attribution connexe à un processus ponctuel de poisson dans R^2

M. Krikun (IECN, Nancy)

ALEA2007 -- CIRM

Plan:

- 1 processus aléatoire
- 1 algorithme + un probléme
- 1 arbre

  + un théorème puissant → solution du

(pas de aléa discret)

I

- soit **X** un processus ponctuel de Poisson dans $\mathbf{R}^2$

  Comment peut-on partager le plan entre les sites de X ? (centres)

- formellement:

  trouver une fonction d'attribution

  $$\Psi_X: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{X} \cup \{\text{“libre”}\},$$

  invariante par des translations: $\Psi_{\tau X} = \tau \Psi_X \tau^{-1}$.

- ex.: Ψ minimise $|z - \Psi(z)|$ pour chaque z

  $\Rightarrow$ diagramme de Voronoï (algorithme?)

I

- Voronoï + appétits ⇒ alg. de Gale-Shapley pour le...

  STABLE MARRIAGE OF POISSON AND LEBESGUE
  (Hoffman, Holroyd, Peres '06)

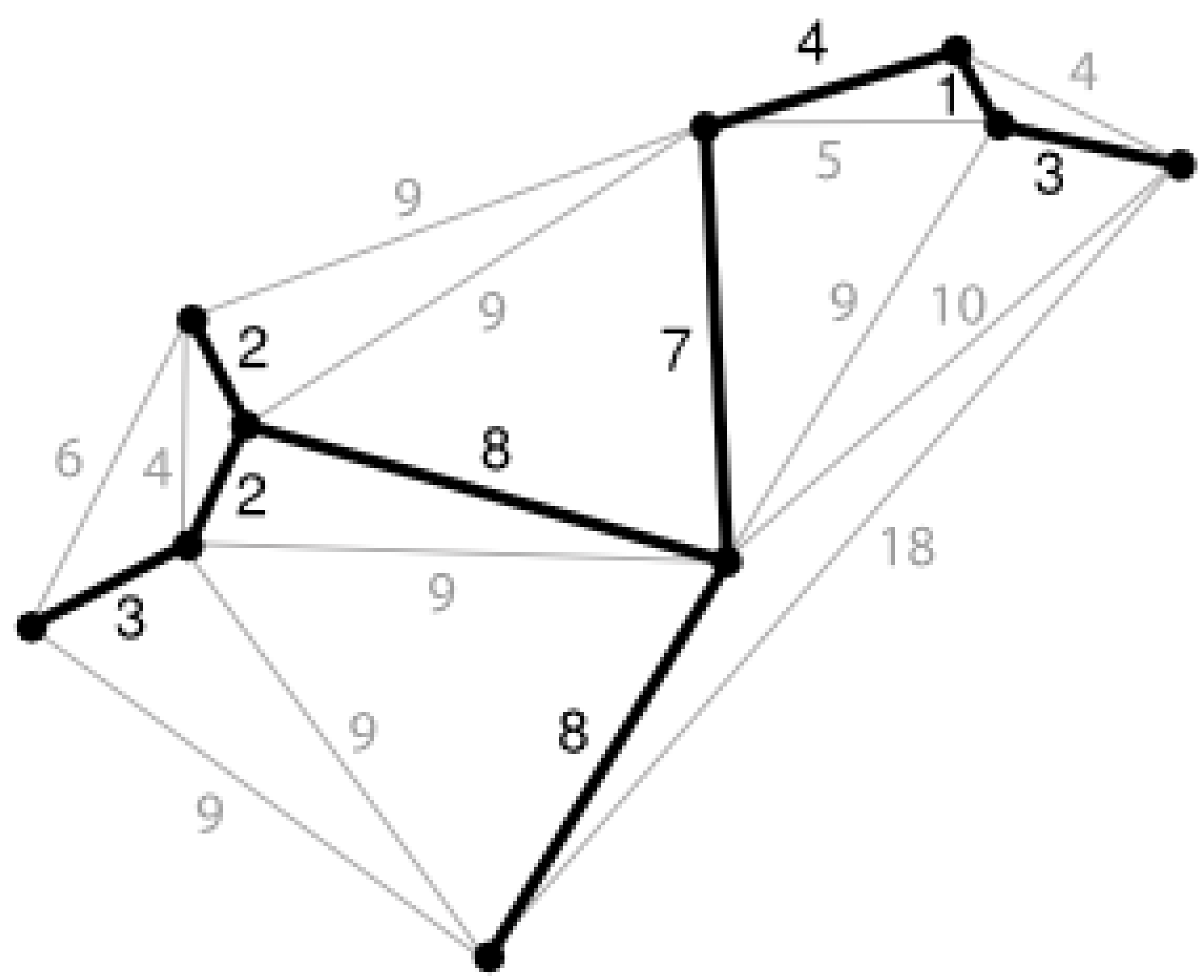
- quelques résultats:
  $\alpha<1$: il reste l'espace libre (=> chaque centre est satisfait)
  $\alpha=1$: tout est occupé, chaque centre est satisfait,
  $\alpha>1$: certains centres ne sont pas satisfaits. (=> pas de espace libre)

- territoires $\Psi^{-1}(x)$ sont bornées p.s. (mais pas connexes).

question: pour $\alpha=1$ construire une attribution avec des territoires connexes

II

- MST(G): arbre couvrant minimal du graphe fini G

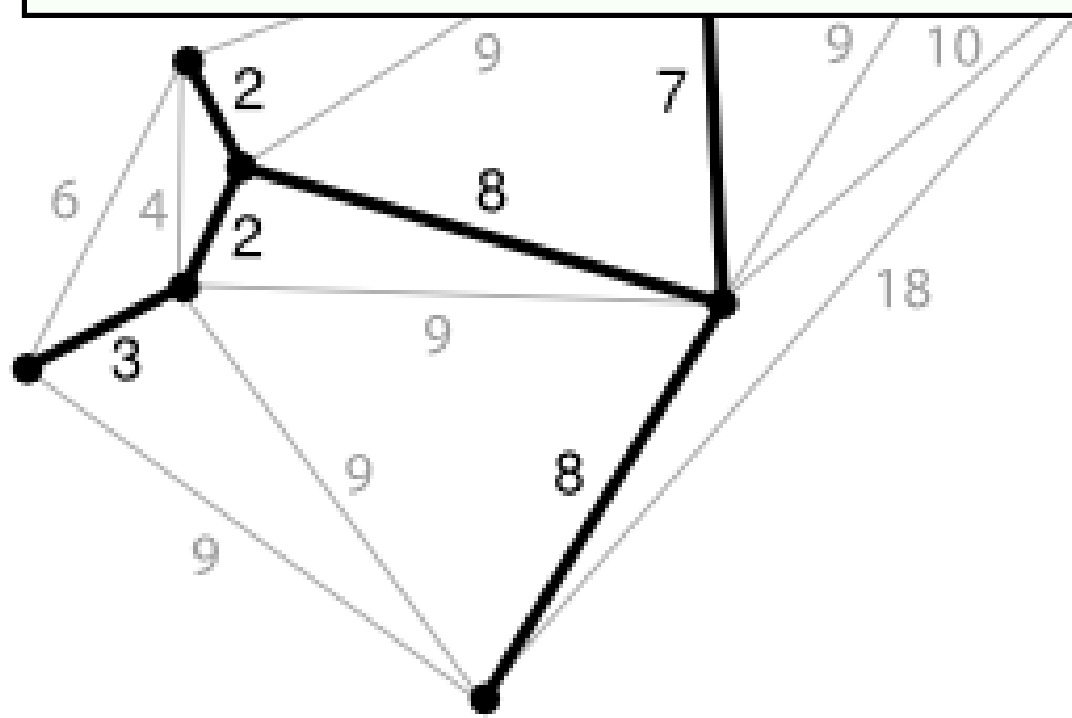


II

- MST(G): arbre couvrant minimal du graphe fini G

Propriété: **e** est l'arête la plus longue dans certain cycle γ de **G**:

$$\Rightarrow \ \mathbf{e} \notin \mathrm{MST}(G)$$



II

- MST(G): arbre couvrant minimal du graphe fini G

Propriété: **e** est l'arête la plus longue dans certain cycle γ de **G**:

$$\Rightarrow \ \mathbf{e} \notin MST(G)$$

Définition:

$$MSF(G) = \{ e \mid \begin{matrix} \text{il n'existe pas de cycle } \boldsymbol{\gamma} \text{ t.q.} \\ \mathbf{e} \text{ est l'arête la plus longue du } \gamma \end{matrix} \}$$

(bon pour un graphe infini, mais en général c'est un forêt)

II

- MST(G): arbre couvrant minimal du graphe fini G

Propriété: **e** est l'arête la plus longue dans certain cycle γ de **G**:

$$\Rightarrow \ \mathbf{e} \notin \mathrm{MST}(G)$$

Définition:

$$\mathrm{MSF}(G) = \left\{ e \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{il n'existe pas de cycle } \boldsymbol{\gamma} \text{ t.q.} \\ \mathbf{e} \text{ est l'arête la plus longue du } \gamma \end{array} \right\}$$

Théorème **[Alexander '95]**:

X -- processus ponctuel de Poisson dans R^2

$\Rightarrow$ MSF(X) est un **arbre** avec un seul bout

II

- MST(G): arbre couvrant minimal du graphe fini G

Propriété: **e** est l'arête la plus longue dans certain cycle γ de ***G***:

$\Rightarrow$ **e** $\notin$ MST(G)

Définition:

$$\mathrm{MSF}(G) = \{\, e \mid \begin{array}{c}\text{il n'existe pas de cycle } \gamma \text{ t.q.} \\ e \text{ est l'arête la plus longue du } \gamma\end{array} \}$$

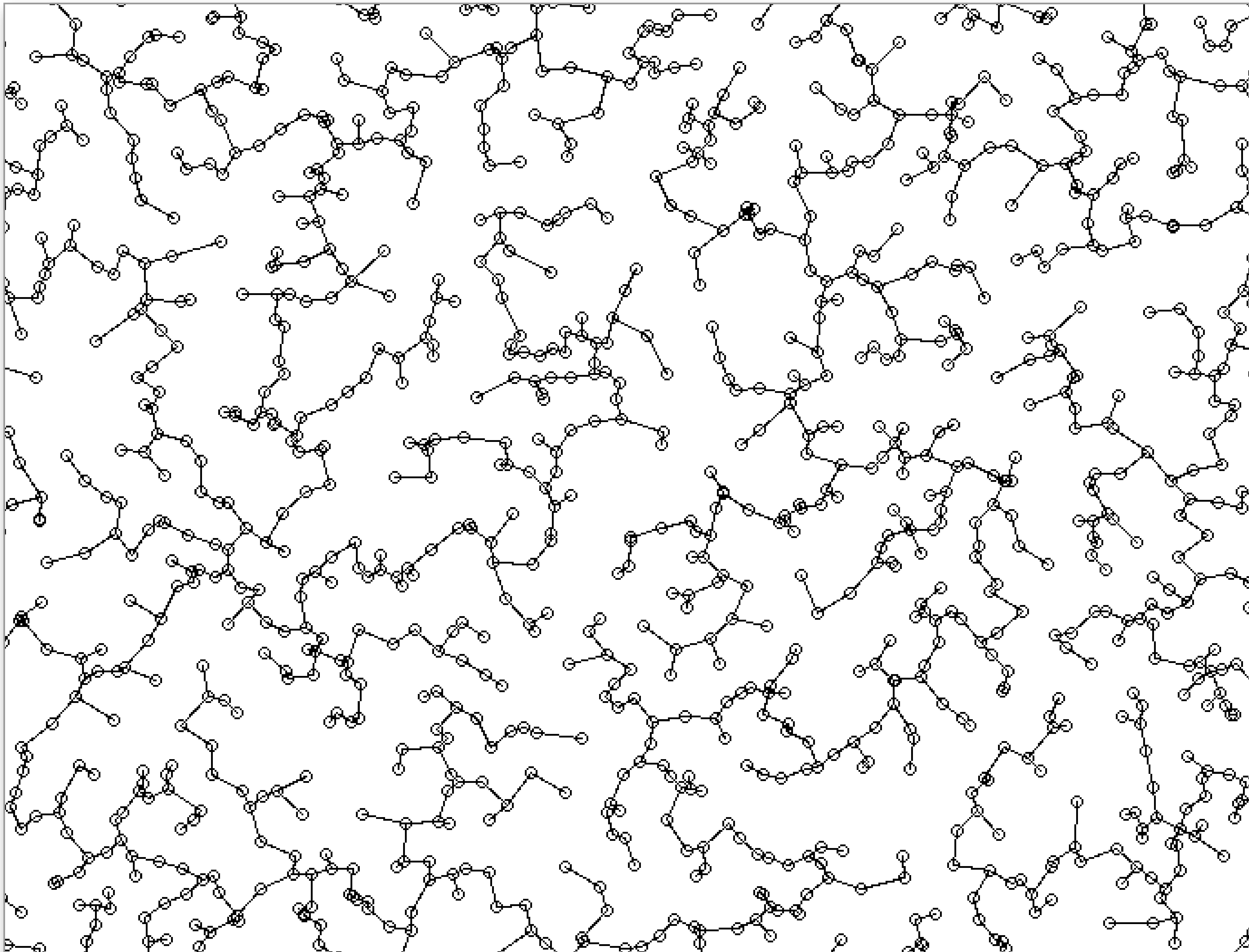
Théorème **[Alexander '95]**:

X -- processus ponctuel de Poisson dans R^2

$\Rightarrow$ MSF(X) est un **arbre** avec un seul bout

$\Rightarrow$ $R^2 \setminus \mathrm{MST}(X)$ est simplement connexe

exemple:

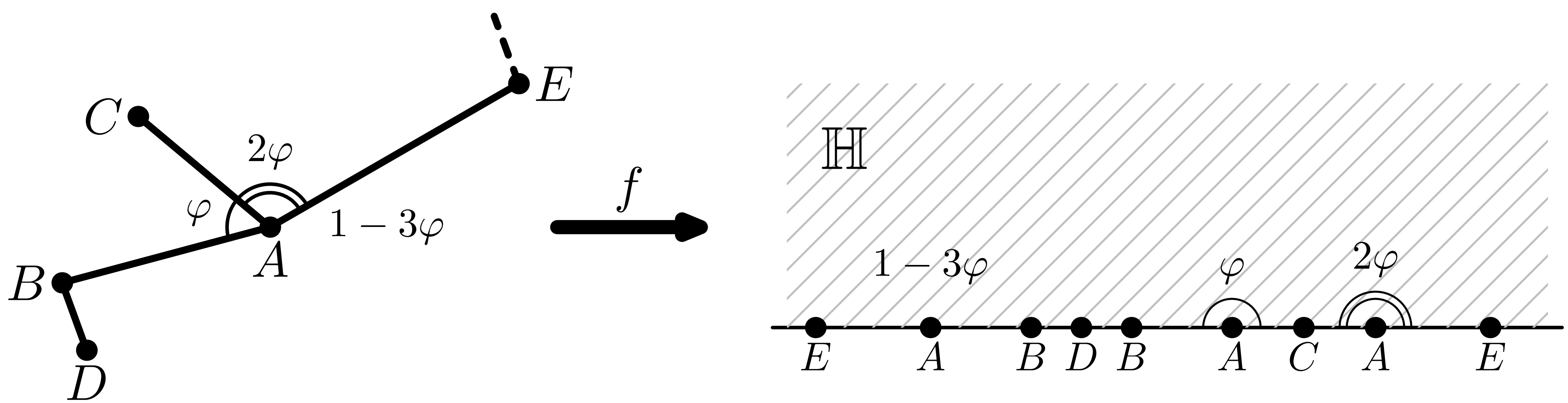


MST et Riemann

- D := R^2 \ MST(X) simplement connexe

  ⇒ il existe une application **f**: D→H (H:= {z: Im(z)>0}),

  t.q. **f** est **conforme**, et, en plus, **f(∞) = ∞**



- remarque: éléments de X ont plusieurs images sous f,
  il faut partager des appétits

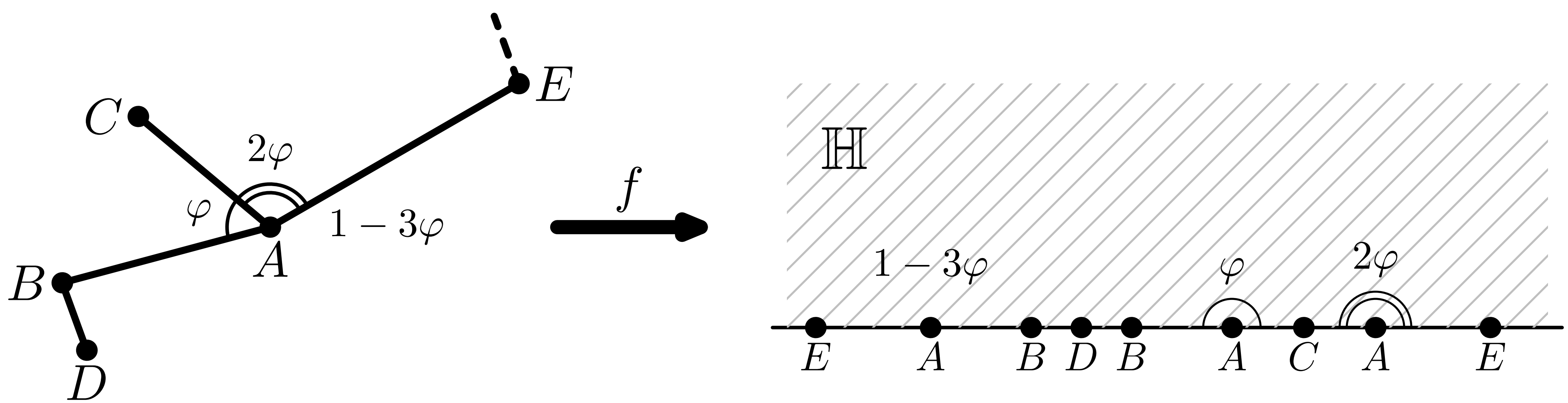
- après on pourra utiliser Gale-Shapley dans **H**

MST et Riemann

- D := R^2 \ MST(X) simplement connexe

  ⇒ il existe une application **f**: D→H (H:= {z: Im(z)>0}),

  t.q. **f** est **conforme**, et, en plus, **f(∞) = ∞**



- remarque: éléments de X ont plusieurs ~~images sous f~~ pre-images sous $\bar{f}^{-1}$,

  il faut partager des appétits

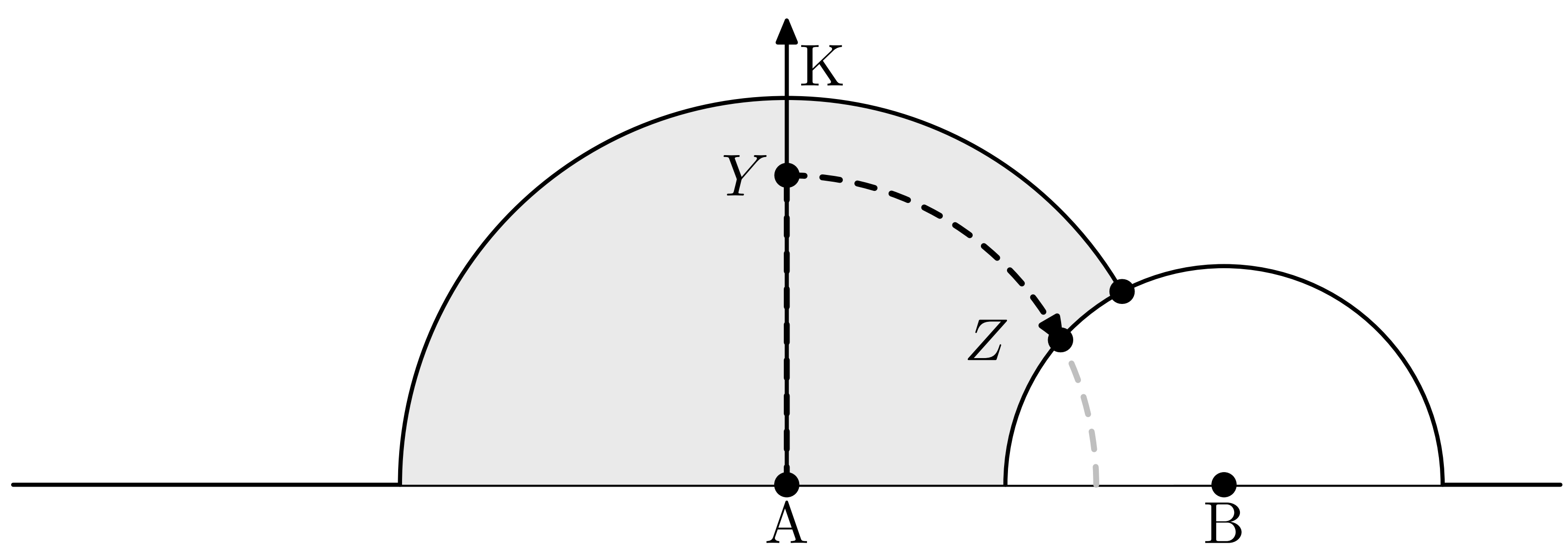
- après on pourra utiliser Gale-Shapley dans **H**

attribution dans **H**

- Comme $f(\infty) = \infty$, $f(X)$ est localement fini, on peut utiliser Gale-Shapley dans H (avec une mesure Leb · f) pour construire une attribution Ψ',

$$\Psi' : H \to f(X)$$

- les territoires de Ψ' sont connexes:



- f est unique à un homéomorphisme affine de H près,
  => $\Psi := f^{-1}\, \Psi'\, f$ ne dépend pas du choix de f.

attribution dans R^2

- L'attribution $\Psi := f^{-1}\, \Psi'\, f$

  car **X** est ergodique =>

  P(l'origine est occupée) = E (territoire typique)

  P(il reste l'espace libre) = 1|0,

  par construction de G-S,

  {il reste l'espace libre} => {chaque centre est satisfait}

- Conclusion: l'attribution Ψ

  - a des territoires connexes,
  - est invariante par isométries,
  - tout les centres sont satisfaits p.s

- simulation?