, 1[$  et  $\lambda/\mu \in ]0, \min(1/\hat{\gamma}, 3)[$ . Ainsi,  $\rho$  est toujours inférieur à 1, cf. théorème 4.4.

#### 4.5 Les réseaux 0-automatiques

Les files 0-automatiques ont la propriété PIPO (Poisson Input Poisson Output), cf. théorème 4.5. En général, lorsqu'on interconnecte entre elles des files PIPO, on obtient des réseaux ayant de bonnes propriétés reflétées par l'existence d'une distribution stationnaire dite à forme produit, cf. Kelly [16] ou Serfoso [29]. Les files 0-automatiques ne font pas exception à la règle.

Considérons un réseau constitué de  $N$  files d'attente indicées de 1 à  $N$ . Les arrivées extérieures en file  $i$  suivent un processus de Poisson de taux  $\lambda_i \in [0, \infty[$ . Le taux de service en file  $i$  est  $\mu_i \in ]0, \infty[$ . À la fin de son service à la file  $i$ , un client est routé vers une file  $j$ , ou bien quitte définitivement le réseau. Ce routage peut s'effectuer de différentes façons. Considérons deux variantes.

- *Réseau à la Jackson.* Un client terminant son service à la file  $i$  est routé vers la file  $j$  avec la probabilité  $p_{ij}$  et quitte définitivement le réseau avec la probabilité  $1 - \sum_j p_{ij}$ . Les routages sont indépendants les uns des autres et indépendants des services. La politique de routage est donc entièrement caractérisée par la donnée de la *matrice de routage*  $P = (p_{ij})_{ij}$ . On suppose que le rayon spectral de  $P$  est strictement inférieur à 1, où de façon équivalente que tout client entrant dans le réseau finit par en sortir (le réseau est *sans capture*).

- *Réseau à la Kelly.* Une *route* est une suite finie de files (une même file peut apparaître plusieurs fois le long de la route). Il existe un ensemble fini  $\mathcal{C}$  de routes possibles pour les clients. À chaque client est associée une route qui détermine la suite des files visitées par le client. Les clients de route  $c \in \mathcal{C}$  arrivent dans le réseau suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda_c > 0$ . Les processus d'arrivées correspondant aux différentes routes sont indépendants les uns des autres et indépendants des services.

*Réseaux classiques.*

Lorsque les files d'attente sont de type  $M/M/1$ , les modèles obtenus constituent les deux grands classiques de la théorie des réseaux Markoviens (cf. par exemple [16, 27, 29]). Détaillons les résultats de base dans le cas Jackson.

Les *Équations de Trafic Réseau* sont les équations des variables  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  données par

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^N \tilde{\lambda}_j p_{ji} . \quad (49)$$

Il faut interpréter  $\tilde{\lambda}_i$  comme le taux de trafic total transitant par la file  $i$ , ce trafic se composant des arrivées extérieures (taux  $\lambda_i$ ) et du trafic rerouté depuis la file  $j$  (taux  $\tilde{\lambda}_j p_{ji}$ ).

Comme le réseau est sans capture, la matrice  $\text{Id} - P$  est inversible. Les équations (49) ont donc une unique solution  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_i)_i$  donnée par  $\tilde{\lambda} = \lambda(\text{Id} - P)^{-1}$  (ici  $\lambda$  et  $\tilde{\lambda}$  sont vus comme des vecteurs lignes).

Soit  $M$  le processus Markovien de saut décrivant les contenus des différents buffers (espace d'état  $\mathbb{N}^N$ ). Le processus  $M$  est ergodique si et seulement si la condition dite de *stabilité* est vérifiée :  $\forall i, \rho_i = \tilde{\lambda}_i / \mu_i < 1$ . Sous cette condition, la distribution stationnaire  $\pi$  de  $M$  est donnée par,  $\forall n = (n_i)_i \in \mathbb{N}^N$ ,

$$\pi(n) = \prod_{i=1}^N \pi_i(n_i) = \prod_{i=1}^N (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} . \quad (50)$$

On dit classiquement que la distribution  $\pi$  est à "forme produit", car  $\pi$  s'écrit comme le produit des distributions  $(\pi_i)_i$  des différentes files considérées en isolation (cf. (40)).

Similairement, sous condition de stabilité, les réseaux de Kelly de files  $M/M/1$  possèdent une distribution stationnaire de type “forme produit” que l’on peut expliciter.

D’un point de vue probabiliste, la forme produit signifie qu’à un instant donné, les nombres de clients dans chaque file sont des v.a. indépendantes. Ce qui est assez paradoxal si on pense à la façon dont évolue le réseau avec reroutage des clients entre les files.

Ce résultat est la pierre angulaire et le diamant incrusté de vertu de la théorie des files d’attente Markoviennes.

#### *Réseaux 0-automatiques.*

Supposons maintenant que les files d’attente sont 0-automatiques. La file  $i$  est de type  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, r_i, \lambda_i, \mu_i)$ . Les couples  $(X_i, \Sigma_i)$  peuvent être tous différents et en particulier chaque file possède son propre ensemble de types de clients.

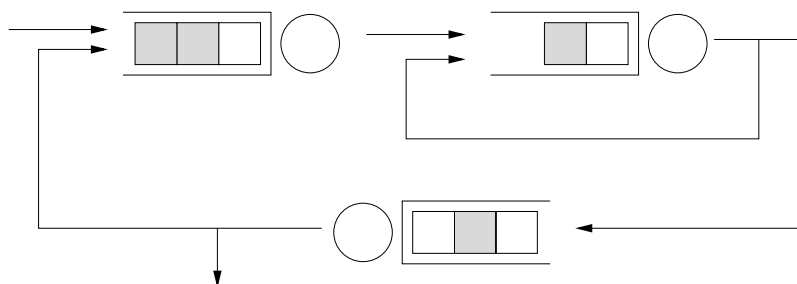


Figure 18: Un réseau à la Jackson de files 0-automatiques.

Par rapport aux descriptions données ci-dessus, il faut préciser certains points pour complètement définir les réseaux à la Jackson et à la Kelly dans le cadre 0-automatique.

- *Réseau à la Jackson.* Les types des clients ne sont pas préservés par le passage de file en file (de fait, l’ensemble des types possibles,  $\Sigma_i$ , varie de file en file). À son arrivée en file  $i$ , le client choisit son type suivant la probabilité  $\nu_i$ , qu’il vienne de l’extérieur ou d’une autre file  $j$ .

- *Réseau à la Kelly.* Comme pour le réseau de Jackson, le type du client varie de file en file. Par contre, la route du client est inchangée tout au long de sa traversée du réseau (en plus de la route, le client garde en mémoire sa position courante le long de la route). Lorsque deux clients de types  $a$  et  $b$  fusionnent dans un buffer pour donner un client de type  $c$ , alors le client  $c$  choisit comme route celle de  $a$  avec probabilité  $1/2$  et celle de  $b$  avec probabilité  $1/2$ .

Proposons une description un peu informelle des résultats pour un réseau à la Jackson de files 0-automatiques. Les notations sont celles décrites

précédemment.

On associe au réseau deux niveaux d' "équations de trafic" : (i) les *Équations de Trafic Tordues* de chaque file prise individuellement (cf. définition 4.3); (ii) les *Équations de Trafic Réseau*. Ces dernières, qui généralisent (49), sont définies comme suit :

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \sum_j \mu_j \tilde{\rho}_j p_{ji}, \quad (51)$$

où  $(\tilde{\rho}_i, \tilde{r}_i)$  est une solution des ETT associées à  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{\lambda}_i, \mu_i)$ .

L'interprétation de (51) est la suivante :  $\tilde{\lambda}_i$  est le taux d'arrivées "total" dans la file  $i$  et se compose du taux d'arrivées extérieures  $\lambda_i$  et des taux d'arrivées de clients en file  $i$  en provenance des autres files.

La subtilité dans (51) vient de ce que les équations sont définies de façon complètement implicite :  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  est une fonction de  $(\tilde{\rho}_i)_i$  (via (51)) et  $\tilde{\rho}_i$  est lui même une fonction de  $\tilde{\lambda}_i$  (via les ETT).

**Conjecture 4.6.** *Considérons le même modèle qu'en théorème 4.4, à l'exception du fait que  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  n'est pas fixé. Pour tout  $\lambda$ , il existe une unique solution  $(\rho, r)$  dans  $\mathbb{R}_+^* \times \{x \in \mathbb{R}_+^\Sigma \mid \sum_i x(i) = 1\}$  des ETT correspondant à  $\lambda$ . Posons  $\rho(\lambda) = \rho$ . Alors  $\rho(\lambda)$  est une fonction continue et strictement croissante de  $\lambda$ .*

Cette conjecture est raisonnable. En particulier, elle est vérifiée pour tous les exemples que l'on a pu traiter explicitement et entièrement.

**Lemme 4.7.** *Supposons que la Conjecture 4.6 est vérifiée. Alors il existe une solution aux Équations de Trafic Réseau (51).*

On peut maintenant énoncer le résultat principal. Qui dit en substance ceci : sous condition de stabilité, la distribution stationnaire possède une "double forme produit" : (i) par rapport au contenu du buffer pour chaque file (comme en (48)); (ii) par rapport aux différentes files.

**Théorème 4.8.** *Considérons un réseau à la Jackson de  $N$  files 0-automatiques  $((X_i, \Sigma_i, \nu_i, \lambda_i, \mu_i)_i, P)$ . Soit  $\hat{\gamma}_i$  la vitesse de fuite de la marche aléatoire  $(X_i, \nu_i)$ . Considérons les Équations de Trafic Réseau (51). Soit  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  une solution de (51). Soit  $(\tilde{\rho}_i, \tilde{r}_i)$  une solution des ETT associées à  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{\lambda}_i, \mu_i)$ .*

*Considérons maintenant le réseau à la Jackson de  $N$  files  $((X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{r}_i, \lambda_i, \mu_i)_i, P)$  où l'on a spécifié les conditions aux frontières  $(\tilde{r}_i)_i$ . Soit  $M = (M^1(t), \dots, M^N(t))_t$  le processus Markovien de saut associé au réseau (où  $(M^i(t))_t$  est le processus de contenu du buffer en file  $i$ ). Alors on a les équivalences suivantes :*

$$[ M \text{ est ergodique } ] \iff [ \forall i, \tilde{\rho}_i < 1 ] \iff [ \forall i, \tilde{\lambda}_i \hat{\gamma}_i < \mu_i ] .$$

Supposons que  $\tilde{\lambda}_i \hat{\gamma}_i < \mu_i$ , pour tout  $i$ . Alors la distribution stationnaire du processus  $M$  est donnée par :

$$\forall u = (u^i)_i, u^i \in L(X_i, \Sigma_i), \quad \pi(u) = \prod_i \pi_{\tilde{\rho}_i, \tilde{\tau}_i}^i(u^i), \quad (52)$$

où  $\pi_{\tilde{\rho}_i, \tilde{\tau}_i}^i(u^i)$  a la forme donnée en (48).

Ce résultat généralise le résultat de forme produit des réseaux classiques, cf. (50).

## Remerciements

Ce support de cours est un extrait remanié de deux chapitres de mon mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, soutenu en novembre 2006 [22]. Pour cette HDR, et par ricochet pour ce support, j'ai profité de nombreux encouragements, conseils, corrections. Je remercie tout particulièrement :

- les rapporteurs : Christian Choffrut, Volker Diekert, Philippe Flajolet et Yves Guivarc'h;
- les membres du jury : François Baccelli, Mireille Bousquet-Mélou, Vadim Kaimanovich et Jean-François Le Gall;
- les relecteurs bénévoles : Mathilde Bouvel, Ines Klimann et Glenn Merlet.

Enfin, last but not least, un grand merci à Thu-Ha Dao-Thi et Frédéric Mathéus, mes co-auteurs pour les articles correspondant à ce cours.

## References

- [1] F. Baccelli and P. Brémaud. *Elements of Queueing Theory*. Number 26 in Applications of Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 1994.
- [2] F. Baccelli and S. Foss. On the saturation rule for the stability of queues. *J. Appl. Probab.*, 32(2):494–507, 1995.
- [3] P. Brémaud. *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*, volume 31 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [4] J.W. Cohen. *The single server queue*. North-Holland, Amsterdam, 1982. 2nd edition.
- [5] T.-H. Dao-Thi and J. Mairesse. Zero-automatic queues. In *Formal Techniques for Computer Systems and Business Processes*, volume 3670 of *LNCS*, pages 64–78. Springer-Verlag, 2005.
- [6] T.-H. Dao-Thi and J. Mairesse. Zero-automatic networks. In *Proceedings of Valuetools, Pisa, Italy*. ACM, 2006. Best Student Paper Award.
- [7] Y. Derriennic. Quelques applications du théorème ergodique sous-additif. *Astérisque*, 74:183–201, 1980.
- [8] V. Diekert and G. Rosenberg, editors. *The Book of Traces*. World Scientific Publ., 1995.
- [9] E. Dynkin and M. Maljutov. Random walk on groups with a finite number of generators. *Sov. Math. Dokl.*, 2:399–402, 1961.
- [10] H. Furstenberg. Noncommuting random products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:377–428, 1963.
- [11] H. Furstenberg. Random walks and discrete subgroups of Lie groups. In *Advances in Probability and Related Topics, Vol. 1*, pages 1–63. Dekker, New York, 1971.
- [12] E. Gelenbe. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *J. Appl. Probab.*, 28(3), 1991.
- [13] Y. Guivarc’h. Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d’une marche aléatoire. *Astérisque*, 74:47–98, 1980.
- [14] R. Haring-Smith. Groups and simple languages. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 279(1):337–356, 1983.
- [15] V. Kaimanovich. The Poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Ann. of Math. (2)*, 152(3):659–692, 2000.

- 
- [16] F. Kelly. *Reversibility and Stochastic Networks*. Wiley, New-York, 1979.
- [17] S. Lalley. Finite range random walk on free groups and homogeneous trees. *Ann. Probab.*, 21(4):2087–2130, 1993.
- [18] F. Ledrappier. Some asymptotic properties of random walks on free groups. In J. Taylor, editor, *Topics in probability and Lie groups: boundary theory*, number 28 in CRM Proc. Lect. Notes, pages 117–152. American Mathematical Society, 2001.
- [19] J. Mairesse. Random walks on groups and monoids with a Markovian harmonic measure. *Electron. J. Probab.*, 10:1417–1441, 2005.
- [20] J. Mairesse. Zero-automaticity for groups and monoids. <http://www.liafa.jussieu.fr/~mairesse/Article/>, 2005.
- [21] J. Mairesse. Markovian sources and random walks on virtually free groups. <http://www.liafa.jussieu.fr/~mairesse/Article/>, 2007.
- [22] J. Mairesse. *Tetris, traces et tresses. Modélisation, combinatoire et performances*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 7, Paris, 2006.
- [23] J. Mairesse and F. Mathéus. Growth series for Artin groups of dihedral type. *Internat. J. Algebra Comput.*, 16(6):1087–1107, 2006.
- [24] J. Mairesse and F. Mathéus. Random walks on free products of cyclic groups. *J. Lond. Math. Soc.*, 2007. To appear. Also arXiv:math.PR/0509211.
- [25] J. Mairesse and F. Mathéus. Randomly growing braid on three strands and the manta ray. *Ann. Appl. Probab.*, 2007. To appear. Appendix: arXiv:math.PR/0512391.
- [26] T. Nagnibeda and W. Woess. Random walks on trees with finitely many cone types. *J. Theoret. Probab.*, 15(2):383–422, 2002.
- [27] P. Robert. *Stochastic networks and queues*, volume 52 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [28] S. Sawyer and T. Steger. The rate of escape for anisotropic random walks in a tree. *Probab. Theory Related Fields*, 76(2):207–230, 1987.
- [29] R. Serfozo. *Introduction to stochastic networks*, volume 44 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [30] J. Stallings. A remark about the description of free products of groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 62:129–134, 1966.



- [31] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon. *Analysis and geometry on groups*, volume 100 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [32] A. Vershik. Dynamic theory of growth in groups: Entropy, boundaries, examples. *Russ. Math. Surv.*, 55(4):667–733, 2000. Translation from *Usp. Mat. Nauk* 55(4):59-128, 2000.
- [33] G.X. Viennot. Heaps of pieces, I: Basic definitions and combinatorial lemmas. In Labelle and Leroux, editors, *Combinatoire Énumérative*, number 1234 in *Lect. Notes in Math.*, pages 321–350. Springer, 1986.
- [34] W. Woess. A description of the Martin boundary for nearest neighbour random walks on free products. In *Probability measures on groups VIII*, volume 1210 of *Lecture Notes in Math.*, pages 203–215. Springer, Berlin, 1986.
- [35] W. Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*. Number 138 in *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 2000.